UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

LUIZA MARIA MORAIS LIMA

CONSTRUÇÕES ALGORÍTMICAS E DEMONSTRAÇÕES AXIOMÁTICAS

Fortaleza
2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

LUIZA MARIA MORAIS LIMA

CONSTRUÇÕES ALGORÍTMICAS E DEMONSTRAÇÕES AXIOMÁTICAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Doutor Hermínio Borges Neto

Fortaleza
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Biblioteca Central Prof. Antônio Martins Filho

Bibliotecário (a) Leila Cavalcante Sátiro – CRB-3 / 544

L732e Lima, Luiza Maria Morais.

Construção algorítmicas e demonstrações axiomáticas / Luiza Maria Morais Lima . — 2013.

CD-ROM f. 56: il. (algumas color.) ; 4 ¾ pol.

"CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slin (19 x 14 cm x 7 mm)".

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

1. Educação matemática. 2. Demonstrações. 3. Processo construtivo. 4. Construções algorítmicas. 5. Construções geométricas. I. Título.

CDD: 510

LUIZA MARIA MORAIS LIMA

CONSTRUÇÕES ALGORÍTMICAS E DEMONSTRAÇÕES AXIOMÁTICAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 18 / 06 / 2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. HERMINIO BORGES NETO (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. JOÃO MONTENEGRO DE MIRANDA
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. JOSÉ ROBÉRIO ROGÉRIO
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais, Antônio e Fátima, e aos meus irmãos, Wagner e Felipe.

Agradecimentos

A conclusão desse mestrado sempre foi um sonho pra mim, mas não sonhei sozinha e muito menos estive sozinha durante essa jornada. A todos que fizeram parte dessa história, meus sinceros agradecimentos.

Aos meus pais, Fátima e “Seu Formiga” que sempre colocaram a minha educação em primeiro lugar e fizeram tudo que podiam para eu ter acesso aos estudos, além de me educarem com tanto amor e carinho.

Aos meus irmãos, Wagner e Felipe, à minha cunhada Oneide, às minhas sobrinhas, Luana e Mariana, às minhas tias, Socorro, Edna, Fatinha, Zuila, Ila, Vanda, Tia Pêda e Nilda, aos primos, Carlos Augusto, Ludovic Junior e Gabrielle, que sempre me apoiaram e que entenderam a minha ausência durante o longo período de estudos, sempre torcendo por mim. Os amo imensamente.

Ao meu orientador, Professor Hermínio Borges Neto, sem o qual eu não teria conseguido realizar esse trabalho. Com ele, aprendi muito durante o período de produção da dissertação.

Aos Professores João Montenegro, João Marques, Cleiton Vasconcelos e Othon Lopes, por dividirem comigo o seu conhecimento.

Ao coordenador do mestrado, Professor Guilherme Ellery, por todo o seu empenho em fazer o PROFMAT ser um sucesso e por todo o carinho e atenção que teve com os alunos do curso.

Aos meus colegas de turma, que tornaram a aprendizagem mais agradável e por todo o apoio nos momentos de estudo, em especial ao Bruno de Sena e ao Rafael Melo.

A todos os meus amigos, que sempre me deram força e seguraram as pontas em todos os momentos de “desespero” durante os estudos e a elaboração desse trabalho, que compreenderam a minha ausência e me mandavam estudar, em especial a Ana Cláudia Mendonça, que não só me ajudou como me tranquilizou em vários momentos.

Finalmente, mas não menos importante, gostaria de agradecer a Deus por ter colocado todas essas pessoas em meu caminho e ter me dado saúde e serenidade para concluir essa etapa.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da realização desse sonho, o meu muito obrigada!

"Por método, entendo as regras certas e fáceis, graças às quais todos os que as observam exatamente jamais tomarão como verdadeiro aquilo que é falso e chegarão, sem se cansar com esforços inúteis, ao conhecimento verdadeiro do que pretendem alcançar". (Descartes)

Resumo

Nesse trabalho discutimos a utilização das provas e demonstrações através de procedimentos construtivos e lógicos, no sentido de reforçar a compreensão do aluno e obter um aprendizado mais concreto e completo. Para isso, estudamos diferentes tipos de demonstração, tais como Demonstração Direta, Por Contraposição/ Por Absurdo, Por Contradição, Por Indução e E-xaustão, bem como os benefícios de suas aplicações durante as aulas de matemática e o uso de processos construtivos no processo de ensino e aprendizagem. Apresentamos alguns objetos matemáticos, analisando diferentes propostas de demonstrações e construções algorítmicas, que reforçam o experimento em sala de aula como ferramenta de ensino. Nosso objetivo é discutir a utilização das provas e demonstrações através de procedimentos construtivos e lógicos, no sentido de reforçar a compreensão do aluno no processo de aprendizagem na educação básica. Ao realizar demonstrações construtivas, os alunos podem experimentar, fazer conjecturas e dar um sentido ao conhecimento matemático antes de formalizá-lo.

Palavras-chave: Demonstrações, Processos Construtivos, Construções Algorítmicas, Algoritmos, Construções Geométricas.

Abstract

In this paper we discuss the use of tests and demonstrations through logical and constructive procedures, in order to enhance the understanding of the student to obtain a more concrete and complete learning. For this, we studied different types of demonstration, such as Demonstration Direct, as opposed, On Contradiction/ On Absurd, On Induction and Exhaust, as well as benefits of their applications during mathematics lessons and the use of constructive processes in teaching and learning. We present some mathematical objects, analyzing different proposals for demonstrations and algorithmic constructions that reinforce the experiment in the classroom as a teaching tool. Our goal is to discuss the use of evidence and statements through logical and constructive procedures, in order to enhance student understanding of the learning process in basic education. When performing constructive demonstrations, students can experience, make conjectures and give meaning to mathematical knowledge before formalizing it.

Keywords: Demonstrations, Constructive Procedures, Algorithmic Constructions, Algorithms, Geometric Constructions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atuando como professora de Matemática no ensino fundamental e médio há quase dez anos, percebi que muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos decorrem da maneira excessivamente técnica como ela vem sendo ensinada. Há, em nossas escolas, uma concepção de que a Matemática é constituída apenas por um conjunto de técnicas. Como consequência disso, o ensino de Matemática se volta para a transmissão mecânica dessas técnicas. O professor repassa os conteúdos, apelando apenas para o uso de regras, muitas das vezes sem justificativa, forçando o aluno a absorver esse conhecimento pela mera repetição dessas regras.

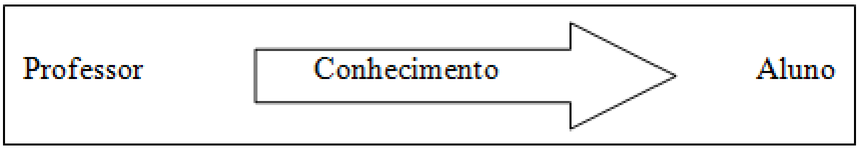
A palavra Matemática, de origem grega, significa “o que se pode aprender”. Entretanto, em consequência de uma visão distorcida, muitos têm a impressão de estar trabalhando com o estudo inútil de assuntos superiores ao alcance de entendimentos humanos (alguns autores, como Nilson Machado fazem referência a esse estudo inútil pelo termo de Mateologia, que significa o estudo de assuntos complexos). Tentando tornar a matemática “útil”, muitos professores supervalorizam algumas aplicações práticas, que nem sempre tornam o ensino bem sucedido.

Para levar a Matemática o mais próximo possível da realidade do aluno, o professor enfatiza aplicações e, muitas vezes, as demonstrações são deixadas de lado. Um dos objetivos da demonstração é convencer os estudantes, através da razão e da intuição, sobre a verdade de certas afirmações.

Para o racionalista René Descartes, as demonstrações comumente utilizadas estão de acordo com esse método, onde um teorema é comprovado a partir de diversas afirmações já consideradas verdadeiras, os axiomas.

Por outro lado, se a demonstração for construída com o aluno, em seu nível de entendimento, a aprendizagem será mais eficaz. Vale ressaltar que nem sempre os conteúdos matemáticos têm aplicações reais, mas ainda assim não deixam de ter significado, e é muito importante que esse significado seja evidenciado e se relacione com o senso comum.

A Matemática estudada nas escolas é geralmente a matemática formalista[1], é a ciência da dedução formal, dos axiomas para os teoremas. Os seus termos primitivos são indefinidos e as suas afirmações não têm conteúdo até a interpretarmos. Sendo assim, esse "objeto de ensino" deveria ser transmitido por quem pode oferecê-lo (professor) a quem não o possui (aluno) sem risco de que o conhecimento se modifique durante esse processo.



Fonte: Robinson Tenório (1997).

A maioria dos professores considera os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que eles deveriam ser (re)construídos pelos alunos, de modo que os façam superar os obstáculos epistemológicos e minimizar as dificuldades conceituais. É importante que o professor conheça as etapas do conhecimento matemático, bem como as necessidades mentais e sociais que levaram o homem a produzir e utilizar esses conhecimentos, para que, em sala de aula, seus alunos possam reconstruí-los a sua maneira.

Alguns estudiosos como John Dewey (1859-1952) em seu livro Psicologia do Número (1895), vêm difundindo uma reação contra o formalismo (um ensino da matemática voltado para o uso de exemplos). Para mudar essa realidade, deve haver uma mudança de postura do educador, que deve romper os pré-conceitos a respeito da superestimação do conhecimento matemático e, principalmente, resgatar o caráter investigativo da Matemática, fazendo com que suas ideias sejam exploradas e desenvolvidas pelo aluno a partir dos seus conhecimentos prévios.

O sistema educativo, implantado com a LOGSE[2] na década de 1990, apostava em estratégias como a de "aprender a aprender" ou a de "aprender a pensar", mas o sistema continuou sendo o formal, com aplicação de conceitos e demonstrações técnicas, por vezes sem

[1] O Formalismo acredita que a Matemática consiste apenas em um sistema formal, baseado em axiomas, definições e teoremas. Quando se dá uma aplicação a este sistema, esta adquire um significado, mas não depende dessa aplicação para existir.

[2] Ley Orgánica General del Sistema Educativo

fundamento concreto. Se a intuição é usada no “fazer matemática”, por que não usá-la em sala de aula, quando estamos ensinando matemática?

Em sala de aula, percebe-se que o “fazer” (diferente do executar, do tarefeiro) torna a matemática mais natural. Sendo assim, quando os conceitos são apresentados de forma construtiva, utilizando o raciocínio e a dedução, o aluno consegue adquirir um melhor aprendizado. “Construir a Matemática”, com o objetivo de ensiná-la, é uma necessidade, já que a falta de clareza com relação ao papel que ela deve desempenhar no corpo de conhecimentos sistematizados pode ser o principal responsável pelas dificuldades crônicas de que padece o seu ensino.

Diante do exposto acima, surgem os seguintes questionamentos: Como melhorar o ensino da Matemática na Educação Básica? Que importância tem o uso de demonstrações nas aulas de Matemática? Os alunos do ensino fundamental conseguem compreender os passos das demonstrações apresentadas pelos professores? A demonstração tem algum significado para o aluno? De que maneira o uso dessa ferramenta pode ser mais eficaz?

Sendo assim, este trabalho propõe compreender a importância do uso da demonstração na construção do conhecimento, estudando os métodos axiomáticos e logarítmicos. Nosso objetivo é discutir a utilização das provas e demonstrações através de procedimentos construtivos e lógicos, no sentido de reforçar a compreensão do aluno no processo de aprendizagem na educação básica. Falamos um pouco sobre o que é e qual a importância das Demonstrações no ensino da Matemática, descrevemos alguns dos diferentes tipos de Demonstrações, focando na construção algorítmica.

Apresentamos ainda algumas construções algorítmicas, que reforçam o experimento em sala de aula como ferramenta de ensino. Ao realizar as construções, os alunos podem experimentar e fazer conjecturas, dando um sentido ao conhecimento matemático antes de formalizá-lo.

1. DEMONSTRAÇÕES

No trabalho *Proofs and Refutations*, Imre Lakatos (1976) defende que a Matemática desenvolve-se a partir de um problema (situação-problema) e de uma conjectura (possibilidade de resposta), com teoria a tomar forma. Para Lakatos, demonstração não é um processo mecânico, que conduz à verdade numa cadeia inquebrável das hipóteses às conclusões. Significa, antes, um conjunto de explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível e mais convincente, além de um processo de desenvolvimento e descoberta.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) (ou PCN que podem ser obtidos em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf) para o ensino fundamental enfatizam a importância da demonstração em matemática, procurando dar orientações para o estudo de teoremas pelos alunos, com posterior demonstração formal, privilegiando as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico, bem como as principais funções do desenho geométrico, no que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais.

A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica, embora não haja, no Brasil, pesquisas em número suficiente sobre a compreensão de seus mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos.

Usualmente, consideramos a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina.

Segundo Rodrigues (2008), embora a concepção de demonstração no ensino da Matemática tenha mudado ao longo dos anos, podemos considerar que a estrutura do raciocínio dedutivo seja a mesma. Essa estabilidade contrasta com a grande expansão e evolução histórica que a Matemática, enquanto ciência tem conhecido. Atualmente, a grande utilização dos recursos computacionais ampliou a controvérsia entre os matemáticos sobre o que se pode considerar uma demonstração ou que elementos um texto ou procedimento deve possuir para ser aceito como demonstração.

Mesmo com todas as formas de abordagem e com os claros benefícios que a demonstração pode trazer ao ensino, ela é pouco utilizada em sala de aula. Dentre os principais motivos para isso, destacamos a falta de preparo do professor, o tempo e o esforço gastos para a preparação de uma aula envolvendo um nível de demonstração que atenda às necessidades do aluno e a ausência da demonstração na maioria dos livros didáticos, tanto na explicação dos conteúdos como nos seus exercícios.

Embora os PCN registrem a importância da demonstração, principalmente em conteúdos de Geometria, eles não enfatizam a abordagem da técnica como objeto de estudo. Além disso, falta aos professores e aos livros didáticos, na maioria das vezes, preparo para a utilização da demonstração como recurso de ensino.

Normalmente, as aulas de Matemática são regidas pelos livros didáticos (conforme a dissertação de Gerardo Oliveira Barbosa, "RACIOCÍNIO LÓGICO FORMAL E APRENDIZAGEM EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL : O CASO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ", FACED, 1994), que apresentam um conteúdo seguido de exercícios, que não costumam pedir justificativas, provas ou demonstrações. Mesmo em problemas de Geometria, encontramos expressões do tipo "calcule", "efetue", "compare", "determine" e "identifique", de caráter puramente operatório, em detrimento de "justifique", "demonstre", "construa" etc., de caráter conceitual. No início da Matemática Moderna nos anos 60, os livros didáticos faziam todas as demonstrações, mas os alunos acabavam sendo obrigados a decorar enunciados e demonstrar teoremas sem, às vezes, entender seu significado. Já a partir dos anos 90, os livros ainda trazem algumas demonstrações clássicas, mas a quantidade de exercícios que exigem um caráter lógico ou de demonstração diminuiu drasticamente em comparação com os daquela época.

A metodologia indicada pela proposta curricular e por livros didáticos fornece poucas orientações aos professores e alunos no desenvolvimento do ensino-aprendizado das provas e demonstrações. Apoiamo-nos nos estudos de Ávila (2006) que diz que "Enunciar e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor ou estudioso da Matemática; e não é admissível que tal pessoa sinta-se deficiente em demonstrações".

Já Veloso (1998) apresenta duas razões para sugerir a importância das demonstrações em sala de aula:

- Aprender a raciocinar (o fazer matemático da intuição)
- Compreender a natureza da Matemática (a introspecção sobre como funciona aquilo que foi feito)

Embora o autor reconheça a contribuição da demonstração nas aulas de Matemática no aprendizado do raciocínio, ele não a considera imprescindível, pois os alunos podem, sim, desenvolver o raciocínio sem o uso da demonstração. No entanto, não conseguirão interiorizar, compreender e apreciar a natureza da Matemática. Veloso (1998) considera que “os alunos devem chegar ao Ensino Médio com uma experiência já considerável de atividades de investigação em Matemática, com diversas ocasiões para argumentar, demonstrar e refletir com a ajuda do professor sobre essa experiência matemática”.

Colaborar para o desenvolvimento do pensamento dedutivo do aluno capacita-o na construção de formação do pensamento dedutivo, contribuindo para a sua formação intelectual. Dessa forma, trabalhar o pensamento matemático aumenta o entendimento daquilo que nos rodeia, dando a essa disciplina a estrutura de, além de um corpo de informações e técnicas, um método eficaz para fazer a mente trabalhar.

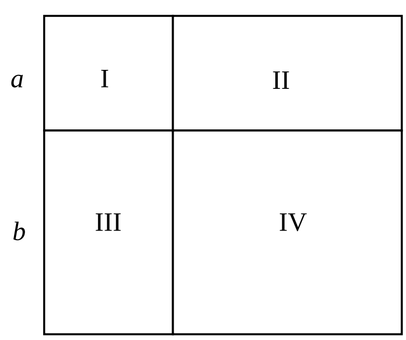
1.1 Explicação, Prova e Demonstração

N. Balacheff (1987) faz a seguinte distinção entre explicação, prova e demonstração:

Explicação: Discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado, podendo ser discutido, recusado ou aceito.

Prova: Explicação aceita por uma dada comunidade, num dado momento, cujo significado é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. Consideremos o seguinte exemplo:

Muitos professores utilizam a geometria para desenvolver o produto notável referente ao quadrado da soma de dois números, $(a + b)^2$. Seja o quadrado de lado $(a + b)$, representado na figura a seguir:



A área do quadrado é dada pela soma das áreas I, II, III e IV, sendo assim:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 \therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Embora seja considerada, por muitos, uma demonstração, o exemplo acima é uma prova, por validar o resultado apenas para um grupo restrito, no caso os números que podem ser representados como medidas, não abrangendo todos os números reais, ou seja não vale sempre, e não se generaliza. Por exemplo, é possível, usando este recurso, mostrar o desenvolvimento dos produtos notáveis $(a + b)^3$ e $(a + b)^4$? No caso do primeiro, usaríamos o cubo e no caso do segundo?

Prova Por Exemplos

Algo muito usual no ensino da matemática é a "prova por exemplos". Em divisibilidade, sabemos que um número é divisível por três se a soma dos seus algarismos resulta em um número divisível por três, e alguns testes com diferentes números podem sugerir esse fato.

Porém, a existência de um número findável de exemplos que verifiquem certas condições não constitui demonstração. De fato, esse tipo de método pode levar a interpretações erradas, como o exemplo a seguir. É muito comum nos livros didáticos, e a partir disso usado pelos professores em salas de aula, a apresentação de alguns exemplos e, a partir deles, se chegar a conclusões. Vejamos o seguinte caso:

3+ 10 = 13; 9 + 4 = 13; 8 + 5 = 13; 7 + 6 = 13.

Portanto, como podemos ver, se a e b são números inteiros, a + b = 13

Ora, sabemos que o exemplo citado acima é incorreto, mas pode muito bem ser colocado pelos alunos, que estariam se baseando "corretamente" em um raciocínio apresentado a eles.

Este tipo de argumentação é muito comum em livros didáticos, como no livro do 8º ano do Ensino Fundamental Tudo é Matemática, de Luiz Roberto Dante. Neste volume, a relação de Euler é apresentada usando exemplos, sendo verificada em vários poliedros convexos. Devemos ressaltar porém, que não se trata de uma demonstração.

Demonstração: Prova aceita pela comunidade (no nosso caso, matemática), fundamentada em procedimentos, métodos ou explicações apresentadas numa sequência de enunciados, organizados conforme regras determinadas. Ou seja, a demonstração não é um processo intuitivo procurando uma *"imediatice"* cognitiva.

Voltemos ao exemplo anterior. Para demonstrar que a igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ é válida para todos os números reais, podemos utilizar uma simples multiplicação de polinômios:

$$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) \therefore (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 \therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos a partir destes ou de outros anteriormente demonstrados, de acordo com regras de deduções lógicas. Assim, a demonstração é um resultado de processo particular de prova que vem validar uma formação.

O conceito de prova une-se ao de demonstração e muitas vezes, em sala de aula, eles significam a mesma coisa. A possibilidade de demonstração dentro da Matemática permite que seus estudiosos possam desenvolver e avançar em sua ciência estabelecendo relações de algumas verdades *a priori*, os postulados e axiomas, e seus resultados, teoremas ou colorários. Conforme Shapiro:

> Como o conhecimento matemático parece estar baseado em demonstração, não em observação, a matemática é um aparente contra-exemplo à principal tese empiricista. De fato, a matemática é, algumas vezes, tida como um paradigma de um conhecimento a priori – conhecimento anterior a, e independente da experiência. (BICUDO, 2002, p.82).

Segundo Bicudo (2002), as definições de Lógica deveriam modelar as demonstrações matemáticas, porém, a demonstração que se encontra nos livros e que são aplicadas pelos professores é aquela que satisfaz a comunidade de especialistas, não interessando a sua distância com o referencial lógico.

Durante uma demonstração matemática, um indivíduo faz uso da razão e, por meio deste processo, se desenvolve o raciocínio lógico necessário para se demonstrar.

Ao afirmar sobre a racionalidade, Balacheff (2002, pg. 1) esclarece que esta "é densa em toda a vida do ser humano, seja em um indivíduo ou em um nível coletivo". Por "racionalidade", entendemos o sistema dos critérios ou regras mobilizados quando se tem que fazer escolhas, tomar decisões ou realizar julgamentos.

Na verdade, uma grande parte da nossa vida é regida por processos de informação, alegação, discussão e argumentação. Essas regras e critérios poderiam tanto ser um dado adquirido que permanece implícito - o que ocorre, em geral, no cotidiano - ou poderiam ser explícitas ou mesmo formalizadas - o que é o caso quando se tem de justificar a validade de uma declaração ou uma ação. Essas regras e critérios poderiam originar-se de opinião, crença ou saber, mas em todos os casos, eles são organizados em uma estrutura, que permite a tomada de decisão. O que se pretende na prova ou demonstração é verificar que H (hipótese) $\rightarrow$ T (tese) é uma implicação verdadeira. Ou seja, se deve validar que H sendo verdadeira (e nos nossos casos sempre o é), então a implicação só será verdadeira se T também o for.

A diferença entre prova e demonstração se baseia nos métodos para se chegar a esta afirmação.

Nas demonstrações ditas Axiomáticas, e que são as mais utilizadas em livros didáticos e pelos professores de matemática, as deduções sempre se apoiam em asserções anteriores, aceitas sem uma dedução, chamadas axiomas[3]. Ou seja, a partir de axiomas previamente aceitos como verdadeiros, se constroem, ou se deduzem, novas asserções.

No entanto, demonstrar não se trata apenas de fazer relações a afirmações ou teoremas, é preciso que inclua o trabalho dedutivo do pensamento durante o processo de demonstração. Nem sempre o objetivo é atingido, pois a maioria dos alunos, principalmente na educação básica, ainda não tem o letramento matemático necessário para compreender o método axiomático geralmente usado nas demonstrações.

Considerando que o aprendizado não ocorre pela aquisição da informação, mas pela sua experimentação e interpretação, a demonstração do ponto de vista construtivo, ou demonstração algorítmica, defende que o aprendizado é ativo e se dá pela construção das estruturas cognitivas. Os objetos matemáticos não atuam num mundo externo, mas são produzidos e construídos pelo próprio sujeito num processo contínuo de assimilações e adequações que ocorre nas suas estruturas cognitivas. Em outras palavras, o sujeito apodera-se do objeto de conhecimento e vai extraindo dele as informações necessárias para a construção da aprendizagem.

---

[3] Na lógica tradicional, um axioma ou postulado é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução e inferências de outras verdades (dependentes de teoria).

Nesta perspectiva, a aprendizagem matemática depende de ações que caracterizam o “fazer matemática”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim, demonstrar. Diferente da transmissão ordenada de definições e propriedades, onde os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, o aluno tem um papel ativo na construção do conhecimento.

1.2 Demonstrações na Matemática

As demonstrações empregam lógica. Uma afirmação só deixa de ser considerada uma conjectura após ter uma demonstração usando dedução da lógica formal. No entanto, no ensino da matemática, muitas vezes realizamos demonstrações pelo uso de uma lógica considerada informal, por incluir alguma quantidade de linguagem natural, o que pode causar ambiguidades. Apesar do processo lógico, o professor tem que ter a noção do nível de conhecimento do aluno ou estágio de desenvolvimento, para que o entendimento da demonstração seja alcançado.

Um resultado provado é um teorema e, em uma prova completamente formal, isto seria considerado um ponto final. Os teoremas provados a partir dos axiomas podem ser usados como base para provar outros enunciados e, assim, uma prova completa mostra como os resultados seguem apenas dos axiomas. Os objetos primitivos são aqueles enunciados que não se pode, ou não se faz necessário, provar. Atualmente, e principalmente em sala de aula, foca-se mais na prática matemática, tornando as teorias mais aceitáveis do ponto de vista construtivo.

O processo de validação por meio de prova transformou a natureza do saber matemático em uma abordagem racional argumentativa que foi capaz de superar obstáculos postos pela limitação dos instrumentos de verificação e pela preservação das tradições. A demonstração, sobretudo, é uma abordagem racional sobre o conhecimento humano e a verdade.

Como colocado no Capítulo 1, as demonstrações tem um importante papel no ensino da Matemática, uma vez que o fazer matemático exige o desenvolvimento de habilidades necessários para ler textos matemáticos, compreendendo os termos básicos e desenvolvendo argumentações e deduções.

Usar a demonstração ajuda a construir o conhecimento e a evitar o uso excessivo de repetições de fórmulas e teoremas, dando um sentido concreto ao que está sendo estudado e proporcionando o uso de conhecimentos adquiridos anteriormente.

Neste trabalho defendemos que o estudo das Demonstrações Matemáticas é de extrema importância para a capacitação do Professor, para que este possa trabalhar essa ferramenta com seus alunos de maneira eficaz, clara e objetiva, proporcionando assim uma aprendizagem concreta.

2. TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÕES AXIOMÁTICAS

Nessas demonstrações são apresentadas regras de inferência, que são restrições sintáticas que uma prova deve obedecer, num sistema matemático formal, com estruturas especificadas, que nos permite determinar se o argumento utilizado pode ser considerado uma demonstração.

Neste capítulo apresentamos algumas das técnicas de demonstração axiomáticas, quando e como usá-las, e apresentamos algumas aplicações. Em seguida, damos exemplos de demonstrações axiomáticas e construtivas (ou algorítmicas), fazendo comparações entre elas do ponto de vista de experimentação, argumentação e o uso da base de conhecimento de matemática para estes processos.

2.1 Demonstração Direta

Em uma demonstração direta de $H \to T$ (*H* implica *T*), onde H indica a hipótese e T, a tese, mostra-se que o fato de *T* ser verdade segue diretamente do fato de *H* ser verdade. A demonstração se inicia partindo da suposição de que H seja verdade.

Em uma prova direta ocorre o desenvolvimento de uma série de proposições, de modo que seja possível o estabelecimento de deduções ao longo do caminho, as quais possam permitir obter uma conclusão sobre uma conjectura proposta.

A conclusão é estabelecida através da combinação lógica dos axiomas, definições e teoremas já existentes. Vejamos a seguir um exemplo de demonstração direta:

Exemplo 2: Se $a \neq 0$, b e c são números inteiros tais que $b^2 - 4ac \geq 0$, então existe um número real x tal que $ax^2 + bx + c = 0$.

Uma demonstração direta, conhecida desde o século XII (devido ao trabalho do matemático hindu Bhaskara), baseia-se na ideia de reescrever a equação de forma a explicitar o termo $b^2 - 4ac$. Para obtermos o termo $4ac$, multiplicamos a equação por $4a$ obtendo:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0, \text{ ou } 4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Para introduzir o termo b^2, ele é somado à equação, resultando em:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$, que é o mesmo que $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.

Analisando a equação escrita desta forma, percebemos que a igualdade é verificada quando $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que é um número real se $b^2 - 4ac \geq 0$, concluindo a demonstração.

Vale ressaltar que para que essa demonstração tenha sido bem sucedida foram necessários alguns "artifícios", como a multiplicação da equação por $4a$ e em seguida a soma do termo b^2. Essas inferências foram descobertas, certamente, após várias tentativas, e se forem transmitidas dessa maneira ao aluno faz apenas com que ele as aceite como verdades incontestáveis, o que vai contra o propósito da demonstração. Por isso que a experimentação se faz tão importante no momento em que se constrói o aprendizado. Uma alternativa seria lançar o desafio ao aluno, para que ele, sozinho, chegasse a um resultado favorável, onde o foco estaria na sua solução e não somente no resultado encontrado.

2.2 Demonstração por Contraposição (ou Prova Indireta)

A implicação $H \to T$ é logicamente equivalente à implicação $\sim T \to \sim H$. Consequentemente, podemos estabelecer a validade de $H \to T$, estabelecendo que $\sim T \to \sim H$.

Nessa demonstração a sentença condicional pode ser provada mostrando-se que a sua contrapositiva é verdadeira.

Exemplo 3: Mostre que se $n + 1$ senhas diferentes foram distribuídas para n alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.

A contrapositiva é "Se todo aluno recebe menos que duas senhas, então **não** foram distribuídas $n + 1$ senhas". Ora, se todo aluno recebeu menos de duas senhas só há duas possibilidades: receber uma ou nenhuma senha. Sendo assim, com n alunos, teríamos, no máximo, n senhas.

2.3 Demonstração por Indução (ou recursiva)

Muito utilizado em computação, o Princípio da Indução, além de ser um método para definir conjuntos, é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Giuseppe Peano (1858-1932) constatou que é possível elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos como os Axiomas de Peano[4]. O último deles, conhecido como o Axioma da Indução, tem um papel fundamental no estudo dos números naturais por ser visto como um método de demonstração, chamado Princípio da Indução Finita ou Princípio da Indução.

Uma proposição P(n), aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in$ N, se e somente se:

(i) P(1) é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = 1$.

(ii) Se P(n) é verdadeira, então P($n + 1$) também é verdadeira.

Se ambos os teoremas forem demonstrados, pode-se afirmar que a proposição é válida para todo número natural n.

Notemos que não aparece na definição acima o passo 3, da condição extrema, mas seu papel é crucial da demonstração por indução. A condição extrema garante que todos os elementos do conjunto podem ser construídos usando a base e a condição indutiva do conjunto. Uma demonstração por indução estabelece que cada elemento n construído dessa forma tem alguma propriedade P. Seguindo a condição extrema que a propriedade $P(x)$ garantida para todos os elementos do conjunto, o que conclui a demonstração.

Exemplo 5: A soma dos n primeiros números inteiros positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$.

i) Tomemos $n = 1$. Assim:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1$$

O que torna P(1) verdadeira.

[4] Também conhecidos como os axiomas de Dedekind-Peano ou postulados de Peano, são um conjunto de axiomas para os números naturais apresentado pelo matemático italiano do século XIX Giuseppe Peano. Esses axiomas vêm sendo utilizados praticamente sem modificações em diversas investigações matemáticas, incluindo pesquisas em questões fundamentais de consistência e completude da teoria dos números.

ii) Considerando P(n) verdadeira, vamos verificar se P($n+1$) é verdadeira, isto é, considerando que a soma dos n primeiros números inteiros positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$, provaremos que a soma dos n + 1 primeiros números inteiros positivos é $\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Observe que a soma dos n + 1 primeiros inteiros positivos é igual à soma dos n primeiros somada com n + 1, isto é, vale

$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ e fica estabelecido que a propriedade vale para a soma dos n + 1 primeiros números inteiros positivos.

Assim, por indução, P(n) é válida para todo número natural n.

Esse tipo de demonstração não é comumente usado no ensino básico, porém pode ser adaptado, conservando sua ideia, para o nível fundamental ou médio. É o caso do estudo da torre de Hanoi (que é demonstrado no capítulo 4) ou mesmo estudado quando são trabalhados problemas do tipo "encontre o próximo termo das sequências" ou nos exames psicotécnicos.

É importante notar que a indução, como é demonstrada acima, não favorece o aprendizado por omitir a parte crucial: aprender como fazer.

Mostramos que a soma dos n primeiros números inteiros positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$, mas não mostramos como chegar a essa fórmula. A argumentação da indução passa etapas e não dá ênfase ao "fazer", apenas serve de "validação" de proposições.

2.4 Demonstração Por Contradição ou Por Absurdo

Também conhecida como *Reductio ad Absurdum* – Redução ao Absurdo, a demonstração por contradição é um método de prova indireta. Consiste em supor verdadeira a proposição contrária a proposição que se quer demonstrar, chegando, assim, a uma contradição.

Neste método, supomos que P é verdadeira (nos casos em que P é falsa, a sentença é verdadeira) e, por contradição, supomos que Q seja falsa. Partindo dessa suposição, tentamos chegar a uma conclusão que contradiz a hipótese inicial de que P é verdadeira ou a de que Q é falsa. Com isso, provamos que P sendo verdadeira, Q não pode ser falsa. Logo, Q é verdadeira.

Exemplo 6: Se n é um número inteiro e n^2 é par, então n é par.

Suponhamos, por absurdo, que a proposição acima seja falsa. Então, existe n^2 par tal que n seja ímpar (Proposição Negativa).

Se n é ímpar ele pode ser escrito da forma $n = 2k + 1$, com k inteiro, e o seu quadrado resulta em $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, logo n^2 é ímpar. Um número inteiro não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, resultando, assim, em uma contradição.

A demonstração por contradição é muito usada em teoremas de existência. Neste caso, é usada para provar a existência de um elemento com determinada característica sem, no entanto, exibir ou construir tal elemento. Por esta razão, alguns matemáticos a evitam quando possível, preferindo métodos de prova algorítmicos (por construção).

2.5 Demonstração por Exaustão

Usada quando temos uma conjectura sobre uma coleção finita, a demonstração por exaustão consiste em verificar a validade de uma proposição para cada elemento da coleção. Uma demonstração por exaustão significa que foram exauridos todos os casos possíveis.

Exemplo 7: Se um inteiro, entre 1 e 20, é divisível por 6, então também é divisível por 3. Os inteiros entre 1 e 20 que são divisíveis por 6 são 6, 12 e 18. Como existe um número finito de casos, podemos mostrar que, um a um, todos são divisíveis por 3.

Essa técnica é inviável em conjuntos com muitos elementos, mas pode ser bastante útil em universos pequenos. Pode-se fazer uma tabela com a análise de cada caso, como por exemplo, uma tabela verdade.

Exemplo 9: Para todo inteiro positivo $n < 5$, o quadrado de n é menor que $10 + 5n$.

Os números inteiros positivos menores que 5 são apenas 1, 2, 3 e 4, de modo que a validade da proposição pode ser demonstrada pela validação em cada um desses casos, de acordo com a seguinte tabela.

Tabela 1: Tabela Verdade.

n	$10 + 5n$	Verificação/validação
1	*15*	1 < 15 (V)
2	*20*	2 < 20 (V)
3	*25*	3 < 25 (V)
4	*30*	4 < 30 (V)

O importante nesse tipo de demonstração é que o aluno possa, seguindo um conjunto de passos (algoritmo), e experimentar (fazendo as operações necessárias), até chegar a uma conclusão válida. Que fique claro que não deve se tratar apenas de repetir exaustivamente os experimentos, mas de criar um ambiente em que o aluno seja estimulado ou levado a refletir sua ação.

3. CONSTRUÇÕES ALGORÍTMICAS

No capítulo Meu Professor de Matemática do livro Meu Professor de Matemática e Outras Histórias (19XX), Elon Lages Lima descreve o professor Benedito de Morais que acreditava que “A matemática ensinada não deve ser apenas um conjunto de regras e receitas válidas por decreto, nem um sistema dedutivo formal, vazio de significado. Era qualquer coisa bem próxima da realidade e das aplicações, porém organizadas com definições, exemplos e demonstrações”. É exatamente esse tipo de ensino que a visão construtivista prioriza um ensino onde a Matemática genuína considera apenas o que pode ser obtido por uma construção finita, onde o processo é descrito, construído.

Esta forma de construtivismo mais conhecida é o Intuicionismo iniciado por Brouwer, em 1908. Para Luitzen Egbertus Jan Brouwer, não é a experiência, nem a lógica, que determina a aceitabilidade das ideias, mas sim a intuição. Ele defende que o pensamento matemático é, portanto, um processo de construção mental, que prossegue um número finito de passos e é independente da experiência (que pode muito bem ser considerada como a "repetição", tão usada nas aulas de Matemática).

Demonstração por algoritmo ou por construção é aquela que só garante a existência de certo objeto matemático através da sua construção. Uma demonstração construtiva fornece um algoritmo para se obter o objeto matemático em questão, sem apelar para processos infinitos.

Diferentemente do método de ensino que privilegia a transmissão de conhecimento e em que a avaliação deste conhecimento é dada pela habilidade do aluno em reproduzi-lo, a demonstração construtiva tem como princípio construir o conhecimento a partir de percepções e ações do estudante, constantemente mediadas por estruturas mentais já construídas e/ou que vão se construindo ao longo do processo. A aprendizagem matemática, neste contexto, depende das ações que caracterizam o "fazer matemática": experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar.

É importante ressaltar que a aprendizagem ocorre durante todo o processo do "fazer matemática", que nada mais é que o processo dinâmico 'assimilação *versus* acomodação' de construção simultânea de conhecimento matemático e de estruturas mentais. Fischbein (1994) diz:

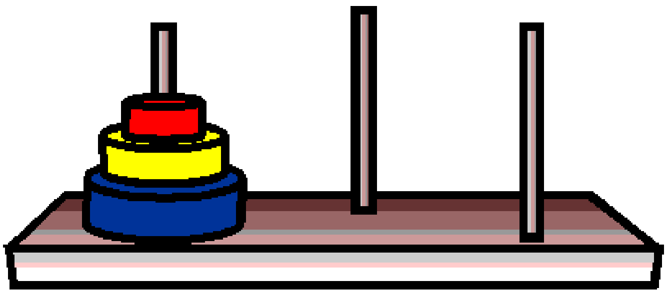
> "*Axiomas, definições, teoremas e demonstrações devem ser incorporados como componentes ativos do processo de pensar. Eles devem ser inventados ou aprendidos, organizados, testados e usados ativamente pelos alunos. Entendimento do sentido de rigor no raciocínio dedutivo, o sentimento de coerência e consistência, a capacidade de pensar proposicionalmente, não são aquisições espontâneas. Estas capacidades não são mais do que potencialidades que somente um processo educativo é capaz de moldar e transformar em realidades mentais ativas.*"

4. PROPOSTAS DE DEMONSTRAÇÃO E CONSTRUÇÃO

Neste capítulo mostraremos algumas demonstrações, deduções e construções matemáticas utilizando alguns dos métodos descritos no capítulo anterior, ressaltando as diferenças entre uma demonstração axiomática e uma demonstração usando algoritmos.

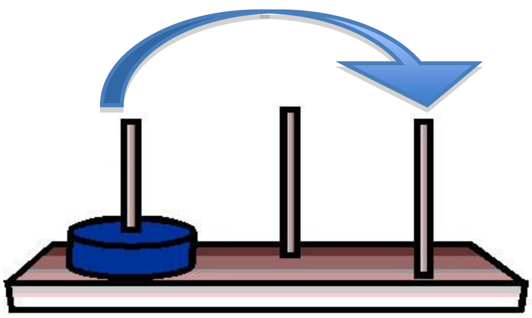
4.1 – Problema da Torre de Hanoi (Usando indução)

A Torre de Hanói é um "quebra-cabeça" que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três.

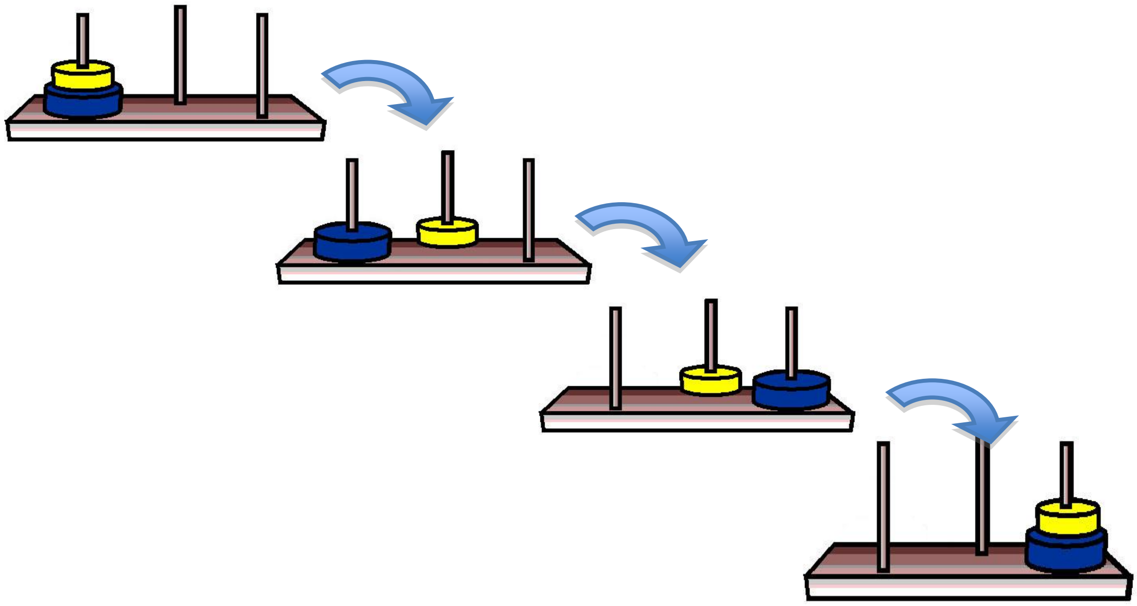


Nossa intenção é explorar, com a Indução Matemática, a sua resolução para um número n de discos e determinar o número mínimo necessário de movimentos com os discos. Para resolver um problema que envolve n elementos, ajuda se consideramos valores pequenos de n, por exemplo:

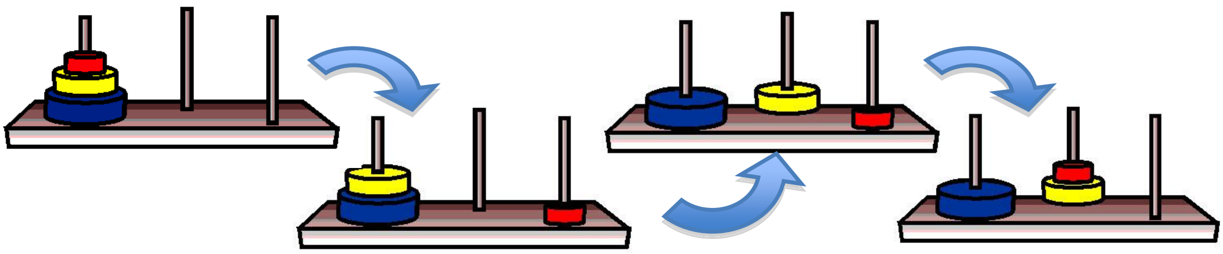
- $n = 1$. Apenas um movimento é suficiente.



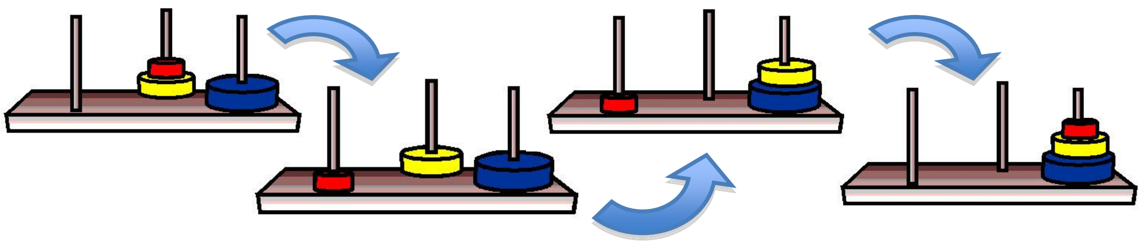
- $n = 2$. São necessários 3 movimentos, no mínimo.



- E para $n = 3$? Vamos começar a tirar algumas conclusões. Para este caso, podemos observar que os três primeiros movimentos sãos os mesmos usados no caso de $n = 2$.



O próximo movimento é passar o disco maior para o pino sem discos. Vejamos agora os próximos movimentos:

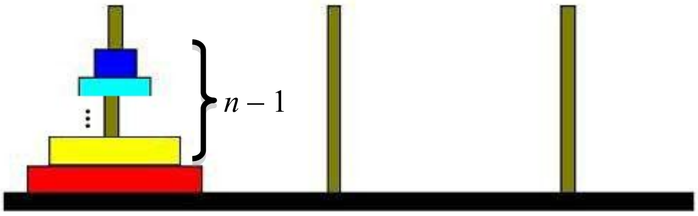


Novamente foi feito o mesmo que no caso $n = 2$, só que agora transferindo a "sub-torre" para o pino com o disco maior.

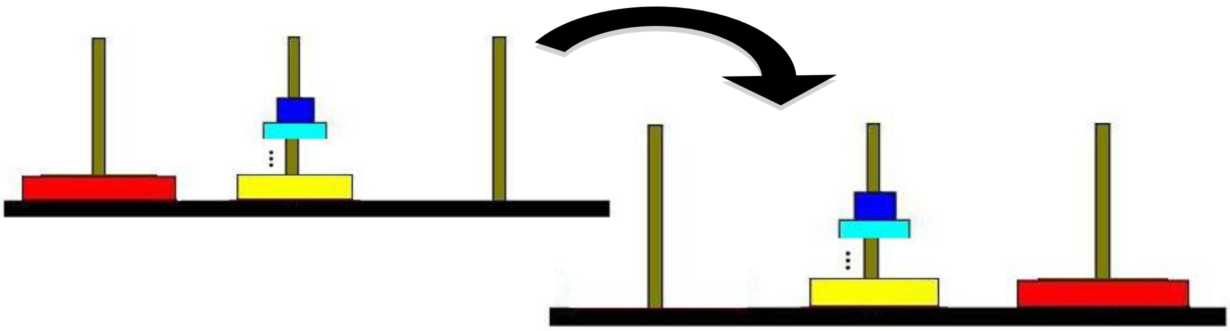
E para 15 discos? Como no exemplo anterior, se eu não souber para 15, mas souber para 14 discos, consigo resolver. Se não souber para 14, vejo o resultado para 13 e assim por diante, até que reste apenas um disco.

Após alguns experimentos, podemos concluir que se soubermos a solução para n saberemos a solução para $n + 1$.

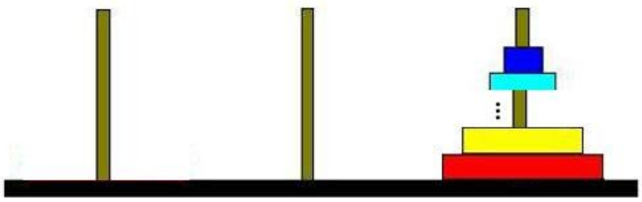
Imaginemos agora uma torre com n discos e que sabemos resolver o problema para $n - 1$ discos:



Para mover o último disco (o disco n) é preciso retirar todos os $n - 1$ discos que estão em cima dele. Como o disco n é o que deve ficar mais embaixo no 3º pino, é preferível que os outros $n - 1$ discos fiquem no 2º pino, que deverão ser removidos um de cada vez, respeitando as regras. Feito isso, movemos o disco n para o 3º pino.



Agora, para mover os $n - 1$ discos para o 3º pino, teremos que repetir o processo, ou seja, passar todos os pinos, de um a um, do 2º para o 3º pino.



Generalizando, seja P(n) o número de movimentos necessários para se mover ***n*** discos. Então:

I. É preciso fazer P(n – 1) movimentos (dos n – 1 discos anteriores para o 2º pino)

II. Um movimento do disco maior para o pino vazio

III. P(n – 1) movimentos (dos n – 1 discos anteriores para o 3º pino)

Logo, temos que:

$$P(n) = P(n-1) + 1 + P(n-1)$$

$$P(n) = 2.P(n-1) + 1$$

Sendo assim:

Número de Discos (n)	*Quantidade de movimentos (P(n))*
1	1
2	2.1 + 1 = 3
3	2.3 + 1 = 7
4	2.7 + 1 = 15

Daí, notamos que a sequência de resultados: 1, 3, 7, 15, 31, 63... é sempre uma potência de 2 menos 1, chegando à fórmula:

$$P(n) = 2^n - 1$$

Como esta fórmula foi obtida através de alguns resultados que experimentamos, usaremos o *Princípio de Indução Matemática* para sabermos se ela é mesmo verdadeira:

i) Sabemos que ela vale para $n = 1 \rightarrow P(1) = 2 - 1 = 1$.

ii) Suponhamos que seja válida para todo n, logo P(n) é válido.

iii) Verificamos agora para $n + 1$.

Pelo resultado obtido anteriormente, vimos que $P(n + 1) = 2.\ P(n) + 1$. Sendo assim, $P(n + 1) = 2.\ (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, como queríamos demonstrar.

Logo, a fórmula $P(n) = 2^n - 1$ é válida para todo n natural.

Nesse exemplo, podemos verificar que a demonstração usando o processo de Indução foi importante, mas a experimentação construtiva com os discos foi necessária para definirmos o P(n), já que no processo de Indução demonstramos o P(n + 1), a partir do P(n).

Para o aluno, a experimentação é importante para a compreensão do processo, onde ele vai construindo a relação para se chegar no resultado esperado. Nesse caso, a indução é usada para validar o resultado encontrado.

4.2 – Fórmula de Bhaskara (ou raízes da equação de 2º grau)

As equações ditas completas do segundo grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, podem ser resolvidas utilizando a conhecida *Fórmula de Bhaskara.* Seu nome foi dado em homenagem ao matemático indiano Bhaskara Akaia, considerado o mais importante matemático indiano do século XII. Eis a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vejamos a seguir, algumas de suas demonstrações:

Demonstração Direta:

Usamos a demonstração da Fórmula de Bhaskara como exemplo da Demonstração Direta, no capítulo 2. Aqui, mostraremos um outro tipo de demonstração direta para essa fórmula.

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$. Dividindo os dois lados da equação por a e completando quadrados, obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

E extraindo a raiz:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mais uma vez, podemos observar que foram usados alguns artifícios para chegarmos ao resultado esperado.

Método de Viète

Embora ainda não se usasse o formalismo atual, o processo para resolver problemas envolvendo as atuais equações do 2° grau resumia-se na receita usada por Bhaskara. Do século XV ao XVII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representar a resolução da equação do 2° grau. François Viète (1540 – 1603), matemático francês, propôs uma mudança de variáveis.

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e seja $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares. Substituindo na equação, temos:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0 \therefore au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

Resolvendo a equação em v, temos:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

Podemos eliminar o coeficiente de v fazendo:

$$2au + b = 0 \therefore u = -\frac{b}{2a}$$

Substituindo na equação:

$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

Desenvolvendo:

$$4a^2v^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac = 0 \therefore 4a^2v^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$4a^2v^2 = b^2 - 4ac \therefore v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \therefore v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

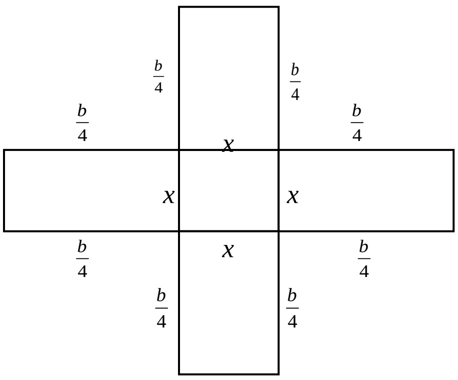
Como colocado anteriormente, $x = u + v$ e $u = -\frac{b}{2a}$. Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

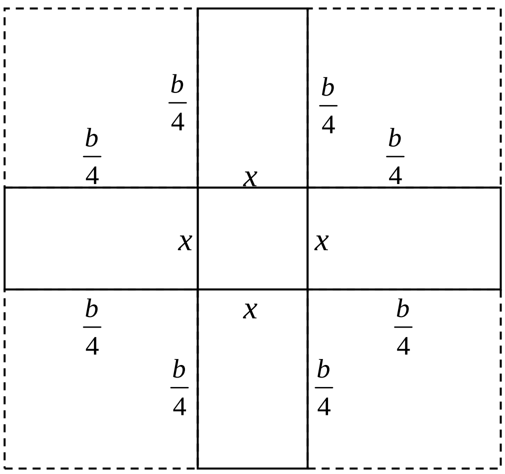
Prova (e não Demonstração) Geométrica

Na Grécia, as equações de 2º grau eram resolvidas por meio de construções geométricas. Antes de Bhaskara, no princípio do século IX D.C., o matemático árabe Al-Kowarismi, influenciado pela álgebra geométrica dos gregos, resolveu, metodicamente, as equações do segundo grau, chegando à fórmula do modo descrito a seguir.

Al-Kowarismi interpretava, geometricamente, o lado esquerdo da igualdade $x^2 + bx = c$ como sendo uma cruz constituída por um quadrado de lado x e por quatro retângulos de lados $\frac{b}{4}$ e x, como mostra a figura:



A ideia é completar essa cruz com quadrados de lado $\frac{b}{4}$, para obter um quadrado perfeito de lado $x + \frac{b}{2}$.



Usando este artifício geométrico, Al-Kowarismi demonstrou que se adicionando quatro vezes $\frac{b^2}{16}$ (soma das áreas dos quatro quadrados de lado $\frac{b}{4}$) ao lado esquerdo da equação $x^2 + bx = c$, obtinha-se $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$, que é a área do quadrado de lado $x + \frac{b}{2}$.

Sendo assim:

$$x^2 + bx + 4\frac{b^2}{16} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Portanto a equação $x^2 + bx = c$ poderia ser escrita como:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

Desenvolvendo, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4c + b^2}}{2}$$

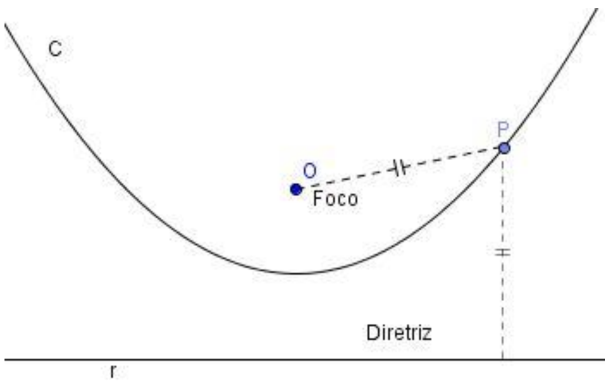
Que se trata de um caso particular da Fórmula de Bhaskara, para $a = 1$.

Por também tratar de valores que podem ser representados como medidas de figuras planas, esse método trata-se de uma prova, e não de uma demonstração, não pode ser generalizado.

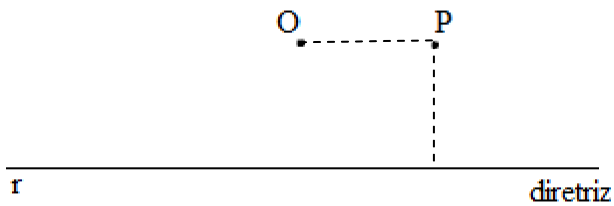
É claro que, para resolver esse tipo de equação, um aluno do ensino fundamental usará a fórmula pronta. Mesmo assim, o uso das diversas demonstrações pode colaborar para a construção do conhecimento, levando a um melhor entendimento da ferramenta que está sendo utilizada.

4.3 – Construção Algorítmica da Parábola

Definição: Uma parábola é um conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado (chamado de foco) e de uma reta dada (chamada de diretriz). É uma curva plana.



Partindo da definição, dado um ponto P, não pertencente à reta r (vide figura a seguir), como saber se este ponto pertence ou não a parábola formada pela reta diretriz r e tendo o ponto O como foco?



A Geometria Analítica estuda a geometria por meio de coordenadas cartesianas e álgebra, onde é utilizado o raciocínio dedutivo, a partir de axiomas e teoremas da geometria euclidiana, para a obtenção de proposições verdadeiras.

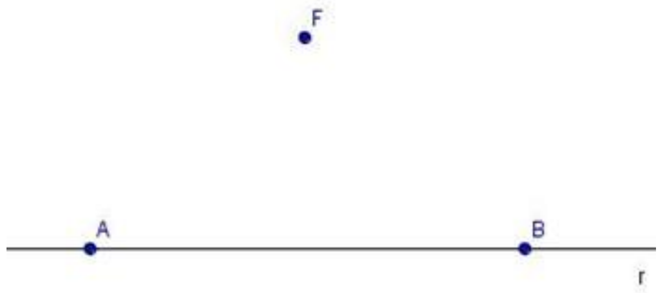
Assim, no nosso caso, para verificarmos se um ponto pertence ou não a parábola, devemos considerá-la em um eixo cartesiano e, usando a definição de distância entre dois pontos verificamos a sua definição.

Neste caso, usando a fórmula da distância entre dois pontos, o aluno consegue verificar se o ponto pertence à parábola, mas não é capaz de visualizá-lo. De uma maneira bem simples e experimental, poderíamos pedir aos alunos que medissem a distância do ponto P à reta *r* e ao ponto O. Pela própria definição de parábola, se as distâncias forem equivalentes, o ponto P pertence à parábola.

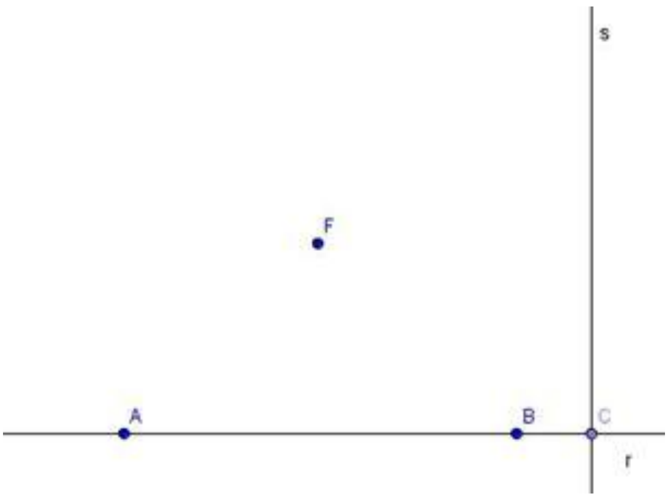
Depois de definido que o ponto P pertence à parábola, como faríamos para encontrar todos os pontos pertencentes a ela?

Vejamos, a seguir, o passo a passo usando o programa Geogebra, que nos permite fazer construções mais eficazes do que com régua e compasso.

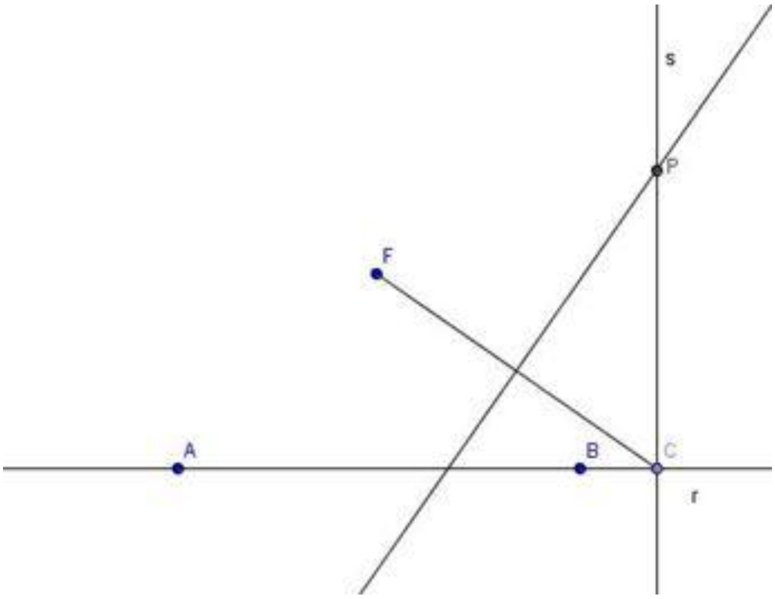
Sejam a reta r que passa pelos pontos A e B e o ponto F, respectivamente, a diretriz e o foco da parábola.



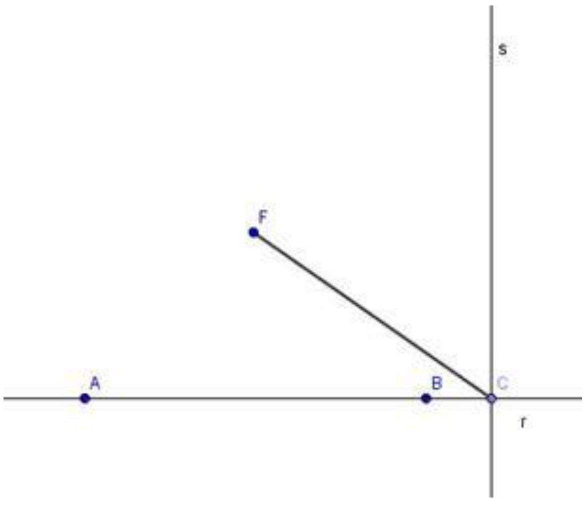
Pela definição, a distância de um ponto P, pertencente à parábola, à reta r deve ser a mesma que a sua distância ao ponto F. Então, vamos marcar no plano um ponto P tal que *d* (P, *r*) = *d* (P, F). Marcamos, então, um ponto C na reta r e traçamos por ele uma reta s, perpendicular à diretriz r, onde marcaremos o ponto P.



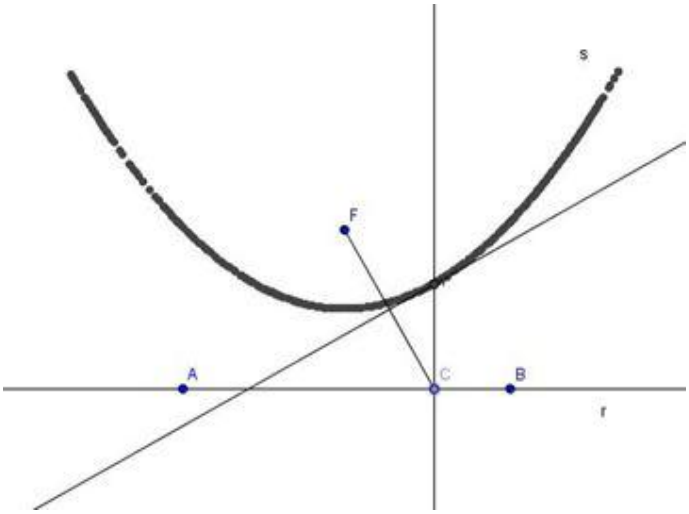
Agora, precisamos definir em que posição o ponto P deve estar na reta s, de modo que sua d(P,C) = d(P,F). Para isso, traçamos um triângulo de vértices P, C e F isósceles, que garante a congruência dos lados PC e PF. Começamos traçando o segmento FC:



Traçamos a mediatriz do segmento FC, a interseção dessa mediatriz com a reta s é o ponto P. Em um triângulo isósceles, a mediatriz se coincide com a altura. Como estamos buscando todos os pontos onde a distância ao foco é a mesma distância à diretriz, estamos então buscando todos os triângulos isósceles que possuem o ponto P, o foco F e um ponto da reta r como vértices.



Ao deslocarmos o ponto C, pela reta r, encontramos a parábola.



(Notemos que, por causa da representação numérica do software a parábola não é contínua, ou seja, não se trata realmente de ma parábola, mas apenas uma representação.)

Através da construção algorítmica o aluno pode compreender melhor a definição da cônica, além de experimentar os conceitos geométricos sem precisar utilizar a álgebra, no primeiro momento. É claro que o uso das coordenadas se faz necessário, principalmente na resolução de problemas de Geometria Analítica, mas passar pelo processo de construção é importante para o desenvolvimento do raciocínio e o entendimento concreto da parábola. Além disso, a experimentação nessa construção permite responder perguntas como: O que aconteceria se o foco se aproximasse ou se afastasse da reta? O que aconteceria aos pontos se a reta diretriz mudasse de direção? Entre outras.

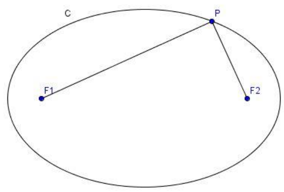
O que se deve levar em consideração é onde o aluno tem mais chance de aprendizado? Na dedução algébrica da equação da parábola ou na sua construção? No processo acima, o aprendizado é construído, partindo do experimento do aluno.

Outros tipos de demonstrações podem provar que existem pontos que formam essa parábola a partir da sua definição, mas não mostra como encontrá-los e como construí-la. Dessa forma, a construção algorítmica se faz necessária antes da demonstração algébrica, como uma introdução para o uso do cálculo algébrico, não menos importante.

4.4 – Construção Algorítmica da Elipse

Definição:

Uma elipse é um conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2 (denominados focos), é constante e maior do que a distância entre eles.



Construção Algorítmica da Elipse

Aqui cabem os mesmos questionamentos que fizemos em relação à parábola. Com uma simples medição, podemos verificar se um ponto P dado pertence ou não à elipse, e para encontrar todos os pontos que formam essa elipse seguiremos os passos da sua construção.

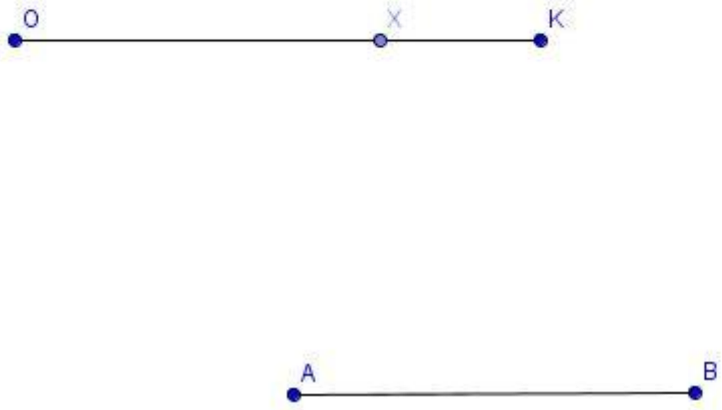
Vamos considerar os pontos A e B, descritos a seguir, como sendo os focos da elipse que desejamos construir.

De acordo com a definição de elipse apresentada, a soma das distâncias de um ponto P, pertencente à elipse, a esses dois pontos é sempre uma constante. Sendo assim, fixaremos essa distância *k*, como o comprimento do segmento OK, de maneira que OK > AB (desigualdade triangular)[5]:

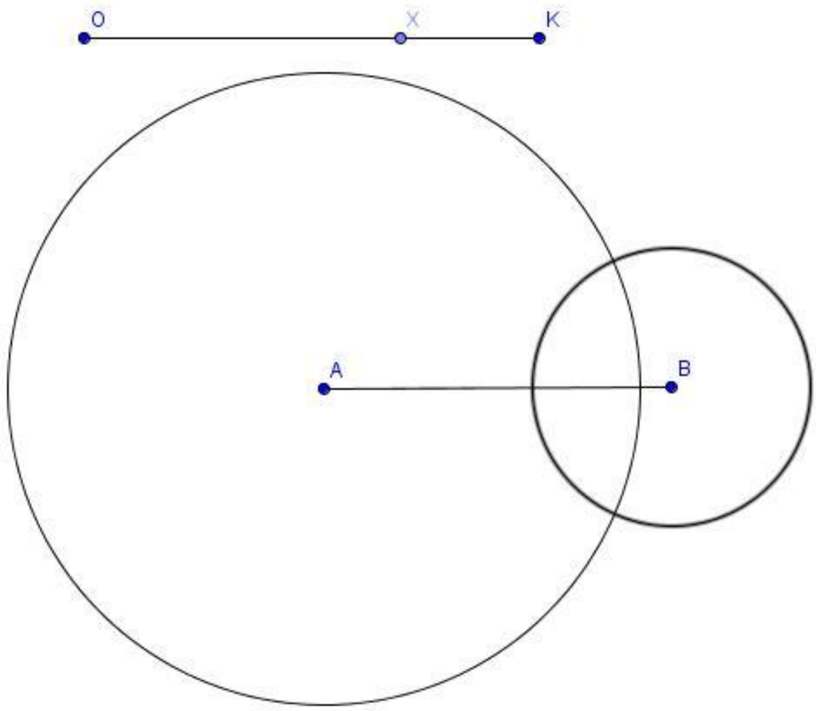
Em seguida, marcamos um ponto X no segmento OK, para determinar as medidas dos pontos da elipse aos focos A e B:

---

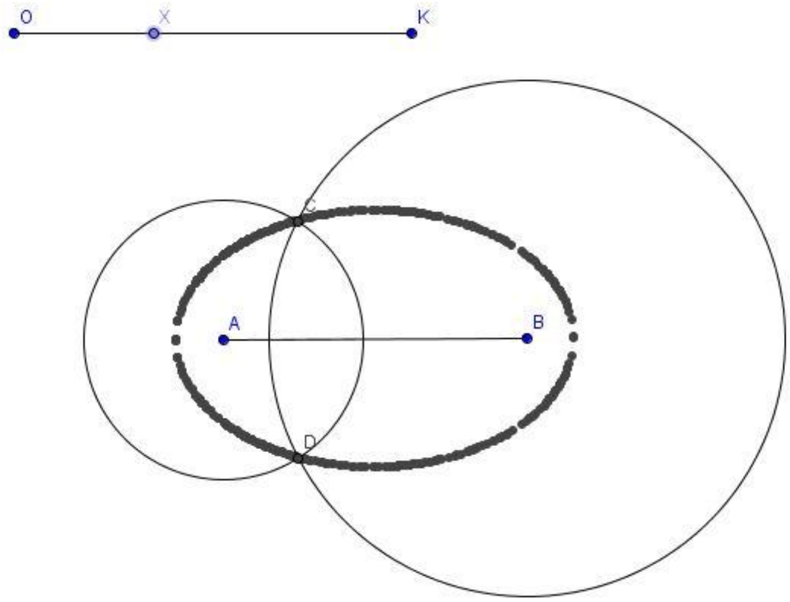
[5] A desigualdade triangular tem origem na geometria euclidiana e refere-se ao teorema que afirma que, num triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados.



Marcamos um círculo com entro em A e raio OX e outro, com centro em B e raio XK:



Usamos o círculo pelo fato de que a distância de seus pontos ao centro é sempre constante. As interseções entre os círculos determinam pontos da elipse, que se forma ao variarmos a posição do ponto X:



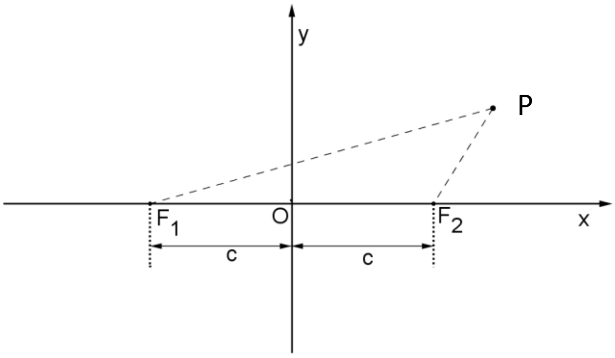
Podemos ver que parte do lugar não é desenhado. Isto é porque na proximidade das tangentes verticais, o número de pontos calculados é insuficiente para obter um caminho contínuo.

Dedução Axiomática – Equação reduzida da Elipse

A equação reduzida da elipse permite, de forma algébrica, saber a localização de seus focos, bem como saber se um determinado ponto pertence ou não a elipse. Partindo da construção anterior, pode ficar mais significativo para o aluno entender o raciocínio apresentado a seguir para a dedução desta equação.

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos no plano e $2c > 0$ a distância entre eles. Seja a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico determinado pelos pontos P de coordenadas cartesianas (x, y) tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ denomina-se **elipse**, onde d representa a distância entre os pontos do plano. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da elipse.

Para obtermos a equação reduzida da elipse, vamos considerar o sistema ortogonal de coordenadas, onde o foco pertença ao eixo Ox. Sendo assim, sejam F1 = (– c, 0) e F2 = (c, 0), como mostra a figura a seguir:



De acordo com a definição apresentada, o ponto P = (x, y) pertencerá à elipse se, e somente se, $d\,(P, F_1) + d\,(P, F_2) = 2a$. Fazendo os desenvolvimentos necessários, obtemos: Elevando os dois membros ao quadrado novamente, obtemos:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Definindo $a^2 - c^2 = b^2$ e dividindo tudo por a^2b^2, podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

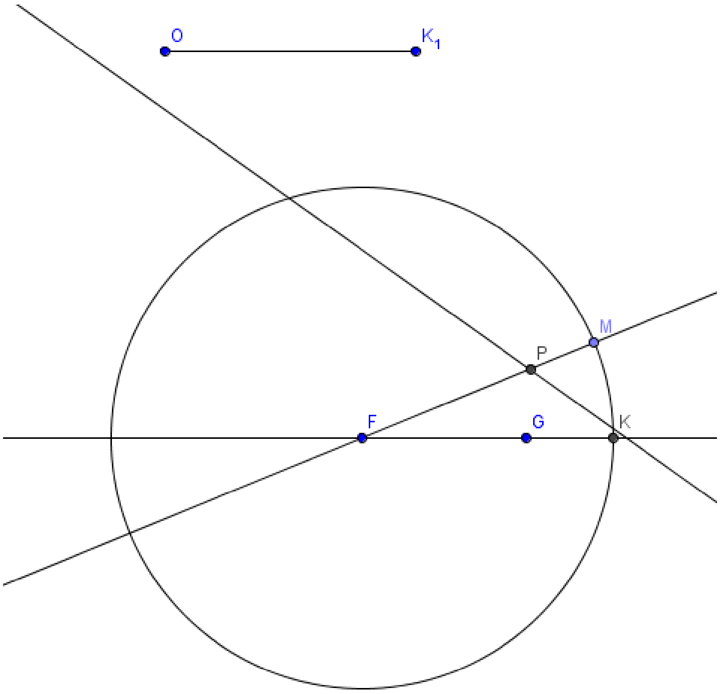
Podemos comparar esse tipo de demonstração a demonstração direta, e notemos que foram usados alguns artifícios para concluí-la. Mesmo assim, vale ressaltar a importância e a praticidade dessa dedução. Além de estimular o raciocínio lógico dedutivo, estimular o aluno a deduzir fórmulas pode fazer com que ele tenha um melhor entendimento. A fórmula pode ser de grande ajuda na resolução de exercícios, mas não podemos esquecer que o aprendizado tem que ser priorizado.

A construção da elipse permite que o aluno visualize a sua definição e, fazendo experimentos com diversos conceitos geométricos, chegue à conclusão de como encontrar seus pontos sem fazer uso do plano cartesiano. Após esse processo, a dedução da equação da elipse pode se tornar concreta.

4.5 – Generalização das Cônicas (Apresentada por Roger Cuppens no livro "Faire de La Géométrie em jouant abec Cabri-Géométre)

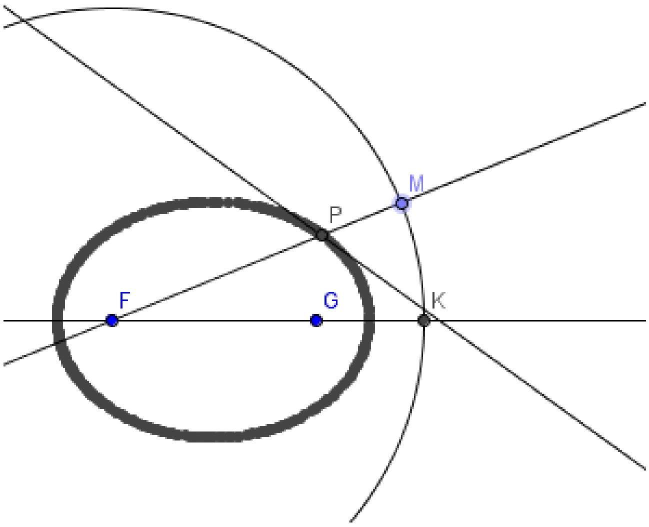
Observe esse outro método de construção da elipse:

1. Traçar o círculo c de centro F e raio OK.
2. Marcar um ponto M no círculo c.
3. Determinar o ponto P: interseção da mediatriz m de G e M com o segmento FM.



O lugar geométrico do ponto P quando M percorre o círculo é a elipse procurada.

Vê-se, por todos os pontos de vista (número de passos de construção, o número de elementos, o alinhamento final dos pontos que formam a elipse), esta construção é mais elevada que a anterior.

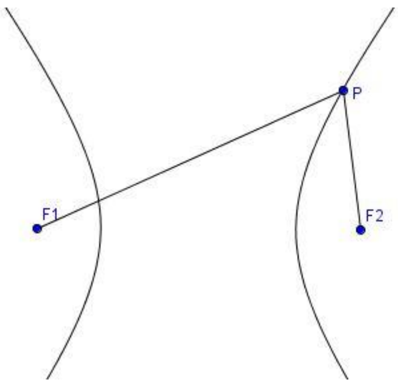


Essa mesma construção pode ser generalizada para outras cônicas, como é o caso da hipérbole que veremos a seguir. Trabalhando essa construção em sala de aula fica notável as semelhanças e as diferenças entre as cônicas sem precisar de suas equações.

4.6 – Construção Algorítmica da Hibérbole

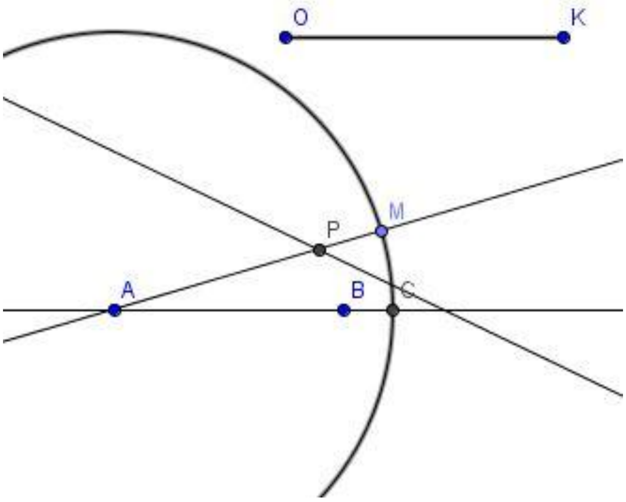
Definição:

É o conjunto de todos os pontos coplanares para os quais as diferenças das distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, denominados focos, é constante.



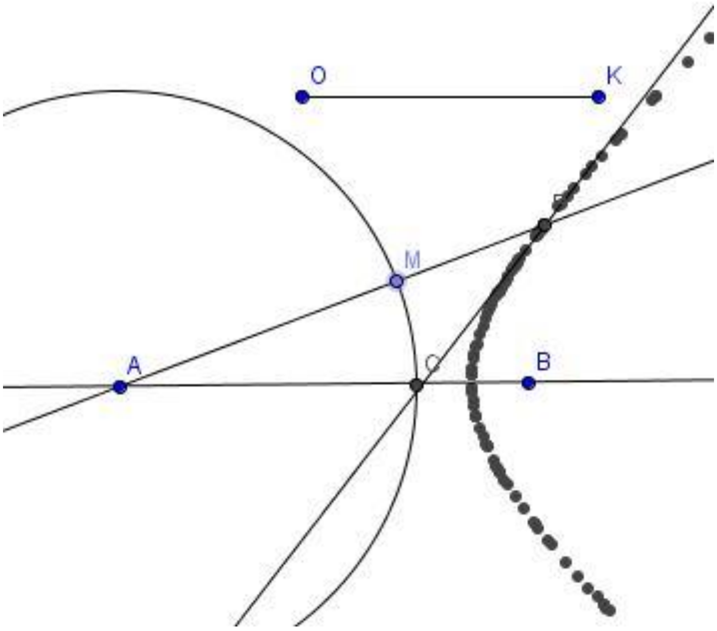
Construção Algorítmica da Hipérbole

Diferente da elipse em que a medida constante é a soma das distâncias, na hipérbole a constante é a diferença entre essas distâncias. Sendo assim, vamos partir da construção da elipse, apresentada no item anterior, para chegarmos à hipérbole.



- Traçamos o círculo de centro em A e raio OK.
- Marcamos um ponto M neste círculo.
- Determinamos o ponto P: interseção da mediatriz entre B e M e o segmento AM.
- A elipse será formada pela localização do ponto P, quando o ponto M percorre o círculo.

Na construção acima, quando deslocamos o ponto B ao exterior do círculo, obtemos o ponto P tal que |PA – PB| = AC (distância OK). A hipérbole será formada ao deslocarmos o ponto M ao longo do círculo.

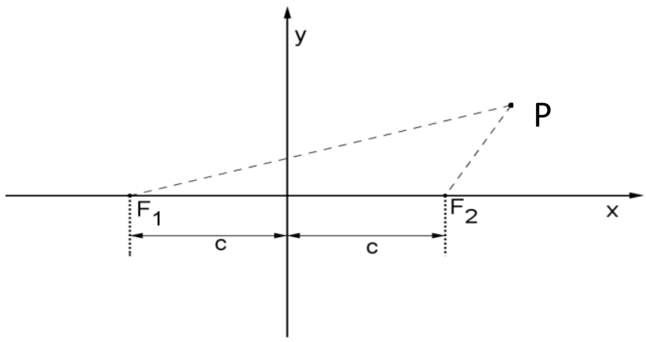


Dedução Axiomática da Equação Reduzida da Hipérbole

Após a construção da hipérbole, de maneira generalizada, vamos algebrizar a sua definição:

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos no plano e $2c > 0$ a distância entre eles. Seja a um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico determinado pelos pontos P de coordenadas cartesianas (x, y) tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ denomina-se **hipérbole**, onde d representa a distância entre os pontos do plano. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole.

Para obtermos a equação reduzida da hipérbole, vamos considerar o sistema ortogonal de coordenadas, onde $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, como mostra a figura a seguir:



De acordo com a definição apresentada, o ponto P = (x, y) pertencerá à hipérbole se, e somente se, d (P, F_1) – d (P, F_2) = $\pm 2a$, logo:

$$d\,(P, F_1) = \pm 2a + d\,(P, F_2),$$

Fazendo o devido desenvolvimento, obtemos: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

4.7 – Algoritmo da Divisão Euclidiana

Teorema

Sejam a e b dois números inteiros com $b > 0$. Existem dois únicos números inteiros tais que:

$$a = bq + r$$

Demonstração 1[6] (Por Contradição)

Existência: Nas condições do Teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão de a por b.

Consideremos $a > b$ e, enquanto fizer sentido nos números naturais, os números:

$$a,\ a - b,\ a - 2b,\ \ldots,\ a - n \cdot b,\ \ldots$$

Pelo Princípio da Boa Ordenação[7], o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento r = a – q.b. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que r < b.

Se b|a (b divide a), então r = 0 e nada mais temos a provar. Se, por outro lado, se b não divide a, então $r \neq b$, e, portanto basta mostrar que não pode ocorrer r > b. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural c < r, tal que r = c + b.

Consequentemente, sendo $r = c + b = a - q.b$, teríamos:

[6] Demonstração baseada na demonstração descrita no Material do PROFMAT referente a Unidade 2 – Divisão Euclidiana da disciplina de MA14.
[7] Também conhecido por Princípio da Boa Ordem ou Princípio do Menor Inteiro, afirma que todo subconjunto não vazio do conjunto dos números inteiros possui um menor elemento.

$$c = a - (q + 1).b \in S, \text{ com } c < r,$$

contradição com o fato de *r* ser o menor elemento de *S*.

Portanto, temos que $a = bq + r$, com $r < b$, o que prova a existência de *q* e *r*.

Unicidade: Notemos que, dados dois elementos distintos de *S*, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de *b* é pelo menos *b*. Logo, se $r = a - b.q$ e $r' = a - b.q'$, com $r < r' < b$, teríamos $r' - r \geq b$, o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, absurdo. Portanto, $r = r'$.

Daí segue-se que $a - b.q = a - b.q'$, o que implica que $b.q = b.q'$ e, portanto, $q = q'$.

Demonstração 2. (Por Indução)

Existência: Suponhamos que *a* é um número natural. Usaremos o Princípio da Indução, fazendo a indução sobre *a*.

Para $a = 1$, temos:

- No caso $b = 1$: $q = 1$ e $r = 0$, pois $1 = 1.1 + 0$.
- No caso $b > 1$: $q = 0$ e $r = 1$, pois $1 = 0.b + 1$.

Suponhamos, agora, o algoritmo válido para $a = n$, isto é, $n = b.q + r$, com $0 \leq r < b$.

Sendo assim, $n + 1 = b.q + r + 1$. Como $0 \leq r \leq b - 1$, vamos analisar os casos $0 \leq r \leq b - 2$ e $r = b - 1$ separadamente:

→Se $r = b - 1$ então $r + 1 = b$, o que resulta em $n + 1 = q.b + b = (q + 1).b$. Logo $n + 1$ dividido por *b* tem $q + 1$ como quociente e resto zero.

→Se $0 \leq r \leq b - 2$ então $1 \leq r + 1 \leq b - 1$, o que resulta em $n + 1 = q.b + (r + 1)$, onde $1 \leq (r + 1) \leq b - 1$.

Portanto, o algoritmo também é válido para $a = n + 1$ e, pelo Princípio da Indução, é válido para todo número natural a.

Expandindo para os demais números inteiros:

De $a = q.b + r$, com $0 \leq r < d$, segue que:

Se r = 0, temos: $-a = (-q)b + 0$. Caso contrário, $-a = (-q)b - r = (-q)b - b + b - r = (-q - 1).b + (b - r)$. Como $0 \leq r < b$, então, $0 < b - r < b$. Desse modo, o algoritmo é válido para todo inteiro negativo.

Para $a = 0$, temos zero como quociente e resto, pois $0 = 0.b + 0$.

Sendo assim, o Algoritmo da Divisão é válido para todo número inteiro.

Unicidade: Resta-nos mostrar que os números inteiros q e r são únicos, para cada a e b dados. Suponhamos que existam dois inteiros x e y, tais que $a = q.b + r$ e $a = x.b + y$, com $0 \leq r < b$ e $0 \leq y < b$ e $x < q$. Logo, $x + 1 \leq q$, uma vez que x e q são inteiros.

Sendo assim, podemos concluir que $r = a - q.b \leq a - (x + 1).b = a - x.b - b = y - b < 0$. Contradição, pois $r \geq 0$. O mesmo raciocínio pode ser usado para o caso em que $x > q$. Pela propriedade da Tricotomia[8], só resta $x = q$. Portanto, $a = q.b + r$ e $a = q.b + y$, o que implica $r = y$ e assim, a unicidade está provada.

Por Construção Algorítmica: Método das Subtrações Sucessivas

Antes de introduzir ao aluno o algoritmo tradicional da divisão, é preciso que ele compreenda a divisão como o processo de "quantas vezes uma quantidade cabe dentro de outra". O algoritmo que apresentaremos a seguir utiliza esse conceito.

Vamos considerar a divisão de a por b.

- Sendo a > b, então diminuímos b de a, repetidas vezes, até não ser mais possível.
- Fazendo algumas tentativas, encontramos o maior valor q, tal que b.q < a.
- a = b.q + r. Se r < a, a divisão está concluída, se não, repetimos o processo da subtração.
- Como a diferença diminui, depois de a – b repetições, o processo se exaure.

[8] Em matemática, tricotomia é a propriedade de uma relação de ordem que, para quaisquer x e y, exatamente um dos seguintes ocorre: $x < y$, $x = y$ ou $x > y$.

Só após ter trabalhado bastante o algoritmo das divisões sucessivas é que deve-se introduzir o algoritmo tradicional da divisão, visando obter êxito no aprendizado deste, podendo-se até utilizar o material dourado[9]. Neste processo, o aluno pode fazer os experimentos necessários a fim de melhorar a compreensão e adquirir maior segurança no desenvolvimento de todos os passos do algoritmo.

4.8 – Divisão de Polinômios

Divisão de polinômios é apresentada pela primeira vez no 8º ano do ensino fundamental e, geralmente, os alunos tem dificuldade em seu aprendizado. Vejamos a seguir como esse assunto é apresentado em um livro didático:

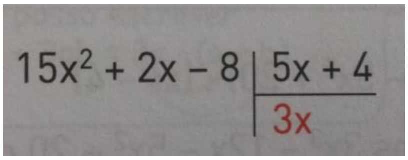
DIVISÃO DE POLINÔMIO POR POLINÔMIO

Analise os exemplos com atenção. Junte-se a um colega e procurem justificar cada etapa da resolução. Vamos usar o processo da chave, que está descrito abaixo:

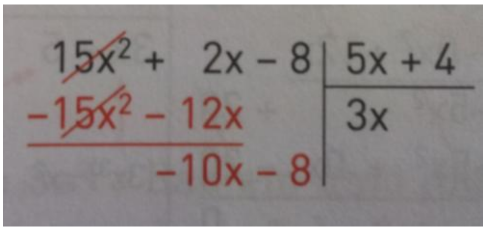
1º) $(15x^2 + 2x - 8) : (5x + 4)$

a) Dividimos o 1º termo do dividendo pelo 1º termo do divisor:

$(15x^2) : (5x) = 3x$

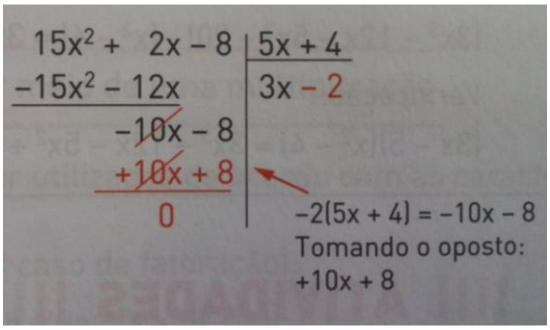


b) Multiplicamos 3x.(5x + 4) = 15x2 + 2x. Para isso, mudamos os sinais de 15x2 + 12x e somamos a 15x2 + 2x.



[9] O Material Dourado é um dos muitos materiais idealizados pela médica e educadora italiana Maria Montessori para o trabalho com matemática. Embora especialmente elaborado para o trabalho com aritmética, a idealização deste material seguiu os mesmos princípios montessorianos para a criação de qualquer um dos seus materiais, a educação sensorial.

c) Repetimos o processo dividindo o 1º termo de – 10x – 8 pelo 1º termo de 5x + 4, ou seja, (– 10x) : (5x) = – 2.



d) Então, $(15x^2 + 2x - 8) : (5x + 4) = 3x - 2$. Como o resto é zero, a verificação fica assim:

$(3x - 2) \,.\, (5x + 4) = 15x^2 + 12x - 10x - 8 = 15x^2 + 2x - 8$

2º) $(6x^4 - x^3 - 13x^2 + 5x - 16) : (6x^2 - x + 5)$

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{6x^4} - \cancel{x^3} - 13x^2 + 5x - 16 & 6x^2 - x + 5 \\ \cline{2-2}
\underline{-\cancel{6x^4} + \cancel{x^3} - 5x^2} & x^2 - 3 \\
-\cancel{18x^2} + 5x - 16 & \\
\underline{\cancel{18x^2} - 3x + 15} & \\
2x - 1 &
\end{array}
$$

$(6x^4) : (6x^2) = x^2$

$x^2\,(6x^2 - x + 5) = 6x^4 - x^3 + 5x^2$

$(-18x^2) : (6x^2) = -3$

$(-3) \,.\, (6x^2 - x + 5) = -18x^2 + 3x - 15$

(6x4 – x3 – 13x2 + 5x – 16) : (6x2 – x + 5) = x2 – 3 e resto 2x – 1.

A divisão de polinômios é apresentada usando o algoritmo da divisão euclidiana.

Lema da Divisão de Euclides:

Sejam f e g polinômios, com $g \neq 0$. Então existem polinômios q e r tais que

$$f = qg + r$$

em que $r = 0$ ou $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Demonstração:

Temos três casos a considerar:

(1) $f = 0$; (2) $f \neq 0$ e gr (f) < gr (g); (3) $f \neq 0$ e gr (f) $\geq$ gr (g).

No primeiro caso, como $0 = 0g + 0$, basta tomar $q = r = 0$. No segundo, como $f = 0g + f$ e, por hipótese, gr (f) < gr (g), basta tomar $q = 0$ e $r = f$ (aqui, gr(f) representa o grau do polinômio f).

Para mostrarmos o terceiro caso, utilizaremos indução no grau de f. Quando tivermos gr(f) = 0, podemos concluir que gr(g) = 0. Mas isso quer dizer que f e g são polinômios constantes e ambos não-nulos. Assim, $f = a_0 \neq 0$, $g = b_0 \neq 0$ e

$$a_0 = \frac{a_0}{b_0} b_0 + 0 .$$

Ou seja, basta tomar $q = (a_0/b_0)$ e $r = 0$.

Consideremos agora o caso em que gr(f) ≥ 1. Sejam m = gr(f) e n = gr(g), com

$$f = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0 \quad e \quad g = b_n x^n + ... + b_1 x + ba_0$$

com $m \geq n$.

Suponhamos, por indução, que o resultado seja válido para todo polinômio de grau menor do que m e maior do que ou igual a n.

Consideremos o polinômio:

$$h = f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} g + h$$

Basta tomar $q = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n}$ e $r = h$.

Se, por outro lado, $h \neq 0$ e gr(h) $\geq$ gr(g), podemos aplicar a hipótese de indução em h, pois gr(h) $\leq m - 1$ = gr(f) – 1. Logo, existem polinômios q_0 e r_0 tais que $h = q_0 g + r_0$. Logo:

$$q_0 g + r_0 = f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} g + h$$

O que acarreta

$$f = (q_0 + \frac{a_m}{b_n} x^{m-n})g + r_0$$

Em que $r_0 = 0$ ou $gr(r_0) < gr(g)$. Basta então tomar $q = (q_0 + \frac{a_m}{b_n} x^{m-n})$ e $r = r_0$.

A demonstração dada acima é dita construtiva e o argumento usado para obter *h* constitui o primeiro passo no **algoritmo da divisão polinomial**. O algoritmo consiste na repetição sucessiva desse argumento, até que se obtenha ou o polinômio nulo ou um de grau menor do que o do divisor. Ou seja, nada mais é que o algoritmo que ensinamos no ensino fundamental e descrito no início dessa seção.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O bloqueio e o fracasso que muitos alunos apresentam em Matemática é preocupante, principalmente para nós que a lecionamos. Fazer com que o aluno seja capaz de não somente resolver questões, mas de entender todo o processo no conhecimento matemático deve ser um objetivo do professor.

Como foi apresentado neste trabalho, uma aula onde o aluno possa fazer experimentos e construções a partir dos conceitos matemáticos pode levá-lo ao êxito no processo de aprendizagem e dá-lo um novo sentido à disciplina de Matemática, buscando resultados positivos.

As demonstrações e construções desenvolvem um importante papel no ensino da Matemática, mas cabe ao professor e aos seus conhecimentos prévios fazer com que esse trabalho dê certo, mediando e argumentando com a turma a fim de alcançarem esses objetivos.

A demonstração matemática tem o seu papel, mas é preciso ressaltar que o aluno passe pela experiência de construção antes dessa demonstração. É na construção, no experimento que o aluno desenvolve o pensar matemático.

Este trabalho é, portanto, dedicado aos professores que procuram aprofundar seus conhecimentos e aprimorar as práticas em suas aulas. É o professor que, através de um discurso questionador, incentivará os alunos a seguir os passos algorítmicos, justificar, explicar, e fundamentar as proposições matemáticas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed.São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

BALACHEFF, N. **Processus de preuve et situations de validation**. Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

BALACHEFF, N.(1982). **Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques**, Grenoble, v. 3, n. 3, 261-304.

BICUDO, I. (2002). **Demonstração em Matemática**. Bolema, ano 15, nº18,79-90, 2002.

BRASIL, MEC. 1999b. **Parâmetros Curriculares Nacionais 5ª a 8ª Série**. Online, http://www.mec.gov.br, 14/10/1999.

CUPPENS, Roger. **Faire de la Géométrie en jouant abec Cabri-Géomètre – Tome II.** Paris, Brochure APMEP nº 105, 1996.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática.** Lisboa, Editora Gradiva, 1995.

DESCARTES, René. **Discurso do Método**. São Paulo, Martins Fontes Editora, 2001.

DEWEY John; MCLELLAN, James. **The Psychology of Number and Its Applications to Methods of Teaching Arithmetic**. Science, 1896.

F. STANAT, Donald; F. McALLISTER, **David. Discrete Mathematics in Computer Science**. Prentice-Hall International Editions, 1997

JOSÉ MACHADO, Nilson. **Matemática e Realidade**. São Paulo, Cortez Editora, Autores Associados, 1987.

HUETE, Juan Carlos Sánchez; BRAVO, José A. Fernández. **O Ensino da Matemática: Fundamentos Teóricos e Bases Pedagógicas.** Porto Alegre, Artmed Editora, 2006. p. 15-22.

LAKATOS, Imre. **Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery**. Cambridge University, 1976.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Rio de Janeiro, GRAFITEX Comunicação Visual, 1991.

RODRIGUES, Margarida Maria Amaro Teixeira. **A Demonstração na Prática Social da Aula de Matemática – Volume 1**. Universidade de Lisboa, Doutoramento em Educação, 2008.

TENÓRIO, Robinson Moreira. **Construtivismo, Sociedade e História no Ensino da Matemática.** *Sitienbius,* Feira de Santana, n.17, p. 117-127 jul./dez. 1997.

VELOSO, E. **Geometria: temas actuais**. Lisboa: IIE, 1998.

.