

01, 02 e 03 de
dezembro de 2021

Evento Online



Formação de professores
para o ensino de Matemática
em tempos de pandemia

FECLESC
UECE

ARGUMENTAÇÃO E DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA EM GEOMETRIA: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Gabrielle Andrade Pereira¹
Francisco Edison Eugenio de Sousa²
Ulisses Lima Parente³

RESUMO: Considerando a importância dos processos de argumentação e demonstração para a construção do conhecimento matemático dos estudantes, bem como ser o livro o material mais utilizado por alunos e professores, decidimos elaborar esta pesquisa com o objetivo de descrever os processos de demonstrações matemáticas apresentadas nos conteúdos de *Semelhança de triângulos* e *Triângulo retângulo*, nas coleções de Matemática aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018. De caráter qualitativo e em forma de estudo de caso, inicialmente estudamos a temática, além de estudar possíveis demonstrações para os tópicos selecionados. Na análise, percebemos que a maioria das coleções não trazem as demonstrações como essenciais para o desenvolvimento lógico-dedutivo dos estudantes e que há coleções que sequer as abordam nesses conteúdos. Acreditamos que isso só acontecerá quando todos os envolvidos na escrita, escolha e utilização dos livros, compreenderem a importância desses processos no ensino e na aprendizagem da Matemática escolar.

Palavras-chave: Demonstração; Geometria; Estudo de Caso; Livro Didático; Ensino Médio.

INTRODUÇÃO

Os processos de argumentação e demonstração são etapas essenciais no desenvolvimento do conhecimento matemático, contribuindo tanto para a vida acadêmica dos estudantes, quanto para as relações pessoais, seja no meio social, político ou econômico. Conhecimentos lógico-dedutivos preparam os alunos para experimentar cada nova etapa de aprendizado com embasamento e as argumentações incentivadas em sala de aula, os levam a argumentar e questionar, também, problemas de qualquer outra natureza, contribuindo para a formação cidadã desses estudantes.

O objetivo deste trabalho é descrever os processos de demonstrações matemáticas apresentadas nos conteúdos de *Semelhança de triângulos* e *Triângulo retângulo*, nas coleções de Matemática aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018. Em geral, investigou-se a abordagem e a consistência desses conteúdos de Geometria, através da argumentação lógico-dedutiva. A pergunta central desta pesquisa é: Como são trabalhadas as demonstrações matemáticas em conteúdos de Geometria nos livros didáticos do Ensino Médio?

O interesse por essa pesquisa surgiu após ouvir várias críticas no ambiente escolar, enquanto atuava como bolsista e professora da Educação Básica e, também, ao participar de palestras na Universidade, relacionadas à Matemática escolar. Essas críticas nos levaram a fazer questionamentos que alicerçaram o desenvolvimento da problemática apresentada.

Observamos que os referenciais curriculares mostram a importância de se estudar, não somente, mas principalmente na Geometria, as demonstrações matemáticas, a fim de proporcionar aos estudantes o contato com os conhecimentos científicos, adaptados à

¹ Aluna do mestrado em Educação da UFC, Universidade Federal do Ceará, ga-andrade2013.p@outlook.com

² Professor da FECLESC/UECE, Universidade Estadual do Ceará, francisco.eugenio@uece.br

³ Professor da FECLESC/UECE, Universidade Estadual do Ceará, ulisseslimaparente@gmail.com

01, 02 e 03 de
dezembro de 2021



Formação de professores
para o ensino de Matemática
em tempos de pandemia

Evento Online

Matemática escolar. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio destacam que os tópicos de Geometria são “um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas” (BRASIL, 2006, p. 75).

Tendo em vista a quantidade de conteúdos de Geometria, focamos nos conteúdos de *Semelhança de Triângulos*, nos quais faremos a análise do Teorema de Tales, Teorema Fundamental da Semelhança e dos critérios de semelhança; e *Triângulo Retângulo*, focando na análise das relações métricas e do Teorema de Pitágoras. Esses, são conteúdos que, segundo o PNL D/2018 (BRASIL, 2017) foram estudados no ensino fundamental e devem ser consolidados no Ensino Médio.

A escolha pela análise dos livros didáticos se justifica pelo fato do livro didático ser o principal e, na maioria das vezes, o único material de estudo para professores e alunos da Educação Básica. Pereira e Melo (2007), citados por Martins (2012, p. 16), apontam que “uma parcela significativa dos docentes utiliza na preparação de suas aulas, única e exclusivamente o livro didático adotado na escola, alguns até limitando o conteúdo abordado e a metodologia empregada ao proposto no livro”. Assim, vemos que o livro é material essencial na construção do saber matemático dos estudantes, o que nos faz querer que tenha todas as abordagens necessárias para que ocorram os processos de ensino e aprendizagem da maneira esperada.

Um ponto a ser observado é a linguagem utilizada nos livros, pois é ela que nos leva a compreensão correta da Matemática e é imprescindível que essa linguagem, mesmo simples, conserve sua essência científica, pois, como afirma Queiroz (2016, p. 10):

É importante pontuar que a linguagem que fundamenta [...] os campos da matemática é indispensável à compreensão de uma matemática mais sofisticada, estudada nos meios científicos e educacionais. Cabe ao livro didático disponibilizar o desenvolvimento teórico adequado ao nível de ensino mediante a apresentação das propriedades com as respectivas justificativas e demonstrações.

Por fim, a escolha pelos livros do Ensino Médio se deu pelo fato de esperarmos que os alunos dos últimos anos da Educação Básica possuam maturidade para o aprofundamento dos conceitos e compreensão das demonstrações matemáticas. Porém, também consideramos a importância de incentivar o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes desde as séries iniciais, dando oportunidade para que eles cresçam e desenvolvam seus argumentos e indagações.

METODOLOGIA

Esta pesquisa é um recorte de uma monografia desenvolvida pelos autores, na qual fez-se um estudo das coleções de livros didáticos de Matemática. Aqui, revisitamos o trabalho buscando divulgar os principais achados, tornando-os acessíveis aos responsáveis pelos livros didáticos utilizados nas escolas. De caráter qualitativo, pois de acordo com Gerhardt e Silveira (2009) a pesquisa qualitativa centra-se na explicação e compreensão, atentando-se a aspectos que não podem ser quantificados. Além disso, foi desenvolvida por meio de estudo de caso, na qual o “objeto é uma unidade que se analisa profundamente. Visa ao exame detalhado de um ambiente, de um simples sujeito ou de uma situação em particular” (GODOY; 1995, p. 25). Neste caso, o objeto analisado foram as Coleções de Matemática aprovadas pelo PNL D/2018.

Inicialmente, fizemos a revisão bibliográfica, buscando firmar as bases teóricas da pesquisa. Estudamos, ainda, os conteúdos de Geometria selecionados para a análise, com o apoio do livro de Geometria Plana de Dolce e Pompeo (2005). E, por fim, descrevemos a análise dos livros didáticos, apresentando os principais dados, embasados nas teorias estudadas.

Nesta análise, a técnica utilizada foi a análise de conteúdo, mais especificamente, a modalidade de análise temática, que consiste em três fases: *pré-análise*, na qual organiza-se o

01, 02 e 03 de
dezembro de 2021



Formação de professores
para o ensino de Matemática
em tempos de pandemia

Evento Online

material que será analisado; *exploração do material*, momento em que se codifica o material e se estabelece categorias que classificam esses dados e, por fim, o *tratamento dos resultados*, fase em que se trabalham os dados brutos, destacando as informações obtidas (MINAYO, 2007 *apud* GERHARDT e SILVEIRA, 2009). As categorias de análise estabelecidas foram: *abordagem/linguagem* e *aproximação dos estudantes da formalização matemática*, ambas descritas no início do tópico de análise.

ABORDAGENS TEÓRICAS EM TORNO DA PESQUISA

Professor e pesquisador, Lima (1999) assegura que, para que o ensino da Matemática seja significativo, precisamos considerar três pontos fundamentais nesse percurso: *conceitualização*, quando serão introduzidas as formas corretas de enunciar conceitos e definições matemáticas, a prática do raciocínio dedutivo e a conscientização de que conclusões sempre são resultantes de hipóteses que se admitem; *manipulação*, quando os estudantes entram em contato com a utilização de equações, fórmulas, construções geométricas, entre outros; e *aplicações*, quando os problemas matemáticos são relacionados com o cotidiano.

Referenciando a prática de provas em sala de aula, Balacheff (1987), citado por Martins (2012), afirma que ela precisa encontrar seu lugar desde as primeiras classes, aceitando que sejam reconhecidas como provas outras coisas que não são demonstrações no sentido estrito, ou seja, que seja levada em consideração a natureza da racionalidade dos alunos e as condições de sua evolução, mas também encarregar-se da análise didática dos critérios aceitos de prova, que podem evoluir no decorrer da escolaridade.

Além disso, os professores precisam saber que é importante para a formação geral no Ensino Médio, que os estudantes tenham um contato, não exaustivo, mas significativo, com o método axiomático das validações matemáticas. Essa seria uma boa maneira de favorecer, em sala de aula, o desenvolvimento do que é usualmente chamada de “argumentação lógica” (BRASIL, 2017, p. 37). Alguns especialistas julgam ser preciso diferenciar os pontos: argumentação, explicação, prova e demonstração. Assim, de acordo com Balacheff, temos os seguintes significados:

Argumentação: qualquer discurso destinado a obter o consentimento do interlocutor sobre uma afirmação; *Explicação*: uma argumentação em que o consentimento se busca a partir da explicitação da racionalidade da afirmação, e não através de outros tipos de argumentação; As *provas* são explicações em que a explicitação da veracidade de uma asserção se realiza sob regras ou normas acordadas por uma comunidade determinada em um momento dado. Na comunidade Matemática, essas normas estabelecem a apresentação de uma sucessão de enunciados, cada um dos quais é uma definição, um axioma, um teorema prévio ou um elemento derivado mediante regras pré-estabelecidas de enunciados que lhe precedem. Nesse caso as provas recebem o nome de *demonstração* (BALACHEFF, 1987 *apud* MONTORO, 2005 *apud* MARTINS, 2012, p. 33, grifo do autor).

Ainda segundo Balacheff (1988 *apud* GRAVINA, 2001) as provas produzidas por alunos podem ser divididas em duas categorias: *provas pragmáticas* e *provas intelectuais*. As *pragmáticas* se apoiam em conhecimentos práticos, fazendo o uso de desenhos e figuras; as *intelectuais* baseiam-se em propriedades e relações entre essas propriedades, caracterizando-se pela linguagem matemática. O autor conclui que o nível de experiência mental marca a transição entre a *prova pragmática* e a *prova intelectual*.

No estudo dos conteúdos *Semelhança de triângulos* e *Triângulo retângulo*, identificamos demonstrações que podem ser abordadas nos livros do Ensino Médio, o que serviu como base para a análise desses conteúdos. Por exemplo, Dolce e Pompeo (2005) apresentam a seguinte demonstração para o recíproco do Teorema de Pitágoras: “Se num triângulo o quadrado de um

01, 02 e 03 de
dezembro de 2021Formação de professores
para o ensino de Matemática
em tempos de pandemia

Evento Online

lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.” Ou seja, se ABC é um triângulo tal que $a^2 = b^2 + c^2$, então ABC é retângulo em \hat{A} .

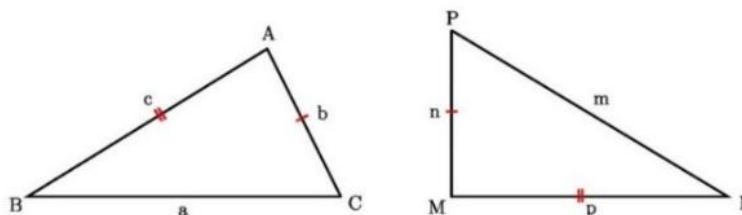


Figura 1: Referente ao recíproco do teorema de Pitágoras (Os autores, 2021)

Com efeito, construindo o triângulo MNP, retângulo em \hat{M} e cujos catetos MN e MP sejam congruentes a AB e AC, respectivamente, temos que: ΔMNP retângulo em $\hat{M} \Rightarrow m^2 = n^2 + p^2$. Mas, como $n = b$ e $p = c$, temos que $m^2 = b^2 + c^2$. Daí, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$. Então, pelo caso de congruência - LLL (lado-lado-lado), $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ e, como ΔMNP é retângulo em \hat{M} , o ΔABC é retângulo em \hat{A} . (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 224-225).

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Inicialmente, selecionamos os livros das coleções que abordavam os conteúdos e vimos que em todas elas, esses conteúdos estavam presentes no primeiro volume. Isso se justifica pelo fato de já terem sido estudados no Ensino Fundamental e, além disso, serão utilizados como base para o estudo de Trigonometria. Utilizamos os símbolos L1, L2, L3, ..., L8 para representar as coleções listadas a seguir, com o intuito de facilitar a discussão dos dados.

SÍMBOLO	AUTORES	TÍTULO	INFORMAÇÕES
L1	DANTE, L. R.	Matemática: Contexto e Aplicações.	3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
L2	CHAVANTE, E. PRESTES, D.	Quadrante: Matemática.	São Paulo: Edições SM, 2016.
L3	DEGENSZAJN, D. IEZZI, G. ALMEIDA, N. de. DOLCE, O. PÉRIGO, R.	Matemática: Ciência e Aplicações.	9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2017.
L4	SMOLE, K. S. DINIZ, M. I.	Matemática: para compreender o mundo.	São Paulo: Editora Saraiva, 2016.
L5	BALESTRI, R.	Matemática: Interação e Tecnologia.	2. ed. São Paulo: Leya, 2016.
L6	SOUZA, J. GARCIA, J.	#Contato Matemática.	São Paulo: FTD, 2016.
L7	PAIVA, M.	Matemática: Paiva.	3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.
L8	LEONARDO, F. M. de.	Conexões com a Matemática.	3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

Quadro 1: Coleções PNLD/2018 (Os autores, 2021)

Como já mencionado, definimos as seguintes categorias de análise: *abordagem/linguagem*, na qual vimos como são abordados os conteúdos, desde a introdução até a formalização, explorando argumentações, demonstrações e linguagem e *aproximação dos estudantes da formalização matemática*, na qual investigamos se os autores se preocupam em incentivar essa aproximação, ensinando a argumentar, conjecturar ou demonstrar resultados matemáticos. Dessa forma, descrevemos os aspectos observados⁴ em cada coleção a seguir.

⁴ A íntegra da análise pode ser consultada em Pereira (2018).

01, 02 e 03 de
dezembro de 2021

Evento Online



*Formação de professores
para o ensino de Matemática
em tempos de pandemia*

A coleção L1 apresenta linguagem simples e mesmo não tendo feito todas as demonstrações que julgamos importantes, exhibe provas pragmáticas e intelectuais, utilizando recursos como figuras e propriedades já apresentadas aos estudantes para demonstrar os fatos. Há algumas notas direcionadas aos estudantes com explicações mais detalhadas e outras os incentivam a pesquisar mais sobre o assunto, embora não traga notas incentivando o interesse dos estudantes por demonstrações ou fazendo questionamentos que os façam refletir.

A coleção L2 aborda pouco dos conteúdos que pretendíamos analisar e não apresenta, por exemplo, algumas das demonstrações que estudamos. Mas, ainda assim, apresenta provas intelectuais, utilizando propriedades já estudadas pelos alunos. A linguagem utilizada é simples, porém, sentimos que falta um pouco mais de incentivo para que os alunos se envolvam nas demonstrações, embora algumas notas tenham sido feitas para que eles pudessem se aproximar mais dos resultados obtidos.

A coleção L3 apresenta linguagem simples e baseia-se em argumentos lógicos e propriedades matemáticas já estudadas, trazendo conceitos com encadeamento lógico. Procura-se também diferenciar hipóteses de teses nas demonstrações. O livro contempla provas pragmáticas, utilizando figuras como apoio para as demonstrações, e provas intelectuais, baseadas em propriedades matemáticas e relações entre essas propriedades. Os autores também procuram envolver os alunos em suas explicações, lançando notas argumentativas, para que possam refletir acerca das explicações, propiciando o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes. Apresenta também, notas direcionadas aos professores com orientações de perguntas a serem feitas aos estudantes, além de sugestões de atividades.

A coleção L4 não apresenta demonstrações matemáticas como sendo um dos seus objetivos de ensino. Também notamos que a linguagem utilizada é extremamente simples, havendo mais preocupação em simplificar os conteúdos para fazer com que os estudantes compreendam o básico para conseguir resolver os exercícios propostos, sem procurar desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo. O livro acaba deixando de abordar pontos importantes do ensino de Matemática, como a conceituação, perdendo a oportunidade de incentivar a compreensão dos porquês de determinados resultados em Geometria, e tornam o conhecimento sistemático, dependente da memorização e da reprodução de exemplos dados.

A coleção L5 prioriza as aplicações da Matemática, pois está sempre tentando relacioná-la com nosso cotidiano, a fim de contextualizar os conteúdos. A linguagem utilizada é simples, mas apresenta algumas provas pragmáticas e provas intelectuais, em que utiliza o auxílio de figuras e propriedades já vistas pelos alunos, mostrando certo encadeamento lógico em sua construção. O livro não aborda todos os conteúdos que pretendíamos analisar, mas traz notas explicativas como suporte para o esclarecimento de algo que tenha ficado nas entrelinhas. Tenta, ainda, envolver os alunos nas demonstrações das relações métricas, mesmo que, no fim, deixando espaço para que eles possam praticar tais demonstrações, o que ajuda a desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes.

A coleção L6 apresenta apenas dois subtópicos dos conteúdos que pretendíamos analisar e há semelhança com as provas mostradas em L5. A linguagem utilizada é simples e objetiva. Percebemos pouca interação com os estudantes, pois os autores não apresentam qualquer tópico de discussão extra ou nota explicativa, direcionados aos alunos, mas apenas notas direcionadas ao professor com sugestões de atividades.

A coleção L7, apesar de trazer conceitos bem definidos, de forma objetiva e clara para os estudantes, só apresenta as demonstrações das relações métricas nos triângulos retângulos e um exemplo de demonstração para o Teorema de Pitágoras, como nota explicativa, fazendo o uso de provas pragmáticas e intelectuais. Apesar das notas explicativas sobre conceitos que talvez os estudantes não conheçam, percebemos que não busca aproximar os estudantes da linguagem formal, o que os ajudaria a argumentar, verificar e demonstrar fatos matemáticos.

01, 02 e 03 de
dezembro de 2021

Evento Online



*Formação de professores
para o ensino de Matemática
em tempos de pandemia*

A coleção L8 valoriza a conceituação matemática e, mesmo utilizando uma linguagem simples, apresenta conceitos com encadeamento lógico, fazendo a utilização de provas pragmáticas e intelectuais, nas quais utilizam propriedades já definidas, figuras e até mesmo *softwares* como ferramentas para propiciar o desenvolvimento do conhecimento lógico e argumentativo dos alunos. Também faz a distinção das notas apresentadas para alunos e professores, trazendo ferramentas essenciais para os sujeitos dos processos de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

Por fim, analisadas as coleções, temos embasamento suficiente para fazermos nossas considerações acerca dessas, de forma mais generalizada, procurando responder questionamentos feitos no início da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletindo sobre a importância do livro didático para o ensino e aprendizagem, decidimos realizar este trabalho, com o objetivo de descrever os processos de demonstrações matemáticas apresentadas nos conteúdos de *Semelhança de triângulos* e *Triângulo retângulo*, nas coleções de Matemática aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018. Em geral, investigamos a abordagem e a consistência dos conteúdos de Geometria através da argumentação lógico-dedutiva.

Nas coleções analisadas percebemos que a linguagem utilizada, em geral, é simples, o que facilita a compreensão do leitor, mas como a preocupação em simplificar se mostra extrema, pontos importantes como a conceituação (argumentações lógicas, teoremas, demonstrações, etc.) e até mesmo alguns tópicos dos conteúdos deixaram de ser explorados. Em geral, notamos uma maior valorização entre manipulação e aplicações matemáticas, tornando o conhecimento sistemático, fazendo com que os alunos observem e reproduzam cálculos matemáticos sem explicações mais robustas.

As considerações são feitas com base nas interseções mais significativas encontradas entre as coleções, mas isso não quer dizer que nenhuma supriu nossas expectativas. Das oito coleções analisadas, apenas duas cumpriram todos os requisitos, mostrando preocupação em diferenciar hipótese e tese em suas demonstrações, procurando incentivar o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes, envolvendo-os em suas explicações, entre outros aspectos. E apenas uma não cumpriu requisito algum. As outras cinco mesclaram entre *provas pragmáticas* e *intelectuais*, apresentando conceitos com encadeamento lógico, se preocupando em abordar conceitos e propriedades já definidos e, às vezes, trazendo notas explicativas para professores e alunos, porém, em sua maioria de forma breve ou sem dar a devida importância.

Após a descoberta desses dados, destacamos algumas orientações, necessárias para os professores que participam dos processos de escolha e utilização do livro didático: a) analisar com todo o rigor as coleções sugeridas pelo PNLD e fazer uma boa escolha, visto que apesar de poucas, algumas coleções se apresentaram satisfatórias em relação aos critérios que investigamos; b) após a escolha, fazer a consulta de outras obras, assim como outras fontes de pesquisas, para que seu campo de visão não fique restrito apenas a um determinado livro; c) não omitir, em sala de aula, as demonstrações presentes nos livros didáticos; d) buscar outras ferramentas como, por exemplo, *softwares* matemáticos, caso o livro não apresente sugestões para incentivar a interação dos estudantes; e) envolver e incentivar os alunos a participarem das explicações formais da Matemática, para desenvolver neles o raciocínio lógico-dedutivo.

Sabemos que para que o docente realize tais sugestões é necessário ter uma equipe escolar que o ajude a pôr em prática os pontos fundamentais no desenvolvimento matemático do educando. Esperamos que esta pesquisa possa contribuir na mudança de olhar dos professores em relação aos livros didáticos e, de antemão, esta sinaliza questionamentos para futuros estudos: Quais coleções de livros didáticos são adotadas nas escolas e por quê? Os professores

01, 02 e 03 de
dezembro de 2021



*Formação de professores
para o ensino de Matemática
em tempos de pandemia*

Evento Online

demonstram propriedades matemáticas ou fazem *vista grossa* para o rigor estabelecido em algumas coleções? Por que as coleções que apresentam o devido rigor à Matemática escolar são exceção quando, na verdade, deveriam ser regra?

É fato que o livro didático é essencial em sala de aula e desejamos que esse apresente todos os quesitos importantes para o processo formativo dos estudantes. Salientamos que os responsáveis pelos livros, de sua escrita à sua escolha e utilização, devem ter plena consciência de quais pontos são fundamentais para que os processos de ensino e aprendizagem ocorram da melhor forma possível, pois, só assim, os estudantes terão uma formação matemática satisfatória para suas vidas acadêmicas e pessoais.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**/Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o Ensino Médio; volume 2).

_____. Ministério da Educação. **PNLD 2018: matemática** – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2017.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005. Coleção.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n.3, p, 20-29 Mai./Jun. 1995.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LIMA, E. L. Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes no ensino da Matemática. **Revista do professor de Matemática**, 41, 1999.

MARTINS, R. B. **Argumentação, prova e demonstração em geometria: Análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

PEREIRA, G. A. **Argumentação, demonstração e resultados matemáticos em Geometria: uma análise de livros didáticos do Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Graduação em Matemática, Quixadá, 2018.

QUEIROZ, J. C. S.; MELO, V. M. de. A. **A demonstração nos livros didáticos de Matemática na perspectiva dos conjuntos**. In: Encontro Paraibano de Educação Matemática, x. IX, 2016, Paraíba. Anais IX EPBEM v. 1, ISSN 2317-0042. Paraíba: 2016.