UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

FRANCISCA CLÁUDIA FERNANDES FONTENELE

CONTRIBUIÇÕES DA SEQUÊNCIA FEDATHI PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: UMA ANÁLISE DA MEDIAÇÃO DOCENTE EM AULAS DE ÁLGEBRA LINEAR

FORTALEZA
2018

FRANCISCA CLÁUDIA FERNANDES FONTENELE

CONTRIBUIÇÕES DA SEQUÊNCIA FEDATHI PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: UMA ANÁLISE DA MEDIAÇÃO DOCENTE EM AULAS DE ÁLGEBRA LINEAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará – UFC, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Educação. Área de concentração: Educação, Currículo e Ensino.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F763c Fontenele, Francisca Cláudia Fernandes.
Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma análise da mediação docente em aulas de Álgebra Linear / Francisca Cláudia Fernandes Fontenele. – 2018.
192 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

1. Sequência Fedathi. 2. Mediação Docente. 3. Álgebra Linear. 4. Pensamento Matemático Avançado. I. Título.

CDD 370

FRANCISCA CLÁUDIA FERNANDES FONTENELE

CONTRIBUIÇÕES DA SEQUÊNCIA FEDATHI PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: ANÁLISE DA MEDIAÇÃO DOCENTE EM AULAS DE ÁLGEBRA LINEAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará – UFC, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Educação. Área de concentração: Educação, Currículo e Ensino.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

Aprovada em: 16/07/2018

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

____

Prof.ª Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará - UFC

____

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará - UFC

____

Prof. Dr. Plácido Rogério Pinheiro
Universidade de Fortaleza - Unifor

____

Prof.ª Dra. Ivoneide Pinheiro de Lima
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Aos meus pais, Francisco e Antônia.

À minha avó Maria das Dores (*in memoriam*).

Ao meu irmão Eone.

Aos meus avós, Francisco e Adelina.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e oportunidades.

À minha família, em especial meus pais, Francisco e Antônia.

Ao meu orientador, Professor Doutor Hermínio Borges Neto, pelos ensinamentos e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos professores participantes da Banca examinadora, pelas sugestões e contribuições.

À Professora Doutora Maria José Araújo Souza, à Professora Doutora Natália Maria Cordeiro Barroso e ao Professor Doutor Francisco Edisom Eugênio de Sousa, pelas valiosas contribuições e sugestões apontadas nas etapas de qualificação.

À CAPES, pelo apoio financeiro prestado durante o curso.

À equipe que compõe o Laboratório de Pesquisa Multimeios.

Aos colegas das turmas de mestrado e doutorado, pelos estudos e reflexões que contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da FACED/UFC.

À Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, em especial, ao Professor Mestre Márcio Nascimento da Silva, pelo apoio prestado na pesquisa de campo.

À Universidade Estadual do Ceará – UECE, em especial, ao Professor Doutor João Montenegro e ao Professor Doutor Thelmo de Araújo, pela acolhida nas disciplinas de Álgebra Linear.

Aos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UVA, pela participação e contribuições na pesquisa de campo.

RESUMO

Este trabalho discute relações entre a Metodologia de Ensino Sequência Fedathi (SF) e a Teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA), buscando a compreensão de como a ação docente favorece o desenvolvimento do pensamento matemático discente, à medida que possibilita ação-reflexão em sala de aula. Com efeito, o objetivo principal foi compreender como a mediação docente, apoiada na SF, influencia no desenvolvimento do PMA de alunos de licenciatura em aulas de Álgebra Linear. Caracterizou-se como um estudo de natureza qualitativa, cujas questões de pesquisa remeteram ao estudo de caso. A investigação de campo dividiu-se em três etapas: (a) observação de uma disciplina de Álgebra Linear; (b) realização de um curso de extensão; e (c) grupo de estudos, com participantes da etapa anterior. As duas primeiras etapas trataram do ensino na Álgebra Linear utilizando a SF e a terceira cuidou de seu estudo como metodologia de ensino. Nos resultados, identificou-se, na mediação docente, o incentivo à mobilização de variados processos mentais, desencadeados mediante o uso de perguntas, que propiciaram a mediação dialogada, bem como do uso do *software* Geogebra e da maneira como as representações matemáticas foram exploradas. Além disso, foram explorados o tratamento e a conversão dos registros de representação. Os processos de generalização e abstração foram notados com maior ênfase na ação/mediação docente, em especial, quando se incentivava os alunos a observar a estrutura matemática subjacente ao conteúdo. Além disso, foram identificadas evidências de que a SF pode contribuir não apenas para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, mas, também, para o desenvolvimento social, afetivo e metacognitivo, que contribuem significativamente para a predisposição do aluno em adquirir conhecimentos e pôr em prática o raciocínio investigativo. Concluiu-se que a SF pode propiciar um ambiente favorável ao desenvolvimento de processos de PMA de alunos de licenciatura em Matemática nas aulas de Álgebra Linear, uma vez que favorece a ação discente e orienta o professor quanto à maneira de interagir e realizar a mediação do conteúdo em sala de aula, de modo a respeitar o tempo de maturação do aluno, seu desenvolvimento cognitivo, levando-o a entender os conceitos de modo significativo, sem se limitar à memorização de regras e manipulação algorítmica.

Palavras-Chave: Sequência Fedathi. Mediação Docente. Álgebra Linear. Pensamento Matemático Avançado.

ABSTRACT

This paper discusses the relationship between the Fedathi Sequence (SF) teaching methodology and the Advanced Mathematical Thinking (PMA) theory, aiming to understand how the teaching action favors the development of student mathematical thinking, as it enables reflection-action in the classroom. class. In this context, the main objective was to understand how the teacher mediation supported in SF, influences the development of the PMA of undergraduate students in classes of Linear Algebra. It was characterized as a qualitative study whose research questions referred to the case study. The field investigation was divided into three stages: (a) observation of a Linear Algebra discipline; (b) completion of an extension course; and (c) study group, with participants from the previous stage. The first two steps addressed the teaching in Linear Algebra using the SF and the third dealt with its study as teaching methodology. In the results it was identified, in the teacher mediation, the incentive to the mobilization of different mental processes, triggered by the use of questions, that facilitated the dialogical mediation, as well as the use of Geogebra software and the way mathematical representations were explored. In addition, the processing and conversion of representation records were explored. The processes of generalization and abstraction were noted with more emphasis on teacher action / mediation, especially when students were encouraged to observe the mathematical structure underlying the content. In addition, evidence has been found that SF can contribute not only to students 'cognitive development but also to social, affective and metacognitive development, which significantly contribute to students' willingness to acquire new knowledge and put into practice the research reasoning. We conclude that SF can provide a favorable environment for the development of PMA processes for undergraduate students in Mathematics in Linear Algebra classes, since it favors student action and guides the teacher as to how to interact and mediate content in classroom, so as to respect the student's maturation time, their cognitive development, leading him to understand concepts in a meaningful way, without limiting himself to rote memorization and algorithmic manipulation.

Key Words: Fedathi Sequence. Teaching Mediation. Linear Algebra. Advanced Mathematical Thinking.

RESUMÉ

Cet article traite de la relation entre la méthodologie d'enseignement de Fedathi Sequence (SF) et la théorie de la pensée mathématique avancée (PMA), dans le but de comprendre comment l'action d'enseignement favorise le développement de la pensée mathématique des élèves, dans la mesure où elle permet la réflexion-action en classe. salle de classe Dans ce contexte, l'objectif principal était de comprendre comment la médiation d'enseignants appuyée en SF influence le développement de la PMA des étudiants de premier cycle dans les classes d'algèbre linéaire. Il s'agissait d'une étude qualitative dont les questions de recherche se rapportaient à l'étude de cas. L'enquête sur le terrain a été divisée en trois étapes: (a) l'observation d'une discipline de l'algèbre linéaire; (b) avoir terminé un cours supplémentaire; et (c) groupe d'étude, avec des participants du stade précédent. Les deux premières étapes ont été consacrées à l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'aide de la SF et la troisième à son étude en tant que méthodologie d'enseignement. Les résultats ont mis en évidence, dans la médiation des enseignants, l'incitation à la mobilisation de différents processus mentaux, déclenchée par l'utilisation de questions, facilitant la médiation dialogique, ainsi que l'utilisation du logiciel Geogebra et la manière dont les représentations mathématiques ont été explorées. En outre, le traitement et la conversion des enregistrements de représentation ont été explorés. Les processus de généralisation et d'abstraction ont été notés en mettant davantage l'accent sur l'action / la médiation des enseignants, en particulier lorsque les élèves étaient encouragés à observer la structure mathématique sous-jacente au contenu. En outre, il a été prouvé que la FS peut contribuer non seulement au développement cognitif des étudiants, mais également au développement social, affectif et métacognitif, ce qui contribue de manière significative à la volonté des étudiants d'acquérir de nouvelles connaissances et de mettre en pratique les connaissances acquises. raisonnement de recherche. Nous concluons que SF peut fournir un environnement favorable au développement de processus PMA pour les étudiants de premier cycle en mathématiques dans les classes d'algèbre linéaire, car il favorise l'action des étudiants et guide l'enseignant dans la manière d'interagir et de gérer le contenu en classe, de manière à respecter le temps de maturation de l'élève, son développement cognitif, l'amenant à comprendre les concepts de manière significative, sans se limiter à la mémorisation par cœur et à la manipulation algorithmique.

Mots clés: Séquence de Fedathi. Médiation pédagogique. Algèbre linéaire. Pensée mathématique avancée.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este estudo dá continuidade às reflexões resultantes da nossa dissertação de mestrado, intitulada: *A Sequência Fedathi no ensino da Álgebra Linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial*, que identificou possíveis alavancas meta[1] em aulas de Álgebra Linear, elaboradas e mediadas segundo a metodologia de ensino Sequência Fedathi, que tem como foco a postura e mediação do professor em sala de aula, visando a criação de um ambiente de ensino investigativo, favorável à construção do conhecimento pelo aluno.

Na nossa perspectiva (FONTENELE, 2013), ao utilizar a Sequência Fedathi no ensino da Álgebra Linear, o professor, em vez de apenas expor os conteúdos, dava oportunidade de ação aos discentes, estimulando-os a refletir sobre os conceitos, trabalhados por meio de situações que os levassem a construção do conhecimento. Estes resultados evocaram novas reflexões sobre a mediação do professor em sala de aula e seus reflexos no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, uma vez que os problemas inerentes ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear se referem, principalmente, às dificuldades que os estudantes enfrentam para tentar compreender noções abstratas, como espaço vetorial, subespaços, base e dimensão.

A Álgebra Linear desempenha importante papel no meio científico em razão das diversas possibilidades de aplicações em variados setores do conhecimento, inclusive no âmbito da própria Matemática. Resumidamente, podemos dizer que se trata de uma ramificação da Álgebra que estuda os espaços vetoriais e suas transformações lineares, lidando com vetores, matrizes e formas quadráticas (LIMA, 2011). Seus conceitos e definições têm caráter abstrato que, dentre outros fatores, contribui para o surgimento das dificuldades no ensino e aprendizagem. Essas fazem com que, muitas vezes, o professor enfatize as tarefas algorítmicas, para fugir das incompreensões conceituais dos alunos, pois é justamente nessa ênfase que se dá na "algoritmização", bem como no excesso de formalismo, que estão os principais entraves no ensino da Álgebra Linear, conforme apontam Dorier (2000; 2008) e Rogalski (1991, 1994). Nesse caso, há poucas oportunidades de se trabalhar o pensamento matemático do estudante, uma vez que este vivencia um ensino marcado pela exposição de conteúdo que ele deve reproduzir, tal qual foi explicado pelo professor.

[1] Segundo Dorier et al. (2000) as "alavancas meta" se referem ao uso, no ensino, de informação ou conhecimento SOBRE Matemática que podem levar os estudantes a refletir, conscientes ou não, tanto sobre o próprio aprendizado na atividade matemática quanto acerca da própria natureza da Matemática.

Autores como Tall (1995), Dreyfus (2002) e Dubinsky (2002) defendem o argumento de que o ensino baseado unicamente na exposição de conteúdo pouco favorece o desenvolvimento cognitivo discente em sala de aula, uma vez que, ao apenas reproduzir o que lhe foi passado, o aluno não adquire o hábito de refletir sobre os conceitos trabalhados e seus porquês matemáticos. É necessário que o estudante, ao chegar ao ensino universitário, possa ser estimulado a passar do pensamento matemático elementar ao pensamento matemático avançado, melhorando, assim, seu modo de lidar com os conceitos, definições e abstrações.

Os referidos autores fazem parte do grupo internacional de Psicologia da Matemática, denominado *Psychology Mathematics Education* (PME), e desenvolvem estudos referentes ao Pensamento Matemático Avançado (PMA), com o qual investigam o desenvolvimento do pensamento matemático, fundamentando-se em aspectos psicológicos e cognitivos, juntamente com fatores didáticos.

Tall (1995, p.14) acentua que a maneira como a Matemática universitária é ensinada, obedecendo a sequência "definição-teorema-prova-exemplo[2]", propicia poucas oportunidades para o desenvolvimento do PMA. Para o autor, os métodos tradicionais de ensino fazem o oposto do que os matemáticos universitários intencionam, uma vez que a enorme quantidade de conteúdo matemático a ser visto no plano universitário faz com que seja difícil para os alunos lidar com a Matemática formal em tempo limitado.

Sob tal aspecto, a visão do autor corrobora os pressupostos da Sequência Fedathi, principalmente no que se refere às críticas ao ensino baseado unicamente em aulas expositivas, que faz muitos estudantes optarem pelo recurso à memorização, sem devido cuidado com a compreensão dos significados intrínsecos aos conceitos, teoremas e provas estudados.

A Sequência Fedathi pode auxiliar o professor na mediação de aulas voltadas para o entendimento conceitual de maneira significativa, à medida que seus pressupostos orientam a ação docente em sala de aula, para possibilitar ao aluno exercitar o raciocínio, mobilizar conhecimentos prévios, agir em busca de solução para as atividades e problemas propostos, com base em situações que visem a um ensino baseado na construção do conhecimento.

Desse modo, compreendemos, que um ensino que proporcione o desenvolvimento do PMA discente pode auxiliar a amenizar os problemas no ensino de Álgebra Linear, uma vez que seu domínio pressupõe habilidades que tornam o aluno mais apto a lidar com os conceitos e definições. Para tanto, é necessário que as atividades trabalhadas sejam planejadas

[2] "definition-theorem-proof-illustration".

considerando os processos que envolvem o PMA, de modo a permitir ao aluno atuar como sujeito de sua aprendizagem.

A ideia de construção do conhecimento matemático aqui adotada advém dos estudos de Jean Piaget (1973, 1980, 1990), que buscaram compreender a gênese do conhecimento, analisando a ação do sujeito sobre objetos, desde a ação sensório-motora até a ação conceitualizada. O termo construção está associado ao desenvolvimento de esquemas mentais pelo aprendiz, cujas ações incorrem em sucessivas assimilações, acomodações e estados de equilíbrios e desequilíbrios, que o tornam cada vez mais apto a adquirir mais conhecimentos.

Não basta, entretanto, que compreendamos os fatores que implicam a aprendizagem, pois é necessária visão atenta sobre a ação docente em sala de aula, ao se abordar os conteúdos matemáticos. Desse modo, no que tange aos aspectos didático-metodológicos, a Sequência Fedathi pode ser um auxílio ao professor para a condução de aulas que propiciem situações que levem os alunos a construir seu conhecimento. A escolha desta metodologia se justifica, além dos fatores já mencionados, também, pelo fato de esta ter sido desenvolvida com suporte em observações do trabalho do matemático profissional.

Pesquisas recentes, tanto no plano internacional (HERLINA, 2015; JOOGANAH; WILLIAMS, 2010), quanto nacional (MARINS, 2014; PRADO, 2012; GERETI, 2014; BERTOLAZI, 2012), revelam que a preocupação com o desenvolvimento do pensamento matemático cresceu nas últimas décadas, sendo a busca por maneiras de desenvolvê-lo em sala de aula um dos principais desafios aos matemáticos e educadores matemáticos na atualidade.

Herlina (2015) investigou a melhoria do pensamento matemático avançado em estudantes que tiveram aulas por meio da Teoria APOS[3] (*Action, Processes, Objects, Schemas*) e mediante a abordagem convencional. Segundo seus resultados, houve melhoria nas habilidades dos alunos com ambas as abordagens, sendo maior com a teoria APOS, porém, a diferença não foi significativa. A autora aponta a necessidade de investigações sobre como contribuir para a melhoria da aprendizagem, principalmente no que se refere aos processos mais difíceis para os alunos, tais como o desenvolvimento do pensamento matemático criativo e a prova matemática. A autora não aborda, no entanto, como seria a mediação docente em sala de aula.

Jooganah e Williams (2010) investigaram a transição do pensamento matemático elementar para o de teor avançado nas perspectivas cognitiva e sociocultural, destacando as

[3] Teoria que descreve a construção de conceitos em Matemática, desenvolvida por Ed Dubinsky com suporte em estudos sobre a abstração reflexiva de Jean Piaget.

dificuldades que os alunos enfrentam ao passarem da Matemática escolar para a universitária, evidenciando que há uma lacuna cognitiva entre os tipos de pensamento envolvidos, resultante do despreparo dos alunos. O estudo destaca as contradições entre os sistemas de ensino e as atividades universitárias e enfatiza a necessidade de mudança destas práticas, de modo que a universidade possa melhor lidar com as dificuldades dos alunos.

No Brasil, Gereti (2014) investigou indícios de processos de Pensamento Matemático Avançado, evidenciados por estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE). Seus resultados apontaram a necessidade de se investigar o modo como professores podem "motivar e provocar" os processos de PMA nos alunos.

Marins (2014) também pesquisou evidências de processos de PMA em estudantes de Matemática ao resolverem tarefas envolvendo o conteúdo de transformações lineares. Segundo os resultados, dos 13 alunos participantes, apenas três manifestaram abstração. A autora conclui que é preciso o professor propiciar o desenvolvimento de atividades que possibilitem a manifestação do PMA.

Bertolazi (2012), investigou os processos de PMA manifestados em registros escritos de estudantes de licenciatura em Matemática ao lidar com tarefas envolvendo sistemas de equações lineares. Dos 17 participantes, apenas três atingiram a abstração matemática, ou seja, foram capazes de sintetizar, formalizar e generalizar pensamentos matemáticos.

Prado (2012) investigou a inserção da calculadora nas situações de aprendizagem propostas ao Ensino Fundamental II, da rede pública do Estado de São Paulo, nos *Cadernos do Professor*, à luz do PMA. A autora conclui que a calculadora pode auxiliar o desenvolvimento do PMA discente com a possibilidade de representação e visualização, contribuindo para chegar à abstração. Recomenda estudos sobre como desenvolver a generalização, que é uma das componentes do PMA a possibilitar que o aluno atinja a abstração.

Esses estudos apontam a necessidade de se olhar para a prática docente universitária, investigando de que modo o professor pode atuar em sala de aula para favorecer o desenvolvimento do PMA de seus alunos. Gereti (2014), Marins (2014) e Prado (2012) sugerem, respectivamente: investigações que orientem como o professor pode motivar os processos de PMA discente; propiciar atividades que possibilitem a manifestação do PMA; e, desenvolver a generalização para atingir a abstração.

Essas constatações sinalizam a importância e a necessidade de se olhar para os aspectos didáticos e pedagógicos que guiam a prática docente, para que esse desenvolvimento se expresse na ação reflexiva do estudante e não se dê centralizado no professor como transmissor do saber e “dono” do conhecimento. Do ponto de vista da aprendizagem, é a ação do estudante sobre o conteúdo e a coordenação dessas ações que o levará a construir um aprendizado mais rico em termos de significados, sobretudo se contar com um ensino que estimule a reflexão e a descoberta.

As lacunas mencionadas por Jooganah e Williams (2010) são indícios de que nem sempre os alunos conseguirão chegar ao domínio das abstrações e prova matemáticas, sem a devida mediação docente. Assim, é importante que o professor se conscientize de seu papel em ultrapasse ao domínio e transmissão do conteúdo, pois ações bem elaboras e refletidas podem auxiliar os alunos a superar os problemas inerentes à transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

A Sequência Fedathi, por sua vez, foi trabalhada com a Matemática do Ensino Superior nas teses de: Barroso (2009), Souza (2010) e Alves (2011); e nas dissertações de: Fontenele (2013), Moreira (2014), Nasserala (2014), Bezerra (2015) e Macedo (2015), sendo que a maioria dessas investigações se deu com foco no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, cujo detalhamento está descrito no capítulo 2.

Somente nós (FONTENELE, 2013) investigamos o uso dessa metodologia no ensino da Álgebra Linear, cujos resultados apontaram que a mediação docente baseada na SF rompeu com os paradigmas tradicionais do ensino da Matemática, permitindo a valorização da ação discente em sala de aula, à medida que enseja e instiga a curiosidade, a descoberta, a reflexão, o levantamento de hipóteses, as validações, advindas da ação do próprio aluno, não apenas imposta ou transmitida pelo professor.

Assim, considerando o caráter abstrato da Álgebra Linear, os problemas do ensino como transmissão, bem como, o excesso de formalismo e algoritmização, compreendemos que a superação dessas dificuldades perpassa o trabalho docente em sala de aula. A maneira como acontece a mediação do professor pode ser determinante para aprimorar o pensamento matemático do aluno, levando-o a desenvolver os processos que levam ao PMA, cujo desenvolvimento requer o hábito da reflexão sobre a experiência matemática.

Na Sequência Fedathi, essa reflexão sucede com veemência na fase da *solução*, pois, após exibir suas estratégias de resolução, o aluno poderá compará-la com os procedimentos adotados por seus colegas, de modo que terão a oportunidade de refletir sobre “o que” e “como” fizeram para chegar a determinada solução. Desse modo, os debates e a discussão que antecedem a fase da *prova* podem ensejar reflexões que se tornarão mais aprofundadas, conforme o professor faz a formalização dos conceitos matemáticos trabalhados.

Já no ensino tradicional, segundo Dreyfus (2002, p. 25), geralmente, o professor não espera que um aluno de Matemática elementar, após resolver um problema, pare para refletir e descrever como chegou à solução. Essa atitude, entretanto, é o que se espera de um estudante de Matemática avançada e, em particular, de futuros professores da Educação Básica, pois, embora os processos de PMA sejam mais focados nas abstrações de definição e dedução, muitos desses processos estão na Matemática elementar.

Outro aspecto que corrobora os pressupostos da Sequência Fedathi, se refere às críticas feitas à maneira como a Matemática é mostrada em sala de aula: de modo polido e acabado. Para Dreyfus, esse formato de apresentação afeta a aprendizagem e o desenvolvimento dos processos de PMA nos estudantes, pois desconsidera o fato de a matemática ter sido concebida mediante tentativa e erro, formulações intuitivas, estruturas parcialmente corretas e uso de desenhos para mostrar partes de uma estrutura matemática pensada. A SF se contrapõe a este modelo de ensino, por valorizar o raciocínio do aluno, ou seja, o processo e não somente o produto.

Considerando esses fatores e a descrição de Tall (1995) sobre o ensino da Matemática superior, observamos convergências com os pressupostos da Sequência Fedathi, no sentido de que esta possa contribuir com o desenvolvimento do PMA, auxiliando a ação docente, com vistas a propiciar o ensino voltado para a construção do conhecimento e valorizar a ação ativa do estudante em sala de aula. Portanto, nossa tese é a de que o ensino mediado na perspectiva da Sequência Fedathi (SF) auxilia no desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado de alunos de licenciatura em Matemática.

Assim, ante as dificuldades inerentes ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, nos questionamos: como a SF pode contribuir para o desenvolvimento do PMA de alunos de licenciatura em Matemática em aulas de Álgebra Linear? Como sucede a abordagem conceitual em aulas mediadas segundo a SF? Como os processos de PMA podem ser estimulados durante as aulas? É possível contribuir para o desenvolvimento do PMA dos alunos?

Tais questionamentos remetem ao objetivo geral, de compreender como a mediação docente apoiada na Sequência Fedathi influencia no desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado de alunos de licenciatura em Matemática em aulas de Álgebra Linear. Para isso, precisamos: entender como a SF propicia a construção conceitual em Álgebra Linear; identificar na mediação docente possíveis relações com o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado; e saber os reflexos da mediação docente nas impressões dos estudantes de licenciatura, participantes da pesquisa.

Assim, nesta investigação, tratamos do ensino da Álgebra Linear, especificamente, dos conceitos abstratos, como espaço vetorial, base e dimensão, dando ênfase à construção conceitual, que, de certo modo, desconstrói a sequência: “definição-teorema-prova-exemplo/aplicação”, na qual estas noções são geralmente ensinadas. Destacamos, com efeito, a maneira como o professor conduz o processo de ensino, observando suas implicações para o desenvolvimento do PMA, na perspectiva de que ensino e aprendizagem devem ocorrer de maneira dialógica, em que professor e alunos interagem na construção do saber.

Nesse sentido, este estudo se fundamentou, principalmente, em Piaget (1995) tratando da construção do conhecimento matemático, nas concepções de Tall (1995, 2002) e Dreyfus (2002) no que se refere ao Pensamento Matemático Avançado, na Sequência Fedathi, na qual recorremos a Sousa *et. al.* (2013), Borges Neto (2017; 2018), Fontenele (2013), entre outros. Metodologicamente, é um ensaio de natureza qualitativa, delineado como um estudo de caso, tendo como sujeitos, no primeiro momento, um professor de Álgebra Linear e, posteriormente, estudantes de licenciatura em Matemática.

Em resumo, no capítulo 2, discorremos sobre a Sequência Fedathi, descrevendo seus níveis, princípios e fases, abordando suas implicações para o ensino da Matemática, sobretudo no que se refere à mediação docente em sala de aula, bem como suas contribuições para a construção do conhecimento matemático, tomando por base a concepção piagetiana que a explica, relacionando com o desenvolvimento de esquemas mentais constituídos à medida que o aprendiz age sobre o meio. Além disso, trazemos as principais pesquisas que abordaram a Sequência Fedathi no ensino de Matemática no nível superior.

No capítulo 3, reportamo-nos ao Pensamento Matemático Avançado, descrito com base em Tall (1995, 2002) e Dreyfus (2002) em que mostramos suas principais características, com ênfase nos processos mentais que envolvem o PMA e suas consequências para o ensino e aprendizagem da Matemática superior, bem como os relacionamos à Sequência Fedathi, visando a melhor compreender a interação de suas fases e as possíveis implicações para o desenvolvimento do PMA.

O capítulo 4 foi dedicado ao ensino da Álgebra Linear, trazendo os conceitos introdutórios da Teoria dos Espaços Vetoriais, como: espaço vetorial, subespaço, base e dimensão, descritos na perspectiva dos processos de generalização e abstração. Desse modo, evidenciamos de maneira específica as relações que se estabelecem entre os conceitos, definições e propriedades, cuja compreensão requer a mobilização destes processos por parte do aprendiz.

No capítulo 5, descrevemos o tipo de pesquisa, no caso, qualitativa, em que nos dispomos do estudo de caso (YIN, 2010). Em seguida indicamos os instrumentos e procedimentos metodológicos, dividindo a pesquisa de campo em três etapas – observação, aplicação e verificação das impressões dos sujeitos. Também descrevemos como se deu a análise dos dados, cujo foco foi identificar na Sequência Fedathi relações com o desenvolvimento dos processos de Pensamento Matemático Avançado.

No capítulo 6, trazemos a descrição dos resultados da primeira etapa da pesquisa de campo, que se deu mediante observações realizadas em aulas de Álgebra Linear, nas quais o docente utilizava a Sequência Fedathi como metodologia de ensino.

No capítulo 7, apontamos os resultados da realização do curso de extensão e grupo de estudos, em que, no primeiro, analisamos os diálogos que acontecerem durante as discussões do conteúdo e a maneira como se deu a abordagem das representações matemáticas, que são o ponto de partida para realização da atividade matemática. Além disso, expomos os resultados da coleta de dados sobre as impressões dos discentes em relação à Sequência Fedathi, para, ao final, realizar a triangulação dos dados e discutir os resultados.

Por fim, no capitulo 8, delineamos as considerações finais que sintetizam os principais achados, apontando se os objetivos foram alcançados, quais as contribuições do estudo, as limitações e, ainda, procedendo a sugestões para pesquisas futuras, fazendo um fechamento das ideias discutidas.

2 A SEQUÊNCIA FEDATHI

Neste capítulo, discorremos sobre a Sequência Fedathi, abordando as fases e a mediação docente com base em Sousa et al. (2013), Sousa (2015), Fontenele (2013), Borges Neto (2016, 2017, 2018), entre outros, descrevendo seus níveis, fases e princípios. Em seguida, abordamos a construção do conhecimento matemático com base na teoria de Piaget (1995), que explica esse processo por meio da *abstração reflexionante*. Em todo o texto, relacionamos tais teorias aos pressupostos teórico-metodológicos da SF, porquanto estas auxiliaram na elaboração das aulas ministradas na pesquisa de campo.

2.1 O ensino da Matemática por meio da Sequência Fedathi

A Sequência Fedathi é uma proposta metodológica de ensino concebida na Universidade Federal do Ceará (UFC), com apoio em pesquisas desenvolvidas no Laboratório de Pesquisa Multimeios (MM), lideradas pelo Prof. Dr. Hermínio Borges Neto. A cada ano contribui com variadas áreas de ensino, auxiliando professores a agir como mediadores do processo de ensino e aprendizagem. Em Sousa *et al*. (2013) e em Borges Neto (2017, 2018) encontra-se uma coletânea com os principais resultados de pesquisas já realizadas e mais esclarecimentos de seus princípios, concepções e pressupostos.

A proposta da Sequência Fedathi visa oportunizar a ação do estudante em sala de aula mediante a exploração de situações de ensino desafiadoras que possam desencadear discussões, descobertas e reflexões que enveredam para o delineamento do saber em foco. Para tanto, uma aula de Matemática, ao ser elaborada segundo seus pressupostos, abordará quatro momentos – *tomada de posição, maturação, solução* e *prova* – que poderão aparecer uma só vez, ou várias, conforme o planejamento ou necessidade verificada durante sua vivência. Essas fases visam a tornar o ambiente da aula propício para que as ações discentes sejam direcionadas à construção do conhecimento sob a devida mediação do professor.

Para Borges Neto (2016, p. 16), a Sequência Fedathi

> [...] é uma proposta de ensino, talvez uma metodologia, com fundamentação teórico-metodológica baseada na proposta lógico-dedutiva-construtiva, acrescida de uma postura, enfoque, de um comportamento, de uma atitude por parte do professor, perante seus estudantes, que respeite e tente reproduzir o método de trabalho de um matemático (conhecido como 'la méthode').

Assim, as fases da Sequência Fedathi visam a que o aluno vivencie a atividade matemática pela ação e descoberta, de modo que, na *tomada de posição*, o professor propõe o desafio ao aluno, seja uma pergunta, um problema ou atividade desafiadora. Na *maturação*, os alunos devem se debruçar sobre o problema e elaborar estratégias para resolvê-lo. Na *solução*, os estudantes exprimem para o professor e para a turma a resolução do problema. Por fim, na *prova*, que é a fase na qual o professor valida as respostas, o conteúdo é formalizado matematicamente, sendo também o momento de esclarecimento de possíveis dúvidas.

Atualmente, além das fases, a Sequência Fedathi é estudada na perspectiva da inclusão de níveis e princípios, tidos como essenciais à sua compreensão e desenvolvimento prático em sala de aula. Sousa (2015) organiza o desenvolvimento da Sequência Fedathi, conforme ilustra o quadro 1.

Quadro 1 - Desenvolvimento da Sequência Fedathi com níveis e etapas.

SEQUÊNCIA FEDATHI	
1º nível: **Preparação** – Organização didática do professor, com análise do ambiente, análise teórica e elaboração do plano de aula.	
2º nível: **Vivência** – Desenvolvimento/ execução do plano/ sessão didática na sala de aula.	**1ª etapa**: Tomada de posição – introdução da aula, com o acordo didático e a apresentação do problema.
	2ª etapa: Maturação – resolução do problema pelos alunos, com a mediação do professor.
	3ª etapa: Solução – socialização dos resultados encontrados pelos alunos.
	4ª etapa: Prova – formalização/generalização do modelo matemático a ser ensinado, conduzida pelo professor.
3º nível: **Análise** – Avaliação da aula pelo professor.	

Fonte: Sousa (2015, p. 41).

Segundo o autor, o primeiro nível, denominado *preparação*, compreende a organização e o planejamento da *sessão didática*[4]. Assim, o professor fará: a *análise do ambiente*, apropriando-se de informações sobre a realidade onde a aula será ministrada, no sentido de organizar material necessário à sua realização; a *análise teórica*, que, a seu turno, trata da organização do conteúdo que será trabalhado, considerando o conhecimento do professor e o delineamento do *plateau*[5], relacionado ao conhecimento prévio dos estudantes. Além disso, o professor deve elaborar os objetivos e demais elementos da sessão didática.

No segundo nível, denominado *vivência*, é que acontecerão na prática as quatro fases da Sequência Fedathi, cuidadosamente planejadas no nível anterior. Já o terceiro nível

[4] Sessão didática é a expressão usada na Sequência Fedathi para designar a aula. Mais detalhes em Soares (2018).
[5] Mais detalhes em Bezerra (2018) e no capítulo 7, que descreve os resultados deste estudo.

compreende a *análise*, que consiste na avaliação da sessão didática pelo professor, em que são verificados os aspectos positivos e negativos, bem como se os objetivos foram alcançados, de modo a buscar o aperfeiçoamento e a resolução de possíveis problemas na execução do que foi planejado.

Convém ressaltar que as fases da Sequência Fedathi não ocorrem de maneira estática e exigem a adoção de uma atitude docente reflexiva e, ao mesmo tempo, provocadora, no sentido de suscitar no estudante as dúvidas e desequilíbrios necessários à compreensão dos problemas propostos em sala de aula. Assim, a abordagem adequada dessas fases traz mudanças, tanto no que se refere às atitudes do professor quanto as do aluno, de modo que este deverá ser um participante ativo durante toda a aula, seja resolvendo as atividades, discutindo as soluções encontradas ou verificando a formalização do conteúdo realizada pelo professor.

Conforme destaca Borges Neto (2016) na Sequência Fedathi, é preciso que o professor adote um comportamento, uma atitude perante seus alunos, para que possa mediar as ações discentes voltadas ao fazer matemático. Nesse âmbito, a mediação é entendida no sentido de Vigotski (2007), que a compreende como sendo o processo pelo qual a ação do sujeito sobre o objeto é mediada por um determinado elemento, de modo que a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. Logo, o desenvolvimento das funções mentais superiores, tais como o pensamento, a linguagem e o comportamento, não é direto, mas sim, mediado, para que haja a conversão das relações sociais em funções mentais.

Nesse sentido, a aprendizagem escolar ou acadêmica requer a mediação do professor para auxiliar o aprendiz na transformação do saber adquirido pelas relações sociais, em um conhecimento internalizado e cientificamente aceito. Essa transformação perpassa a interação com o mundo, com o outro, de modo que a maneira como se dá essa interação passa a ser importante, à medida que traz implicações para a qualidade do aprendizado.

Consoante ensinam Alrø e Skovsmose (2010), o aprendizado adquirido pelo aluno recebe influência da qualidade dos diálogos estabelecidos em sala de aula, sendo, portanto, o professor o responsável por mediar sua evolução. Para os autores,

> Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes. (Ibidem, p. 12).

A Sequência Fedathi se diferencia dos modelos tradicionais de ensino, pois exige do professor uma atitude flexível e aberta ao diálogo, corroborando as ideias de Freire (2017), ao defender o ponto de vista de que o diálogo deve se fundar no amor (respeito), na humildade e na fé nas pessoas, numa relação horizontal, capaz de proporcionar aos participantes a confiança necessária para expor suas reflexões.

A mediação, entretanto, pode ser concebida além do diálogo. Pinheiro (2017, p. 66), ao discorrer sobre a mediação docente para o ensino de conceitos matemáticos assinala que "[...] mediação é intersubjetividade, é dialogo, mas também é encontro, é percepção do outro na sua diferença, na completude de ideias do quem sou em completude do outro, que seja encontro".

Nas sessões didáticas vivenciadas nesta investigação, a comunicação se deu baseada na valorização do pensamento e fala dos discentes, em vez de se apoiar num comportamento/postura docente que remetesse à imposição ou ao autoritarismo. No capítulo 7, descrevemos trechos dos principais diálogos.

Outro aspecto importante é que, na Sequência Fedathi, a mediação implica que a ação docente deve favorecer a imersão do aluno à prática do pesquisador que desenvolve o conteúdo que se pretende ensinar (SANTANA, 2006). Desse modo, sendo essa mediação realizada pelo professor, convém ressaltar o que se espera da ação docente em cada fase da Sequência Fedathi, conforme ilustra o quadro 2.

Quadro 2 - Ação docente, segundo a Sequência Fedathi.

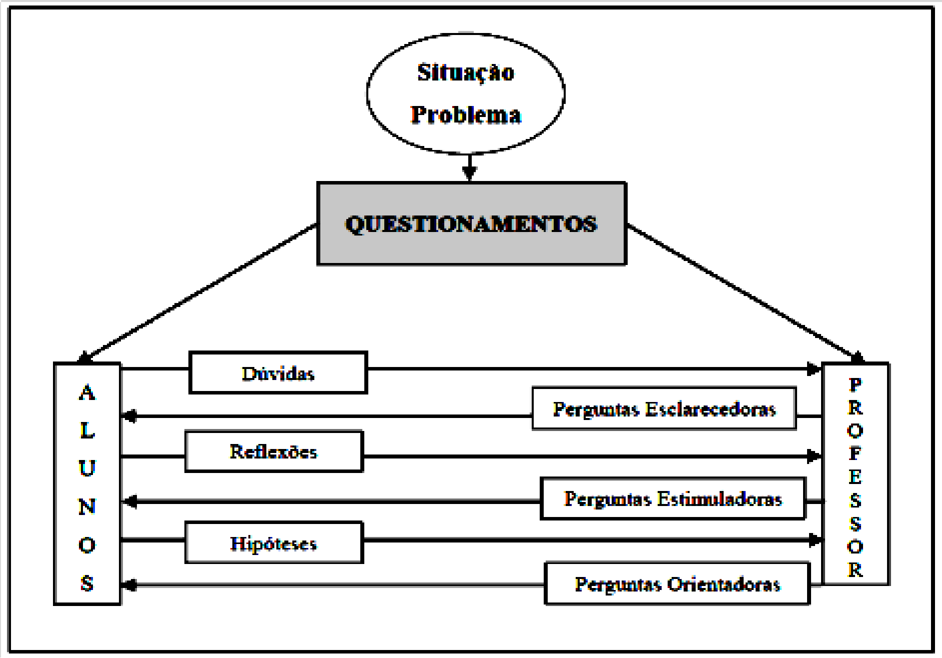
Ação Docente Esperada em cada Fase da Sequência Fedathi			
Tomada de Posição	**Maturação**	**Solução**	**Prova**
• Apresentar uma situação desafiadora que esteja no nível dos alunos.	• Deixar os alunos pensarem sobre o problema/atividade proposto; • observar o desempenho dos alunos (postura mão no bolso); • se questionado responder com perguntas que estimulem a curiosidade e o instinto investigativo do aluno; • não fornecer a resposta pronta; e • intervir quando necessário, caso o aluno não consiga avançar.	• Chamar os alunos para apresentarem suas respostas; • fazer questionamentos que suscitem discussões com a turma; • apontar e discutir os possíveis erros de modo a favorecer a aprendizagem; e • comparar os resultados apresentados.	• Formalizar os resultados matematicamente; • fazer generalizações; • expor as definições formais ou teoremas; e • esclarecer dúvidas.

Fonte: Adaptado de Fontenele (2013).

Segundo o quadro 2, na mediação do ensino, o professor poderá fazer uso de algumas estratégias que possam auxiliá-lo, considerando as dúvidas e avanços dos alunos. Tais estratégias são o uso da pergunta e do contraexemplo. De acordo com Sousa (2015), a pergunta constitui a essência da ação mediadora, de modo que o professor precisa investir em seu uso como instrumento de mediação didática.

Souza (2010) enfatiza a importância da pergunta na fase de *maturação*, cujos questionamentos podem ser feitos pelos alunos ou pelo professor, sendo essenciais para desencadear reflexões, hipóteses e formulações, quando buscam a solução de um problema. A Figura 1 traz os tipos de questionamentos que podem aparecer na SF.

Figura 1: Tipos de questionamento em relação à situação-problema.



Fonte: Souza (2010, p. 89)

Sousa (2005) observou a viabilidade de aplicação da Sequência Fedathi, tendo a pergunta como estratégia de mediação pedagógica, na qual constatou que

> [...] é importante que ele [professor] pense, diante das hipóteses elaboradas, sobre quais perguntas deve fazer como forma de investimento ou reinvestimento, como meio de suscitar nos alunos o hábito de formular hipóteses, buscar soluções, fazer a prova, rever o problema para confirmar ou negar a resposta encontrada. (SOUSA, 2005, p. 54)

A pergunta, sob essa óptica, pode ser entendida como um recurso que poderá ser usado para estimular reflexões nos alunos acerca do conteúdo estudado. Há de ser, no entanto, usada em momentos oportunos que possam de fato desencadear raciocínios e reflexões pertinentes. O autor se preocupou, especificamente, com as perguntas feitas pelo professor em sala de aula, de modo que, mais tarde, em sua tese de doutorado (SOUSA, 2015), analisou o assunto de maneira mais aprofundada, na qual verificou que seu uso torna o ambiente da aula mais investigativo e que a formulação das perguntas depende do conhecimento didático e matemático do professor, bem como de suas concepções sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

O uso do contraexemplo também é considerado recurso importante durante a mediação do ensino, uma vez que pode desencadear reflexões sobre o conteúdo trabalhado. Sousa (2015) infere que a pergunta pode ser feita no formato de um contraexemplo, sendo criada quando o aluno emite uma resposta ou questionamento, no qual o professor lhe apresenta uma situação contrária ao exemplo, que irá desafiá-lo a argumentar, a defender seu ponto de vista ou a solução que encontrou. Segundo o autor,

> A pergunta investigativa difere do contraexemplo quanto à sua intenção. A pergunta tem o propósito de fazer com que o aluno investigue sobre o problema apresentado, na busca de solução; o contraexemplo é apresentado ou proposto com o objetivo de levar o aluno a refletir, para que ele reveja sua solução, sua afirmação, negue ou confirme o resultado encontrado ou a afirmação que apresentara. (SOUSA, 2015, p.47)

No ensino da Álgebra Linear, por exemplo, uma maneira de verificar se os estudantes compreenderam a noção de subespaço é apresentar-lhes um gráfico que passa pela origem, mas que não é subespaço vetorial. No primeiro momento, poderão responder que sim, entretanto, após reverem mental e/ou algebricamente as propriedades dos subespaços, chegarão a concluir que o fato de conter o vetor nulo não é suficiente para se ter um subespaço vetorial. Assim, com um contraexemplo, é possível instigar o raciocínio dos estudantes, fazendo rever constantemente as propriedades dos conceitos estudados.

2.2 A construção de conceitos e a Sequência Fedathi

A ideia de construção do conhecimento matemático aqui adotada advém dos estudos de Jean Piaget (1973, 1995), nos quais o autor buscou compreender a gênese do conhecimento humano, analisando a ação do sujeito sobre objetos, desde a ação sensório-motora até a ação de ordem conceitualizada. O vocábulo construção está associado ao desenvolvimento de esquemas mentais, resultantes de sucessivas assimilações, acomodações e estados de equilíbrios e desequilíbrios, que tornam o aprendiz cada vez mais apto a adquirir mais conhecimentos. Segundo Bittencourt (1996), Piaget concebe o conhecimento matemático como sendo dialético, em que considera o processo de conhecer como resultante de negação, superação e ultrapassagem, que implicam rupturas.

Kamii (2012) destaca que Piaget distinguiu três tipos de conhecimento: o físico, o lógico-matemático e o social. Destes, somente o segundo não pode ser transmitido, pois envolve a coordenação de relações entre objetos. O conhecimento físico se refere aos objetos da realidade externa, enquanto o social se reporta às convenções criadas pelas pessoas, possuindo "natureza amplamente arbitrária". (p.26). Segundo a autora,

> Pode-se afirmar que há consenso a respeito da soma de 2+3, mas nem o número nem a adição estão "lá fora", no mundo social, para serem transmitidos pelas pessoas. Pode-se ensinar as crianças a darem a resposta correta para 2+3, mas não será possível ensinar-lhes diretamente as relações que subjazem nesta adição." (Ibidem, p.27).

Desse modo, as relações entre objetos é que constituem a essência do conhecimento lógico-matemático. Além disso, tanto o conhecimento físico quanto o social precisam de um quadro lógico-matemático (de classificações, correspondências, ordenação etc.), uma vez que "[...] todo conhecimento do objeto, de qualquer natureza que seja é sempre assimilação a esquemas e estes esquemas contêm uma organização lógica ou matemática, por mais elementar que seja". (PIAGET, 1973, p.378).

Santos (2007) observou que, na Sequência Fedathi, a assimilação tende a ocorrer na fase de *maturação*, quando o aluno busca compreender os dados/variáveis do problema, interpretando-os segundo seus esquemas. A acomodação poderá acontecer na *solução*, caso na maturação tenha ocorrido a modificação ou criação de um novo esquema para dar conta do conteúdo abordado. Por fim, na fase da *prova*, quando o professor apresenta formalmente o conteúdo para a turma, poderá ocorrer a adaptação, resultante da assimilação e acomodação vivenciadas no decurso da aula.

Somente a assimilação e a acomodação, entretanto, por si sós, não explicam a construção do conhecimento matemático ou como se dá seu progresso na mente. Para Piaget (1973;1995) o conhecimento lógico-matemático precisa ser construído por abstração reflexionante. Mediante esse conceito, é possível compreender como o sujeito consegue chegar a novas aprendizagens e construir novos conceitos. Segundo o autor, o surgimento dos conceitos, essenciais para o nosso pensar, só é possível mediante tomadas de consciência que sucedem uma abstração reflexionante, que, por sua vez, deriva da coordenação das ações. Piaget a descreve do seguinte modo:

> [...] ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo "reflexionamento" [...]. Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou pôr em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante, será designada por "reflexão". (1995, p. 6).

A ocorrência da abstração reflexionante dependerá das assimilações e acomodações que o aluno realiza à medida que se debruça a estudar determinado assunto. Desse modo, o professor deverá criar um ambiente no qual o aluno possa operar de maneira ativa sobre os objetos matemáticos, para assim ter maiores oportunidades de estabelecer as relações necessárias. Presumimos que a Sequência Fedathi, por seu caráter investigativo, pode orientar as ações do professor no sentido de como mediar a construção de tais relações de maneira significativa.

Esta mediação, por sua vez, precisa ter sempre como premissa a ação do aluno sobre o objeto de conhecimento, pois somente ele, mediante a coordenação destas ações, poderá realizar os reflexionamentos e reflexões característicos da abstração reflexionante, construindo, assim, uma visão coerente do que está a manipular. Becker (2012) esclarece que,

> Para conseguir êxito nessa construção, o sujeito tem que se apropriar de suas ações; primeiramente de seus esquemas, depois, das coordenações de seus esquemas ou coordenação de suas ações; mais adiante, dos subsistemas de esquemas, assimilando-os uns aos outros. (p. 37).

A Sequência Fedathi, ao propor a apresentação de um problema ou desafio na tomada de posição, favorece a ação discente a apropriar-se de seus esquemas, utilizando-os para reconhecer na situação proposta o que lhe é familiar, para, na maturação, coordenar suas ações à medida que vai explorando a situação, assimilando-a. Ao haver desequilíbrios e acomodação, as chances de ocorrer a abstração reflexionante aumentam, no entanto, não convém estimar uma fase exata em que esta abstração deve acontecer, pois, não necessariamente, se dará em uma só aula, mas à medida que o aluno tenha construído relações suficientes para fazer o reflexionamento a um patamar superior.

Para Becker (2012), a transformação de forma em conteúdo é algo que não se ensina. Ou o estudante faz esse reflexionamento e transforma suas estruturas por via da reflexão ou ela não ocorre. Na Álgebra Linear, por exemplo, para compreender o conceito de espaço vetorial, o aluno precisa operar com a adição e multiplicação escalar, relacionando-a a vetores e outros conjuntos. Quando ele tomar consciência da operacionalidade de tais conjuntos, poderá fazer o reflexionamento a um nível superior, no qual refletirá sobre estas operações, generalizando-as e integrando-as em uma nova estrutura. Com isso, passará a ter uma visão geral do que sejam os espaços vetoriais, pois houve a abstração reflexionante, resultando na criação de esquemas que comportam os espaços vetoriais como objetos.

Convém ressaltar que essa abstração, apesar de estar intimamente associada à ação do aluno, necessita da ação/mediação do professor, no sentido de formalizar cientificamente o conteúdo trabalhado em sala de aula (que na SF deve acontecer na fase da *prova*) e guiá-lo na superação de erros que fazem parte da aprendizagem. É esse tipo de abstração que transforma o que sabemos em novo objeto de pensamento e que nos conduz à generalização do saber, sendo que conhecer esse processo pode ajudar o professor a entender como se dá a aprendizagem de novos conceitos, pelos alunos, e, com isso, melhor lidar com suas dificuldades.

Por conseguinte, enquanto a abstração reflexionante explica a construção de esquemas de assimilação, ou seja, estruturas necessárias à aquisição do conhecimento matemático pela pessoa, a Sequência Fedathi pode proporcionar um ambiente favorável a essa construção, orientando como o professor irá mediar esse processo. Desse modo, o que está em jogo nesta pesquisa é como realizar esta mediação, favorecendo o desenvolvimento do pensamento matemático dos discentes.

2.3 As pesquisas sobre a Sequência Fedathi no ensino superior

Visando a conhecer como a Sequência Fedathi é trabalhada no ensino da Matemática de nível superior, realizamos um levantamento das dissertações e teses que enfocam conteúdos da Matemática universitária e que utilizaram a SF como metodologia. Ao fazer a revisão de literatura, encontramos, até 2015, cinco dissertações e três teses, conforme ilustra o quadro 3.

Quadro 3: Teses e dissertações que utilizaram a SF em disciplinas matemáticas do ensino superior.

	Autor/Ano	**Título**	**Objetivo Geral**
1	Barroso (2009) Tese	Um modelo de ensino dos conceitos de cálculo para os cursos de engenharia fundamentado em uma epistemologia histórica e baseado na metodologia da engenharia didática: validação por meio do conceito de integral	Propor um modelo para a introdução em sala de aula do ensino dos conceitos-chave de CDI, resgatando as ideias que contribuíram para a formação destes conceitos, tanto como uma forma de motivação para o seu aprendizado, quanto para fazer elos entre conhecimentos antigos e novos dos alunos.
2	Souza (2010) Tese	Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediado por tecnologias digitais	Analisar influências da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria, com o software Cabri-Géomètre.
3	Alves (2011) Tese	Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis	Descrever/identificar as categorias do raciocínio intuitivo ao longo dos níveis da Sequência Fedathi.

4	Fontenele (2013) Dissertação	A Sequência Fedathi no ensino da álgebra linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial	Verificar se o uso da Sequência Fedathi, nas aulas sobre o conceito de base, proporciona recursos passíveis de se tornarem Alavanca Meta para os alunos.
5	Moreira (2014) Dissertação	Análise da visão do professor-tutor sobre a adequabilidade do material didático de matemática à luz da Sequência Fedathi: o caso da licenciatura em Matemática do IFCE.	Analisar a visão do professor-tutor sobre a adequação do material didático de matemática na modalidade semipresencial de ensino superior.
6	Nasserala (2014) Dissertação	Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na Sequência Fedathi: o caso da integral imprópria.	Descrever situações didáticas com auxílio do *software* GeoGebra, amparado na Sequência Fedathi sobre Integrais Impróprias com ênfase na visualização
7	Bezerra (2015) Dissertação	Proposta de abordagem para as técnicas de integração usando o software Geogebra.	Estruturar e propor situações de ensino relativa às Técnicas de Integração, explorando os padrões gráfico-geométricos relacionados com as funções integrandas e suas primitivas, utilizando o software Geogebra.
8	Macedo (2015) Dissertação	Manifestação geométrica das formas indeterminadas de funções: situações didáticas apoiadas na tecnologia.	Apresentar uma proposta de ensino para as formas indeterminadas e Regra de L'Hôspital por meio de sequências didáticas estruturadas com base na Sequência Fedathi e a exploração do software Geogebra.

Fonte: Pesquisa direta (2016).

A tese de Barroso (2009) propõe um modelo de abordagem de ensino dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no qual utilizou a SF na fase de experimentação da Engenharia Didática. A autora elaborou e conduziu algumas sessões didáticas sobre o conceito de integral utilizando a SF, em que pôde constatar as vantagens de sua utilização no ensino, principalmente no que se refere à reflexão sobre a prática docente e à motivação à participação ativa dos alunos em sala de aula.

Souza (2010) investigou as contribuições da SF e das tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem de Geometria na Licenciatura em Matemática. O estudo trouxe contribuições significativas para o desenvolvimento da própria SF, ao descrever de maneira aprofundada suas fases, destacando a relação professor-aluno-saber, os tipos de questionamentos relativos à situação-problema que podem surgir na fase de maturação, a relação bilateral entre professor e alunos durante a discussão e análise das soluções, bem como suas relações com o ensino tradicional.

Alves (2011) buscou descrever\identificar as categorias do raciocínio intuitivo no decurso das fases da SF, tendo como foco o ensino do Cálculo a Várias Variáveis (CVV), especificamente, curvas parametrizadas, continuidade, derivação, extremos de função e integrais múltiplas. Nos resultados e conclusões, o autor destaca que foram resgatados e discutidos pontos de vista nem sempre consensuais a respeito do conhecimento obtido por meio da intuição e considera que a eficiência de um ensino de CVV deve considerar os conhecimentos mobilizados pelos alunos antes mesmo da efetiva solução e explicitação de argumentação lógica, apontando assim, vantagens na exploração de tecnologias no ensino de CVV apoiada nos pressupostos da SF, que segundo o autor rompeu com as rotinas didáticas rigorosas e cansativas que seguem a sequência linear ...definição-teorema-exemplo-exercício-definição...

Em sua dissertação, Fontenele (2013) analisou aulas de Álgebra Linear elaboradas e conduzidas à luz da SF, buscando identificar na mediação do professor possíveis alavancas meta (DORIER *et al*., 2000) utilizadas na construção da noção de base de um espaço vetorial. A autora também abordou a *abstração reflexionante*, de Jean Piaget, como meio para de compreender os processos cognitivos inerentes à construção do conhecimento matemático e sua relação com a postura e mediação do professor que utiliza a SF.

Nasserala (2014) trabalhou com a SF, utilizando-a na fase de experimentação da Engenharia Didática, como suporte para a elaboração e condução de sessões didáticas sobre o conteúdo de integrais impróprias, com uso do *software* Geogebra, enfatizando a visualização. O autor descreveu suas fases, constatou seu papel importante na estruturação das sessões didáticas e no desenvolvimento de uma concepção construtivista por parte do professor, tendo como culminância de seu trabalho a criação de um *blog* sobre cálculo e a produção de vídeo-aulas utilizando a SF.

Moreira (2014) recorreu à SF como suporte para investigar a visão do professor-tutor sobre a adequabilidade do material didático de Matemática produzido para a disciplina Cálculo I em um curso de Licenciatura em Matemática a distância. A autora constatou que a SF pode ajudar na elaboração de material didático de Matemática à medida que orienta o aluno a estabelecer o próprio conhecimento e o faça ter uma aprendizagem matemática significativa. Neste trabalho, observamos contribuição para o desenvolvimento da própria SF, quando sai da vertente da elaboração de aulas para a elaboração de material didático, a ser utilizado por estudantes, no qual poderá provocar mudanças nas atitudes do professor.

Bezerra (2015) teve como objetivo estruturar e propor situações de ensino relativas às técnicas de integração, explorando os padrões gráfico-geométricos relacionados com as funções integrandas e suas primitivas, utilizando para isso o *software* Geogebra. As sessões didáticas foram elaboradas seguindo as fases da SF. A metodologia de pesquisa seguiu duas fases iniciais da Engenharia Didática (Análises Preliminares e Análise *a Priori*). A autora descreveu as fases da SF, tendo como culminância de seu trabalho a criação de um *blog* e a produção de videoaulas.

Macedo (2015) apresentou uma proposta de ensino para as formas indeterminadas e Regra de L'Hôspital por meio de sequências didáticas estruturadas com base na Sequência Fedathi e a exploração do *software* Geogebra. Utilizou a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Nos resultados, pôde constatar que o ensino deste conteúdo, quando associado a SF, de modo a possibilitar ao aluno a construção do seu conhecimento, pode expressar melhorias. Foi criado um *blog* com a descrição da proposta de ensino.

Nesses trabalhos, observamos que nenhum se propôs investigar possíveis relações entre a Sequência Fedathi e o desenvolvimento do PMA. Além disso, a maioria deu atenção ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, de modo que somente nossa dissertação (FONTENELE, 2013) tratou do ensino da Álgebra Linear, cuja análise dos resultados destacou características da atitude docente, adotada durante a mediação do ensino da noção de base de um espaço vetorial. Foram elas:

> a) cuidado em proporcionar situações que motivassem o "pensar" constante sobre o conteúdo abordado;
> b) paciência e bom senso para esperar/respeitar o "tempo de maturação do aluno";
> c) gerenciamento de quando prosseguir e quando reorganizar as estratégias de ensino conforme a necessidade;
> d) estímulo ao aprendizado por descobertas;
> e) mobilização de reflexões sobre os assuntos abordados;
> f) não fornecimento do "passo a passo" para resolução das atividades propostas;
> g) valorização das soluções apresentadas pelos alunos – aproveitamento das soluções certas/erradas/incompletas para prosseguir fazendo-os pensar;
> h) ênfase na participação e reflexão do aluno;
> i) foco no ensino para a construção do conhecimento. (FONTENELE, 2013, p.70).

Essas características remetem à necessidade de se verificar as implicações dessa mediação didática ao desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, porque, ao propiciar a promoção da ação/reflexão do aluno em sala de aula, a atitude docente rompe com os paradigmas tradicionais do ensino de Matemática. Nessa perspectiva, compreendemos que o ensino da Álgebra Linear poderá ser melhorado, à medida que puder proporcionar o desenvolvimento do PMA, uma vez que seu domínio pressupõe habilidades que tornam o aluno mais apto a lidar com os conceitos e definições.

No próximo capítulo, abordamos o Pensamento Matemático Avançado, descrevendo suas principais características, com ênfase nos processos de representação, generalização, síntese e abstração, fazendo relações com as fases da Sequência Fedathi ao fim da explicação de cada subtópico. Além disso, tratamos do ensino da Álgebra Linear com foco nas noções de espaço vetorial, subespaço, base e dimensão.

3 O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Este capítulo reporta-se ao Pensamento Matemático Avançado (PMA) na perspectiva de Tall (1995, 2002) e de Dreyfus (2002), de modo que as ideias deste último são delineadas com maior ênfase, por ser a perspectiva teórica que orientou a análise dos resultados da pesquisa. Os processos que envolvem o desenvolvimento do PMA são descritos e em seguida relacionados, teoricamente, à Sequência Fedathi, visando a melhor compreender a interação de suas fases e possíveis implicações para o desenvolvimento dos processos de PMA discente.

3.1 O que é o Pensamento Matemático Avançado

A compreensão do Pensamento Matemático Avançado (PMA) requer que se olhe para a atividade matemática e suas implicações para o desenvolvimento cognitivo do aprendiz. Com suporte em estudos como os de Jean Piaget sobre como se dá o desenvolvimento da inteligência e como se chega a novos conhecimentos, muitas teorias surgiram para tentar explicar os processos envolvidos na compreensão da Matemática avançada.

Tall (1995; 2002), Dreyfus (2002), Dubinsky (2002) são exemplos de autores que recorrentemente concedem destaque aos estudos sobre o tema, cujas principais ideias se encontram no livro *Advanced Mathematical Thinking*, que traz uma coletânea de artigos explicativos das principais características e importância de seu desenvolvimento no ensino de Matemática superior. Em Domingos (2003), encontramos breve definição para a dicção Pensamento Matemático Avançado, descrito com base nas concepções desta obra, que utilizaremos para introduzir seu significado:

> **Pensamento Matemático Avançado:** foca-se essencialmente nas abstrações de definições e deduções. Tem por base os processos de representação e abstração, processos este que, no nível de ensino estudado, têm um maior grau de complexidade. (DOMINGOS, 2003, p. 79)

Para Tall (2002) são as atividades de deduções e as definições formais que possibilitam a construção de entidades abstratas do PMA, e para se chegar a essa construção, é necessário passar por um ciclo completo iniciado com a ação sobre um problema matemático que exige investigação, passa pela formulação criativa de conjecturas e, por fim, chega ao estádio final de refinamento e prova. Desse modo, o autor considera que a principal distinção entre a Matemática elementar e a avançada é a existência na segunda, da dedução a partir de definições, enquanto, na primeira, os objetos são descritos com base na experiência do objeto. Nas palavras do autor,

> É essencial distinguir entre matemática elementar, (incluindo a geometria) onde os objetos são *descritos* e matemática avançada onde os objetos são *definidos*. Em ambos os casos a linguagem é usada para formular as propriedades dos objetos, mas em matemática elementar a descrição é construída da experiência do objeto, em matemática avançada, as propriedades do objeto são construídas a partir da definição – uma inversão que causa grandes dificuldades de acomodação para novatos em pensamento matemático avançado. (TALL, 1995, p. 7; tradução nossa)[6].

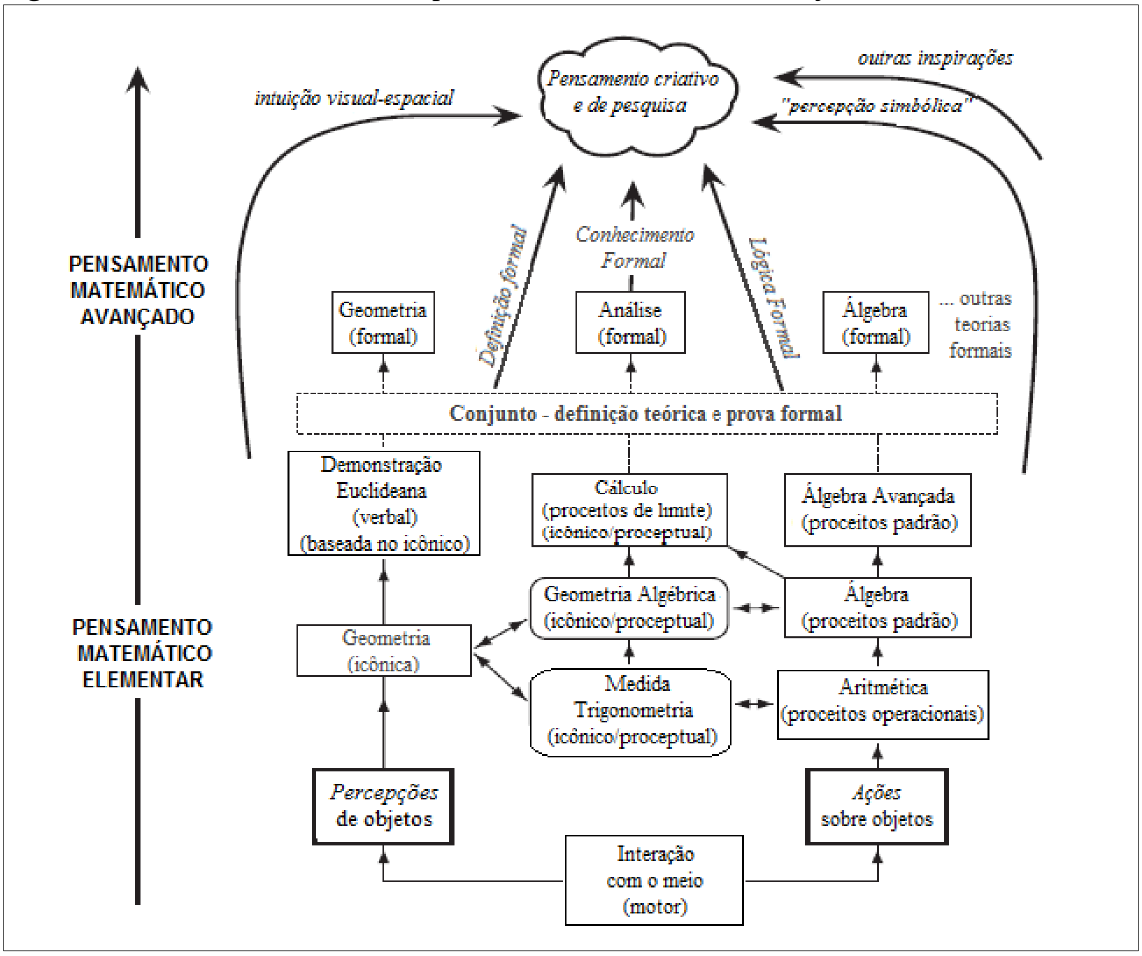
As grandes dificuldades que os alunos enfrentam ao lidar com a Matemática avançada tem estreita relação com o fato de os métodos de ensino atuais falharem ao apresentarem a Matemática avançada aos alunos, uma vez que uma apresentação lógica pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo da aprendizagem. Para que ocorra o desenvolvimento do PMA, é preciso que haja uma mudança no estádio cognitivo do aprendiz, propiciada por um ensino que trabalhe de modo equilibrado os aspectos de percepção visual dos conteúdos (Geometria) e os aspectos ligados à manipulação proceptual, levando a dedução e definição formal dos objetos. (TALL, 1995, p. 12).

Tall (1995) analisou os fatores cognitivos que implicam o crescimento cognitivo do PMA, partindo da hipótese de que esse crescimento ocorre desde “percepções de” e “ações sobre” objetos matemáticos. Considera que a atividade humana é composta por componentes de entrada (percepção), atividade interna (pensamento) e saída (ação), concebendo, assim, a atividade matemática como percepção de objetos, reflexão e ação sobre eles. Consoante o autor, a evolução cognitiva se dá com o apoio em dois desenvolvimentos em paralelo – um visuoespacial, que se torna verbal e remete à prova sistemática (em Geometria), enquanto o outro usa símbolos de modo flexível como processos e conceitos (em Aritmética e Álgebra). O uso de tudo isso leva a inspirar o pensamento matemático criativo, baseado na definição formal de objetos e na prova sistemática. A Figura 2 ilustra a visão do autor sobre o desenvolvimento do PMA desde uma perspectiva cognitivista.

---

[6] It is essential to distinguish between elementary mathematics, (including geometry) where objects are *described* and advanced mathematics where objects are *defined*. In both cases language is used to formulate the properties of objects, but in elementar mathematics the description is constructed from experience of the object, in advanced mathematics, the properties of the object are constructed from the definition—a reversal which causes great difficulties of accommodation for novices in advanced mathematical thinking.

Figura 2 - O desenvolvimento do pensamento matemático avançado



Fonte: Adaptado de Tall (1995, p. 12).

Na figura 2, observamos que o pensamento matemático elementar se inicia com a interação com o meio, no qual a pessoa percebe os objetos e age sobre eles. Assim, as percepções desenvolvem a compreensão geométrica, e as ações procedem à apreensão das operações associadas a Aritmética e Álgebra. Conforme a compreensão e a ação sobre estes objetos evoluem, chega-se a níveis mais avançados que envolvem as demonstrações euclidianas, cálculo e álgebra avançada, cuja passagem ao pensamento matemático avançado se dá com a formalização desses conceitos (definição formal e prova), culminando no desenvolvimento do pensamento criativo e de pesquisa.

Para Tall (1995), é importante que o professor trabalhe em sala de aula, na perspectiva de promover *encapsulações*, que são as transformações de um processo num conceito. Este termo se relaciona à ideia de *proceito*, onde um objeto é ao mesmo tempo um processo e um conceito, que fará parte do *conceito imagem* e *conceito definição* de cada pessoa. O conceito imagem se refere a todas as imagens, propriedades e processos associados a um conceito, enquanto o conceito definição diz respeito às palavras usadas para especificar este conceito. É importante destacar ser o conceito imagem que é evocado quando o estudante precisa lida com os conceitos, de modo que o conceito definição tende a permanecer inativo ou mesmo esquecido. Segundo Tall (1988)

> Quando os alunos encontram um conceito antigo em um novo contexto, é o conceito imagem, com todas as suposições implícitas abstraídas de contextos anteriores, que responde à tarefa. Se a imagem é construída sobre experiências que entram em conflito com a definição formal, isso pode levar a respostas que estão em desacordo com a teoria formal. (TALL, 1988, p.3; tradução nossa[7]).

Nesse sentido, o ensino assentado na transmissão de definições, com pouca ênfase na discussão sobre os conceitos, corre o risco de constituir imagens conceituais limitadas, que poderão entrar em conflito com a definição formal, caso o conceito imagem não tenha sido formado de modo coerente, ou seja, insuficiente para dar conta da compreensão do conceito definição.

Dreyfus (2002), por sua vez, aborda o PMA sob a perspectiva dos processos que acontecem na mente, e que são essenciais ao desenvolvimento da pessoa, tais como a representação, a síntese, a generalização e a abstração, embora estes não sejam exclusivos da Matemática avançada e aconteçam, também, nos níveis de Matemática elementar. Compreender tais processos como constituintes do PMA pode ajudar no entendimento das interações que ocorrem durante seu desenvolvimento.

Para Dreyfus (2002), o que distingue o pensamento matemático elementar, do avançado, é a complexidade, e como esta é tratada, sendo que o poder dos processos é permitir gerenciar tal complexidade, em especial, na abstração e representação, em que se pode passar de um nível a outro. Assim, o PMA consiste de uma grande variedade de interações dos componentes do processo, que inclui, além da representação, visualização e generalização, outras habilidades – como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar – sendo importante que o professor de Matemática esteja consciente destes processos para compreender algumas das dificuldades que os alunos vivenciam.

Mostramos a seguir os principais processos descritos por Dreyfus (2002) que são referenciais neste trabalho. Iniciamos falando do papel das representações na atividade matemática, reforçando a explanação com um pouco dos estudos de Duval (2009) acerca das representações semióticas, que complementam o posicionamento de Dreyfus.

[7] When students meet an old concept in a new context, it is the concept image, with all the implicit assumptions abstracted from earlier contexts, that responds to the task. If the image is built on experiences that conflict with the formal definition, this can lead to responses which are at variance with the formal theory.

3.2 Os processos de PMA

3.2.1. A representação

A representação em Matemática está diretamente associada a utilização de signos, símbolos, números, letras e frases, que desempenham função essencial para que haja atividade matemática significativa, de modo que "[...] é essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com suas representações, [...] porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes". (DUVAL, 2009, p. 14).

Assim, exercer atividade matemática requer o domínio de tais representações além do conhecimento de seus significados, sendo necessário estabelecer relações entre o conceito, significados e suas representações (que podem ser várias), ultrapassando, assim, a função de comunicação de ideias e economia de tratamento, uma vez que influencia a atividade cognitiva e os processos de compreensão. Segundo Dreyfus (2002, p. 30, tradução nossa)[8],

> [...] deve haver algum significado associado com uma noção antes do símbolo para aquela noção poder ser de alguma utilidade. Porém, no discurso educacional de professores de matemática, isso é frequentemente negligenciado, levando ao fenômeno do "símbolo empurrado".

Se analisarmos este fenômeno sob a óptica de Duval (2009), veremos que pode estar associado ao fato de em Matemática se "[...] estimar que se passa espontaneamente da forma do representante ao conteúdo representado" (p. 34), e isso trazer consequências negativas ao aprendizado discente, que tem que lidar com excesso de simbolismos, cuja internalização requer tempo para acontecer.

Ciente de que o papel das representações semióticas em Matemática é estreitamente relacionado aos processos de compreensão, Duval (2009) analisou sua especificidade na atividade matemática, observando suas implicações nos processos cognitivos. Para ele, não há apreensão conceitual de um objeto ou processo, sem que haja a apreensão ou produção de uma representação semiótica inerente ao objeto/conceito estudado.

Dreyfus (2002) classifica as representações em simbólicas e mentais, incluindo a visualização e a modelagem. A *representação simbólica* cumpre à primeira vista um papel de comunicação e economia de tratamento, sendo que sua ausência impossibilitaria a realização de uma atividade significativa, que requer formas materiais para sua expressão. Constituem

---

[8] There must be some meaning associated with a notion before a symbol for that notion can possibly be of any use; in the educational discourse of teaching mathematics, this is too often overlooked leading to the well known phenomenon of "symbol pushing".

representações externas associadas a significados matemáticos. Já as *representações mentais* são internas, também associadas a conceitos, porém mais difíceis de analisar e identificar, uma vez que diferem de pessoa para pessoa. Referem-se a imagens mentais, que nos levam a olhar para a *visualização*, que, segundo ele, é um processo pelo qual as representações mentais podem vir a existir. O autor fornece um exemplo da Álgebra Linear, que ilustra distintas representações mentais do conceito de espaço vetorial, incluindo a visualização:

> [...] Quando penso em espaço vetorial, eu posso "ver" setas (antes com os olhos da mente), e eu posso ser capaz de pensar em termos destas setas quando lido com bases, transformações, etc. Outros podem evocar n-uplas de números ou símbolos abstratos que satisfazem os axiomas. (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa)[9].

Outro processo que Dreyfus (2002) aponta como importante na representação, é a modelagem, que se refere a encontrar uma representação matemática para objetos ou processos não matemáticos, de modo que "[...] isso significa construir uma estrutura matemática ou teoria que incorpore características essenciais do objeto, sistema ou processo a ser descrito. Esta estrutura ou teoria, o modelo, pode ser usado para estudar o comportamento do objeto ou processo que está sendo modelado." (p. 34).

Além disso, Dreyfus (2002) acentua que,

> Para ser bem-sucedido em matemática é desejável ter uma rica representação mental dos conceitos. Uma representação é rica se contém muitos aspectos ligados daquele conceito. Uma representação é pobre se tem muito poucos elementos que permitem flexibilidade na resolução de um problema. Tal inflexibilidade nós frequentemente observamos em nossos estudantes: a menor mudança na estrutura de um problema, até mesmo em sua formulação, pode bloqueá-lo completamente. (p. 32; tradução nossa)[10].

Entretanto, apesar da importância de se ter muitas representações de um conceito, sua existência, por si, não é suficiente para que o aluno tenha tal flexibilidade ao resolver um problema. É preciso mudar de uma representação para outra, sempre que a outra for mais eficiente para a próxima etapa que se quer tomar ao resolver um problema, porém "[...] o sucesso na resolução depende do fato de as várias representações estarem corretamente e fortemente ligadas." (p.32). Ao mencionar as mudanças de representações, o autor corrobora as ideias de Duval (2009), que as refere como conversões de registros. Na prática, muitos

---

[9] When I think of a vector space, I may "see" arrows (before my mind's eye), and I may be able to think in terms of these arrows when dealing with bases, transformations etc. Others may evoke *n*-tuples of numbers or abstract symbols which satisfy the axioms.

[10] To be successful in mathematics, it is desirable to have rich mental representations of concepts. A representation is rich if it contains many linked aspects of that concept. A representation is poor if it has too few elements to allow for flexibility in problem solving. Such inflexibility we often observe in our students: The slightest change in the structure of a problem, or even in its formulation, may completely block them

estudantes trabalham somente com uma representação, o que pode propiciar o bloqueio mencionado na citação feita a pouco.

De acordo com Duval (2009), é essencial para uma boa compreensão dos conceitos matemáticos a formação de representações, num registro semiótico particular, para exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real (formação), bem como transformar uma representação em outra num mesmo registro (tratamento) e, por fim, converter a representação transformando-a em uma representação de outro registro (conversão). A atividade de conversão é a atividade cognitiva mais difícil de adquirir para a maioria dos alunos, sendo que a dificuldade reside na discriminação das unidades significantes próprias a cada registro. Assim, seria ingênuo crer que apenas introduzindo exercícios de conversão seria suficiente para criar as condições favoráveis a uma coordenação dos registros de representação dos alunos.

Segundo Dreyfus (2002), a representação é essencial para chegar à abstração, sendo que a aprendizagem precisa passar por quatro etapas, caracterizadas pela maneira como o sujeito lida com as distintas representações. Vejamos:

1) Uso de uma única representação;
2) Uso de mais de uma representação em paralelo;
3) Realização das possíveis ligações entre representações em paralelo; e
4) Integração das possíveis representações, alternando-as de maneira flexível.

Para Dreyfus (2002), representar e abstrair são processos complementares em direções opostas, pois, enquanto um conceito é abstraído de várias de suas representações, uma representação é sempre representação de um conceito abstrato. Sendo assim, é possível explorar as complementaridades entre abstração e representação e entre representações matemáticas e mentais. Inicialmente, o sujeito, ao utilizar somente uma representação, poderá focar sua atenção na representação em si e deixar de lado o conceito abstrato. É necessário que conheça mais de uma representação de um objeto matemático em paralelo, para que se possa adentrar ao terceiro estádio ao se estabelecer ligações entre as representações.

Segundo Dreyfus (2002, p. 39; tradução nossa[11]) "[...] ligações fortes permitem que os estudantes mudem de representações, o que os torna conscientes do conceito subjacente e, portanto, é provável que influenciem positivamente na abstração". No quarto estádio há a integração entre as variadas representações, uma síntese que abrange as relações, interligações

[11] Strong links allow students to switch representations, which in turn makes them aware of the underlying concept and is thus likely to positively influence abstraction.

e propriedades comuns, que permanecem para formar o conceito abstrato, ao mesmo tempo em que outros aspectos da representação ficam em segundo plano.

Essas quatro etapas se relacionam com a teoria de Duval (2009), de modo que o *tratamento* se refere à primeira e segunda etapas, já que o aluno lidará com uma ou mais representações em paralelo, mas ainda não estabeleceu ligações entre elas. As *conversões* se inserem na terceira e quarta etapas, uma vez que nelas o aprendiz terá capacidade de operar e alternar distintas representações de um conceito matemático compreendendo suas ligações.

A figura 3 ilustra o uso de representações em paralelo que pode auxiliar na compreensão e aprendizagem de conceitos abstratos da Álgebra Linear.

Figura 3: Resolução lado a lado de uma questão sobre base com os espaços R^4, P_3 e M_{22}.

SOLUÇÃO: Mais uma vez, vamos trabalhar os três exemplos lado a lado para destacar as similaridades entre eles. Em certo sentido, eles são todos *o mesmo* exemplo, mas devemos trabalhar até a Seção 6.6 para tornar essa idéia precisa.

a) Como

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos que $W_1 = \text{ger}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_1.

(b) Como

$$a + bx - bx^2 + ax^3 = a(1 + x^3) + b(x - x^2)$$

temos que $W_2 = \text{ger}(u(x), v(x))$, onde

$$u(x) = 1 + x^3$$

e

$$v(x) = x - x^2$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{u(x), v(x)\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_2.

(c) Como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $W_3 = \text{ger}(U, V)$, onde

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{U, V\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_3. ◆

Fonte: Poole (2011, p. 405).

Na representação, já implícita na atividade matemática, cada fase da Sequência Fedathi desempenha papel relevante para que o aluno possa vir a aperfeiçoar o domínio e uso consciente das distintas representações de um conceito. Na *maturação*, o aluno poderá fazer uso de seus conhecimentos prévios, aperfeiçoando sua maneira de lidar com os símbolos e expressões matemáticas referentes ao conteúdo a ser trabalhado, de modo que será determinante para isso a escolha da atividade ou problema a ser apresentado na *tomada de posição*. É importante que o professor tenha consciência do papel das representações e dificuldades que os alunos podem enfrentar para compreendê-la, sobretudo em Álgebra Linear.

Na fase de *solução*, o aluno poderá comparar sua maneira de representar um conteúdo matemático com o modo como os colegas e o professor representam, ao serem discutidas coletivamente as respostas e estratégias formuladas por eles na fase de *maturação*. Assim, poderá observar as dessemelhantes representações de um conceito, fazer a autocorreção, caso necessário, bem como esclarecer dúvidas sobre tais representações. É interessante que o discurso docente enfatize os significados dos símbolos, principalmente as ações de tratamento e conversão mencionadas, levando os alunos a refletir sobre elas.

Na fase de *prova,* o professor poderá melhor trabalhar com a formalização e o rigor matemático, pois terá partido de ideias já trabalhadas, maturadas pelos alunos, que tiveram oportunidades de trabalhar com manipulações algorítmicas e estabelecer relações conceituais, facilitando, assim, a compreensão dos significados, que aos poucos está sendo construído. Assim, o formalismo será introduzido, de modo menos abrupto do que seria se o professor simplesmente explicitasse todo o conteúdo na lousa, sem uma participação mais ativa e reflexiva dos estudantes durante a aula.

3.2.2 A Generalização

Dreyfus (2002, p. 35) decodifica a generalização como "[...] o ato de derivar ou induzir de particulares, identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade". Mata-Pereira e Ponte (2013, p.19) a relacionam com "[...] afirmações gerais sobre classes de objetos" em que formular uma generalização "[...] não é mais do que fazer um certo tipo de conjetura de natureza geral". Portanto, consideramos que generalizar é realizar a transição de casos particulares para o geral.

Essa transição de casos particulares para o geral requer, todavia, processos cognitivos que, de acordo com Harel e Tall (1991), dependem do conhecimento atual do sujeito, ou seja, de como o aluno compreende determinado assunto. Deste fato, os autores classificam a generalização em três tipos: expansiva, reconstrutiva e disjuntiva. Vejamos o seguinte exemplo:

> Os estudantes A, B e C sabem como resolver equações lineares em uma variável. Contudo, suponha que o estudante A, tem uma compreensão relacional do processo de resolução: compreende que ao adicionar ou multiplicar cada lado da expressão por uma constante não nula, o conjunto solução não muda. Enquanto isso, os estudantes B e C tem apenas uma compreensão instrumental, em que realizam manipulações na equação ("fazer coisas em ambos os lados", "colocar os x de um lado e números do outro", "mudar o sinal"). Todos generalizam o método para resolver equações em duas variáveis, como sendo "eliminar x para obter uma equação linear resolvível em

> y, então substitui o valor encontrado para y de volta nas equações para obter uma equação para x". (HAREL; TALL, p. 38; tradução nossa[12]).

Nesse caso, o estudante A desenvolve a generalização expansiva e o B a disjuntiva. A primeira ocorre quando o sujeito expande um esquema para compreender um objeto de estudo, sem haver necessidade de reconstruí-lo. Nesse exemplo, o estudante A expandiu e enriqueceu seus esquemas para resolver equações, pois conseguiu entender e utilizar as relações entre os termos da equação e o significado da igualdade.

A generalização disjuntiva ocorre quando o sujeito, ao necessitar de novo esquema de assimilação, o constrói desconectado dos esquemas disponíveis. Com isso, passa a compreender o objeto sob nova perspectiva, porém isoladamente, sem estabelecer relações significativas com conceitos que lhe são familiares. Os alunos B e C, por exemplo, simplesmente adicionaram novos fatos a sua lista de coisas para fazer (eliminar x, resolver y,...) de modo desconexo, ou seja, entenderam os procedimentos, sem atentar para o significado da igualdade (esquema disponível). Assim, a generalização sucedeu apenas com a criação de um esquema para as informações instrucionais sobre o que fazer com os termos da equação.

Já a generalização reconstrutiva requer a reconstrução de um esquema, a fim de ampliar seu conjunto de aplicabilidades. Por exemplo, as generalizações de soma vetorial e múltiplos escalares de R^2 para R^3 para R^n em seus aspectos algébricos são, segundo Harel e Tall (1991), provavelmente, uma generalização expansiva para a maioria dos alunos. Os aspectos geométricos, entretanto, que modificam as ideias sobre duas e três dimensões para um conceito mental de espaço de n dimensões, provavelmente, requerem uma generalização reconstrutiva que poucos conseguem.

Destes tipos de generalizações, temos que tanto a expansiva quanto a reconstrutiva são mais apropriadas para o desenvolvimento cognitivo, entretanto, a expansiva é cognitivamente mais fácil do que a reconstrutiva, embora haja momentos em que a reconstrutiva seja mais apropriada. Já a disjuntiva pode contribuir para falhas dos estudantes, pois, apesar de parecer um caso de generalização bem-sucedido (ao permitir que o aluno lide com maior

[12] For instance, students A, B and C may all know how to solve linear equations in one variable. However, suppose that Student A has a relational understanding (in the sense of Skemp [1976]) of the solution process: (s)he understands that when adding an expression to each side, or multiplying by a (non-zero) constant, the solution set does not change. Meanwhile students B and C have only an instrumental understanding, simply carrying out manipulations on the equation ("do the same thing to both sides," "get the *x* terms on one side and the numbers on the other," "change side and change signs," "collect together like terms") They all generalize the method to solving linear equations in two variables, by "eliminating *x* to obtain a solvable linear equation in *y*, then substituting the value found for *y* back into the equations to obtain an equation for *x*.

número de exemplos), os objetos matemáticos são apenas adicionados à "lista de coisas para fazer", sem necessariamente serem estabelecidas relações significativas com outros saberes do aprendiz. Por exemplo, o movimento reverso do caso da resolução de sistemas mxn para a solução de equações lineares em uma variável é visto não como uma particularidade, mas uma mudança para um esquema disjunto.

A generalização também será mais bem desenvolvida, dependendo da escolha das atividades e problemas a serem trabalhados em sala. Nesse caso, o objetivo delineado no planejamento da aula deverá ser muito bem pensado pelo docente, de modo a proporcionar aos alunos situações de aprendizagem nas quais possam identificar pontos em comum, reunindo tais pontos numa só ideia mais ampla, derivada de casos particulares. Mais uma vez, a maturação é a fase da SF que propiciará esse momento de reflexão durante a aula, sendo muito importante que o docente não dê repostas, pistas óbvias que façam com que o aluno perca a motivação para refletir sobre o conceito a ser generalizado.

3.2.3 A Síntese

A síntese pode ser entendida como a combinação de partes que formam um todo, em que perante um conteúdo, composto de variados conceitos e propriedades, à medida que o aluno vai compreendendo cada parte, cada conceito e suas manipulações, irá ao fim do processo poder unir cada parte, visualizando o todo e distinguindo as partes. O problema é que, muitas vezes, o ensino acontece de maneira bastante fragmentada, impossibilitando ao aluno ter uma visão mais ampla e, ao mesmo tempo, condensada do conteúdo trabalhado.

Dreyfus (2002) traz o seguinte exemplo, de Álgebra Linear, que ajuda a melhor compreender esse processo:

> [...] em álgebra linear o estudante geralmente aprende um bom número de fatos isolados sobre ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformações de bases, solução de sistemas de equações lineares, etc. Mais tarde no processo de aprendizagem, todos esses fatos previamente não relacionados se fundem em uma única imagem, dentro da qual eles são abrangidos e inter-relacionados. Este processo de emergir em uma única imagem é a síntese. (DREYFUS, 2002, p.35; tradução nossa)[13].

O autor também salienta que a "[...] imagem formada pela síntese é irreversível, sendo que para o professor é muito difícil se colocar no lugar do aluno que ainda não atingiu essa síntese." (p. 35). Em sala de aula, no entanto, os professores, muitas vezes, explicam

[13] […] in linear algebra, students usually learn quite a number of isolated facts about orthogonalization of vectors, diagonalization of matrices, transformation of bases, solution of systems of linear equations, etc. Later in the learning process, all these previously unrelated facts hopefully merge into a single picture, within which they are all comprised and interrelated. This process of merging into a single picture is a synthesis.

detalhes, em pormenor, os estudantes fazem os exercícios, mas pouco ou nenhuma atividade é direcionada a levar o aluno a sintetizar distintos aspectos de um conceito, menos ainda diversificados conceitos dentro de um domínio ou mesmo variados domínios.

Convém ressaltar que, quando o professor aborda um conteúdo apontando as conexões e relações, apesar de estar de certo modo sintetizando o assunto, o fato de ter sido feito pelo professor transmite ao estudante que isso é o que os matemáticos veem, e não tem qualquer relevância direta para os problemas que o aluno tem para resolver. A síntese está na mente do professor, mas, para os alunos, ela é por demais carente.

Na SF, à medida que o professor trabalha os conteúdos com a turma, permitindo-lhes agir, pensar sobre as atividades e problemas propostos, e for avançando com os temas trabalhados, espera-se que o aluno tenha construído os esquemas necessários para acomodação dos conceitos, manipulações e significados, de modo que possa ser capaz de visualizar as partes, unindo-as num todo, chegando, assim, ao processo de síntese. A escolha das atividades será determinante para que os alunos a concebam, bem como as ações realizadas na fase de maturação, solução e prova. A mediação do professor no curso de todas as fases terá importante papel, pois é imprescindível que o aluno tenha consciência do que seja sintetizar e de como esse processo reflete sua aprendizagem.

3.2.4 A Abstração

No capítulo 2, trouxemos a abstração reflexionante de Jean Piaget para explicar a construção do conhecimento matemático sob ponto de vista cognitivo, relacionando-o à Sequência Fedathi. Para o autor, a abstração pode ser empírica ou reflexionante, sendo que a primeira envolve a extração de características diretamente dos objetos ou das ações sobre os objetos. Enquanto, na segunda, as características são extraídas não dos objetos, mas da coordenação das ações que o sujeito realiza sobre os objetos. É por meio da abstração reflexionante que se dá o avanço de novos conhecimentos, portanto, é necessário que o estudante alcance esse tipo de abstração.

Dreyfus (2002) destaca o papel da abstração na atividade matemática e salienta que alcançar a capacidade de abstrair pode ser o principal objetivo da educação matemática avançada, uma vez que se os estudantes desenvolvem a habilidade consciente de fazer abstração de situações matemáticas, eles terão alcançado um nível de pensamento matemático avançado. Segundo o autor,

> Na transição do espaço vetorial concreto R³ para a noção de um espaço vetorial abstrato, as relações entre os vetores se tornam o foco de atenção, enquanto seu uso específico como triplas de números é descartada. Afim de fazer essa transição, é preciso estar apto a conceber o objeto "vetor" puramente em termos de suas relações com outros objetos diferentes ou similares (vetores ou escalares), e aceitar que o próprio objeto não é mais especificado por quaisquer propriedades intrínsecas. Considerando somente estas relações, permite-se tirar conclusões a partir deles que serão geralmente válidas, independentemente das propriedades intrínsecas dos vetores. Dessa forma, muito do poder da matemática deriva da abstração. (p. 36; tradução nossa)[14].

Assim, é um processo que está intimamente associado a generalização e síntese, porém exige demandas cognitivas maiores. Enquanto a generalização, geralmente, envolve uma expansão na estrutura de conhecimento, a abstração é suscetível a envolver uma reconstrução mental. Na transição, digamos, dos números reais para os complexos, conseguimos generalizar por não insistir mais em ordem, mas continuamos trabalhando com objetos representados explicitamente usando números que podem ser adicionados e multiplicados de uma maneira familiar.

A abstração é um processo que depende do isolamento de propriedades adequadas e relações, requerendo, assim, a habilidade de desviar a atenção dos próprios objetos para se concentrar na estrutura dessas propriedades e relações. A estrutura passa a ter destaque, sendo objeto de atenção do estudante, que deverá saber distinguir o que é irrelevante no contexto a que se destina, de modo que os detalhes sem importância sejam omitidos, reduzindo a complexidade da situação. Por exemplo, o aluno é obrigado a se concentrar nas relações que existem entre números de modo a ser capaz de captar o que um campo é, em vez dos próprios números, e similarmente, para outras noções, tais como: função, grupo e espaço vetorial. (DREYFUS, 2002, p. 37).

Harel e Tall (1991) classificam a abstração em formal e genérica. Na abstração formal, "[...] se abstrai a forma de um novo conceito através da seleção de propriedades gerais de uma ou mais situações específicas". (p. 39). Segundo os autores, no entanto, o estudante raramente experimenta este processo em sala de aula, pois, geralmente, as definições formais lhe são exibidas prontas e as propriedades são cuidadosamente selecionadas. A definição, todavia, é mais do que o nome do conceito e a declaração de um pequeno número de propriedades e axiomas. Ela "[...] é a seleção de propriedades gerais adequadas para a

---

[14] In the transition from the concrete vector space 3 to the notion of an abstract vector space, the relationships between the vectors become the focus of attention, whereas their specific realization as triples of numbers is dropped. In order to make this transition, one needs to be able to conceive of the object "vector" purely in terms of its relationships to other similar or different objects (vectors or scalars), and accept that the object itself is not further specified by any intrinsic properties. Considering only these relationships, enables one to draw conclusions from them which will be generally valid, independently of the specific intrinsic properties of the vectors. In this manner, much of the power of mathematics derives from abstraction.

construção dedutiva do conceito abstrato". (p. 39). Logo, o ensino de um conceito não pode ser limitado a mera exposição da definição. É preciso que o aluno tenha contato com a estrutura matemática que o define.

Por outro lado, a abstração genérica ocorre com origem na exploração de um ou mais exemplos específicos que fazem parte de um conjunto mais amplo de exemplos que envolvem um conceito abstrato. Requer a generalização e é considerada uma modalidade "suave" de abstração, na qual, à medida que vai sendo trabalhada, pode levar o aluno à abstração formal, pois a reconstrução mental necessária se torna menos tensa para o estudante.

Em resumo, essa maneira de abstração "[...] eleva a consciência cognitiva do estudante a um nível no qual conceitos gerais podem ser entendidos e abstraídos, pelo menos implicitamente, a partir de exemplos genéricos". (HAREL; TALL, 1991, p. 40). Assim, a ideia de abstração genérica pode auxiliar o professor a introduzir um novo conteúdo baseado na seleção de exemplos que os alunos deverão manipular e dele abstrair suas características principais, obtendo uma noção mais intuitiva do conceito que posteriormente será formalizado.

É um tanto complexo relacionar as fases de uma metodologia de ensino, que se preocupa com as interações professor-aluno-saber, aos processos de abstração que são o resultado de uma ampla variedade de fatores que podem influenciar sua ocorrência na mente do aprendiz. Pelos estudos já realizados e descritos neste trabalho, temos como ideal que o aluno possa agir, pensar em sala de aula. Assim, consideramos que a SF, ao possibilitar essa ação e orientar a mediação do professor, possa contribuir para desencadear momentos propícios ao domínio das habilidades de representar, generalizar e sintetizar que levarão à abstração.

4 ÁLGEBRA LINEAR E ENSINO

Neste capítulo, discorremos sobre conceitos elementares da Álgebra Linear, do ponto de vista dos problemas que permeiam o ensino dessa disciplina, com base nos estudos de Dorier (2000; 2008) e Rogalski (1991; 1994). Além disso, consideramos pertinente abordar a construção do conceito de espaço vetorial, relacionando-o aos processos de generalização e abstração, descrevendo suas definições e como pode se dar sua apreensão pelo estudante. Do mesmo modo, tratamos da descrição dos conceitos de subespaço, geradores, base e dimensão, considerando suas definições e propriedades e a maneira como o ensino poderia se dar, tendo em vista levar o aluno a construir os conceitos. Fundamentamo-nos em autores como Tall (2002), Harel e Tall (1991) e Trigueros e Oktaç (2005), entre outros.

4.1 Problemas no ensino da Álgebra Linear

A Álgebra Linear desempenha importante papel no meio científico em razão das diversas possibilidades de aplicações em distintas áreas do conhecimento, inclusive dentro da própria Matemática. Resumidamente, podemos dizer que se trata de uma ramificação da Álgebra que estuda os espaços vetoriais e suas transformações lineares, lidando com vetores, matrizes e formas quadráticas (LIMA, 2011). Seus conceitos e definições têm caráter abstrato que, dentre outros fatores, contribui para o surgimento das dificuldades no ensino e aprendizagem. Na nossa dissertação de mestrado (FONTENELE, 2013), fizemos um resumo dos principais entraves no ensino da Álgebra Linear, elaborado com base nos estudos de Dorier (2000), ilustrado no quadro 4.

Quadro 4: Resumo das principais dificuldades no ensino/aprendizagem da Álgebra Linear.

Dificuldades dos Estudantes	**Reflexão Epistemológica**	**Situações Didáticas que Possivelmente Colaboram com o Agravamento do Quadro**
• Dificuldades ao lidar com exercícios muito formais; • Impossibilidade de representar as novas noções; • Não conseguem relacionar a Álgebra Linear aos conhecimentos que já possuem de matemática.	• Obstáculo do formalismo; • Caráter unificador, simplificador e generalizador. • Outros obstáculos epistemológicos; • Obstáculos didáticos;	• Maior ênfase às atividades algoritmicas em detrimento à parte conceitual; • Ausência de problemas para introduzir as noções elementares. • Atividades nas quais o professor não justifica o propósito de sua realização.

Fonte: Fontenele (2013, p. 14).

A dificuldade que os alunos enfrentam para compreender as noções abstratas da Álgebra Linear faz com que, muitas vezes, o professor enfatize as tarefas algorítmicas, para fugir das incompreensões conceituais dos alunos. Essa ênfase dada à "algoritmização", bem como o excesso de formalismo, caracterizam os principais entraves no ensino dessa disciplina, conforme apontam estudos de Dorier (2000; 2008) e Rogalski (1991, 1994), que se dedicaram a compreender os problemas específicos do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear no contexto francês, cujo cenário de dificuldades não difere muito do que acontece em outros países, inclusive no Brasil.

Segundo Dorier (2008, p. 33),

> A algoritmização é, então, um meio de negociar a redução do conflito, permitindo diminuir o aspecto de novidade (e evitar, ao mesmo tempo, a dificuldade conceitual). Os professores se ligam, via algoritmo, a um quadro conhecido: a resolução de sistemas de equações lineares, no caso dos espaços vetoriais. (Tradução nossa)[15].

Como possível consequência desse ensino focado nas manipulações algorítmicas, tem-se a contradição no ensino da Álgebra Linear, que, segundo o referido autor, é algo que não consegue aceitar:

> [...] muitos estudantes revelam poder encontrar a forma reduzida de um operador linear, mas guardam incompreensões profundas sobre as noções, tais como a soma (direta) de subespaços, ou a noção de geradores ou mesmo de independência linear, apesar de serem conceitos chave nos fundamentos teóricos das técnicas de redução de endomorfismos. (Ibidem, p. 33; tradução nossa)[16].

Nesse caso, há indícios de que esses alunos conseguem encontrar a solução de modo meramente mecânico, via algoritmo, sem necessariamente compreender seu sentido e significado dentro da teoria de espaço vetorial. Apesar das consequências negativas desses problemas de natureza didática para a aprendizagem discente, ainda é, no entanto, essa a postura habitual de professores de Matemática de nível superior, que geralmente seguem em suas aulas, o padrão: definição, teorema, demonstração, exercício... Convém destacar, entretanto, o fato de que essa reprodução tem seus riscos, conforme apontam Hiebert e Carpenter (1992)

> [...] o risco de formar imagens muito restritas de conceitos gerais parece ser particularmente manifesto em domínios como Aritmética, Cálculo, Álgebra Linear,

[15] L'algorithmisation est alors un moyen de négocier à la baisse le conflit en permettant de diminuer l'aspect de nouveauté (et d'éviter du même coup la difficulté conceptuelle). Les enseignants se rattachent, via l'algorithme, à un cadre connu: la résolution de systèmes d'équations linéaires dans le cas des espaces vectoriels.

[16] [...] nombreux étudiants s'avèrent pouvoir trouver la forme réduite d'un opérateur linéaire, mais gardent des incompréhensions profondes sur des notions telles que la somme (directe) de sous-espaces, voire la notion de générateurs ou même d'indépendance linéaire, qui sont pourtant des concepts clés dans les fondements théoriques des techniques de réduction des endomorphismes.

> Estatísticas [...]. Em tais domínios, manipulações de algoritmos, procedimentos, tendem a atrair a atenção dos estudantes para criar um ‘filtro’ do conceito: somente alguns aspectos de um conceito, aquilo que é digerível e pertinente no contexto do “cálculo” parecem ser preservados na mente do estudante. Em casos mais graves uma maior ênfase na instrução de procedimentos pode impedir o estudante de desenvolver a construção do conceito que ele só experimentou por manipulações. (*Apud* NISS, 1998, p.15)[17].

Dreyfus (2002) também salienta que ensinar assim tem a desvantagem da inflexibilidade em termos de adaptabilidade dos estudantes e, como consequência, os alunos aprendem procedimentos padronizados, mas

> [...] eles não têm *know-how* que permite-os usar seu conhecimento de forma flexível para resolver problemas de tipo desconhecido para eles. [...] lhes tem sido ensinado os produtos da atividade de dezenas de matemáticos em sua forma final, mas eles não adquirem *insight* sobre os processos que levaram os matemáticos a criar estes produtos. (DREYFUS, 2002, p.28; tradução nossa)[18].

Nesse aspecto, verificamos semelhanças com o que defende George Pólya, que enfatiza no artigo *Dez mandamentos para professores*, que o ensino de Matemática nas escolas precisa de professores que tenham *know-how*, isto é, atitudes mentais, destreza, habilidade em lidar com informações e usá-las para um dado propósito. Para o autor, tais atitudes são mais importantes em Matemática do que a mera posse de informação, sendo, portanto, imprescindível que os professores o adquiram para poder auxiliar a desenvolver tais atitudes em seus alunos. Segundo questionamentos do autor, no entanto,

> [...] e o professor, ele próprio? Há em seu currículo alguma oportunidade de trabalho independente em Matemática, de adquirir o *know-how* que se espera que ele transmita a seus alunos? A resposta é não. Tanto quanto eu saiba, não há Universidade que dê ao professor oportunidade decente de desenvolver seu *know-how*, sua própria habilidade em Matemática. (POLYA, 1987, p. 9).

Nesse caso, fica evidente a importância de se aperfeiçoar o pensamento matemático dos futuros professores de Matemática da Educação Básica, pois eles é que terão a responsabilidade de estimular o desenvolvimento de tais habilidades em seus alunos, porquanto, mesmo que no nível básico nem todos os processos de PMA sejam trabalhados, é imprescindível que o hábito de pensar matematicamente seja desenvolvido desde os níveis

---

[17] […] The danger of forming too restricted images of general concepts seems to be particularly manifest in domains – such as arithmetic, calculus, linear algebra, statistics […] In such domains, algorithmic manipulations – procedures – tend to attract the main part of students’ attention so as to create a ‘concept filter’: Only those instances (and aspects) of a general concept that are digestible by and relevant in the context of the ‘calculus’ are preserved in students’ minds. In severe cases an over-emphasis in instruction on procedures may even prevent students from developing further understanding of the concepts they experience through manipulations only.

[18] […] they lack the know-how that allows them to use their knowledge in a flexible manner to solve problems of a type unknown to them. […] they have been taught the products of the activity of scores of mathematicians in their final form, but they have not gained insight into the processes that have led mathematicians to create these products.

básicos de ensino. A ação de “pensar” em sala de aula está implícita nas fases da Sequência Fedathi, de tal modo que é importante averiguar as possíveis relações entre a mediação docente e o desenvolvimento do pensamento matemático discente, sobretudo, de alunos de licenciatura.

4.2 Generalização e abstração na construção do conceito de espaço vetorial

A generalização e a abstração se expressam imprescindíveis para a compreensão da Teoria dos Espaços Vetoriais, aqui exploradas nos conceitos de: espaço vetorial, subespaços, base e dimensão. A definição de espaço vetorial, por exemplo, parte de uma generalização do conceito de vetor, extraindo suas principais propriedades (adição e multiplicação por escalar) e transformando-as em axiomas, conforme encontramos na definição de Poole (2011).

Figura 4 - Definição de espaço vetorial

Definição: Seja V um conjunto no qual duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação por escalar*, estão definidas. Se **u** e **v** estão em V, a soma de **u** e **v** é denotada por **u + v**, e se c é um escalar, o *múltiplo escalar* de **v** por c é denotado por c**v**. Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todo **u**, **v** e **w** em V e para todos os escalares c e d, então V é chamado ***espaço vetorial*** e seus elementos são chamados ***vetores***.

1. **u + v** está em V. — Fechado sob adição
2. **u + v = v + u** — Comutatividade
3. **(u + v) + w = u + (v + w)** — Associatividade
4. Existe um elemento **0** em V, chamado ***vetor nulo***, tal que **u + 0 = u**.
5. Para cada **u** em V, existe um elemento **-u** em V tal que **u + (-u) = 0**.
6. c**v** está em V. — Fechado sob multiplicação escalar
7. c(**v** + **w**) = c**v** + c**w** — Distributividade
8. (c + d)**v** = c**v** + d**v** — Distributividade
9. c(d**u**) = (cd)**u**
10. 1**u** = **u**

Fonte: Poole (2011, p. 388).

Pela definição expressa na figura 3, temos que um espaço vetorial é um conjunto que traz em sua estrutura a adição e a multiplicação por escalar e que obedece a dez axiomas. Logo, qualquer conjunto de objetos que satisfizer estes axiomas poderá ser chamado de espaço vetorial, enquanto seus elementos serão vetores. Trata-se, todavia, de um conceito abstrato que precisa ser bastante discutido em sala de aula, pois, se for apresentado aos alunos de imediato, por meio da definição, poderá não ser assimilado, uma vez que compreender esta noção requer olhar atento sobre a estrutura que a define. Segundo Trigueros e Oktaç (2005),

> No momento do processo de construção do esquema de espaço vetorial, o sujeito trabalha sobre uma coleção de espaços vetoriais particulares. Cada caso específico ajuda o sujeito a dar conta das diferentes propriedades que a estrutura possui, que corresponde a interiorização das ações de verificação em processos. Depois o sujeito

> pode encapsular estes processos em um objeto e se dar conta da existência de uma estrutura geral. O sujeito pode perceber então as propriedades invariantes de um espaço particular para construir um novo objeto chamado espaço vetorial. (p.167, tradução nossa[19]).

A descrição das autoras remete à importância de um ensino no qual os alunos venham a ter contato com vários espaços vetoriais, para que, ao agir sobre eles, possam observar sua estrutura e perceber a operacionalidade da adição e multiplicação por escalar, base da construção do conceito de espaço vetorial. Desse modo, a ideia de vetor como um segmento orientado (que possui módulo, direção e sentido), precisa ser ampliada, de sorte a abranger outros objetos matemáticos. Muitas vezes, no entanto, isso se torna um obstáculo à aprendizagem, pois é difícil para o aluno conceber uma matriz, uma função ou um polinômio como um vetor.

Além disso, conforme operam com os axiomas, os estudantes precisam compreender o conteúdo de um ponto de vista que privilegie o caráter unificador e, ao mesmo tempo, generalizador e simplificador da Teoria dos Espaços Vetoriais, conforme explica Dorier:

> [...] o sucesso da axiomatização [do conceito de espaço vetorial] não provém da possibilidade de solucionar problemas matemáticos não resolvidos, mas do seu poder de generalização e unificação e, consequentemente, da simplificação na busca de métodos para resolver problemas matemáticos. Como consequência, esta abordagem marcou um novo nível de abstração, o conceito de espaço vetorial sendo uma abstração de objetos abstratos como vetores geométricos, n-uplas, polinômios, séries ou funções. (DORIER, 1995, p. 176, tradução nossa[20]).

Ao operar com diversas representações de espaços vetoriais, o estudante poderá realizar uma generalização reconstrutiva (HAREL; TALL, 1991) que ocorre quando o aluno reorganiza a ideia que tinha desses conjuntos (funções, matrizes, polinômios etc) num novo esquema, reconstruído para responder por essa nova perspectiva: a de que estes conjuntos, munidos das operações de soma e multiplicação escalar, são unificados na Teoria dos Espaços Vetoriais. Tall (2002) oferece detalhes desse processo:

---

[19] Lors du processus de la construction du schème d'espace vectoriel, le sujet travaille sur une collection d'espaces vectoriels particuliers. Chaque cas spécifique aide le sujet à se rendre compte des différentes propriétés que la structure possède, ce qui correspond à l'intériorisation des actions de vérification en processus. Ensuite le sujet peut encapsuler ces processus en un objet et se rendre compte de l'existence d'une structure générale. Le sujet peut alors s'apercevoir des propriétés invariantes des espaces particuliers pour construire un nouvel objet qu'on peut appeler espace vectoriel.

[20] Therefore, it can be suggested that the success of axiomatization did not come from the possibility of reaching a solution to unsolved mathematical problems, but from its power of generalization and unification and, consequently, simplification in the search for methods for solving problems in mathematics. As a consequence, this approach marked a new level in abstraction, the concept of vector space being an abstraction of already abstract objects like geometrical vectors, n-tuples, polynomials, series or functions.

> Por exemplo, nós generalizamos a solução de equações lineares em duas e três dimensões para *n* dimensões e abstraímos a partir deste contexto, a noção de um espaço vetorial. Ao fazê-lo dois objetos mentais muito diferentes são produzidos: a generalização R^n e a abstração, um espaço vetorial *V* sobre um campo *F*. [...] A generalização R^n simplesmente estende a cadeia de ideias de R^1 para R^2 para R^3, e assim por diante [...] A abstração *V* é um objeto mental muito diferente, que é definido por uma lista de axiomas. Enquanto o primeiro envolve simplesmente uma extensão de processos conhecidos, este último exige uma reorganização mental maciça. (TALL, 2002, p.11, tradução nossa[21]).

Conseguir generalizar e abstrair é, portanto, desafio à aprendizagem cujo ensino precisa acontecer de modo a criar situações que levem os estudantes a manifestar esses processos e não apenas se limitar a privilegiar as manipulações algorítmicas do conteúdo. No desenvolvimento desta pesquisa, ministramos a aula sobre espaços vetoriais, de modo que os próprios estudantes identificassem os axiomas e operassem com eles, evitando apenas expô-los como uma lista a ser memorizada.

4.3 A construção dos conceitos de subespaço, base e dimensão

Outro conceito importante é o de subespaço vetorial, descrito por Lima (2011) como um subconjunto de um espaço vetorial, que, relativamente às operações de soma e multiplicação por escalar, é ainda um espaço vetorial; ou seja, um subespaço herda as propriedades dos espaços vetoriais. Em Boldrini et al. (1980), encontramos a seguinte definição, descrita na figura 4.

Figura 5 - Definição de subespaço vetorial

Definição: Dado um espaço vetorial *V*, um subconjunto *W*, não vazio, será um *subespaço vetorial* de *V* se: i) Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$. ii) Para quaisquer $a \in R$, $u \in W$ tivermos $au \in W$.

Fonte: Boldrini et al. (1980, p.106).

Como lecionam Boldrini et al. (1980), as condições da definição garantem: que os vetores que operam em *W* continuam em *W*; para verificar se dado conjunto é um subespaço, basta que se verifique (i) e (ii), não sendo necessário verificar todos os axiomas de espaço

[21] For instance, we *generalize* the solution of linear equations in two and three dimensions to n dimensions and we *abstract* from this context the notion of a vector space. In doing so two very different mental objects are produced: the *generalization n* and the *abstraction*, a vector space V over a field *F*. [...] The generalization *n* simply extends the chain of ideas from 1 to 2 to 3, and so on [...] The abstraction V is a very different mental object, which is *defined* by a list of axioms. Whilst the former simply involves an *extension* of familiar processes, the latter requires a massive mental *reorganization.*

vetorial, pois são válidos em *V* que contém *W*; por causa da condição $av \in W$, o vetor nulo deve, obrigatoriamente, pertencer ao subespaço (caso em que $a = 0$); todo espaço vetorial V possui pelo menos dois subespaços, chamados subespaços triviais, que são o subespaço nulo formado pelo vetor nulo {0} e o próprio espaço vetorial V.

Com essas duas últimas informações, é possível construir subespaços. Na sessão didática 3, exploramos a construção de subespaços de R^2, utilizando o *software* Geogebra. Com isso, abordamos as representações algébrica e gráfica das combinações lineares e subespaços de R^2 como a maneira de explorar o comportamento dos vetores no gráfico, visualizando as retas que passam pela origem.

Ao trabalhar com subespaços, um conceito importante, que pode levar a dificuldades por parte dos estudantes, é o de subespaço gerado no qual, dado um subconjunto A de um espaço vetorial V, o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de A resulta num subespaço de V gerado por A. Formalmente, pela figura 5, temos a definição de subespaço gerado.

Figura 6 - Definição de subespaço gerado

> Seja X um subconjunto do espaço vetorial E. O *subespaço vetorial de* E *gerado por* X é, por definição, o conjunto de todas as combinações lineares
>
> $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$$
>
> de vetores $v_1, \ldots, v_m \in X$.

Fonte: Lima (2011, p. 12, grifo do autor).

Na perspectiva de Lima (2011), quando o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de X coincidem com o próprio espaço vetorial E, diz-se que X é um conjunto de geradores de E. Compreender esta noção requer a ampliação do esquema de espaço vetorial. Nesse caso, é preciso que haja a generalização expansiva, que poderá ocorrer à medida que o aluno for colocado em situações nas quais irá, não apenas, verificar conjuntos geradores, algebricamente, mas, também, realizar combinações lineares via *software*, por exemplo, e ver como os vetores se comportam graficamente.

Na sessão didática 5, os alunos utilizaram o Geogebra para combinar vetores e descrever o que estava acontecendo nos quadros algébrico e geométrico, de modo que pudessem perceber a ideia de “gerar” um subespaço, bem como o porquê de o subespaço A poder ser gerado por um conjunto B de vetores. Assim, tiveram oportunidade de operar com distintas representações e estabelecer relações entre os objetos estudados e suas definições. Para isso, a postura docente denominada, na Sequência Fedathi, como *mão no bolso* (SANTANA, 2018), na qual o professor intervém o mínimo possível, foi essencial por deixar os alunos à vontade para realizar a atividade.

Além disso, outro conceito importante é o de independência linear. Se, em um conjunto de vetores, nenhum deles puder ser escrito como combinação linear do outro, então o conjunto é linearmente independente ou LI. Do contrário, caso exista ao menos um que pode ser escrito como combinação linear dos demais, então o conjunto é linearmente dependente ou LD. Formalmente, temos a seguinte definição ilustrada na figura 7.

Figura 7 - Definição de independência linear

Definição: Se $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é um conjunto não-vazio de vetores, então a equação vetorial

$$k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_rv_r = 0$$

tem pelo menos uma solução, a saber,

$$k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_r = 0$$

Se esta é a única solução, então o conjunto S é chamado ***linearmente independente***. Se existem outras soluções, então S é um conjunto ***linearmente dependente***.

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 169).

Desse modo, para determinar se um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LI em um espaço vetorial V, devemos verificar se a equação $k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_rv_r = 0$ possui ou não a solução trivial. Além disso, segundo Lay (2011), é essencial trabalhar com o menor conjunto possível de vetores geradores, sendo que este tem que ser linearmente independente.

> Como um subespaço geralmente contém uma infinidade de vetores, alguns dos problemas envolvendo subespaços podem ser tratados de uma melhor forma através de um pequeno conjunto finito de vetores que geram o subespaço. Quanto menor for o conjunto, melhor. Pode ser mostrado que o menor conjunto gerador tem que ser linearmente independente. (LAY, 2011, p. 156).

Assim, dos conceitos de conjunto gerador e independência linear, chegamos à base de um espaço vetorial, que podemos considerar como conjunto gerador mínimo ou conjunto independente máximo. Conforme explica Strang (2009),

> O ponto crucial é que uma base é um *conjunto independente máximo*. Ele não pode ser ampliado sem perder a independência. A base é também um *conjunto de geradores mínimo*. Ele não pode ser diminuído e continuar gerando o espaço. (STRANG, 2009, p. 98; grifo nosso)

É importante que o professor crie situações nas quais os estudantes possam perceber tais características de uma base, pois isso o ajudará a delinear um conceito imagem no qual poderá se apoiar quando apresentado à definição formal de base, que requer um bom domínio dos conceitos de conjunto gerador e independência linear.

Na sessão didática 5, o conceito de base foi construído com base em exemplos que eram discutidos com a participação ativa dos estudantes, cujas perguntas feitas por nós – professora pesquisadora – os remetiam a elaborar o conceito imagem da noção de base conforme iam dialogando sobre o tema. Assim, se aproximavam da definição formal de base, ilustrada na figura 8.

Figura 8 - Definição de base

21 Uma ***base*** para **V** é uma sequência de vetores que possui duas propriedades concomitantes:

1. Os vetores são linearmente independentes (não há vetores demais).

2. Eles geram o espaço **V** (não faltam vetores).

Fonte: Strang (2009, p. 95).

Também é importante explorar a representação geométrica dos conceitos de independência linear, conjunto gerador e base, como um meio de proporcionar a visualização e a construção de imagens mentais que ajudarão na abstração destes conceitos. Por exemplo, numa abordagem geométrica, é possível ilustrar o fato da base de um espaço vetorial não ser única. A figura 9, a seguir, traz um gráfico com três vetores no plano xy, do qual é possível observar a dependência entre os três, o conjunto gerador e as distintas bases formadas por eles.

Figura 9 - Representação geométrica de conjuntos geradores e bases

Exemplo 8 O plano *xy* na Figura 2.4 é apenas $\mathbf{R}^2$. O vetor v_1, por si mesmo, é linearmente independente, mas não gera $\mathbf{R}^2$. Os três vetores v_1, v_2, v_3 certamente geram $\mathbf{R}^2$, mas não são independentes. *Dois vetores quaisquer* entre eles, digamos v_1 e v_2, possuem ambas as propriedades – eles geram e são independentes. Portanto, eles formam uma base. Observe novamente que *um espaço vetorial não tem, de fato, uma base exclusiva.*

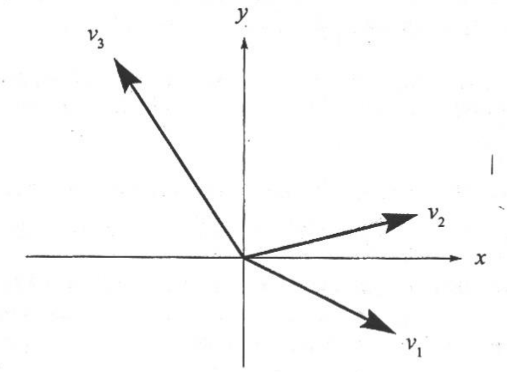


Figura 2.4 Conjunto de geradores $\{v_1, v_2, v_3\}$. Bases $\{v_1, v_2\}$; $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$.

Fonte: Strang (2009, p. 96).

Além disso, todas as bases de um espaço vetorial com dimensão finita sempre terão o mesmo número de vetores. Isso remete à definição do conceito de dimensão, ilustrada na figura 10.

Figura 10 - Definição da dimensão

A ***dimensão*** de um espaço vetorial de dimensão finita *V* é definida como o número de vetores de uma base de *V* e denotada por dim(*V*). Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 179).

Pela definição, temos, por exemplo, que a dim(R^n) = n, ou seja, a base canônica tem n vetores. Se dim(P_n) = n + 1, então a base canônica tem n + 1 vetores e quando a dim(M_{mn}) = mn, a base canônica tem m x n vetores. Segundo Poole (2011, p. 411) "[...] a dimensão de um espaço vetorial é o seu 'número mágico'", pois, se conhecendo a dimensão de um espaço vetorial *V*, obtemos muitas informações sobre V, e isso pode diminuir o trabalho ao lidar com certos tipos de cálculos. Assim, o autor propõe o teorema descrito na figura 11, cuja demonstração não iremos abordar.

Figura 11 - Teorema baseado na dimensão de um espaço vetorial

Teorema 7: Seja V um espaço vetorial com dim $V = n$. Então:
a. Qualquer conjunto linearmente independente em V contém no máximo n vetores.
b. Qualquer conjunto gerador de V contém no mínimo n vetores.
c. Qualquer conjunto linearmente independente em V, com exatamente n vetores, é uma base para V.
d. Qualquer conjunto gerador de V, com exatamente n vetores, é uma base para V.
e. Qualquer conjunto linearmente independente em V pode ser estendido para uma base para V.
f. Qualquer conjunto gerador de V pode ser reduzido a uma base para V.

Fonte: Poole (2011, p. 411).

Analisando a formulação destes conceitos numa perspectiva piagetiana, temos que a construção do esquema de espaço vetorial passa pela assimilação de conceitos já conhecidos dos alunos (vetores, matrizes, conjuntos etc.), cuja unificação, pela adição e multiplicação escalar, desencadeará os conflitos cognitivos (desequilíbrios) necessários à ocorrência da acomodação, ou seja, a modificação de esquemas mentais (do aluno) para dar conta do conceito de espaço vetorial. À medida que o aluno reflete sobre essas operações, poderá fazer o reflexionamento a um patamar superior do conceito de espaço vetorial. Este reflexionamento, seguido por uma tomada de consciência do objeto espaço vetorial, representa a ocorrência de uma abstração, que, segundo Tall (2002), se dá mediante a generalização reconstrutiva.

Os demais conceitos, como subespaço, base e dimensão, serão construídos pela expansão dos esquemas de espaço vetorial, pelo aluno. Nesse caso, não requer uma abstração profunda quanto a do espaço vetorial. Para que ocorra a compreensão destes conceitos e expansão dos esquemas de assimilação de espaço vetorial, estes precisam ser explorados fortemente em suas representações; ou seja, é necessária a familiaridade com a manipulação das operações de adição e multiplicação escalar, as combinações lineares, verificação de axiomas de espaço vetorial, conjunto gerador, base etc., de modo a relacionar os significados algébricos e geométricos às propriedades, teoremas e definições. Enfim, o aluno precisa dispor de ferramentas que o tornem apto a generalizar e abstrair as características e funções destes conceitos na Teoria dos Espaços Vetoriais. Infelizmente, em muitas salas de aula da disciplina Álgebra Linear, estes conteúdos são abordados numa só aula expositiva.

O próximo capítulo descreve os procedimentos metodológicos, indicando o tipo de pesquisa, a metodologia adotada e detalhes de como se deu cada etapa da investigação de campo, incluindo os instrumentos de coleta de dados e as categorias de análise.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo cuidamos da descrição da metodologia de pesquisa e dos procedimentos metodológicos que foram a base dos experimentos de campo, desde a fase de coleta dos dados até a análise e interpretação deste. Todos os procedimentos foram delineados em consonância com os objetivos da investigação, de modo que cada um pudesse ser apreciado e vislumbrado no decorrer de cada etapa deste estudo. Embasamo-nos em Bogdan e Biklen (1994), Yin (2010) e Ponte (2006).

5.1 Concepção e desenvolvimento da pesquisa de campo

O principal objetivo desta investigação foi compreender como a mediação docente, apoiada na Sequência Fedathi, pode influenciar o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado de alunos de licenciatura em Matemática em aulas de Álgebra Linear. Para isso, foi preciso analisar a prática de ensino, considerando as múltiplas relações que se estabelecem em sala de aula e buscando evidenciar, nesse contexto, informações que respondessem aos questionamentos do estudo.

Nesse sentido, tratamos de uma pesquisa qualitativa, que atendeu às características definidas por Bogdan e Biklen (1994), uma vez que: o ambiente natural foi fonte direta dos dados (sala de aula); descrevemos os fenômenos no contexto em que aconteceram; houve foco no processo e não no produto; os resultados foram analisados de maneira indutiva, cujas interpretações foram constituídas conforme os resultados iam emergindo e se organizando; os significados emergentes tiveram vital importância, pois não apenas forneceram respostas às questões do estudo, mas, também, consideraram a perspectiva dos sujeitos e o modo como vivenciaram a Sequência Fedathi.

Por ser um estudo cujas perguntas de pesquisa buscaram responder “como” e “por que” a SF pode influenciar o desenvolvimento do PMA, tendo em vista “como” o professor realiza a mediação em sala de aula, bem como pelo fato de os fenômenos precisarem ser investigados no contexto em que acontecem, havendo pouco controle sobre os eventos, elegemos como metodologia de pesquisa o *estudo de caso*, que segundo Yin (2010, p. 23): “[...] são métodos preferidos quando: (a) as questões 'como' ou 'por que' são propostas; (b) o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos; (c) o enfoque está sobre um fenômeno contemporâneo no contexto da vida real”. Além disso, uma das principais vantagens do estudo de caso para esta investigação decorre da possibilidade de estudar o caso em profundidade.

Ao realizar este estudo de caso, optamos pela utilização de múltiplas fontes de evidências, de modo a fazer, ao final das análises, a triangulação dos dados. Segundo Yin (2010), a principal vantagem do uso de múltiplas fontes de evidência é o desenvolvimento de *linhas convergentes de investigação*, de modo que “[...] qualquer achado ou conclusão do estudo de caso é, provavelmente, mais convincente e acurado se baseado em diversas fontes diferentes de informação, seguindo um modo corroborativo.” (p.143).

Assim, para coleta dos dados, utilizamos seis fontes de evidência: observação direta e participante, entrevista focal, questionários, gravações em áudio e vídeo, atividades (usando lousa, papel e/ou computador) e fóruns para discussão. Estas foram aplicadas no acompanhamento, observação, elaboração e execução de aulas de Álgebra Linear, tendo como foco a ação docente em sala de aula, sem desconsiderar a participação dos estudantes. A figura 12 ilustra as fontes utilizadas.

Figura 12 - Distintas fontes de evidência utilizadas para coleta de dados.

Fonte: Elaborado pela autora.

Além disso, o estudo teve forte cunho descritivo, uma vez que buscamos descrever com detalhes os principais fatos vivenciados, de modo que pudéssemos adotar, após a descrição dos fenômenos, a perspectiva pragmática, que, segundo Ponte (2006), se caracteriza como uma das perspectivas do estudo de caso:

> Um estudo de caso pode seguir uma de duas perspectivas essenciais: (a) uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes e (b) uma perspectiva pragmática, cuja intenção fundamental é

> proporcionar uma perspectiva global do objecto de estudo, do ponto de vista do investigador, tanto quanto possível completa e coerente. (p.12).

Apesar de levar em consideração o ponto de vista dos participantes da investigação, os resultados remeteram ao pragmatismo, uma vez que, partindo do caso particular em estudo, buscamos uma visão geral da mediação docente na Sequência Fedathi, considerando as implicações de sua prática, ao proporcionar situações que contribuíssem para o desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado.

Especificamente, trabalhamos com a Álgebra Linear com foco nos conteúdos de: espaço vetorial, subespaços, base e dimensão, sendo que, para analisar a mediação docente preconizada pela Sequência Fedathi e suas implicações para o desenvolvimento do PMA, dividimos a pesquisa em três etapas: 1ª) Observação de aulas de Álgebra Linear mediadas segundo a SF; 2ª) Aplicação da SF em um curso de extensão; e 3ª) Verificação das impressões dos sujeitos sobre a SF.

Para análise de cada etapa nos apoiamos na Análise de Conteúdo, de Bardin (2004?), por ser um método bastante empregado quando se pretende analisar conteúdo de fontes distintas, como discurso, entrevistas, documentos, entre outros. Desse modo, obedecemos os seguintes passos, ao lidar com os dados coletados:

a) **pré-análise** - procedemos à organização do estudo, realizando a leitura flutuante dos dados obtidos para termos uma visão geral das partes e selecionar categorias que auxiliassem na fundamentação da interpretação das informações;
b) **exploração do material** - codificamos os dados em unidades de análise para serem categorizados, segundo suas semelhanças e diferenças;
c) **tratamento dos resultados** - realizamos inferências para interpretação dos dados e dissertação dos resultados.

Os tópicos a seguir descrevem cada etapa, detalhando os sujeitos, *locus*, procedimentos e como se deu a análise dos dados.

5.1 Primeira etapa: observação da Sequência Fedathi

Essa etapa aconteceu em abril de 2016, ocasião em que observamos quatro sessões didáticas da disciplina "Introdução à Álgebra Linear", ministradas pelo Professor Doutor Hermínio Borges Neto, mentor da Sequência Fedathi, que há 30 anos a utiliza como metodologia de ensino. Essas observações foram essenciais para compreensão da atitude e postura do professor em sala de aula, tendo em vista um ensino voltado para a construção do conhecimento matemático.

Desse modo, buscamos atender ao primeiro objetivo específico: entender como a SF propicia a construção conceitual de conteúdos da Álgebra Linear. Para isso, a coleta de informações se deu por meio de observação direta, na qual buscamos estudar as relações entre o conteúdo matemático trabalhado nas aulas e a abordagem metodológica da Sequência Fedathi.

As aulas aconteceram aos sábados no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), realizado na Universidade Estadual do Ceará. Trata-se de uma disciplina eletiva, com turma composta por 13 alunos, cuja ementa consta no Anexo 1. Duas sessões didáticas foram gravadas em áudio e vídeo, transcritas e retextualizadas, para serem analisadas de modo mais detalhado. Os temas das aulas gravadas foram: sistemas de equações lineares, espaços vetoriais e subespaços. O quadro 5 descreve os procedimentos realizados.

Quadro 5 – Síntese da coleta de dados da 1ª etapa da pesquisa

Objetivo	***Locus***	**Sujeitos**	**Procedimentos**	**Registro**
Entender como a SF propicia a construção conceitual em Álgebra Linear.	Sala de aula (Pós-graduação) Disciplina: Álgebra Linear	Professor da disciplina	Observação direta.	Áudio/vídeo; Anotações de campo.

Fonte: Elaborado pela autora.

Para análise dos dados, utilizamos como categorias os princípios e fases da SF, descritos em Sousa (2015) e os processos de PMA, descritos por Dreyfus (2002), como meio de extrair indícios de sua presença na mediação docente. O quadro 6 ilustra essas categorias.

Quadro 6 - Categorias de análise estabelecidas *a priori*

Categorias	
Fases da Sequência Fedathi	Tomada de posição. Maturação. Solução. Prova.
Princípios da Sequência Fedathi (SOUSA, 2015)	*Plateau* dos alunos. Análise do ambiente. Análise teórica. Acordo didático. Postura mão-no-bolso.
Processos de Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 2002)	Processo de representação. Processo de síntese. Processo de generalização. Processo de abstração.

Fonte: Elaborado pela autora.

Buscamos observar atentamente as ações do professor da disciplina com foco na maneira como os conteúdos foram trabalhados, para que, assim, pudéssemos compreender como o conteúdo foi organizado nas fases da Sequência Fedathi, tendo em vista o ensino voltado para a construção de conceitos da Álgebra Linear. Os resultados proporcionaram elementos que auxiliaram na preparação das sessões didáticas, ministradas na segunda etapa da investigação, contribuindo para a compreensão da *análise teórica*, integrante do primeiro nível da SF, conforme descreve Sousa (2015).

5.2 Segunda etapa: vivência da Sequência Fedathi

A segunda etapa deste estudo aconteceu nos meses de março, abril e maio de 2017 e tratou da vivência da Sequência Fedathi em um curso de extensão[22] intitulado: *Introdução às noções elementares da Álgebra Linear*, que teve duração de 40h e aconteceu na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), localizada na cidade de Sobral/CE. Com este curso buscamos atender ao segundo objetivo da pesquisa: Identificar na mediação docente possíveis relações com o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. Doravante, nos remeteremos ao curso, somente como “Curso de Introdução à Álgebra Linear”. O quadro 7 ilustra os procedimentos adotados na coleta dos dados.

Quadro 7 - Síntese da coleta de dados da 2ª etapa da pesquisa

Objetivo	***Locus***	**Sujeitos**	**Procedimentos**	**Registro**
Identificar na mediação docente, possíveis relações com o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado	Laboratório de Ensino de Matemática (LEMA) - Curso de extensão	8 alunos de licenciatura em Matemática	Aplicação da SF; Questionários; Grupo focal.	Áudio/vídeo; Fotografia; Anotações de campo;

Fonte: Elaborado pela autora.

O Curso de Introdução à Álgebra Linear aconteceu em nove encontros, com três horas de duração cada um, dos quais descrevemos e analisamos sete, uma vez que o primeiro e o último foram dedicados à apresentação do curso e realização de entrevista, respectivamente. O quadro 8 traz o cronograma dos conteúdos abordados no curso:

[22] Junto à UVA, o curso e o grupo de estudos integraram o projeto de pesquisa intitulado: “Construção de noções abstratas da Álgebra Linear: reflexões sobre ensino e aprendizagem”. Neste relatório, porém, nos referiremos a ambos, separadamente, para manter a clareza das ações realizadas.

Quadro 8 - Cronograma do curso de Introdução à Álgebra Linear

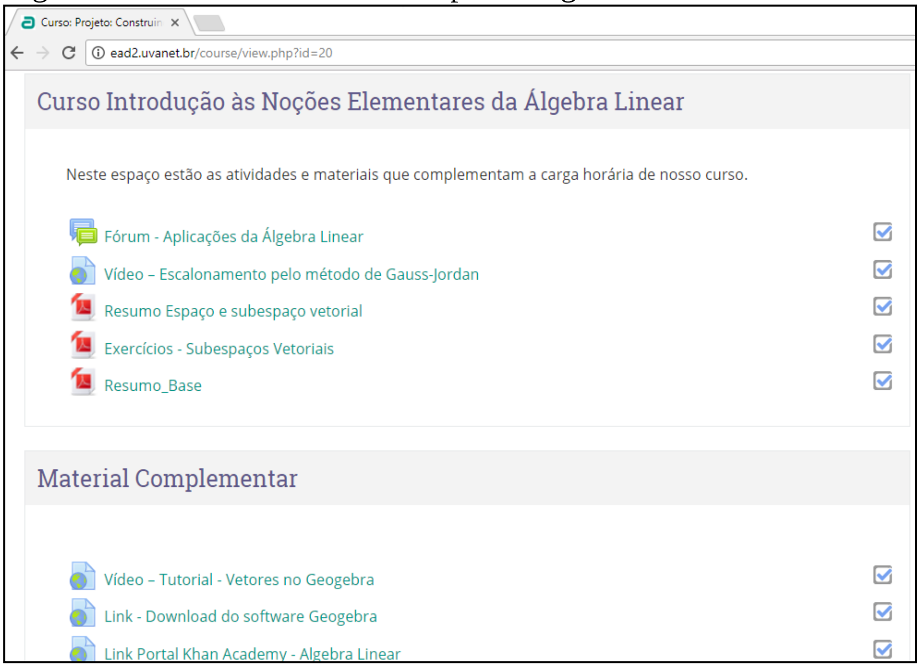
Aulas		Data	Conteúdos
1	quarta-feira	22/03	Apresentação do curso
2	sexta-feira	24/03	Espaços vetoriais
3	quarta-feira	29/03	Subespaços vetoriais
4	segunda-feira	10/04	Combinação linear
5	quarta-feira	12/04	Geradores
6	quarta-feira	17/04	Atividade no Laboratório de Informática
-	**sexta-feira**	**14/04**	**Feriado – Paixão de Cristo**
7	quarta-feira	19/04	Atividade no Laboratório de Informática
-	**sexta-feira**	**21/04**	**Feriado – Tiradentes**
8	quarta-feira	26/04	Base e dimensão
9	sexta-feira	28/04	Avaliação do curso (grupo focal/questionário)

Fonte: Elaborado pela autora.

Os conteúdos trabalhados no Curso foram: espaços vetoriais, subespaços gerados, conjuntos geradores, independência linear, base e dimensão, distribuídos em nove encontros presenciais. As aulas aconteceram às quartas e sextas, das 8 às 11 horas da manhã. Contou com nove alunos, cujos critérios de seleção foram: já ter cursado a disciplina Álgebra Matricial (1º semestre) e não ter cursado Álgebra Linear (4º semestre). Assim, os sujeitos do estudo foram alunos do 2º ao 4º semestre.

Para completar a carga horária de 40 horas, bem como a fim de obter outras fontes de coleta de dados, adotamos a plataforma Moodle, vinculada à UVA, como Ambiente Virtual de Aprendizagem, visando a disponibilizar: *slides* das aulas (1h); material complementar de estudo (3h); vídeos-tutoriais de utilização do *software* Geogebra (1h); fórum para discussão (4h); e exercícios (4h). A figura 13 ilustra a tela principal da plataforma utilizada, exibindo os materiais e atividades desenvolvidas.

Figura 13 - Ambiente Virtual de Aprendizagem utilizado no curso



Fonte: Elaborado pela autora.

Para analisar a mediação do ensino nas sessões didáticas, utilizamos a Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004), sendo que: na pré-análise, foram realizadas a transcrição dos áudios e a descrição dos acontecimentos, na íntegra, de cada sessão didática, bem como delineamos as categorias que nortearam as análises iniciais. Para a exploração do material coletado, fizemos a retextualização das transcrições, selecionando os trechos dos diálogos mais relevantes para auxiliar na descrição de cada aula. Ao fazer o tratamento dos resultados, após a descrição e análise prévia de cada sessão didática, realizamos a inferência e interpretação tendo como parâmetro as categorias preestabelecidas, mas sem desconsiderar novas categorias que emergiram dos dados.

Especificamente, verificamos os diálogos estabelecidos no decorrer da abordagem dos conteúdos e o modo como foram trabalhados os recursos e estratégias de ensino em cada sessão didática, buscando com isso evidências de relações entre a ação docente e o desenvolvimento dos processos de PMA. Assim, as categorias estabelecidas foram, como na primeira parte do estudo, as fases da Sequência Fedathi: tomada de posição, maturação, solução e prova; e os processos de Pensamento Matemático Avançado descritos por Dreyfus (2002), tais como: representação, síntese, generalização e abstração, além do conceito imagem e conceito definição, de acordo com Tall (1988; 1995).

5.3 Terceira etapa: impressões dos sujeitos

A terceira etapa da pesquisa se deu na modalidade grupo de estudos, em que os estudantes puderam conhecer a Sequência Fedathi e, ao mesmo tempo, expor suas impressões sobre a experiência vivenciada no Curso de Introdução à Álgebra Linear. Com isso, buscamos atender ao terceiro objetivo específico da pesquisa: Conhecer os reflexos da mediação docente nas impressões dos alunos participantes da pesquisa. A coleta de dados se deu por meio de anotações de campo, questionários, entrevista coletiva e fóruns a distância no ambiente Moodle. O quadro 9 traz um resumo dos procedimentos de coleta de dados.

Quadro 9 - Síntese da coleta de dados da 3ª etapa da pesquisa

Objetivo	***Locus***	**Sujeitos**	**Procedimentos**	**Registro**
Conhecer os reflexos da mediação docente nas impressões dos alunos participantes da pesquisa.	LEMA Grupo de Estudos	Estudantes que participaram do curso de Introdução à Álgebra Linear.	Realização do grupo de estudos.	Áudio; Fotografia; Anotações de campo; Fóruns de discussão.

Fonte: Elaborado pela autora.

Os encontros do grupo de estudos aconteceram em maio de 2017, duas semanas após a realização do Curso de Introdução à Álgebra Linear, ocasião em que os alunos já haviam manifestado opiniões sobre a metodologia adotada no Curso, por meio de entrevista coletiva como grupo focal e de um questionário escrito com questões abertas. Esses depoimentos foram coletados antes de conhecerem a Sequência Fedathi, tendo por base apenas suas percepções sobre o que vivenciaram no Curso. Dos sete alunos que concluíram o Curso, somente quatro puderam participar do grupo de estudos, pois os demais tiveram que assumir outros compromissos nesses dias e horários.

Desse modo, o grupo de estudo aconteceu no período de 17 de maio a 07 de junho de 2017, tendo dois encontros presenciais e três a distância, compondo uma carga horária total de 20 horas. O quadro 10 traz o cronograma dos encontros do grupo de estudos:

Quadro 10 - Cronograma do Grupo de Estudos

Encontros		**Data**	**Atividades**	**Horários/Datas**
1º	Quarta-feira	17/05	Apresentação da Sequência Fedathi	8:00 as 11:00
2º	À distância	18/05	**Fórum:** Tomada de Posição e Maturação	De 18 a 24/05
3º	À distância	24/05	**Fórum:** Solução e Prova	De 24 a 31/05
4º	À distância	31/05	**Tarefa:** Planejando uma sessão didática	De 31/05 a 07/06
5º	Quarta-feira	07/06	Apresentação das sessões didáticas	8:00 as 11:00

Fonte: Elaborado pela autora.

Optamos por estudos a distância para evitar evasão e proporcionar autonomia aos estudantes ao estudarem teoricamente a Sequência Fedathi. A figura 14 ilustra a página inicial do grupo no ambiente Moodle.

Figura 14 - Página inicial do ambiente virtual de aprendizagem Moodle

Fonte: Elaborado pela autora.

No primeiro encontro, apresentamos a Sequência Fedathi e conversamos sobre a experiência vivenciada no curso de extensão. Além disso, houve atividades a distância em que os estudantes participaram de dois fóruns, voltados para discussões sobre a *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*, e uma tarefa que foi postada no ambiente Moodle e apresentada em sala no último encontro do grupo. A tarefa consistiu no planejamento de uma sessão didática utilizando a SF. Para isso, eles poderiam escolher qualquer conteúdo de Matemática.

As análises, nesse caso, focaram nas falas dos estudantes, coletadas por meio de grupo focal, questionários e fórum para discussão, cuja análise se deu com base em Bardin (2004?). As falas dos discentes foram registradas em áudio, inicialmente transcritas e retextualizadas, de modo a serem exploradas, selecionando os trechos relevantes e organizando-os em unidades de análise, das quais foram extraídas as ideias centrais de cada depoimento, para então fazermos o tratamento dos resultados, realizando sua inferência e interpretação. Surgiram categorias que auxiliaram a compreender como a Sequência Fedathi tornou a compreensão da Álgebra Linear significativa para os estudantes, segundo seus relatos.

Em cada etapa, realizamos internamente a triangulação dos dados obtidos das distintas fontes de evidência utilizadas, e, ao final, realizamos a triangulação dos resultados obtidos nas três etapas, de modo a buscar linhas convergentes de interpretação, como modo de aumentar a confiabilidade do estudo de caso, visualizar significados relevantes que tenham ficado ocultos, elaborar o fechamento das ideias e contribuições da pesquisa para o meio acadêmico, bem como verificar se os objetivos da investigação foram alcançados.

No capítulo que segue, trazemos a descrição das aulas observadas na primeira etapa da pesquisa, cujos resultados auxiliaram a compor a *analise teórica* das sessões didáticas ministradas na segunda etapa da investigação.

6 OBSERVAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI

Neste capítulo, descrevemos e analisamos duas sessões didáticas ministradas pelo Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, precursor dos estudos sobre a Sequência Fedathi desenvolvidos na Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará. Considerando sua ampla experiência com a SF, julgamos pertinente observar suas aulas, buscando evidenciar o que suas ações em sala de aula, implicitamente, podem revelar em termos da construção de conceitos elementares da Álgebra Linear, tendo em vista a impossibilidade da introdução de tais conceitos por meio de situações-problema, conforme destacado por Dorier et al. (2000, p. 98).

Desse modo, na primeira etapa da investigação, o professor foi o principal sujeito, fornecendo informações relevantes sobre a estruturação e organização do conteúdo ministrado em cada aula. Os resultados serviram para ampliar nossa visão sobre o primeiro nível da SF – preparação – auxiliando a melhor compreender a análise teórica e o planejamento de sessões didáticas. Além disso, trouxeram os primeiros indícios de como a SF pode favorecer o desenvolvimento do PMA.

Conforme descrito no capítulo 5, as aulas aconteceram em abril de 2016, numa turma do Mestrado Profissional em Matemática, na disciplina Álgebra Linear, composta de 13 estudantes, todos professores da educação básica. A seguir, descrevemos duas sessões didáticas analisadas com foco na ação do professor em sala de aula.

6.1 Sessão didática 1 - Sistemas de Equações Lineares

Esta aula aconteceu no dia 09 de abril de 2016 e teve três horas de duração. O objetivo foi abordar a resolução de sistemas de equações lineares, de modo a promover reflexões sobre a maneira como os conteúdos matemáticos são geralmente abordados em sala de aula. O docente discutiu com a turma a importância de o professor não se prender tanto ao livro didático e valorizar mais o raciocínio matemático, sem se limitar à mera transmissão de regras de manipulação dos conteúdos.

A *tomada de posição* aconteceu quando o professor apresentou à turma um sistema linear e chamou um aluno para resolver na lousa. Um aluno, prontamente, se propôs resolver, porém, questionou qual método deveria usar. O professor, por sua vez, não sugeriu nenhum método. Assim, o aluno livremente escolheu o método da adição, chegando ao seguinte resultado, ilustrado na figura 15.

Figura 15 - Resolução de um aluno usando o método da adição

$$\begin{cases} x + y = 36 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Método da adição: somando membro a membro (1) + (2), temos:
$2x = 38$
$x = 19$
Substituindo $x = 19$ em (2):
$x - y = 2$
$19 - y = 2$
$y = 17$

Fonte: Pesquisa direta (2016).

O docente questionou a turma se a solução estava correta. Os alunos afirmaram que sim. O professor afirmou que não. Os alunos riram. O professor insistiu que estava errado, mas em seguida confirmou estar correto, porém, destacou que o procedimento de resolução não estava. O erro estava no método escolhido. Esta observação causou estranhamento na turma, porém, a situação provocada pelo docente teve o intuito de chamar atenção para o procedimento de resolução adotado. Ao afirmar que o aluno errou, tendo este claramente acertado a questão, o professor provocou a dúvida, fez os alunos reverem seus conceitos e refletirem sobre a situação colocada.

O momento de resolução caracterizou as fases de *maturação* e *solução* da Sequência Fedathi. Estas foram essenciais para dar prosseguimento à aula, pois, com base na resolução do aluno, o professor criticou o método da adição, afirmando que, ao somar os membros, se reduz o sistema a uma equação. Um sistema, no entanto, não pode ser uma equação. Nesse ponto destacou o conceito de equivalência, mais especificamente, sistemas equivalentes, que, embora muito importante, passa despercebido e pouco se explora com os alunos na educação básica. O professor reescreveu o sistema na lousa, seguido de sistemas equivalentes, como mostra a figura 16.

Figura 16 - Sistemas equivalentes

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 36 \\ 2x + 0y = 38 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 36 \\ x + 0y = 19 \end{cases}$$

Fonte: Pesquisa direta (2016).

Ao reescrever, o docente explicou a importância de se abordar sistemas equivalentes e comparou com o método da adição. Defendeu o argumento que os professores deveriam ensinar este conteúdo na escola, deixando claro aos alunos que houve a soma das equações, porém, que essa soma resulta num sistema equivalente ao primeiro, tendo, portanto, ambos a mesma solução. O estudante precisa saber que pode substituir um sistema por outro equivalente.

Em seguida, destacou a importância da ordem de *x* e *y* para que o sistema continue equivalente, enfatizando que, ao operar com as equações, as variáveis permanecem inalteradas, pois, *x* e *y* têm papel posicional, podendo o sistema ser escrito conforme mostra a figura 17.

Figura 17 – Comparação dos sistemas e matrizes

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 36 \\ 2x + 0y = 38 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 36 \\ x + 0y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 36 \\ 2 & 0 & 38 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 36 \\ 1 & 0 & 19 \end{matrix}$$

Fonte: Pesquisa direta (2016).

Com isso, o docente mostrou que trabalhou somente com o essencial, ou seja, com a essência da resolução de sistemas de equações lineares, que, no caso, é a equivalência de sistemas. O procedimento foi substituir o sistema inicial por sistemas equivalentes. Feito isso, o professor sistematizou os passos realizados comparando com o que o aluno fez inicialmente. Fez isso perguntando à turma o que foi feito, até chegar às seguintes respostas:

a) somar a primeira linha com a segunda;
b) dividir a segunda linha por 2; e
c) subtrair a segunda linha da primeira.

Dessa sistematização, com auxílio dos discentes, o professor conseguiu que chegassem nas operações elementares:

i) adicionar uma linha a outra;
ii) multiplicar uma linha por uma constante não nula; e
iii) trocar uma linha com outra.

O professor finalizou esta abordagem, destacando que, após trabalhar com os sistemas equivalentes, é oportuno explorar a resolução por escalonamento, apontando-o como mais eficiente do que outros métodos para resolver sistemas lineares. Destacou que deveria ser abordado desde o ensino fundamental, sem que se fale em matrizes, pois com ele é possível se resolver e discutir qualquer sistema de equação linear. Assim, o professor realizou a fase de prova, formalizando o assunto.

Observemos que ao questionar os alunos quanto às operações realizadas sobre as linhas e pedir que descrevessem como fizeram, o professor incentivou o pensamento matemático, suscitando a ocorrência de processos mentais, como: a observação da estrutura dos sistemas lineares e do resultado das operações realizadas sobre as linhas. Com isso, os estudantes puderam sintetizar os passos realizados, chegando nas operações elementares sobre as linhas de uma matriz. Eis um exemplo de como a Sequência Fedathi pode favorecer o pensamento matemático dos estudantes, proporcionando a experiência da descoberta.

Ao abordar a resolução de sistemas de equações lineares, com ênfase no conceito de sistemas equivalentes, e destacar o método de eliminação de Gauss como o mais eficiente, o docente corrobora Lima et al. (2006) ao acentuarem que: “O método mais eficiente para resolver sistemas é o do escalonamento, ou eliminação gaussiana. Ele é elementar, consagrado por seu uso secular e, ao mesmo tempo, atual”. (p. 118).

Se fosse uma aula cuja metodologia se baseasse apenas na reprodução de conteúdo, a técnica do escalonamento seria diretamente apresentada e ensinada passo a passo, partindo da definição, não havendo, portanto, oportunidade de compreensão da Matemática por trás da técnica. Com a Sequência Fedathi, o foco foi o raciocínio matemático, proporcionando o diálogo constante durante a abordagem do conteúdo, de modo que os alunos não se limitaram a ouvir passivamente. O quadro 11 traz um resumo das fases da Sequência Fedathi vivenciadas nesta sessão didática.

Quadro 11 - Resumo da vivência da Sequência Fedathi

Fase	Ações realizadas
Tomada de Posição	Após falar da importância de se ensinar com foco no raciocínio matemático, o professor apresenta a seguinte questão: Dois conjuntos cuja soma é 36 e a diferença é 2. Quais são os dois conjuntos?
Maturação	Alunos resolvem o sistema linear usando métodos de sua preferência.
Solução	Aluno apresenta sua resolução usando o método da adição. O professor questiona o método utilizado e com base na solução do aluno vai construindo um método de resolução de sistemas de equações baseado no conceito de sistemas equivalentes, relacionando o saber antigo ao saber novo.
Prova	O professor com auxílio dos alunos sistematiza os passos realizados, formalizando as operações sobre as linhas de uma matriz. Somente ao final fala do método do escalonamento.

Fonte: Pesquisa direta (2016).

Fazendo um resumo de como se deu o ensino da resolução de sistemas de equações lineares nesta sessão didática, temos que a construção do conhecimento aconteceu com base no conceito de sistemas equivalentes, em que o professor conduziu a aula, de modo que pudesse ao final, deduzir as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, contando com a participação ativa dos alunos o tempo todo.

Em distintos momentos, o professor tentava instigar o raciocínio dos alunos, levando-os a pensar sobre a atividade matemática e seu funcionamento. Buscou fazê-los perceber certas características da Matemática subjacentes ao conteúdo, bem como conduzi-los a sistematizar os procedimentos realizados, mediante a extração de determinadas características. Essa ação favorece a interação de variados processos mentais, que poderão levar à generalização. O exercício constante dessa maneira de pensar sobre a atividade matemática pode aproximar o aluno dos processos de PMA descritos por Dreyfus (2002).

6.1.1 Análise da mediação docente na sessão didática 1: as categorias emergentes

Usando a técnica da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004?), observamos que, no decorrer dessa sessão didática, surgiram na fala docente certos termos, palavras, frases que se repetiam com frequência, as quais classificamos como *unidades de análise,* por trazerem informações relevantes à compreensão de como se deu o ensino baseado na Sequência Fedathi. Com suporte nelas, definimos as categorias, destacadas no quadro 12.

Quadro 12 - Categorias emergentes da sessão didática 1

Unidades de Análise	**Categorias**
Sistemas lineares	Conteúdo
“Trabalhar o raciocínio matemático”	Essência do conteúdo
“Trabalhar o essencial”	
“Sistema equivalente”	
“perfumaria”	Manipulação algorítmica
Atenção aos procedimentos realizados para sistematização do conteúdo	Raciocínio matemático
Diferentes métodos de resolução de sistemas lineares	Conhecimento prévio do aluno; Elemento desafiador Interação saber antigo/novo

Fonte: Pesquisa direta (2016).

Partindo do fato de que, na *tomada de posição,* devemos oferecer aos alunos uma situação desafiadora, cuja exploração levará ao delineamento do saber em questão, buscamos identificar relações entre as categorias emergentes e a situação proposta pelo professor. Desse modo, de acordo com o quadro 12, as unidades de análise extraídas da fala docente se referem, especificamente, ao conteúdo trabalhado na aula, privilegiando aspectos que precisam ser cuidadosamente pensados, pois têm muito a dizer em relação à maneira como os conteúdos foram tratados nas fases da Sequência Fedathi.

Na abordagem do conteúdo de sistemas de equações lineares, as expressões "trabalhar o raciocínio matemático" e "trabalhar o essencial" foram mencionadas com frequência pelo docente para chamar atenção dos estudantes quanto à importância e à necessidade de o raciocínio matemático ser praticado com maior ênfase em sala de aula, à medida que se trabalha a *essência do conteúdo*, ou seja, o conceito central, cuja exploração fará com que o conteúdo possa ser compreendido de maneira significativa. Por exemplo, o conceito de "sistema equivalente", que foi abordado, de modo que, com base nele se pudesse chegar à solução, fazendo operações sobre as linhas dos sistemas da matriz associada ao sistema, deduzir suas propriedades e sistematizar um método geral de resolução.

O termo "perfumaria" também foi bastante utilizado nas falas do professor. Analisando o contexto, constatamos que foi usado para se referir a informações periféricas à essência do conteúdo, referentes, principalmente, a técnicas algorítmicas. Por exemplo, o professor classificou como "perfumaria" o exercício da técnica de escalonamento, ou seja, a parte mecânica do conteúdo, que seria exercitada somente após o estudante compreender o processo de resolução por meio da noção de sistema equivalente. Desse modo, esta unidade foi categorizada como *manipulação algorítmica* do conteúdo.

Além disso, durante a mediação do ensino, o professor, constantemente, orientava os alunos a prestarem atenção aos procedimentos, de modo que pudessem observar o que estava sendo feito, os passos realizados por eles, fato este que ficou evidente, quando, dialogando com a turma, chegaram juntos à sistematização do conteúdo. Assim, a "atenção aos procedimentos realizados para sistematização do conteúdo" foi inserida na categoria *raciocínio matemático*, pois, à medida que o aluno é estimulado a prestar atenção aos passos realizados, está refletindo sobre sua ação, observando seu raciocínio e buscando visualizar o todo, rumo à sistematização esperada pelo professor.

Também observamos que o docente, com frequência, conduzia os alunos a se lembrarem dos métodos usados para resolver sistemas de equações, referindo-se a eles como inadequados para abordagem deste conteúdo. Insistia em afirmar que o método da adição, que um aluno utilizou para resolver um sistema, estava errado, embora a solução estivesse correta. Esta insistência se configurou como *elemento desafiador*, pois desempenhou o papel de despertar a atenção do estudante para o que estava sendo trabalhado, partindo do que ele já sabia.

Assim, a discussão sobre os métodos de resolução de sistemas de equações lineares proporcionou a interação dos conhecimentos prévios dos alunos (saberes antigos) com o novo conteúdo que seria abordado, sendo, portanto, classificado por nós como *interação saber antigo/novo*, que, por sua vez, desempenhou papel determinante na escolha do que chamamos *elemento desafiador*. Por exemplo, sendo os distintos métodos de resolução de sistemas de equações lineares pertencentes aos conhecimentos prévios dos alunos, o elemento desafiador foi escolhido com vistas a levar o estudante a utilizar pelo menos um destes métodos, de modo que ele pudesse refletir sobre isso, sendo desafiado a pensar sobre o assunto transpondo a manipulação algorítmica.

6.2 Sessão didática 2 – Espaço e subespaço vetorial

A sessão didática 2 aconteceu em 16 de abril de 2016, tendo como tema espaços e subespaços vetoriais. A introdução do conteúdo de espaços vetoriais se deu pela abordagem do *plateau*, sendo exploradas as operações e propriedades aditivas e multiplicativas, de modo a se identificar sua presença na estrutura de conjuntos distintos. Segundo o docente,

> ***Professor:*** *- Posso muito bem começar a trabalhar espaço vetorial e depois dar exemplos, mas não é a forma adequada de se aprender. A forma mais adequada, é você antes, entender certas nuances que tem certos conjuntos, que tem uma operacionalidade, para depois generalizar.*

Na reprodução dessa fala, fica visível a intenção do professor de chamar a atenção da turma para observar o conteúdo do ponto de vista de sua estrutura, considerando particularidades, seguindo um raciocínio que remeta a uma visão mais ampla do assunto, expandindo sua aplicabilidade para consolidar o processo de generalização. Assim, o docente sinalizou que, para compreender o assunto, é preciso sair da zona de conforto de apenas memorizar as propriedades e características dos espaços vetoriais.

O docente explorou as características e propriedades dos espaços vetoriais, levando os alunos a refletirem sobre as estruturas que o caracterizam, tendo como primeiro exemplo a soma de funções e a multiplicação destas por uma constante escalar, remetendo-os a observar seu caráter operatório. Fez o mesmo com o conjunto das matrizes. Com isso, destacou que a compreensão da Álgebra Linear tem estreita relação com a ação de montar uma estrutura matemática. Em determinado momento, questionou:

> **Professor:** *– O que faz a Álgebra Linear? Abstrair! Como é que o matemático faz? Ele vai abstrair essas características: vai categorizar, analisar, classificar essas características. Em vez de estudar cada caso separadamente, estudar uma coisa mais geral.*

Nessa fala, o professor incentivou os estudantes a priorizarem processos implícitos à atividade matemática (categorizar, analisar, classificar), estimulando ações mentais que possibilitem a compreensão do conhecimento matemático e que poderão, conforme for sendo trabalhado constantemente, desenvolver processos de PMA. Foi também uma maneira de incentivar a autonomia discente ante os conceitos da Álgebra Linear.

Em seguida, o professor trouxe outros exemplos de conjuntos já conhecidos dos alunos, tais como R^n, matrizes, vetores (representando forças), enfatizando que estes conjuntos podem ser somados e multiplicados por escalares, sendo importante enxergá-los do ponto de vista de suas propriedades operatórias. Apresentou, também, um contraexemplo em que uma função dada não era fechada em relação a multiplicação por escalar, reforçando o papel dessas operações na caracterização do conceito que estava sendo aos poucos sistematizado.

Ao mostrar distintos conjuntos, incentivando os estudantes a identificarem neles as operações de soma e multiplicação por escalar, o professor suscitou a generalização reconstrutiva, que, segundo Harel e Tall (1991), ocorre quando o aluno reorganiza a ideia que tinha desses conjuntos, num novo esquema, reconstruído para dar conta dessa nova perspectiva: a de que estes conjuntos com tais operações são unificados na Teoria dos Espaços Vetoriais.

A ação dos alunos durante a aula foi no sentido de acompanhar o raciocínio do docente, participando ativamente do diálogo, questionando e sugerindo outros exemplos, como foi o caso dos números complexos, abordado após um estudante comentar: "– As operações com vetores são muito parecidas com operações com números complexos...". Desse comentário, o professor explorou a estrutura operatória dos complexos, comparando com vetores no R^2. Esse momento explicita o quão preparado deve estar o professor ao mediar uma aula segundo a SF.

Mais adiante, ao definir um espaço vetorial, o professor comparou as operações de soma e multiplicação por escalar com as operações elementares que os estudantes estudaram ainda na infância. Com isso, percebemos o cuidado em reaver os saberes antigos relacionando-os ao conhecimento que se está a construir, conforme ilustra a fala seguinte.

> **Professor**: *– O que seria um espaço vetorial? É um conjunto geralmente não vazio, com operação interna chamada adição e uma multiplicação, que satisfaz uma série de propriedades. Agora, veja como é parecido com as operações elementares que vocês viram quando eram pequenos.*

Assim, fez o que chamamos de interação dos saberes antigos com os novos, chamando atenção para as operações que estruturam um espaço vetorial, em distintos conjuntos, que ele exemplifica e os compara, verificando suas estruturas. Além disso, a generalização foi tratada como a finalização de um processo no qual o aprendiz precisa extrair e entender determinadas características comuns a certos conjuntos, que serão generalizados num objeto mais geral, no caso, os espaços vetoriais. Desse modo, percebemos uma preocupação por parte do professor em trabalhar o conteúdo de um ponto de vista que contemplasse os aspectos unificador e generalizador da Álgebra Linear, conforme ilustra a seguinte fala:

> ***Professor****: - Em vez de estudar as matrizes separadamente. Ao invés de estudar as funções separadamente. Ao invés de estudar o R^n separadamente. O que vou fazer? Vou juntar tudo na mesma estrutura e estudar essa estrutura ao mesmo tempo. [...] Um conjunto de forças atuando num ponto, nada mais é do que um espaço vetorial. Força é um conceito da Física. O que tem a ver as forças com R^2? Nada! A não ser as estruturas... O que a matemática faz? Trabalha as estruturas.*

Em seguida, o professor fez uma *tomada de posição* em que passou a explorar exemplos e contraexemplos de espaço vetorial, no qual utilizou a questão ilustrada na figura 18, extraída do livro adotado na disciplina.

Figura 18 - Contraexemplos apresentados na tomada de posição

1.4 Diga, em cada caso, por que o conjunto com as operações indicadas não satisfaz à definição de espaço vetorial, onde $a \in \mathbb{R}$.

a) $\mathbb{R}^2$, com as operações:
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $a(x, y) = (3ax, 3ay)$.

b) $\mathbb{R}^2$, com as operações:
$(x, y) + (x', y') = (xx', yy')$ e $a(x, y) = (ax, 0)$.

Fonte: Hefez e Fernandez (2012, p. 13).

O item (a) foi explorado de modo que o professor ia verificando e discutindo com os alunos cada propriedade dos espaços vetoriais, sendo que essa ação de acompanhar e participar ativamente desse momento caracterizou a fase de *maturação*. O professor fez uso de representações geométricas para melhor visualização do que estava sendo trabalhado, de modo a articular os quadros algébrico e geométrico. Assim, a verificação de cada propriedade, realizada juntamente com os alunos, configurou a fase de *solução* da SF. Já a formalização do conceito de espaço vetorial por meio das propriedades caracterizou a fase da *prova*.

No momento seguinte, o professor deixou que os alunos resolvessem o item (b), sendo esta uma nova *tomada de posição*, que fez com que os alunos se debruçassem para resolver, caracterizando a fase de *maturação*. Com isso, foi suscitada a abstração formal na qual os alunos iriam manipular formalmente as propriedades já discutidas, sendo que, embora não se trate de uma demonstração rigorosa, ela introduz o processo de verificação que usa do rigor matemático para ser validada. Na etapa da *solução*, um aluno foi à lousa verificar as propriedades, porém, ao começar, o professor sugeriu que ele fizesse um exemplo que não estava no livro. O estudante aceitou e o professor reescreveu o item (b), ficando: $(x, y) + (x', y') = (x + x', 1)$ e $c(xy) = (cx, cy)$.

O aluno fez a verificação de cada propriedade, concluindo que o elemento neutro não satisfazia. Ao sugerir que o aluno resolvesse outra questão, o docente tentou produzir "desequilíbrio", fazendo com que o estudante revisse a maneira de verificar as propriedades, observando se estava mesmo ciente delas. Esse momento caracterizou *maturação* e *solução*, simultaneamente, uma vez que ele teve que resolver à medida que apresentava a resolução da questão para a turma. Como isso, temos que, dependendo da mediação docente, estas fases podem ocorrer em simultâneo. A fase da *prova* se caracterizou pela verificação da solução do aluno, feita pelo docente e demais estudantes, que analisaram cada propriedade.

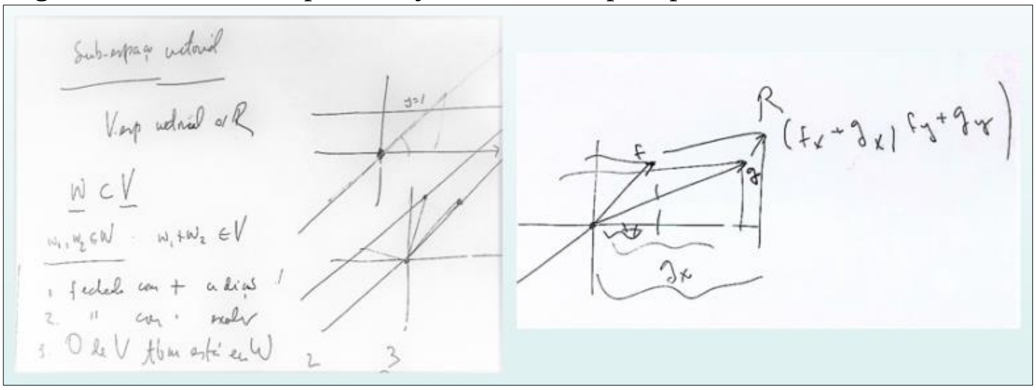
Na sequência, foi abordado subespaço vetorial, descrito como subconjunto que herda as propriedades dos espaços vetoriais. Foram explorados seu significado e propriedades. Novamente, o professor chamou atenção para a estrutura, explicando que esse tipo é diferente das estruturas dos cálculos, pois se está trabalhando de uma forma bem genérica com suporte nas propriedades. Assim, ressaltou a necessidade de se pensar na estrutura, dando exemplo do R^2:

> ***Professor***: *Para pensar a reta como um espaço do R^2 eu tenho que pensar a reta no eixo do x e no eixo do y (um plano cartesiano). A reta só passa a ser subconjunto do R^2 quando eu penso a reta como tendo duas coordenadas. O R^2 são os pares x e y, e reta não é um par (x,y), a reta é a reta. Na álgebra linear eu trabalho a reta como um subespaço vetorial do R^2 onde essas propriedades aqui são satisfeitas. Na reta do espaço vetorial R^2 a noção de distância não existe. A única coisa que existe são essas duas propriedades: soma e multiplicação por escalar. Se você pensar o R^2 do ponto de vista da Análise, você calcula a distância entre dois pontos, vai construir a geometria analítica.*

Nessa fala, o professor tentou levar os alunos a pensarem na reta sob o ponto de vista das operações de soma e multiplicação por escalar, que a fazem ser um subespaço vetorial do R^2, no qual a ideia da reta como sendo a menor distância entre dois pontos distintos, neste caso, não é considerada. Assim, o professor suscitou a ocorrência da generalização expansiva, pois, nesse caso, o estudante estará expandindo seus esquemas de assimilação que guardam as informações sobre o conceito de subespaço vetorial que agora será expandido, para dar conta da ideia de subespaço como sendo gerado por um determinado conjunto de vetores.

Com essa generalização, poderá ocorrer a abstração da ideia de subespaço vetorial que os estudantes precisam alcançar para melhor compreensão dos objetos da Álgebra Linear. Para isso o docente se apoiou fortemente nas representações geométricas dos espaços e subespaços trabalhados, fornecendo variados modos de representar o conteúdo, explorando tratamento e conversão de registros, de modo a estimular o pensamento matemático dos discentes, conforme ilustra a figura 19.

Figura 19 - Distintas representações utilizadas pelo professor



Fonte: Pesquisa direta (2016).

Em seguida, o professor trabalhou com a construção de subespaços, em que fez uma nova tomada de posição, ao questionar: “- Como construir subespaços?” A *maturação* se deu conforme ele ia explicando e instigando a turma a refletir sobre esse processo.

> ***Professor:*** *Pego um vetor v qualquer, diferente de zero. Então, se o v é diferente de zero, o que é esse subespaço que eu construo que contém o v? Ele tem que conter o v, tem que conter o zero. O que mais? Tem que ser fechado para a adição.*
> ***Aluno****: -v.*
> ***Professor****: Tem que conter o -v. O que mais?*
> ***Aluno****: Porquê aí já fecha para a adição, não é?*
> ***Professor****: isso, mas ele tem que conter os múltiplos de v. Se ele conter os múltiplos de v, então qual é a aparência dele? Ele vai ficar assim: tem que conter o (0v, v, 2v, 3v...) são os múltiplos dele... os cv, não é?*

Após mais alguns questionamentos, o subespaço construído ficou assim: *(0, v, w, v+w, cv, c’w, cv+c’w)*, caracterizando com isso a fase da *solução*. Em seguida, vem a fase da *prova*, em que com base nessa construção, o docente descreveu e formalizou o conceito de subespaço gerado. Por fim, foram trabalhados exercícios em que os alunos puderam se debruçar sobre outras questões. O quadro 13 ilustra que ocorreram sucessivos ciclos caracterizando as fases da Sequência Fedathi nesta aula.

Quadro 13 - Resumo da vivência da Sequência Fedathi na sessão didática 2

Fase	Ações realizadas
Tomada de Posição	Verificar por que R² com as operações: *(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')* e *a(x, y) = (3ax, 3ay)*, não satisfaz a definição de espaço vetorial.
Maturação	Se deu à medida que os alunos acompanhavam ativamente a explanação do professor, participando do diálogo, seja perguntando, citando exemplos, dentre outras intervenções, que sinalizam um processo de reflexão sobre o que estava sendo discutido.
Solução	A *solução* foi sendo construída a medida que as discussões ocorridas na *maturação* foram convergindo para a caracterização de espaço vetorial, mediante a verificação de cada propriedade.
Prova	A *prova* foi o momento de formalização das propriedades e definição do espaço vetorial.
Tomada de Posição	Verificar por que R² com as operações: *(x, y) + (x', y') = (xx', yy')* e *a(xy) = (ax, 0)*, não satisfaz a definição de espaço vetorial.
Maturação	Os alunos se debruçaram para resolver a questão proposta com base nas propriedades formalizadas anteriormente.
Solução	Um aluno se propõe a responder a questão na lousa, porém, o professor sugere que mude a operação, ficando: *(x, y) + (x', y') = (x + x', 1)* e *c(xy) = (cx, cy)*. Ele resolve e apresenta sua solução a turma. Assim, nesse caso, houve maturação e solução simultaneamente.
Prova	Se caracterizou pela verificação da solução do aluno, feita pelo docente e demais estudantes, que analisaram cada propriedade.
Tomada de Posição	Após apresentar a definição de subespaço, o professor questiona: "Como construir subespaços?"
Maturação	Se deu à medida que os estudantes acompanharam ativamente a explanação do professor, respondendo seus questionamentos, refletindo sobre o que estava sendo proposto e revendo as características dos subespaços para poder chegar a sua construção.
Solução	Ocorreu quando o subespaço foi construído pelo professor e alunos, com base nos diálogos encadeados na fase anterior.
Prova	Se deu com a formalização do conceito de subespaço gerado.

Fonte: Pesquisa direta (2016).

Nesta sessão didática, a abordagem dos conceitos de espaço e subespaço vetorial se deu partindo do que os alunos já sabiam, para então haver a exploração de novos conceitos mediante a construção conceitual, sem se limitar unicamente à exposição de definições, propriedades, teoremas e demonstrações, mas enfatizar as relações e estruturas matemáticas subjacentes ao conteúdo que foi trabalhado, de modo que os alunos identificassem a presença das operações de soma e multiplicação por escalar na estrutura de variados conjuntos.

Além disso, cabe ressaltar que a ação direta dos alunos sobre os conceitos ocorreu após a mediação dialogada sobre as propriedades e exploração de exemplos e contraexemplos, cuja maturação, nesse caso, pôde ocorrer também durante o acompanhamento atento dos alunos às explicações e discussões acontecidas durante a aula. Desse modo, a etapa de *maturação* da SF, no ensino superior, não se limitou ao momento de debruçamento sobre atividades propostas, mas também ocorreu nos momentos de explanação do conteúdo, uma vez que houve discussão e participação ativa dos alunos refletindo sobre o assunto trabalhado, no formato de questionamentos, levantamento de hipóteses, ou mesmo esclarecimento de dúvidas. Coube ao docente saber mediar esse momento de maturação, em que os estudantes estão ainda a conhecer as primeiras características do conteúdo trabalhado.

6.2.1 Análise da mediação docente na sessão didática 2: as categorias emergentes

No decorrer da aula, observando as falas e as ações do professor, surgiram unidades de análise que foram inseridas nas categorias expressas no quadro 14.

Quadro 14 - Categorias emergentes da sessão didática 2

Unidades de Análise	Categorias
Espaço e subespaço vetorial	Conteúdo
Estrutura matemática	Essência do conteúdo
Reconhecer a estrutura matemática	Raciocínio matemático Elemento desafiador
Funções, matrizes, vetores...	Conhecimento prévio do aluno Pré-requisitos do conteúdo Interação saber antigo/novo
Operação de soma e multiplicação por escalar.	Essência do conteúdo
Destaque à extração de características implícitas aos conteúdos	Raciocínio matemático
Representação geométrica	Estratégia de ensino
Contraexemplos	Estratégia de ensino

Fonte: Pesquisa direta (2016).

Tal como na aula anterior, foram extraídas unidades de análise referentes ao conteúdo abordado. Segundo o quadro 14, tem-se espaço e subespaço vetorial como conteúdo trabalhado, cuja abordagem teve a expressão “estrutura matemática”, constantemente, no discurso docente, com o propósito de levar o estudante a perceber a estrutura subjacente à Teoria dos Espaços Vetoriais, ou seja, leva-lo a pensar além da aplicação de regras e técnicas algorítmicas. Assim, foi categorizada como *essência do conteúdo*, por ter papel determinante na compreensão da Teoria dos Espaços Vetoriais. O ato de "reconhecer a estrutura matemática" foi classificado como *raciocínio matemático* e foi estimulado pelo docente, visando a levar o aluno a saber separar o que é estrutura do que não é, revendo o conteúdo e sua ação sobre ele. Além disso, também foi utilizada como *elemento desafiador*, uma vez que o docente desafiava o aluno a perceber a estrutura dos exemplos trabalhados em sala, sendo que este nem sempre é hábito dos discentes.

Funções, matrizes e vetores foram exemplos de espaços vetoriais usados pelo professor com vistas a mostrar sua semelhança estrutural. São conteúdos pré-requisitos para compreensão do conceito de espaço vetorial e faziam parte dos conhecimentos prévios dos alunos (professores de Matemática). Nesse caso, estes exemplos foram classificados como *interação saber antigo/novo*, pois eram já conhecidos pelos alunos em outros contextos e com base nestes foi possível chegar no novo conteúdo, à medida que o aluno passaria a vê-los numa nova perspectiva: a dos espaços vetoriais.

A operação de soma e multiplicação por escalar foi classificada como *essência do conteúdo*, por se tratar da principal característica dos espaços vetoriais a ser observada nos conjuntos trabalhados, sendo, portanto, o âmago da estrutura dos espaços vetoriais. Além disso, o destaque à extração de características dos conteúdos enfatizado pelo professor, foi a maneira de estimular o *raciocínio matemático*, valorizando o pensamento do aluno e incentivando-o a focar em aspectos relevantes. Já o uso de variadas representações dos espaços e subespaços vetoriais, e dos contraexemplos, foi classificado como *estratégias de ensino* usadas pelo professor para melhor explorar o assunto.

6.3 Interpretação das categorias emergentes

As unidades de análise extraídas de cada sessão didática foram classificadas em categorias, descrevendo, de modo geral, o papel exercido por estas durante as aulas. Comparando ambas as sessões, as reclassificamos como subcategorias, conforme mostra o quadro 15, que as define conforme sua função nas aulas analisadas.

Quadro 15 - Significado das categorias emergentes das sessões didáticas 1 e 2

Subcategorias	**Significado**
Conteúdo	Conteúdo a ser trabalhado na sessão didática.
Essência do conteúdo	Se refere ao âmago do conteúdo, base a partir da qual interagem as demais noções, relações e procedimentos. É o conceito ou operação com a qual o professor guiará a construção do conceito trabalhado. O docente precisa ter um bom domínio do assunto para poder identifica-la adequadamente.
Raciocínio matemático	Atividade mental que pode levar à compreensão de cada conteúdo. Precisa ser estimulado pelo docente, que deve orientar os discentes na busca pela compreensão das relações e conexões entre os objetos matemáticos estudados.
Elemento desafiador	Se refere a um aspecto específico do conteúdo capaz de provocar os desequilíbrios necessários a acomodação dos novos saberes, promovendo a dúvida entre os alunos, de modo que estes se sintam impulsionados a buscar o equilíbrio, ou seja, sintam-se motivados a alcançar o entendimento do que estão a manipular. Envolve o conhecimento prévio do aluno e propicia a interação entre saberes antigos e novos.
Interação saber antigo/novo	Parte do conhecimento prévio do aluno buscando relacionar saberes antigos e novos através do elemento desafiador, responsável por desencadear os desequilíbrios necessários à aprendizagem.
Estratégias/recursos de ensino	São procedimentos e recursos didáticos utilizados pelo professor para facilitar a abordagem do conteúdo, em especial, de particularidades que precisam ser compreendidas sob diferentes enfoques.
Manipulação algorítmica	Se refere ao conhecimento matemático subjacente aos procedimentos algorítmicos e técnicas de resolução, que precisam ser exercitados após compreensão da essência do conteúdo trabalhado.

Fonte: Pesquisa direta (2016).

Comparando as subcategorias descritas no quadro 15 com o referencial teórico que trata dos princípios da Sequência Fedathi, definidos por Sousa (2015), chegamos no quadro 16 que evidencia relações diretas com a análise teórica e o *plateau*.

Quadro 16 - Relações entre as subcategorias e os princípios da Sequência Fedathi

<table>
<tr><th colspan="2">Categorias a priori</th><th>Subcategorias</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Princípios da Sequência Fedathi (SOUSA, 2015)</td><td>Análise teórica</td><td>Essência do conteúdo
Raciocínio matemático
Estratégias de ensino
Manipulação algorítmica</td></tr>
<tr><td>Plateau</td><td>Elemento desafiador/motivador
Interação saber antigo/novo</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa direta (2016).

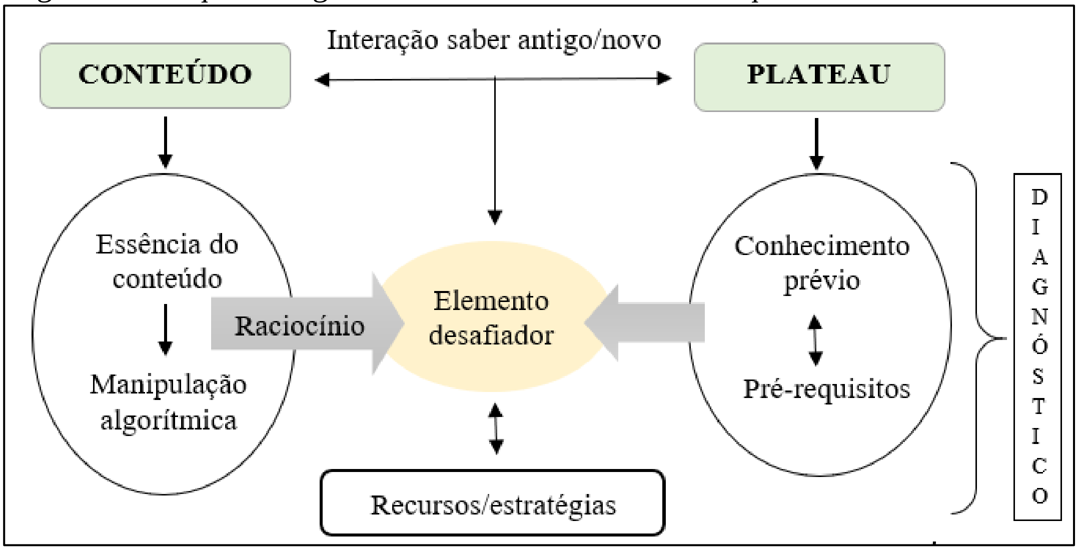
Segundo o quadro 16, estão inseridos na análise teórica a essência do conteúdo, o raciocínio matemático, as estratégias de ensino e a manipulação algorítmica. A essência do conteúdo pode guiar a escolha do desafio, as estratégias de ensino e o delineamento dos objetivos. Além disso, o professor poderá pensar em como estimular o raciocínio matemático dos discentes, trabalhando aspectos relacionados à metacognição, daí a importância da escolha de estratégias de ensino adequadas para estes fins. A manipulação algorítmica, também, faz parte da análise teórica, sendo importante que o professor tenha consciência de seu papel, pois precisa ser explorada, de modo que o aluno possa internalizar ambos os enfoques: o conceitual e o algorítmico.

Outro ponto importante é a escolha do elemento desafiador que provocará nos alunos os desequilíbrios necessários à acomodação dos novos saberes. Essa escolha requer o conhecimento do *plateau*, em que a partir do conhecimento prévio dos alunos, o docente poderá vislumbrar como fazer a interação do que os alunos já sabem com o que precisam aprender. Ao preparar a aula com esta estrutura, o contrato didático estará, à medida que for sendo executado em sala de aula, implicitamente, sendo modificado, pois os alunos, conscientemente ou não, internalizarão a maneira como o professor trabalha, bem como o modo de a atividade matemática ser desenvolvida. Assim, poderão eles próprios, a cada conteúdo, buscar perceber o funcionamento da atividade matemática, analisando suas ações, o próprio pensamento matemático, se questionando: qual a estrutura que está por trás deste assunto? Esse conteúdo pode ser generalizado? Que características precisam ser extraídas?

6.4 Sistematização dos resultados

Tendo os resultados desta análise convergido com as categorias *análise teórica* e *plateau*, estruturamos o esquema ilustrado na figura 20, que descreve como o conteúdo foi tratado na abordagem metodológica da Sequência Fedathi. Assim, mostramos a análise teórica, delineada com base nas relações entre as subcategorias evidenciadas no quadro 15 e os pressupostos da Sequência Fedathi, caracterizando uma estrutura organizacional que guiou a elaboração das sessões didáticas elaboradas e ministradas na segunda parte desta pesquisa.

Figura 20 - Esquema organizacional dos conteúdos na Sequência Fedathi

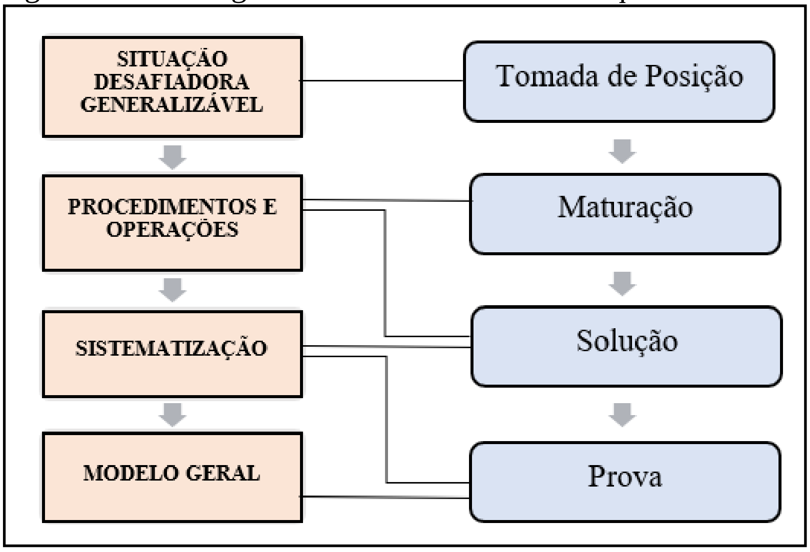


Fonte: Pesquisa direta (2016).

De acordo com a figura 20, definido o conteúdo matemático que será trabalhado, o professor deve identificar sua essência, bem como os procedimentos necessários à manipulação algorítmica, as ações do raciocínio matemático necessárias à construção conceitual do conteúdo e, ainda, escolher estratégias de ensino que o auxiliem na abordagem. Além disso, é preciso considerar que o ensino deve partir do que o aluno já conhece. Desse modo, o professor precisa identificar os conhecimentos prévios dos alunos (diagnóstico do *plateau*) e analisar se estão em consonância com os pré-requisitos mínimos necessários ao bom acompanhamento do assunto. Com isso poderá verificar relações entre saberes antigos e novos, que ajudará a definir um *elemento desafiador* ou, simplesmente, um desafio que possa ser usado para instigar o interesse e o senso investigativo dos estudantes.

Segundo os resultados obtidos, além de verificar tais elementos, é importante que o professor tenha uma visão geral da sessão didática, compreendendo que o ensino, na perspectiva da Sequência Fedathi, deve partir de uma situação generalizável, que possa se utilizar de procedimentos e operações que permitam fazer uma sistematização dos passos realizados e ideias trabalhadas, que culminarão num modelo geral de resolução, conforme ilustra a figura 21.

Figura 21 - Visão geral da sessão didática na Sequência Fedathi

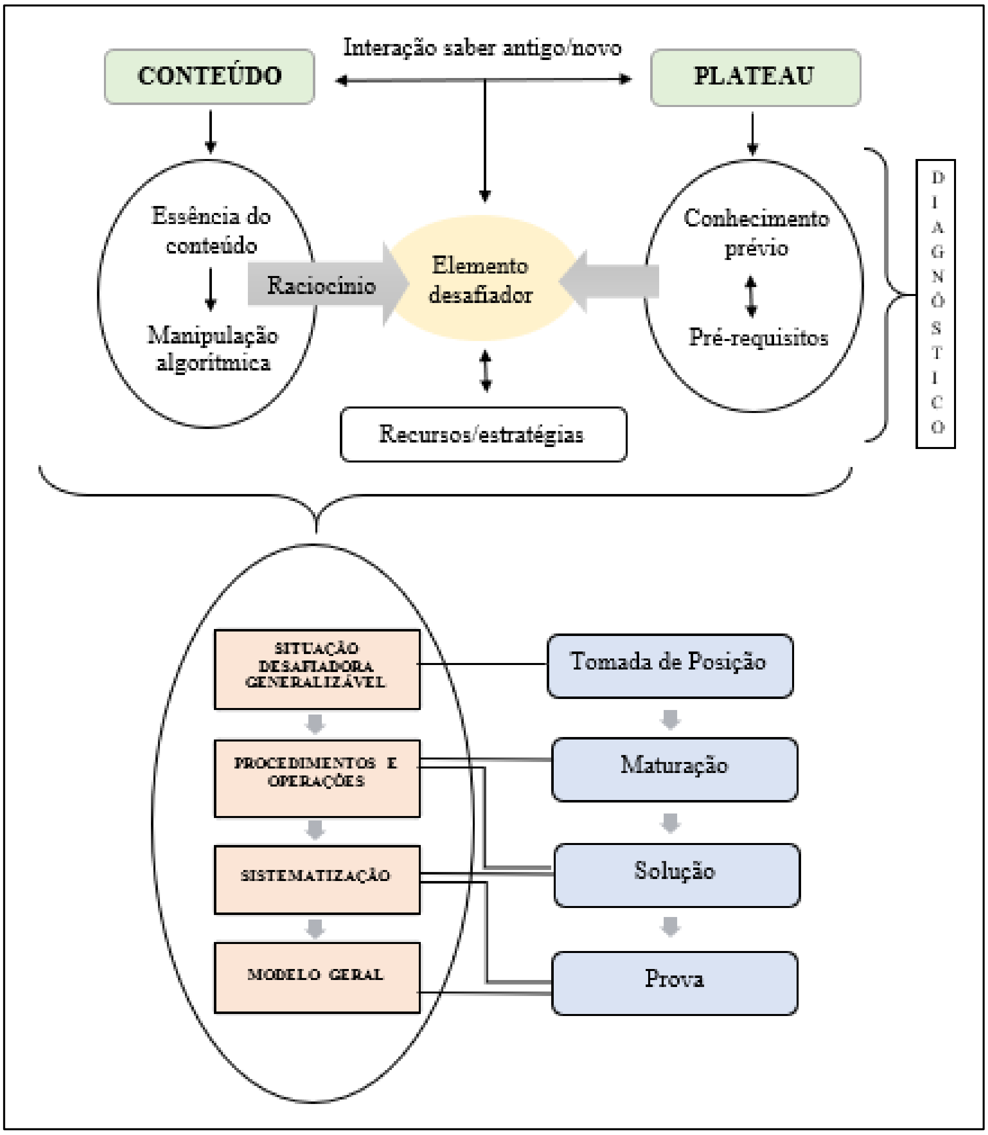


Fonte: Pesquisa direta (2016).

Na sessão didática 1 que abordou sistemas lineares, por exemplo, a situação generalizável foi o sistema: $\begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 2 \end{cases}$ com características triviais, com a qual os estudantes se sentiam à vontade para resolver. As operações sobre as linhas de sistemas equivalentes caracterizaram os procedimentos e operações, que culminaram na sistematização da solução e no esboço de um modelo geral de resolução, nesse caso, a base do método de eliminação de Gauss.

Concluímos que, nessas aulas, os elementos que surgiram como subcategorias evidenciaram uma estrutura organizacional do conhecimento inerente aos conteúdos trabalhados nas sessões didáticas, dando sustentação ao processo de mediação do ensino, uma vez que influenciaram no modo como o ensino foi conduzido. Portanto, resultaram em ferramentas teóricas que podem ser utilizadas na preparação de sessões didáticas, sobretudo na análise teórica, visando à organização do conteúdo voltada para a construção conceitual. A figura 22 ilustra este resultado.

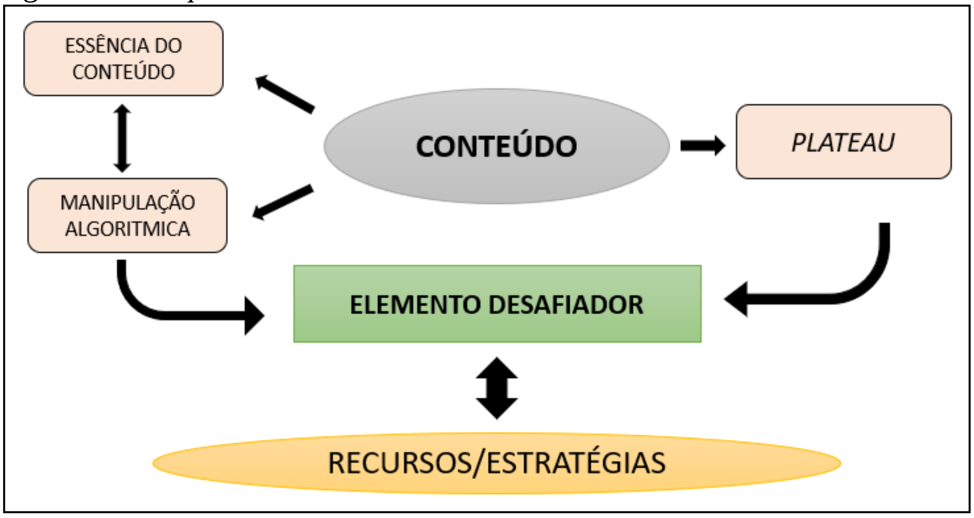
Figura 22 – Relações entre a organização do conteúdo e as fases da Sequência Fedathi



Fonte: Pesquisa direta (2016).

Nesse caso, a figura 22 é uma junção das figuras 20 e 21, que relaciona a organização do conteúdo às fases da Sequência Fedathi, conforme a percebemos na estrutura das sessões didáticas observadas. Com base nesse modelo, condensamos as informações em diagrama, ilustrado na figura 23, de modo que este pudesse auxiliar a organizar o conteúdo, de sorte a planejar as aulas do curso Introdução às Noções Elementares da Álgebra Linear com vistas a propor situações nas quais os alunos pudessem vivenciar a construção conceitual.

Figura 23 - Esquema utilizado na *análise teórica*



Fonte: Pesquisa direta (2016).

Na figura 23, o estímulo ao raciocínio matemático fica implícito na maneira como o professor irá mediar o desafio a ser trabalhado em cada sessão didática, cuja escolha deverá considerar a essência do conteúdo e o *plateau*, em consonância com a utilização de recursos e estratégias de ensino que auxiliem o aluno a superá-lo. Nesse sentido, temos indícios de que os processos de PMA podem existir desde a preparação das sessões didáticas, uma vez que o professor pode planejar como fará a mediação do ensino, de modo a contemplar o estímulo ao raciocínio matemático que subjaz à mobilização destes processos pelos estudantes.

O capítulo a seguir descreve a segunda etapa da investigação, em que a Sequência Fedathi foi vivenciada por nós no Curso de Introdução à Álgebra Linear, destinado a alunos de licenciatura em Matemática. Nesse caso, as sessões didáticas foram preparadas utilizando os resultados sintetizados na figura 23.

7 A VIVÊNCIA DA SEQUÊNCIA FEDATHI E O DESENVOLVIMENTO DO PMA

Neste capítulo, exprimimos os resultados da pesquisa, situando-os nos níveis da Sequência Fedathi - *preparação, vivência* e *análise*. Destacamos os principais achados referentes a postura e mediação docente, buscando relações com os processos que constituem o Pensamento Matemático Avançado.

Especificamente, na *preparação*, descrevemos como se deu o planejamento das sessões didáticas; na *vivência*, contemplamos os diálogos e a maneira como foram explorados os recursos didáticos e estratégias de ensino; e, na *análise*, verificamos a mediação docente na perspectiva das impressões dos sujeitos sobre a Sequência Fedathi. Assim, analisamos os resultados na perspectiva dos processos de PMA, definidos por Dreyfus (2002), Harel e Tall (1995) e Tall (1988;1995).

Os dados foram coletados na segunda e terceira partes da pesquisa de campo, que aconteceu nos meses de março e abril de 2017, com a realização de um curso de extensão (40h) denominado "Introdução às Noções Elementares da Álgebra Linear" e, em seguida de um grupo de estudos (20h) sobre a Sequência Fedathi. Ambos aconteceram na Universidade Estadual Vale do Acaraú, localizada no Município de Sobral/CE, tendo como público-alvo estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

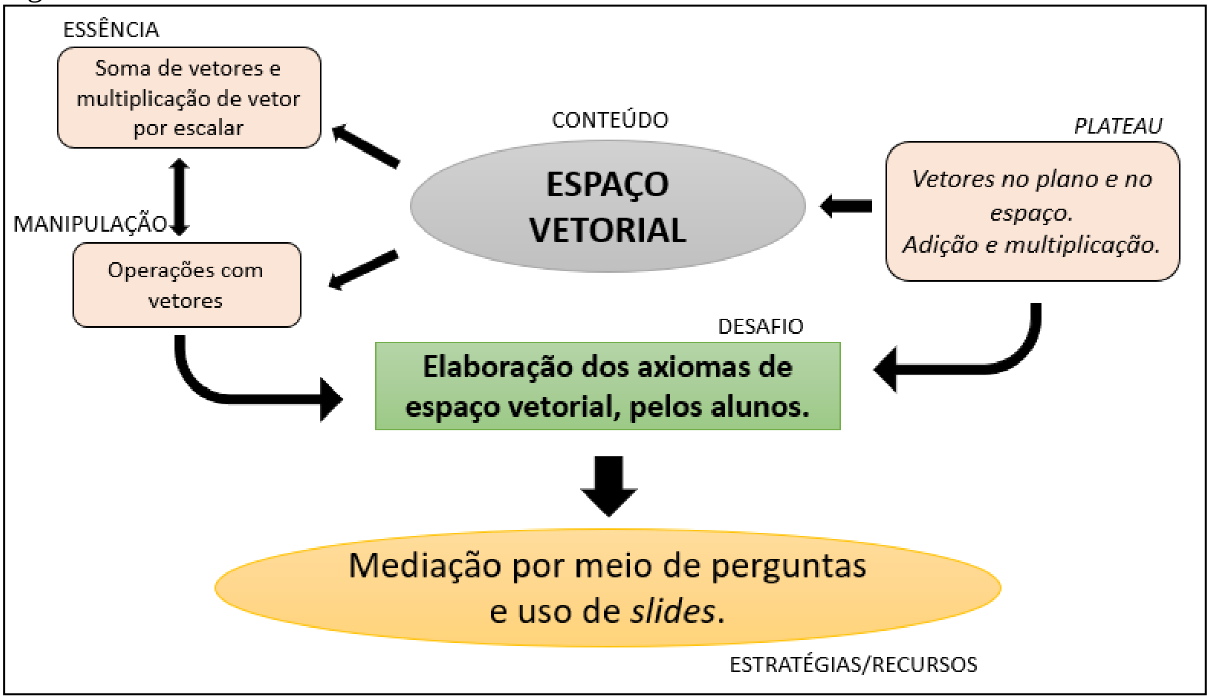
7.1 Preparação das sessões didáticas

A tese de Sousa (2015) traz a Sequência Fedathi em três níveis: preparação, vivência e análise. Destes, a preparação se refere ao planejamento da sessão didática, que deve considerar a *análise do ambiente* e a *análise teórica*, para elaboração do plano de aula. Nos resultados descritos no capítulo 6, a análise teórica se destacou, sendo fundamental para a organização da abordagem do conteúdo com vistas a criar um ambiente de ensino favorável a construção dos conceitos estudados. Assim, todas[23] as sessões didáticas foram elaboradas de modo a trazer implicitamente a lógica contida no esquema da figura 23, obtido na primeira etapa deste estudo. Por exemplo, ao planejarmos a sessão didática sobre espaço vetorial, a análise teórica foi organizada conforme a estrutura ilustrada na figura 24.

---

[23] A análise teórica de cada sessão didática se encontra disponível nos Apêndices B, C, D, E e F.

Figura 24 - Resumo da análise teórica da sessão didática 1



Fonte: Pesquisa direta (2017).

Pela figura 24, temos que a abordagem do conteúdo de espaço vetorial requer, inicialmente, que olhemos para o *plateau*, entendido como o patamar do qual o ensino deverá partir, considerando os conhecimentos prévios dos alunos e os conteúdos pré-requisitos de espaço vetorial, que, no caso, compreendem "vetores no plano e no espaço", bem como a "adição e a multiplicação". Assim, o diagnóstico do *plateau* foi realizado considerando o perfil dos estudantes, os quais já haviam cursado a disciplina Geometria Analítica Vetorial. Desse modo, antes da tomada de posição, ao iniciar a aula, foi realizada uma explanação breve sobre vetores, de modo a relacionar o que os alunos já sabiam com o básico que precisavam saber para responder acerca do assunto focalizado.

Em seguida, foi identificada a *essência do conteúdo*, que, no caso, é a "adição vetorial e a multiplicação por escalar", bem como a *manipulação algorítmica*, necessárias à compreensão, e que envolveram as operações com vetores como elementos dos espaços vetoriais. Com isso, se pôde relacionar o *plateau* e os conteúdos que precisariam ser trabalhados nesta sessão didática, para em seguida escolhermos o *elemento desafiador* ou, simplesmente, o *desafio*, associado ao objetivo geral da aula, que foi a elaboração dos axiomas de espaço vetorial, pelos alunos, em oposição ao que geralmente acontece em aulas deste conteúdo, cujos axiomas são apresentados pelo professor como uma lista, podendo levar os alunos a apenas memorizá-los.

Após a escolha do elemento desafiador, sondamos quais recursos ou estratégias de ensino poderiam auxiliar na realização do desafio proposto. Assim, foi escolhida a "mediação por meio de perguntas e uso de *slides*", na qual a explicação do conteúdo se deu como diálogos, com a participação ativa dos alunos, à medida que eram trazidas informações sobre o assunto por meio dos *slides* e explanações na lousa.

Por conseguinte, esta análise teórica nos remeteu a delinear os objetivos da sessão didática, uma vez que já tínhamos uma visão geral do que precisaria ser abordado. Desse modo, os objetivos foram:

- compreender o conceito de espaço vetorial a partir das operações de soma e multiplicação por escalar;
- rever a noção de vetor e as operações de soma e multiplicação por escalar;
- perceber a aplicabilidade dessas operações a conjuntos matemáticos distintos;
- conhecer as propriedades que garantem que um determinado conjunto é um espaço vetorial; e
- verificar se um conjunto dado é um espaço vetorial.

Ao analisar a preparação de cada sessão didática, observamos que a *essência do conteúdo* foi determinante na organização das aulas, pois orientou a elaboração dos objetivos e escolha dos desafios a serem propostos. Ela sinalizou que aspecto do conteúdo o aluno precisaria perceber para compreender a teoria, contemplando o significado implícito ao conceito estudado. Na Teoria dos Espaços Vetoriais, se o aluno não perceber o papel das operações de adição e multiplicação escalar, provavelmente, estará fadado à aprendizagem mecânica, limitada ao treino de técnicas de manipulação algorítmica dos conteúdos.

A escolha do *desafio* ou *elemento desafiador* foi feita de modo a permitir que os alunos manipulassem as operações de adição e multiplicação por escalar, para então elaborar os axiomas com base em seus conhecimentos prévios. Assim, também levou em consideração a *manipulação algorítmica* e o *plateau*, partindo-se de um patamar de conhecimento no qual os conhecimentos prévios do aluno pudessem se tornar pontos de ancoragem do novo saber.

Todas as sessões didáticas foram elaboradas, considerando *plateau-essência-manipulação-desafio*. Desse modo, no planejamento, pensamos em como o conhecimento prévio/pré-requisito pode ser trabalhado para ajudar o aluno a compreender a essência do conteúdo, sendo esta reforçada pela manipulação, em que o docente pode pensar em como trabalhar com as distintas representações dos conceitos estudados. Na sessão didática 5, por exemplo, os alunos puderam manipular algébrica e geometricamente vetores dos espaços vetoriais R^2 e R^3, com apoio computacional.

Além disso, vimos pelos resultados obtidos que o *plateau* está em parte, inserido na *Preparação*, como integrante da *análise teórica*, auxiliando na identificação das relações entre saberes antigos e novos. Por outro lado, também o encontramos na *Vivência*, sendo diagnosticado na prática, à medida que o professor contextualizar e “preparar o terreno”, para que seja apresentada a situação desafiadora na *tomada de posição*. Assim, na análise teórica, o *plateau* é presumido considerando os pré-requisitos do conteúdo e/ou informações sobre a turma. Já na vivência este diagnóstico é confirmado ou refutado, para que os conteúdos partam de pontos que os alunos tenham condições de acompanhar. Portanto, o *plateau* não se limita a identificar o conhecimento prévio do aluno, mas faz uso deste para guiar os rumos da sessão didática.

Podemos dizer, entretanto, que o *plateau* faz parte da tomada de posição ou é algo que vem antes desta? Consideramos neste trabalho que faz parte da tomada de posição, antecipando-se à apresentação da situação desafiadora. Com exceção da primeira sessão didática, as demais se iniciaram por uma abordagem que considerava os conteúdos importantes estudados na aula anterior, logo o *plateau* foi utilizado em todas as aulas, auxiliando a criar um ambiente investigativo que parte de um contexto familiar aos discentes.

Considerar o *plateau* é imprescindível à compreensão e construção dos conceitos estudados, uma vez que ao levar o aluno a lembrar conceitos já estudados, estabelecendo-os como uma ponte ao novo saber, estará favorecendo a ocorrência dos processos de PMA, pois as imagens mentais e procedimentos realizados partem de conhecimento prévio que ajudarão na reorganização do saber antigo a ampliar no contexto do novo saber. Por exemplo, os conjuntos de matrizes, polinômios e funções, já conhecidos dos alunos, foram trabalhados no *plateau*, de modo que eles foram levados a reorganizar a compreensão que tinham destes, para então, dar conta de seu comportamento como espaços vetoriais. Essa “ponte” que liga o conhecimento prévio ao novo saber pode ajudar na compreensão do caráter unificador e generalizador da Teoria dos Espaços Vetoriais, sendo essa preocupação com o *plateau* importante para este fim.

Considerar a essência do conteúdo também foi relevante para o desenvolvimento do PMA, pois esta está associada à conceitualização e requer do estudante o estabelecimento de relações entre conceitos diversos e, ainda, interpretação e reformulação de ideias sob variados pontos de vista, levando-o a mobilizar a interação de processos mentais que ajudarão a perceber a estrutura matemática subjacente aos conteúdos.

Já a manipulação algorítmica, também, desempenhou papel importante nesse desenvolvimento, pois o manuseio de vetores, equações vetoriais, sistemas lineares, matrizes e construções geométricas, por exemplo, possibilita o desenvolvimento de processos mentais automáticos (conscientes ou inconscientes) que permitem ao aluno concentrar sua atenção em aspectos relevantes, favorecendo a síntese, a generalização e a abstração.

Assim, inferimos que os elementos identificados como integrantes da análise teórica são interligados, de modo que cada um contribui para dar coerência ao modo como o conteúdo será trabalhado na sessão didática que segue as fases e princípios da Sequência Fedathi. Convém ressaltar que não tratamos aqui de uma "receita" para preparação de aulas usando a SF, mas uma ênfase a tópicos importantes que, implicitamente, podem contribuir para criação de um ambiente de ensino favorável à construção conceitual.

7.2 A vivência da Sequência Fedathi

A vivência da Sequência Fedathi aconteceu em um curso de extensão intitulado "Introdução às Noções Elementares da Álgebra Linear", que nos forneceu dados referentes à maneira como foram utilizados recursos e estratégias de ensino, bem como sobre a interação professor-aluno-saber, com foco nas falas dos participantes durante a vivência da Sequência Fedathi.

Assim, descrevemos neste tópico as sessões didáticas vivenciadas no curso de introdução à Álgebra Linear, com foco na maneira como os diálogos, recursos e estratégias de ensino foram explorados em sala de aula, sobretudo no que se refere a postura e mediação docente, buscando verificar se a metodologia adotada favoreceu a ocorrência de processos de PMA, em especial, quanto ao uso das representações e a alternância entre elas, conforme defende Dreyfus (2002).

Considerando que a comunicação estabelecida durante as aulas pode fornecer informações relevantes sobre a mediação docente e o desenvolvimento dos processos de PMA, destacamos trechos dos diálogos vivenciados nas aulas, trazendo um pouco do contexto em que aconteceram para facilitar a compreensão do leitor. Assim, buscamos nas falas docente/discente evidências de incentivo/mobilização de processos mentais que caracterizam a promoção do desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

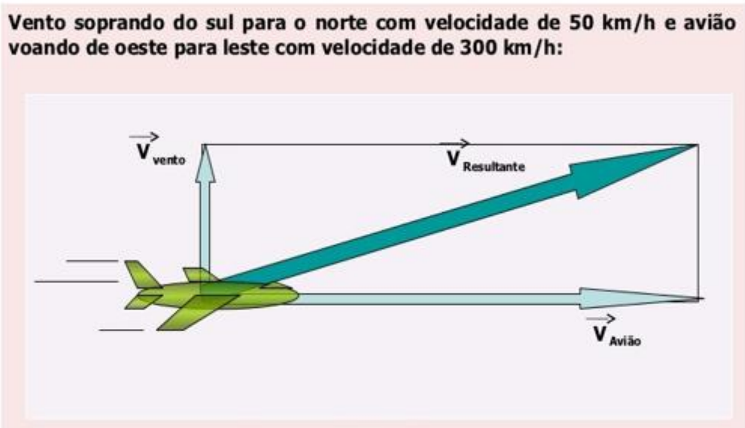
Para ilustrar as falas dos sete estudantes que se manifestaram no decurso de todas as sessões didáticas, ministradas no curso "Introdução às Noções Elementares da Álgebra

Linear", designamos sua identificação por nomes fictícios, com vistas a preservar a identidade dos participantes. São eles: Igor, Ana, Lívia, Iris, Lucas, Ivo e John.

7.2.1 Recursos, estratégias de ensino e diálogos

Na primeira sessão didática, que tratou da introdução do conceito de espaço vetorial, ainda na verificação do *plateau*, o assunto foi contextualizado mediante exemplos da Física, ilustrados com situações envolvendo força e velocidade, a partir da qual houve a primeira tentativa de estimular o pensamento matemático dos discentes, levando-os a definir um vetor. Inicialmente, os vetores foram representados, geometricamente, como "setas", conforme ilustra a figura 25.

Figura 25 – Exemplo utilizado para ilustrar a representação geométrica de um vetor como uma grandeza vetorial



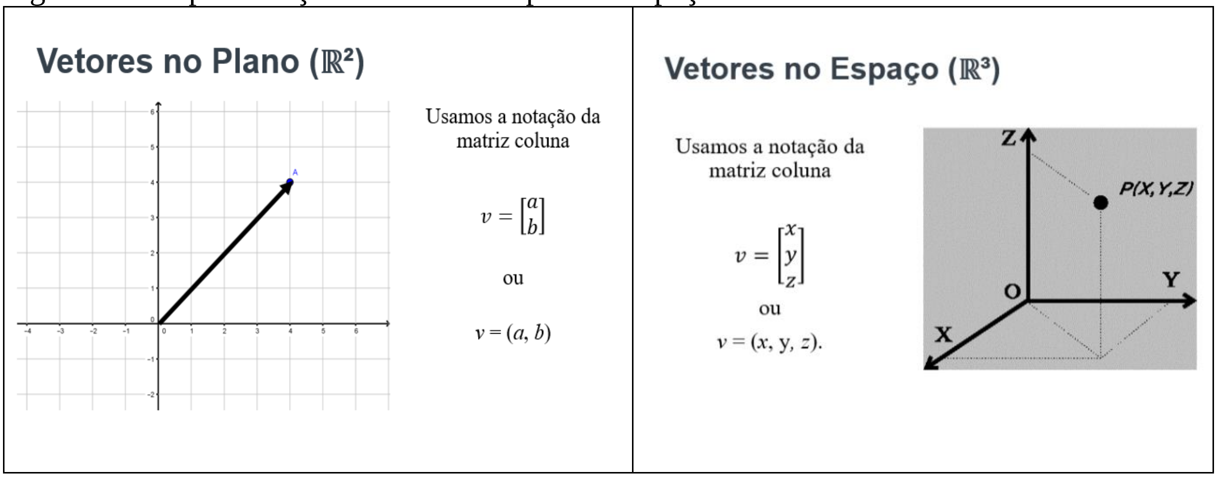
Fonte: Google Images.

Vejamos um trecho do diálogo que aconteceu durante o diagnóstico do *plateau* na sessão didática 1:

(1) **Nós** *(doravante Pesquisadora): [...] Considerando estas informações, o que é um vetor?*
Igor*: Uma seta.*
Ana*: Um seguimento orientado.*
Pesquisadora: *O que vem na mente de vocês quando pensam em vetor?*
Lívia*: Comprimento*
Lucas*: Sentido, direção.*
Pesquisadora*: E como vocês definiriam um vetor?*
Ana*: É um segmento orientado que tem comprimento, sentido e direção.*

Embora seja de uma definição simples, o objetivo foi diagnosticar o que os estudantes conheciam sobre vetores, bem como levá-los a observar um objeto matemático e dele selecionar características importantes, extrair informações diretamente dos observáveis. Após essa descrição, lhes foi apresentada a definição matemática de vetor (segmento orientado que possui módulo, direção e sentido), com a qual puderam comparar suas respostas e prosseguir abordando as operações com vetores em R^2 e R^3, em que usamos a representação geométrica e a notação ilustradas na figura 26.

Figura 26 - Representação de vetores no plano e espaço



Fonte: Adaptado de Boldrini et al. (1980, p. 101).

Assim, logo no início do curso foi dada ênfase às representações geométricas de vetores em duas e três dimensões. Depois trabalhamos com a adição de vetores e a multiplicação de vetor por escalar, de modo que os estudantes pudessem observar que estas operações também podem ser aplicadas a matrizes, e percebessem semelhanças em suas propriedades, para, então, estendê-las para outros conjuntos e começassem a construir a noção de espaço vetorial.

Destacamos desta abordagem o diálogo (2) que traz uma *tomada de posição*, dando continuidade às discussões sobre a caracterização de um espaço vetorial:

(2) **Pesquisadora:** *[...] Se eu pegar duas matrizes de mesma ordem e somar as entradas correspondentes, vou obter outra matriz de mesma ordem. E se eu multiplicar um escalar por uma matriz, terei como resultado uma outra matriz de mesma ordem que a inicial. Observem que são as mesmas operações que realizei usando vetores, certo? Vocês conseguem visualizar o que estou querendo dizer? E se olharmos para outros campos da matemática, além dos vetores e matrizes, será que existem outros conjuntos que obedecem estas operações? Pensem um pouco...*

Igor: *O escalar pode ser negativo?*

Pesquisadora: *Usaremos escalares reais, pois trabalharemos neste curso com espaços vetoriais reais.*

> ***Lívia:*** *Na teoria dos conjuntos eu acho que tem alguma coisa desse tipo.*
> ***Igor:*** *Se eu somar um natural com natural vai ser um número natural. Agora se multiplicar por escalar real...*
> ***Ana:*** *Vai depender do escalar, né.*
> ***Pesquisadora****: E para outro conjunto será que vale?*
> ***Lívia:*** *Acho que valerá para todos os conjuntos...*
> ***Pesquisadora:*** *Será que vale para todos os conjuntos? Se eu pegar, por exemplo, funções? (escreve na lousa e explica as operações).*

Neste diálogo, observamos que o conceito de espaço vetorial foi introduzido com amparo na comparação entre as operações com vetores e matrizes, de modo que os alunos percebessem que ambas obedeciam às operações de adição e multiplicação por escalar, para então expandir sua aplicabilidade para outros conjuntos, tais como matrizes, funções e polinômios, verificando a possibilidade da realização de tais operações.

Esta abordagem pôde suscitar a generalização da operacionalidade de tais conjuntos, expressa como a finalização de um processo no qual o aprendiz iria perceber características comuns para, então, sintetizá-las num objeto mais geral: o espaço vetorial. Com isso, esta abordagem privilegiou os aspectos unificador e generalizador da Teria dos Espaços Vetoriais, cuja abstração poderia acontecer à medida que o aluno focasse a atenção sobre propriedades específicas de um dado objeto para, então, considerá-las isoladamente do contexto inicial, corroborando a definição de abstração descrita em Harel e Tall (1991).

De modo mais especifico, ao apresentar distintos conjuntos, trabalhamos com diversas representações do conceito de espaço vetorial, cujo domínio pode levar os estudantes a identificar neles as operações de soma e multiplicação por escalar, suscitando a *generalização reconstrutiva*, que, segundo Harel e Tall (1991), ocorre quando o aluno reorganiza a ideia que tinha desses conjuntos, num novo esquema, então reconstruído para explicar essa nova perspectiva: a de que estes conjuntos com tais operações são unificados na Teoria dos Espaços Vetoriais.

O passo seguinte foi abordar as propriedades destas operações com vetores, de modo que os próprios alunos pudessem identificá-las e fazer a verificação. Por conseguinte, as fases de *maturação* e *solução* aconteceram em paralelo, à medida que os estudantes refletiam e expunham raciocínios. Na fase da *prova* da Sequência Fedathi, antes de apresentar a definição formal de espaço vetorial, destacamos as seguintes falas:

(3) ***Pesquisadora:*** *Considerando o que foi discutido até aqui sobre vetores e as operações de soma e multiplicação por escalar, como vocês descreveriam um espaço vetorial? (Ficaram pensativos)*

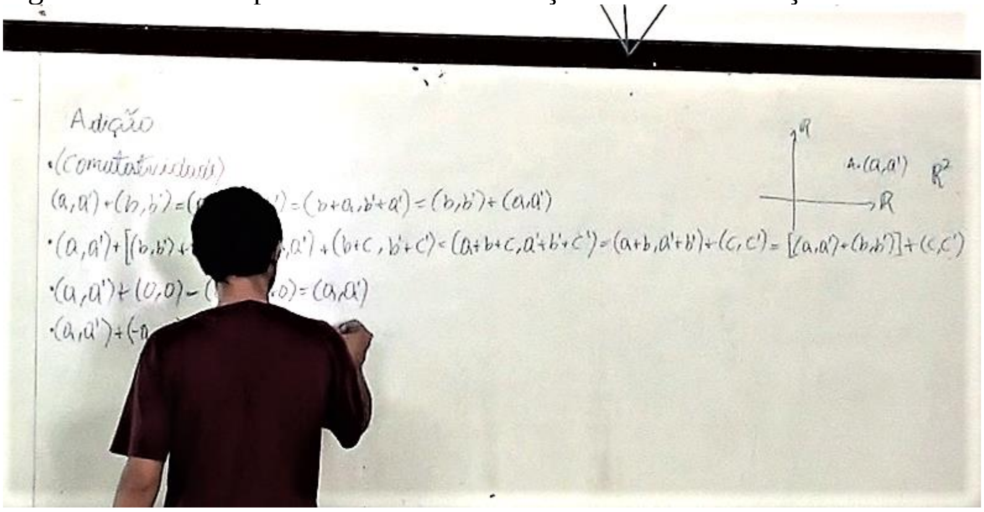
> ***Lívia****: Um conjunto... Um grupo, que obedece essas propriedades...Não sei explicar!*

Com este questionamento, procuramos estimulá-los a organizar as informações, percebendo que, embora se trate de conjuntos distintos, todos têm em comum determinadas operações e propriedades, que são unificadas no conceito de espaço vetorial. Assim, o estudante precisará compor as partes para formar um todo, mediante a síntese das informações observadas. Para isso, anotamos as respostas dos alunos na lousa, para auxiliar na organização das informações, de modo que pudessem chegar a uma ideia geral da definição de espaço vetorial, excluindo o que não se adequasse ao conceito, e confirmando as características fundamentais. Assim, estariam começando a delinear um *conceito imagem* de espaço vetorial, antes de ser apresentada a definição matemática formal. O questionamento também teve o intuito de levar os alunos à observação da estrutura dos espaços vetoriais.

Ao propor que os estudantes identificassem os axiomas de espaço vetorial, suscitamos a ocorrência da *abstração genérica*, que pode acontecer à medida que os alunos passam a compreender que certas propriedades são válidas nos exemplos trabalhados e podem ser aplicadas a outros exemplos. Com efeito, esta modalidade de abstração precederia a abstração formal, que é mais complexa, constituindo sua base. Alcançar a *abstração formal* nem sempre é fácil aos alunos, mas, procedendo por abstração genérica, o processo se tornaria menos tenso, conforme defendem Harel e Tall (1991).

Um exemplo do domínio do uso de variadas representações aconteceu quando, ao apresentar sua solução, na qual verificou se R² era um espaço vetorial, um aluno fez uso da referência geométrica para explicar sua resolução algébrica, conforme ilustra a figura 27.

Figura 27 - Aluno apresentando sua resolução na fase de solução da SF



Fonte: Pesquisa direta (2017).

Nesta solução, antes de iniciar a verificação dos axiomas de espaço vetorial, o aluno desenhou o gráfico (canto direito da figura 27), identificando o ponto A para explicar sua compreensão de R^2 e o porquê de operar com vetores na forma (*a, a'*). Aqui percebemos que ele consegue relacionar as coordenadas do vetor com as coordenadas do plano cartesiano, tendo familiaridade com a conversão de registros, fazendo a ligação entre representações paralelas.

Após apresentar a definição formal de espaço vetorial, comparando-a às respostas que eles deram (*prova*), surgiu o seguinte diálogo:

(4) ***Lucas**: Existe vetor no R^1?*
***Ana**: Que só tem uma dimensão? Não existe não. Se eles são pontos... só uma dimensão...*
***Pesquisadora**: Será que existe? Vou deixar vocês pensarem...*
***Igor:** Eu acho que... sei não...*
***Lívia:** Mas, um vetor tem um começo, e no caso, um fim. No caso do R^1, seria a mesma coisa, não é não? Um segmento orientado, não tem começo e tem um fim? Então, no caso do R^1, o começo e o fim seriam o mesmo, não é não? Sei lá, uma coisa assim. Teria sido só um ponto.*
***Pesquisadora**: Vou deixar vocês pensarem mais sobre isso.*

Esta pergunta, certamente, resulta da ênfase concedida ao "pensar" sobre o conteúdo, incentivado desde o início da aula. Os alunos se sentiram à vontade para falar e expor pensamentos e dúvidas. Foi um momento produtivo, pois sinalizou a importância de questionar o assunto estudado, indo além da recepção de informações repassadas por nós. Eles interagiram, trocaram ideias sobre vetores, dimensão, espaço vetorial, tentaram estabelecer relações entre R e os demais espaços. Assim, ao deixarmos que os alunos refletissem mais sobre a existência do R^1, os instigamos a rever as características de um espaço vetorial. Simplesmente emitir a resposta correta, nesse momento de curiosidade dos alunos, poderia lhes tirar o hábito de ir em busca de respostas, minando sua predisposição para buscar os porquês matemáticos. Posteriormente a dúvida foi esclarecida.

Na sessão didática 2, ao abordar o conceito de subespaço vetorial, foram utilizadas perguntas que remeteram os alunos a olhar para pontos específicos dos espaços vetoriais e assim deduzir o que são subespaços. Vejamos o diálogo a seguir, que caracteriza a primeira *tomada de posição*:

(5) ***Pesquisadora**: Que características um subconjunto de um espaço vetorial precisa ter para que ele próprio seja um espaço vetorial?*
***Lívia**: Lembra a teorias dos conjuntos, não é?*

> ***Igor***: *É preciso um estar contido no outro. As propriedades da soma e da multiplicação também devem valer, não é?*
> ***Ana***: *Ele tem que ter o vetor nulo.*
> ***Ivo***: *Tem que ser não vazio*
> *(silêncio)*
> ***Pesquisadora***: *Alguém falou que teria que ter o vetor nulo, ser não vazio, e o que mais?*
> ***Lucas***: *Os outros axiomas.*
> ***Igor***: *Assim, se um não valer, não seria um espaço vetorial.*
> ***Pesquisadora:*** *Se vocês estão dizendo que valem todas os axiomas, então será que é preciso verificar todos?*
> ***Igor***: *Não. Só o da soma e do produto por escalar.*
> ***Lucas***: *Não, eu acho...*
> ***Igor***: *Acho que como ele é um subconjunto, é menor do que o conjunto, então existe uma menor quantidade de propriedades que a pessoa tem que provar.*
> ***John***: *Não, ele possui as mesmas propriedades do conjunto.*
> ***Igor***: *Eu acho que não.*
> ***Ana***: *Eu acho que não, pois se verificamos a soma e multiplicação por escalar para saber se é um espaço vetorial, então só olhando estas duas, já é suficiente para dizer se ele é, ou não, um subespaço. E a questão do vetor nulo, é porque em todo espaço vetorial, só existe um vetor nulo. Então, se o vetor nulo estiver fora desse espaço, ele não vai ser subespaço, pois ele não está dentro do espaço. Então, ele tem que estar dentro, atendendo tanto o subespaço quanto o espaço vetorial "total", vamos dizer assim.*
> ***Pesquisadora***: *Vocês concordam com a Aluna A?*
> ***Ana***: *Acho que é possível ver todos os axiomas, mas não é necessário.*
> ***Pesquisadora***: *Então, o que é necessário?*
> ***Igor***: *Verificar a soma e o produto por escalar. (Silêncio) Supondo que ele está contido no espaço vetorial, então supomos que ele tem as dez propriedades, não necessariamente, tem que provar todos.*

Até aqui, os alunos concluem que não é preciso verificar os dez axiomas. Além disso, é possível perceber o entrosamento deles na explicitação individual de seus pontos de vista, que são expostos, comparados, refutados ou aceitos, coletivamente. Um pode aprender com o outro à medida que compara a interpretação do colega com a sua, observando o raciocínio implícito nessa interpretação, verificando se é coerente com o objeto matemático discutido. É um aprendizado em construção, que remete à visualização de imagens mentais da ideia de conjunto/subconjunto e espaços/subespaços.

No diálogo (5), os estudantes estão a visualizar mentalmente o conceito e os axiomas dos espaços vetoriais, buscando identificar nas suas características relações intrínsecas aos subespaços, para então expor ou comparar suas conclusões com a dos colegas. Temos representações mentais e verbais em interação dialógica rumo a uma solução para a pergunta proposta. Tais interações irão influenciar na qualidade da compreensão/construção da ideia de subespaço vetorial. O professor precisa estar atento para que, nas discussões, os alunos não cheguem a conclusões equivocadas sem que haja um redirecionamento destas.

Continuamos questionando para que eles pudessem perceber o que precisava ser verificado, a fim de se ter um subespaço vetorial. Nesse momento, estão na fase da *maturação*, próximos de chegar à fase da *solução*.

(6) ***Pesquisadora****: Mas, se não tenho que provar os dez axiomas, é preciso verificar, exatamente, o quê?*
Ana: *A soma e a multiplicação por escalar.*
Igor: *Se o vetor nulo está contido no subespaço, se a soma também, ou seja, se eu tiver dois vetores dentro do subespaço, se a soma também está contida no subespaço.*
Ana*: Assim, um espaço vetorial todo, ou seja, o que tiver dentro dele, os subconjuntos são subespaços se eu conseguir provar que ele está dentro do outro, então ele já atende as dez propriedades.*
Igor*: Acho que só é subespaço vetorial se atender três propriedades, que seriam: o vetor nulo deve pertencer ao subespaço vetorial; a soma tem que estar definida dentro do subespaço e o produto por escalar também deve estar definido. E se o aluno conseguir provar isso, está provando que é um subespaço vetorial.*

Observamos no diálogo (6) que os próprios alunos chegaram à solução, respondendo ao questionamento inicial. As respostas estão mais organizadas, e eles demonstraram mais segurança quando expressaram suas conclusões, sobretudo no que se refere a adição e multiplicação escalar. Temos, então, que estão mais próximos do conceito definição de subespaço e da *abstração formal* que, segundo Harel e Tall (1991, p.39), se dá quando o sujeito “[...] abstrai a forma de um novo conceito pela seleção de propriedades gerais de uma ou mais situações específicas”, nesse caso, do conceito de espaço vetorial. Passamos, então, para a fase da *prova*, na qual mostramos a definição formal de subespaço vetorial, relacionando-a com as respostas dos alunos e formalizando o conteúdo discutido até então. Em seguida, uma aluna questiona:

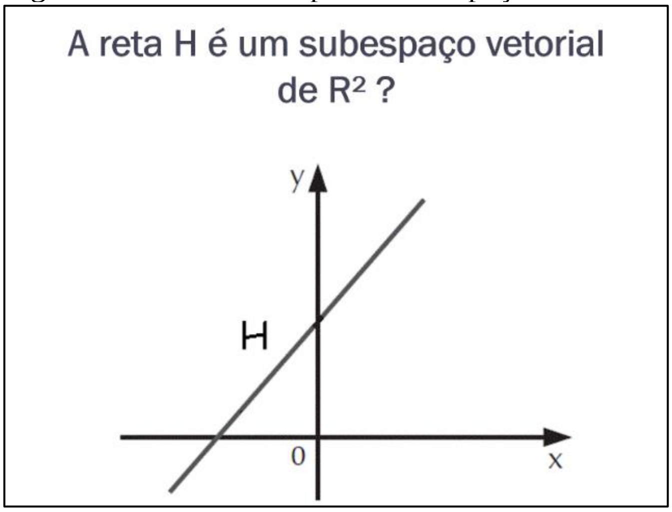
(7) ***Lívia****: Não entendi, por que só essas duas condições?*
Pesquisadora*: Vocês responderam isso, quando disseram que ele vai satisfazer as mesmas propriedades do espaço vetorial. Então, o subespaço vetorial vai herdar todas as propriedades do espaço vetorial, assim, se ele herda todas, não precisa verificar, pois já fica subtendido que é um espaço.*
Igor*: Mas, no caso, quando fala soma de vetores, ele está herdando as propriedades da associatividade, comutatividade, etc.?*

__Pesquisadora__: Isso! Quando eu falo que ele herda todas as propriedades, quer dizer que ele atende todas as propriedades do espaço vetorial no qual ele está contido.
__Lívia__: Então, verificando essas duas, fica subtendido que o restante já satisfaz.
__Igor:__ Existe uma dica para verificar se um subconjunto é subespaço vetorial: é preciso verificar se tem o vetor nulo.

A dúvida de Lívia é um indício de que, embora os alunos obtenham as respostas durante as discussões, a explicação do professor fazendo um fechamento das ideias discutidas e esclarecendo dúvidas é imprescindível para a compreensão do conteúdo e (re)elaboração do conceito imagem e/ou conceito definição. Um aspecto relevante é que os próprios alunos trouxeram à tona observações importantes, como a presença do vetor nulo, apontada como característica dos subespaços. Na última fala do diálogo (7), Igor claramente apontou o vetor nulo como uma dica para verificar se um conjunto é um subespaço.

A Sequência Fedathi prevê o uso de contraexemplos na abordagem dos conteúdos matemáticos. Assim, após a fase da *prova* em que foi expressa a definição formal de subespaço, foi feita uma nova *tomada de posição*, utilizando-se o gráfico ilustrado na figura 28, no qual os alunos deveriam analisar suas características e relacioná-las à definição de subespaço. Vejamos a situação proposta e trechos do diálogo vivenciado.

Figura 28 - Contraexemplo de subespaço vetorial



Fonte: Adaptado de Lay (2011, p.197).

(8) *__Lívia:__ Eu acho que é.*
__Igor__: Eu também.
__Pesquisadora:__ Por quê?
__Lívia__: Pois é... complicado é isso...
__Igor__: Eu também acho!
__Lívia__: Mas, é!

Ana: *É como se o H fosse o W, certo?*
Pesquisadora*: Isso, o H é o subespaço, o espaço é o R².*
Igor: *Eu acho que é, pois tem dois aí...*
Ana: *Porque tem dois espaços aí: (x,0) e (y,0).*
Lívia*: Pode considerar as coordenadas que ele está passando? Por exemplo, está cortando o y e o x. Então, pego as coordenadas e dá para fazer aquelas duas propriedades lá.*
Igor*: Então é!*
Lívia: *É, se for pensando assim...*
Ana*: Vixe! O vetor nulo não tem não!*
Lívia: *Mas tem ó, porque como ela está cortando, tem o vetor nulo...*
John*: Eu também pensei da mesma forma, pois se ela tem um subespaço H, no R² que é no x e ela corta...*
Igor*: Pois é corta dois planos, eu acho...*
John*: Os dois estão... Está contido.*
Lívia*: Exatamente, é isso mesmo.*
Igor: *Vocês têm certeza absoluta?*
Ana: *Aquele ponto ali é (x, 0), o outro é (0, y)...*
Igor*: Então, o vetor nulo já pode estar...*
(8.1) ***Ana****: Mas, o vetor nulo não é (0,0)?[Risos]*
Lívia*: O que foi isso?*
Ana*: Se a reta cortasse assim e passasse pela origem... Acho que não é.*
(8.2) ***Igor****: Cada vez mais a gente fica mais doido. [risos]*
John*: Vamos (Igor), diz logo!*
(8.3) ***Igor****: Eu acho que não é.*
[Todos falam ao mesmo tempo, trechos inaudíveis]
Lívia*: Não vale mais, não pode trocar mais não.*
Igor*: Não é, pois o vetor nulo não pertence a esse subespaço.*
(8.4) ***Lívia:*** *Diga logo pelo amor de Deus!*

Inicialmente, no diálogo (8) todos afirmam se tratar de um subespaço. Conforme observam o gráfico da figura 23, Ana [em (8.1)] conclui que não se trata de um subespaço vetorial, embora seus colegas não compartilhem dessa visão. Os que já estavam certos de se tratar de um subespaço tiveram que rever seus raciocínios, acompanhando o da colega, analisando a coerência dele. Foi o que fez Igor [em (8.3)] que, ao perceber a coerência da argumentação da colega, mudou sua resposta. As falas (8.1) e (8.3) evidenciaram como essa mediação pode desafiar os estudantes e colocá-los em desequilíbrio cognitivo. Isso é positivo para a aprendizagem à medida que instiga a curiosidade e a reflexão conceitual. Além disso, ao utilizar o gráfico os alunos puderam relacionar aspectos algébricos e geométricos, fazendo uso da visualização propiciada pela figura.

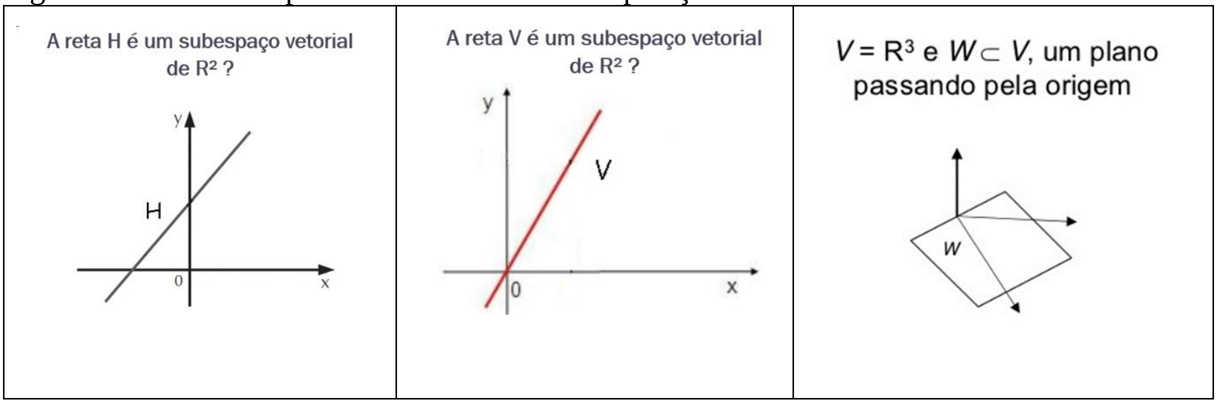
Ainda na abordagem dos subespaços, numa nova *tomada de posição,* foi expressa a seguinte questão para os alunos verificarem, algebricamente, se era um subespaço: *Verifique* *se o conjunto U de todos os pontos (x, y) em R², tais que x ≥ 0 e y ≥ 0, é um subespaço de R².* Os alunos se debruçaram para resolver, mas, ao concluírem a atividade, divergiram quanto aos resultados. A solução correta era a de que o conjunto U, de fato, não era um subespaço de R². Um aluno que tinha certeza de que U era um subespaço de R² foi convidado a mostrar sua solução na lousa, na qual ele fez a verificação da soma de vetores, porém, ao verificar a multiplicação por escalar, observou:

(9) **Igor**: *Se o alfa for negativo... Não! O alfa deve ser positivo!*
Alunos: *Não!!!*
Igor: *Ei, ela não disse não, isso daí.*
Ana: *É aí que está o porém... Aí está a pegadinha.*
Igor: *Não! Eu desfaço tudo isso aqui, é melhor. Isso aqui não é um subespaço, não tenho condições de supor que é um subespaço. Desfaço tudo o que fiz, pois o alfa pode ser negativo.*
Lívia: *Se o alfa for negativo, vai para o outro quadrante.*
Pesquisadora: *Vocês concordam com o Igor, agora?*
Lívia: *Concordo.*

No diálogo (9), percebemos a importância da fase da *solução* da Sequência Fedathi. O debate de ideias entre os alunos influenciou na compreensão do que estava sendo discutido. Ao apresentar sua solução, inicialmente de modo equivocado, o aluno pôde rever suas ideias e direcioná-la, de modo coerente, ao que estava sendo trabalhado, contando com a ajuda dos colegas que apontaram que haver algo “fora do lugar”. Este foi um exemplo de valorização do erro (MELO, 2018), no qual a mediação docente buscou estimular positivamente a ação do aluno, evitando que houvesse apenas uma mera correção da questão. Assim, o erro foi visto como parte do processo de aprendizagem, não como algo que deva ser evitado a todo custo.

Assim, na sessão didática 2, que tratou do conteúdo de subespaços vetoriais, destacamos as representações geométricas utilizadas para que os alunos relacionassem as propriedades dos subespaços aos gráficos; e vice-versa. Eles visualizaram exemplos e contraexemplos de subespaços com os quais puderam operar com eles algebricamente e “ver” suas características nos gráficos, conforme ilustra a figura 29.

Figura 29 - Gráficos apresentados na tomada de posição



Fonte: Adaptados de Lay (2011, p. 197) e Boldrini et al. (1980, p.106).

Operar com registro algébrico e gráfico possibilitou a visualização dos objetos e suas propriedades. Na figura 29, os gráficos contribuíram para a visualização da presença do vetor nulo nos subespaços, bem como suscitaram processos, como a construção de imagens mentais, a interpretação, intuição, comparação e revisão das propriedades dos subespaços vetoriais. Mais uma vez os estudantes foram levados a fazer uso de mais de uma representação.

Na sessão didática 3, a introdução do conceito de combinação linear se deu a partir da representação matricial: $\underline{\hspace{1cm}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\hspace{1cm}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, utilizada para incentivar os alunos a descrever a igualdade e elaborar sua definição. Nesse caso, tivemos uma conversão do registro simbólico para o registro em língua natural, contribuindo para que o estudante utilize mais de uma representação em paralelo. Assim, a ênfase recaiu na descrição do que acontece quando se alteram os escalares, em que, utilizando matrizes, foram abordados exemplos de combinação linear como base para o seguinte questionamento, feito na *tomada de posição*:

(10) **_Pesquisadora:_** *Observando o exemplo, o que é uma combinação linear? Vocês estão diante de uma combinação linear, tentem descrever isso no papel.*

(10.1) **_Ana_**: *Só pode ser dois vetores ou pode ter mais?*

A pergunta do diálogo (10) buscou auxiliar no desenvolvimento da habilidade de selecionar características-padrão de exemplos matemáticos que podem ser sintetizados numa definição. Nesse sentido, os alunos deveriam converter a representação matricial para a representação em linguagem natural, descrevendo a combinação linear. A pergunta feita pela aluna [em (10.1)] traz indícios de que ela relacionou o exemplo dado à possibilidade de generalização. Após um tempo, a aluna apresentou sua solução:

(11) **Ana***: Eu escrevi aqui, mas achei muito grosseiro, sabe. Vou ler: é a soma de dois ou mais vetores de um mesmo espaço vetorial, onde antes dessa soma, os vetores são multiplicados por escalares.*

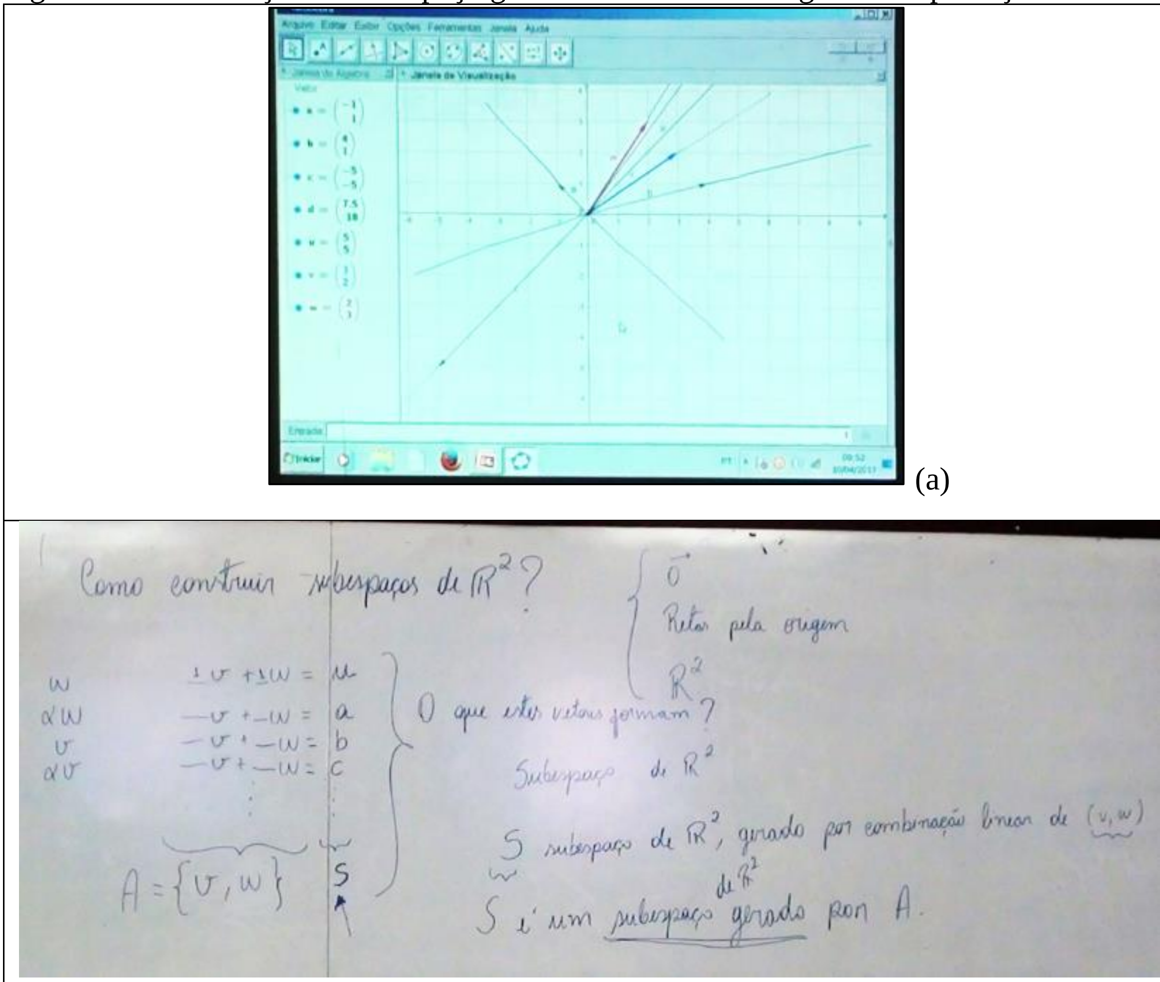
Podemos observar nesse exercício é que os alunos ficaram, inicialmente, um pouco apreensivos, uma vez que não tinham o hábito de pensar sobre as definições, tampouco elaborá-las. Na solução apresentada no diálogo (11), tivemos a explicitação do conceito imagem que a aluna elaborou da noção de combinação linear, que, embora não tenha a formalidade do conceito definição contido nos livros de Álgebra Linear, reflete seu raciocínio e encadeamento de ideias sobre o tema. Pode ser uma maneira de aproximar o aluno da *abstração formal*. Em seguida, passou-se para a fase da *prova*, na qual delineamos a definição formal de combinação linear. Explicamos e comparamos, junto com a turma, com a solução da aluna. Destacou-se a seguinte fala:

(12) **Pesquisadora***: Reparem que a definição formal está bem mais sintetizada que a descrição da (Ana), mas a descrição da (Ana) se torna mais fácil de entender. Então, ela descreveu o que está lá, sem o rigor matemático encontrado nos livros, mas o que ela falou, faz todo sentido, comparado com a definição formal de combinação linear. Por que estou fazendo isso? Porque é interessante que vejamos uma definição do ponto de vista, do que a gente entende dela (conceito imagem), antes de simplesmente, aceitar aquilo que se encontra nos livros. Muitas vezes, quando vamos direto para a definição formal, acabamos de certa forma, mais memorizando a linguagem matemática, do que necessariamente entendendo o que está por trás dessa linguagem. Então, quando a gente para e pensa um pouquinho no que está implícito na definição, em termos de significados, a compreendemos melhor.*

Na fala (12) ressaltamos a importância de se pensar sobre os significados implícitos nas definições, como um modo de melhorar a maneira como lidamos com estas. A Sequência Fedathi traz em seus pressupostos a importância de se levar o estudante a refletir sobre os significados matemáticos, explorando relações e propriedades, para, só então, ter contato com as definições formais, compreendendo sua necessidade. Isso poderá influenciar no desenvolvimento dos processos de PMA, uma vez que traz à tona os "porquês matemáticos" imprescindíveis à compreensão do conceito estudado.

Outro momento em que houve a elaboração de definição, com base num exemplo matemático, foi na abordagem de geradores, que se deu por meio da observação do comportamento da combinação linear de vetores, utilizando o *software* Geogebra, com o qual os alunos puderam visualizar geometricamente a formação de subespaços de R^2 e dali extrair características importantes para a compreensão de subespaço gerado e conjunto gerador. os alunos puderam comparar os quadros geométrico e algébrico da noção de subespaço gerado, discutindo-os, simultaneamente, até chegar numa generalização deste conceito, conforme ilustra a figura 30.

Figura 30 – Construção de subespaço gerado utilizando o Geogebra e explanações na lousa



(a)

(b)

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Nesse caso, o Geogebra foi exposto via projetor multimídia na lousa, e íamos fazendo questionamentos aos discentes, buscando evidenciar o papel das combinações lineares na construção dos subespaços, de modo que eles pudessem perceber as relações entre os vetores resultantes das combinações e seu comportamento geométrico no espaço R^2. Em paralelo a essa visualização geométrica, se deu também a abordagem algébrica (figura 30 b), facilitando a discussão das relações entre os resultados das infinitas combinações lineares e a construção de um subespaço gerado pelos vetores v e w, dados inicialmente.

Vejamos o diálogo a seguir, que traz as principais falas da *maturação* e *solução*:

(13) **Pesquisadora**: *Posso chamar v e w de um conjunto A = {v, w}. Quero que vocês me digam o que está acontecendo.*
Ivo: *Quando uso escalares, produzo um novo vetor, que também faz parte de R^2.*
Igor: *Já vi que qualquer que seja o escalar sempre vai ser um subespaço. Vai acontecer que qualquer escalar vai gerar um novo vetor.*
Ivo: *Vai obedecer aquelas três propriedades.*
Pesquisadora: *O que está acontecendo aqui? Digamos que eu tenha S subespaço de R^2, ou seja, estou chamando o conjunto de vetores, que é resultado das combinações lineares de S. Esse S se originou a partir de que?*
Igor: *Ele está sendo gerado...*
Ivo: *Por v e w.*
Ana: *Pela combinação linear de v e w.*
Pesquisadora: *Ou seja, S está sendo gerado pela combinação linear dos vetores de A. Mas, como eu poderia generalizar isso para um caso geral?*
(13.1) **Ivo**: *Seria $S = \alpha v + \beta w$?*
Pesquisadora: *E se fossem n vetores?*

No diálogo (13), houve a tentativa de instigar os estudantes à observação dos aspectos específicos da situação proposta, de modo que percebessem que os vetores do conjunto *A* geram vetores que formam o subespaço *S*, sendo este último um subespaço de R^2 gerado por *A*. Pelas falas, percebemos que os alunos acompanham a ideia de que *S* está sendo gerado pelas combinações lineares dos vetores de *A*, inclusive, o Ivo [em (13.1)] conseguiu generalizar o exemplo dado, com dois vetores, porém, não chegou a expressar com *n* vetores. Estas respostas sinalizam que eles estão acompanhando a ideia de subespaço gerado, sobretudo por este conceito não ter sido introduzido de maneira direta pela definição formal, como geralmente ocorre no ensino de Álgebra Linear tradicional.

Na sessão didática 4, ao tratar da verificação de conjuntos geradores foi feita uma *tomada de posição* pedindo que os alunos verificassem se os vetores dados geravam o espaço R^3. A técnica usada para verificação de geradores, no entanto, ainda não havia sido explicada aos alunos. Assim, deixamos que maturassem a questão, para ver como relacionavam os vetores à ideia de “gerar” espaços vetoriais. Um aluno questionou:

(14) **Lucas**: *Isso aí vai igualar ao vetor nulo, né?*
Pesquisadora: *Por que você acha que seria o vetor nulo?*
Lucas: *Para gerar?*
Pesquisadora: *Para gerar o R^3, o que é preciso?*
Lívia: *Faz um sistema e... como é?*
Pesquisadora: *Também. Mas qual é a ideia disso?*

***Lívia**: É olhar se tem os escalares que vão gerar e descobrir se tem os escalares, por isso que faz o sistema, como ele falou, iguala a zero, ao vetor nulo. No caso vai ser no R^3, será (0,0,0).*

Aproveitamos o questionamento do aluno para pedir que explicasse por que teria de igualar a combinação ao vetor nulo. Pelo diálogo, podemos perceber que os alunos já tiveram contato com o procedimento de verificação da independência linear, uma vez que mencionaram o vetor nulo e a resolução de sistemas de equações lineares. Isso pode decorrer do fato de estarem cursando, ou terem cursado, a disciplina Geometria Analítica Vetorial. No que diz respeito, no entanto, a verificar se os vetores geram o espaço dado, foi preciso uma discussão mais demorada. Vejamos:

(15) ***Igor**: Tem que verificar se eles formam uma dimensão... pois tem que ser LI.*
***Lívia**: É por que o vetor nulo não é sempre subespaço? Não sei..*
(15.1) ***Lívia**: Ou então, iguala ao geral (x,y,z).*
***Igor**: Tem que ser igual a zero, porque esses vetores podem ser multiplicados por vetores canônicos. Eu posso multiplicar pelo elemento neutro que vai dar eles. E o produto escalar desses vetores vai dar zero.*
***Lívia**: Dá pra fazer comparando com o geral, não? (x, y, z)?*
***Igor**: Por que igual a zero?Porque a principio tem que provar que o vetor nulo pertence a esse subespaço.*
***Lívia**: Não, eu acho que tem que usar é o geral (x, y, z). Encontrar, tipo uma relação que vai gerar o escalar.*
***Igor**: Mas assim, tem que provar três propriedades, que são do vetor nulo e do...*
***Lívia**: Sim, mas ali tem que encontrar escalares: determine se os vetores geram o R^3. Para gerar o R^3, não tem que encontrar o escalar?*
***Pesquisadora**: Bom, vocês já concluiram que tem que fazer a combinação linear, agora falta decidir se vai igualar a zero ou ao vetor genérico.*
***Lívia**: Acho que vai ser o genérico por conta da relação dos escalares, porque quando for colocar lá, o vetor substituido por qualquer coisa, então substitui na relaçãozinha o produto escalar, uma coisa assim...*

No diálogo (15), percebe-se claramente que os alunos tentam estabelecer relações entre as informações apresentadas com o que já viram sobre vetores em outras disciplinas. Parece que estão a “chutar” respostas. Aos poucos, entretanto, os palpites começam a emergir com sentido, à medida que relacionam o que sabem à noção de geradores e combinação linear. Este é o caso da fala (15.1), na qual a aluna tenta explicar por que se deve igualar ao vetor genérico. Como ainda não chegaram a um consenso, a discussão continua. Fizemos a mediação direcionando o olhar dos alunos para os vetores que geram o R^3:

(16) **Pesquisadora**: *Se eu digo que estes três vetores geram o R^3, estou dizendo o quê, em relação a combinação linear entre eles?*
Ivo: *Que eles não podem pertencer ao mesmo plano.*
Ana: *Mas, eles têm que pertencer ao mesmo plano.*
Ivo: *Dois sim, porque duas retas sempre pertencem, mas o outro não.*
Pesquisadora: *Se geram o R^3, significa que qualquer vetor do R^3 vai ser formado pelo quê?*
Lívia: *Pela combinação linear.*
Pesquisadora: *E escrevendo isso, como fica?*
(16.1) **Lívia**: *Igual ao vetor genérico.*
(16.2) **Igor**: *Acho que tem que utilizar os dois, o genérico e o nulo.*
Lívia: *Pode ser também, não tinha pensado nessa possibilidade não.*
Pesquisadora: *Se eu for escrever fica:(escreve a combinação na lousa). É isso que vocês estão dizendo?*
Lívia: *Sim.*
Pesquisadora: *Então, essa combinação vai gerar um vetor, e como eu escrevo esse vetor?*
Lívia: *(x, y, z)*
Pesquisadora: *Vocês concordam? Veja bem, se estou dizendo que esses vetores geram o R^3, significa que qualquer vetor no R^3 pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Então, se é qualquer vetor do R^3, eu vou colocar o que nessa igualdade?*
(16.3) **Lívia**: *(x, y, z)*
(16.4) **Igor**: *(0, 0, 0)*
Pesquisadora: *Observem, que estou pegando um vetor qualquer do R^3.*
(16.5) **Igor**: *No caso, o vetor (0,0,0) é um vetor particular!*
Lívia: *Quando coloca zero você encontra os escalares.*

No diálogo (16), Lia e Igor divergem nas respostas. Em (16.1) e (16.3), ela percebe que deve igualar a combinação linear a um vetor genérico, enquanto em (16.2) e (16.4), ele defende o argumento de que seja igual ao vetor nulo. Ambos tentam postular seus pontos de vista, mas prevalece a resposta de Lia. A mediação docente levou o aluno a reorganizar seu ponto de vista, como vemos em (16.5), que compreendeu o assunto conforme foi discutindo a situação. Os processos de pensamento matemático avançado foram trabalhados ao se explorar as relações implícitas na técnica de verificação de conjuntos geradores, uma vez que não foram apenas enfatizados os procedimentos para tal, mas foi instigada a reflexão sobre as relações ali estabelecidas.

A sessão didática 5, que aconteceu nos dias 17 e 19 de abril, proporcionou as situações mais significativas em termos da manipulação de diferentes representações pelos alunos, pois foi desenvolvida uma atividade na qual puderam manipular vetores usando o *software* Geogebra e visualizar seu comportamento ao gerar ou não um subespaço, de modo que, a partir desses vetores, foi feita a introdução dos conceitos de independência linear e base, na qual os alunos puderam vivenciar as etapas que podem levar à abstração, descrita por Dreyfus (2002).

Foram necessários dois encontros, embora a previsão fosse de que somente um seria suficiente, no entanto, contrariando a expectativa, na aula do dia 17 de abril, só foi possível realizar a tomada de posição e a maturação, ficando a solução e a prova para o encontro a ser realizado dia 19 de abril. Dada a importância de se respeitar o tempo de maturação dos estudantes, que devem chegar nas soluções segundo seu ritmo, não seria condizente com a Sequência Fedathi querer apressar ou pular etapas em face do tempo de aula preestabelecido. A construção de significados pelos alunos é sempre mais importante.

A utilização do *software* Geogebra foi essencial para propiciar aos estudantes a visualização de propriedades, de modo a usufruir de algo mais concreto para apoiar seus raciocínios, enriquecendo suas representações mentais que auxiliam a estabelecer relações entre objeto matemático e suas propriedades, de maneira flexível, facilitando a abstração dos conceitos de geradores, base e dimensão.

Inicialmente, foi entregue a cada aluno um roteiro com algumas questões dirigidas de modo que se trabalhasse inicialmente com manipulações algébricas a serem feitas no papel, para então fazer a comparação com as manipulações feitas no Geogebra. As questões estão ilustradas na figura 31.

Figura 31 - Questões da atividade realizada no Geogebra

01. Verifique algebricamente se os seguintes vetores geram o R^3:
A) u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 0) e w = (0, 1, 1)
B) u = (1, 2, 0), v = (3, 0, 1) e w = (2, -2, 1)
C) u = (1, 2, 0), v = (12, -6, 5) e w = (2, 4, 0)

02. Represente geometricamente cada item acima usando o Geogebra. Em seguida, salve cada arquivo, separadamente, na área de trabalho (Arquivo => Gravar como) nomeado com "**seunome_ITEM".** Em seguida, faça o que se pede:
a) Faça combinações lineares entre os vetores de cada item e descreva o que acontece à medida que os vetores vão sendo combinados.
b) Descreva o comportamento geométrico dos vetores que geram o espaço e dos que não geram.

03. No escalonamento dos sistemas lineares dos itens B e C, feito na 1ª questão, ocorrem linhas de zeros, com as quais obtemos equações. Insira-as nos gráficos dos itens "B" e "C", respectivamente, utilizando a "janela de álgebra" do Geogebra, em seguida responda:
a) Quais foram as equações inseridas e o que foi exibido?
b) Descreva as relações entre os vetores e o gráfico inserido.
c) O que há em comum entre os vetores de "B" e de "C"?

Fonte: Adaptado de Figueiredo (2009).

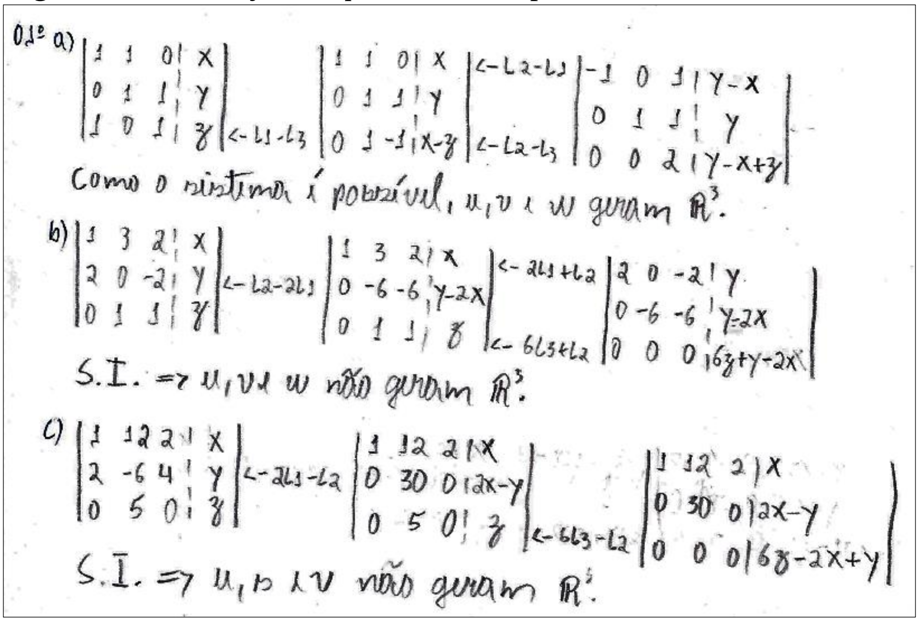
Nessa atividade, os estudantes puderam trabalhar as habilidades de extrair características importantes e descrever o comportamento dos vetores no espaço vetorial R^3, verificando se os conjuntos de vetores dados na questão podem, ou não, gerá-lo. Ao trabalhar estas habilidades, esperamos que, gradualmente, os alunos pudessem generalizar padrões e abstrair os conceitos implícitos nas questões propostas, mediante o estabelecimento de relações sobre os observáveis. A figura 32 ilustra a fase de maturação vivenciada nessa sessão didática.

Figura 32 - Estudantes manipulando o Geogebra na fase de maturação

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Na primeira questão, os estudantes teriam que verificar se determinados conjuntos de vetores geravam o R^3. Todos responderam usando sistemas de equações lineares, os quais foram resolvidos pelo método do escalonamento. Três alunos tiveram um pouco de dificuldade na resolução, pois se atrapalharam quando realizaram as operações sobre as linhas das matrizes associadas ao sistema. Concluíram que somente os vetores do item (A) geravam o espaço R^3. Então, foi feito o tratamento das representações simbólicas em que partimos do registro numérico (vetores-linha) e chegamos ao registro matricial. A figura 33 ilustra a resolução da primeira questão feita por um estudante.

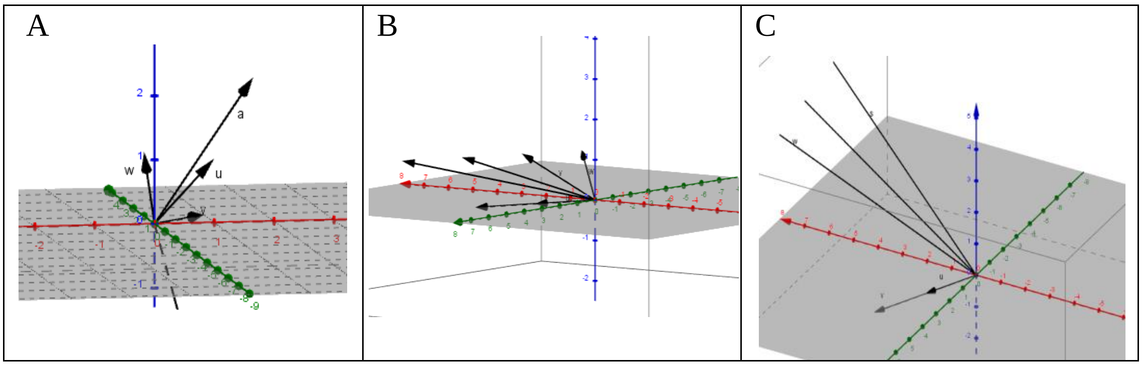
Figura 33 - Resolução da questão 1 feita por um estudante



Fonte: Pesquisa direta (2017).

A segunda questão pedia que cada conjunto de vetores dos itens (A), (B) e (C) fossem representados no Geogebra, de modo que os gráficos obtidos em cada item fossem salvos em arquivos separados. Como resultados, tivemos que, dos seis alunos, cinco conseguiram fazer as combinações utilizando o *software*. Houve a manipulação de representações diferentes em paralelo, em que partimos do registro numérico e chegamos ao gráfico, permitindo que o aluno estabelecesse as relações entre as representações de subespaços. A figura 34 ilustra alguns gráficos obtidos.

Figura 34 - Gráficos construído por um estudante



Fonte: Pesquisa direta (2017).

Com base nos gráficos obtidos dos vetores da questão 1, ilustrados na figura 34, os alunos deveriam perceber que as combinações dos vetores em A resultam em novos vetores, que, dependendo dos escalares escolhidos, poderão ter sentidos e direções distintos, de modo que estão gerando todo o espaço R³, ou seja, estão a formar infinitas retas e planos que passam pela origem. Já nos itens B e C, os alunos deveriam observar que os vetores dados e as combinações lineares entre eles estão formando um único plano, e que, portanto, não geram R^3.

Vejamos no quadro 17 breve análise das respostas de três dos sete alunos que realizaram a atividade, selecionadas para ilustrar como procederam na sua realização. As demais respostas foram semelhantes, por isso, não houve necessidade de inseri-las como exemplo. A íntegra das respostas de cada estudante para essa questão se encontra no Apêndice L.

Quadro 17 - Respostas dos alunos à questão 2 (Q2)

Q2		**A1**	**A2**	**A3**
(a)	(A)	*Estão gerando novos vetores que também geram R^3 e quando algum escalar é negativo o sentido dos vetores muda.*	*Geram R^3.*	*O sistema continua em um mesmo sentido e dando qualquer valor positivo, ou negativo para os escalares o vetor continua no R^3.*
	(B)	*Não geram R^3, pois estão gerando um plano.*	*Geram um único plano.*	*Fazendo as combinações lineares, colocando qualquer valor para os escalares o sistema é indeterminado e está fora do R^3.*
	(C)	*Não geram R^3, pois estão gerando um plano.*	*Geram um único plano.*	*Sistema impossível que fazendo todas as combinações vai sempre parar em um ponto específico.*
(b)		*Nos vetores que geram um espaço não existe um plano que passe por todos eles simultaneamente, enquanto nos vetores que não geram um espaço R^3, um plano passa por todos.*	*Quando os vetores geram espaço não ficam no mesmo plano. Os que geram, ficam.*	*O vetor que gera o espaço no R^3, fazendo-se as combinações estará direcionado com o primeiro quadrante e dependendo das combinações esse irá mudar. Nos vetores que não geram isso é contrário.*

Fonte: Pesquisa direta (2017).

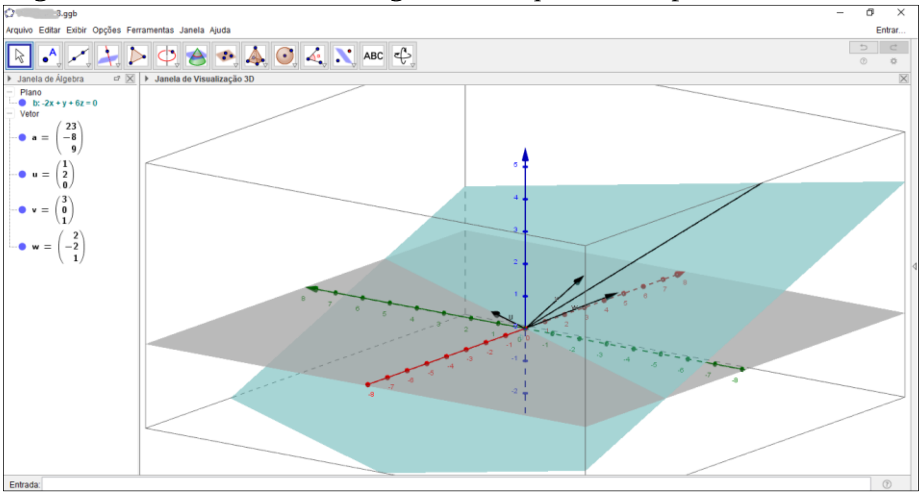
Segundo o quadro 17, os alunos A1 e A2 perceberam que em (A) os vetores geram R^3 e seu sentido depende do escalar utilizado nas combinações, e, em (B) e (C), os vetores não geram R^3. Ao comparar o comportamento dos vetores que geram e não geram R^3, explicaram a principal diferença entre ambos com base na colinearidade e na coplanaridade observadas. Com isso, ao visualizar o comportamento dos vetores, os alunos puderam ampliar o conceito imagem acerca dos conjuntos geradores e o significado da ideia de gerar o espaço R^3.

Já o aluno A3 associou a descrição do gráfico com a discussão dos sistemas lineares, feita na questão anterior. Diz que, no item (B), o sistema é indeterminado, possivelmente, em razão de algum equívoco nas operações do escalonamento. Ao comparar (A), (B) e (C), direcionou-se para os rumos que os vetores tomavam, conforme ia atribuindo distintos escalares, no entanto, ao descrever os que não geram, apenas afirmou que acontece o contrário dos que geram. Assim, não podemos afirmar que o aluno não tenha compreendido o significado de vetores gerarem ou não um espaço vetorial, uma vez que ele não forneceu descrição clara.

A questão 03 explorou o modo de como encontrar a equação que descreve o espaço, ou seja, como determinar o subespaço gerado pelos vetores dos itens (B) e (C). Assim, esperava-se que encontrassem a equação: $2x - y - 6z = 0$, tanto em (B) quanto em (C), de um plano que contém todos os vetores resultantes das combinações feitas por eles nas questões 01 e 02. Deveriam perceber que, em ambos os casos, todos os vetores pertenciam ao plano, independentemente, dos escalares escolhidos para fazer as combinações, e que ambos os conjuntos de vetores de (B) e de (C) estão gerando o mesmo subespaço de R^3, embora possuam vetores geradores distintos.

A figura 35 ilustra a solução de um aluno que inseriu o plano no gráfico, possibilitando a visualização do subespaço R^2 formado pelos vetores dos itens (B) e (C), no Geogebra.

Figura 35 - Plano inserido no gráfico da questão 02 por um aluno



Fonte: Pesquisa direta (2017).

Na figura 35, podemos observar na “Janela de Álgebra” a equação inserida e o conjunto gerador formado pelos vetores *a*, *u*, *v* e *w*. Na “Janela de Visualização 3D”, temos o plano passando pela origem contendo os vetores geradores. Os resultados apontaram que, ao explorar o comportamento de vetores em R^2 e R^3, o ensino favorece a ocorrência dos processos de representação, pois explora os quadros numérico, algébrico e geométrico dos vetores, trabalhando o tratamento e conversão dos registros. Além disso, a mediação docente voltada para criação de um ambiente investigativo pôde propiciar a participação ativa dos alunos na atividade proposta, na qual puderam manipular e visualizar, via *software*, o comportamento dos vetores, realizando combinações lineares e observando se estes geravam ou não os espaços dados.

Realizada a fase de prova da Sequência Fedathi, conduzimos as discussões para chegar à noção de independência linear. Para isso, utilizando os resultados da atividade realizada no Geogebra, escrevemos na lousa os conjuntos dos itens (B) e (C) da primeira questão da atividade (ver figura 31), retirando um vetor do item (C), conforme mostra a figura 36.

Figura 36 - Vetores da questão 1

$$\underbrace{[(1, 2, 0), (3, 0, 1), (2,-2, 1)]}_{(B)} = \underbrace{[(1, 2, 0), (12, -6, 5)]}_{(C)}$$

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Com isso, fomos fazendo questionamentos, cuja discussão remeteu à noção de independência linear. Vejamos os principais trechos dos diálogos nos quais os alunos chegaram a esta noção.

(17) **Pesquisadora:** *Observem que a gente tinha vetores diferentes, tanto no item (B) quanto no item (C) e apesar de serem diferentes eles geraram o mesmo plano, com a mesma equação. Mas se você tirasse um vetor, será que os vetores que ficariam continuariam gerando o mesmo plano?*

Igor: *Formaria uma reta, não? Não, é a mesma coisa, continuaria formando um plano. Continua o mesmo.*

Lívia: *Mas no caso, tambem tem que verificar se... (trecho inaudivel)*

Lucas: *Não é... (trecho inaudivel)*

Igor: *Não, mas o plano mudou, eu acho...*

Pesquisadora: *Observem o que acontece. Vejam isso utilizando o Geogebra.*

John: *o plano é o mesmo.*

Pesquisadora: *Observem que o conjunto (C), com dois vetores, gerou um plano. Este outro, (B), com três vetores gerou o mesmo plano. Excluindo um vetor em (C), o plano permaneceu o mesmo. Agora vamos analisar um pouquinho mais de perto... Será que existem escalares cuja combinação seja igual a (1, 2, 0)?*

Alunos: *1 e -1*

Pesquisadora: *e se eu pegar agora: (3, 0, 1) = ___(1, 2, 0) + ___ (2, 2, 1)*

Alunos: *1 e 1*

Pesquisadora: *e se eu pegar esse outro: (2, 2, 1) =___(3, 0, 1) +___(1, 2, 0)*

Alunos: *-1 e 1*

Igor: *Então, quer dizer que nesse exemplo cada vetor é combinação linear de outro.*

Pesquisadora: *Isso, em (B), cada vetor é combinação linear dos outros. Mas, e em (C), se fizermos: (1, 2, 0) = ___ (12, -6, 5), tem algum escalar que torna a igualdade verdadeira?*

[silêncio]

Alunos: *não*

Pesquisadora: *comparando as combinações feitas com os vetores de (B) e de (C) o que eu posso afirmar?*
Ivo: *que em (B) cada vetor é combinação linear dos outros dois e em (C), não.*
Pesquisadora: *Considerando essa combinação linear entre eles, que relação é possível afirmar que existe entre os vetores de (B)?"*
(17.1) **Ana**: *Cada vetor é linearmente dependente, é isso? É bem isso...*
Igor: *Que o determinante é igual a zero.*
Lucas: *Que v_3 vai depender de v_1 e v_2 pra ser combinação linear.*
Igor: *Que o número de coordenadas é igual ao número de vetores...*
Pesquisadora: *Se for comparar o vetor (1, 2, 0) em (B) e o vetor (1, 2, 0) em (C), o que posso afirmar?*
John: *Que o primeiro é uma combinação linear de dois vetores.*
Pesquisadora: *E o outro?*
Lucas: *Não tem como fazer uma combinação.*
Pesquisadora: *E se compararmos (B) e (C), seguindo o raciocínio da "Aluna A". O que posso dizer em relação ao vetor (1, 2, 0)?*
Ana: *Eles são linearmente independentes.*
Pesquisadora: *E qual seria dependente e qual seria independente?*
Ana: *(1, 2, 0) é independente, nestes dois vetores, e o outro é dependente.*
Pesquisadora: *Então, vocês estão me dizendo que esses dois vetores de (C) são LI e que estes tres vetores de (B) são LD.*

O diálogo (17) ilustra a maneira como se deu a mediação docente na condução do debate que levou os alunos à noção de dependência e independência linear. Utilizando os mesmos vetores manipulados em atividade anterior, os estudantes foram questionados quanto à possibilidade de realizar combinação linear entre eles, para que percebessem relações de dependência e independência. Na fala (17.1), a aluna percebeu a independência linear, fazendo com que os demais estudantes começassem a olhar os vetores nessa perspectiva. Em seguida, tivemos a fase de *prova* em que foi formalizado o assunto e apresentada a definição de independência linear. Na sequência, foi feita nova *tomada de posição*, desta vez com objetivo de abordar a noção de base de um espaço vetorial. Vejamos trechos do diálogo que culminou na noção de base.

(18) **Pesquisadora**: *Quando havia três vetores em (C), o conjunto era LI ou LD?*
Alunos: *LD.*
Pesquisadora: *Quando tirei o terceiro vetor, que pode ser escrito como combinação linear dos outros, o que aconteceu?*
Igor: *Ficou LI.*
Pesquisadora: *Observem que ficou LI, mas continuou gerando o plano. Ele era LD, quando tinha três vetores. Foi retirado um e eles continuaram gerando o plano. O mesmo plano, a mesma equação. Então, agora que tenho um conjunto que é LI e que gera o subespaço, irei chamar aquele plano (plotado no gráfico do item (C))*

de S, subespaço S. Em (B), tenho um conjunto LD que também gera, mas se eu tirar um vetor o que acontece? Será que o plano continuará o mesmo?
[...]
***Lívia**: gera.*
***Pesquisadora**: Verifiquem no Geogebra.*
***Lucas**: E se deixar só um?*
***Pesquisadora**: Apague os outros dois, no item (B) e veja o que acontece.*
***Lucas**: Gera também.*
***Pesquisadora**: Vejamos, vou apagar u e v. O plano ainda está lá, mas observem um pequeno detalhe, quando faço combinações lineares só com um vetor, o que irá gerar?*
***Ivo:** Uma reta, somente!*
***Lívia**: Uma reta.*
***Pesquisadora**: Uma reta, pois a medida que for colocando escalares, estes serão múltiplos e continuarão na mesma reta. Entao, só uma reta gera um plano?*
***Lucas**: Não.*
***Pesquisadora**: Para gerar um plano o que preciso ter?*
***Lívia:** Duas retas.*
***Pesquisadora**: Então, nesse caso, posso retirar vetores, porém tem um limite para fazer essas retiradas e continuar gerando o subespaço. [...] E observem que quando retirei os vetores que estavam "sobrando", eles ficaram LI, mas continuaram gerando. Porém, se retirar mais vetores, ele não gera mais. Então, o que posso afirmar em relação a esses vetores que são LI e que geram? O que irão formar, considerando que ao retirar vetores eles não geram mais o subespaço e ao acrescentar vetores eles deixam de ser LI, mas continuam gerando?*
(Silêncio)
(18.1) ***Lívia:** a base!*
***Pesquisadora**: no caso eles formam a base do subespaço que eu chamei de S.*
***Lívia:** e a partir deles vai gerar outros.*

O diálogo (18) mostra como se deu a introdução da noção de base de um espaço vetorial, na qual os alunos conseguiram chegar a esta noção, observando o comportamento dos subespaços ao incluir e excluir vetores, com o qual visualizaram os resultados mediante representações algébrica e geométrica, utilizando o *sofware* Geogebra. Na fala (18.1), temos o momento em que uma aluna percebeu que se tratava de uma base.

Em seguida, foi realizada a fase da prova, em que foi mostrada a definição formal de independência linear e base. Foi feita uma nova tomada de posição, pedindo que os alunos verificassem algebricamente se os vetores do item (B) formavam uma base. A figura 37 mostra o momento em que um aluno apresentou sua solução.

Figura 37 - Aluno na fase da solução, apresentando uma questão sobre base

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Resumindo, nesta atividade foi possível: construir o significado de conjunto gerador; explorar as relações de dependência e independência linear; evidenciar que um mesmo plano pode ser gerado por conjuntos distintos de vetores e como proceder para encontrar sua equação; incluir e excluir vetores chegando ao conceito de base. Assim, os estudantes puderam utilizar mais de uma representação em paralelo, sendo levados a estabelecer ligações entre elas.

Na sessão didática 6, o objetivo da mediação era levar os estudantes à percepção da necessidade da base ser LI, possuindo a quantidade mínima de vetores para ser formada, para, com base nisso, observando o número de vetores na base, introduzir o conceito de dimensão.

(19) ***Pesquisadora****: Posso dizer que os vetores u, v e w são uma base do R²?*
Lucas*: Não.*
Lucas*: Não.*
Pesquisadora: *Por quê?*
Lucas: *Porque tem três vetores.*
Ana*: Tem dois que são multiplos.*
Pesquisadora: *Mas, por quê preciso de vetores LI para poder ter uma base?*
Iris: *É por causa do plano?*
Igor*: Então, o número mínimo de vetores seria dois. Já que nós estamos no R², se nós tivéssemos no R³ o número mínimo seria três.*
Iris*: É por causa do plano, porque se tiver só um vetor pode passar inúmeros planos por ele. Já com dois vai ter apenas um único plano que passa pelos dois.*
Pesquisadora*: Observem, que o fato dele ser LI está dizendo alguma coisa em relação à base, em relação ao vetores que vão formar a base.*
Ana*: Acho que garante o espaço que ele está formando.*
Pesquisadora*: Observem a relação entre a indepedência linear e a quantidade de vetores na base...*

(19.1) **Ana***: Deve ser mínima, não?*
Pesquisadora*: E o que garante que essa quantidade vai ser mínima?*
Ana*: O espaço que está gerando.*
(19.2) **Lucas:** *Que eles formam uma base, aí significa que vai ser minimo.*
(19.3) **Ana***: Ele ser LI.*

Nas falas (19.1, 19.2 e 19.3) os alunos demonstram compreender a relação entre a independência linear e a quantidade de vetores na base. Com isso, prosseguimos abordando a dependência e independência linear de vetores por meio da inserção de diversos vetores no gráfico desenhado na lousa, com o qual falamos do teorema[24] da base e iniciamos o conteúdo de dimensão, fazendo uma *tomada de posição* ao questionar quantos vetores terão uma base de R^2, R^3, R^5 etc. e propor um exercício com o objetivo de levá-los a perceber que o número de vetores na base fornece a dimensão do espaço.

7.2.2 Mediação dos diálogos e abordagem das representações

As aulas descritas no tópico anterior trouxeram trechos dos diálogos vivenciados em sala de aula, que foram analisados considerando a comunicação estabelecida entre os participantes e a respectiva mediação do ensino. Além disso, utilizamos como categorias as fases da Sequência Fedathi, os processos de PMA definidos por Dreyfus (2002) e o conceito imagem e conceito definição descritos por Tall (1988, 1995).

Nos diálogos descritos em 7.2, houve a intenção de propiciarmos a construção conceitual partindo do delineamento do *conceito imagem* referente a cada conteúdo estudado, usando para isso perguntas que suscitavam reflexões e questionamentos sobre os conteúdos. A elaboração dos conceitos se deu com o estímulo ao desenvolvimento de habilidades, como observar, descrever, comparar, classificar, inferir, relacionar, visualizar, generalizar e abstrair. Estes processos tiveram sua ocorrência manifestada nos diálogos entre nós e os estudantes, sobretudo nos momentos de conflitos e dúvidas que aos poucos iam sendo superados mediante a troca e confronto de ideias entre os estudantes.

O quadro 18 ilustra as perguntas utilizadas e os principais processos mentais suscitados.

[24] Teorema da base: Se um espaço vetorial V tem uma base com n vetores, então toda base para V tem exatamente n vetores (POOLE, 2011, p.410).

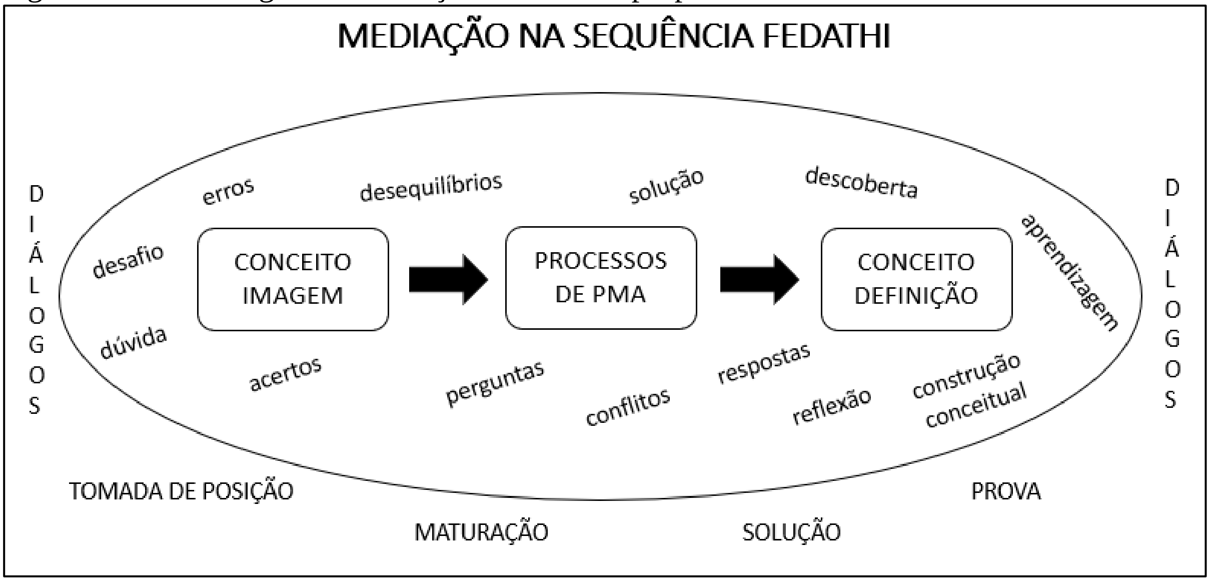
Quadro 18 – Síntese das perguntas e processos mentais mobilizados nos diálogos

Diálogo	**Conteúdo**	**Síntese da pergunta geradora**	**Processos mentais associados**
(1)	Vetor	[...] o que é um vetor?	Extrair e definir
(2)	Espaço vetorial	[...] será que existem outros conjuntos que permitem estas operações?	Observar, comparar e descrever
(3)		[...] como vocês descreveriam um espaço vetorial?	Observar, sintetizar e descrever
(4)		(Aluno) Existe vetor no R^1?	Observar e refletir
(5)	Subespaço	[...] que características um subconjunto de um espaço vetorial precisa ter para também ser um espaço vetorial?	Observar, comparar e identificar
(6)		[...] se não tenho que verificar os dez axiomas, o que é preciso verificar?	
(7)		(aluno) [...] por quê só essas duas condições?	Observar e questionar
(8)		(Gráfico) A reta H é um subespaço vetorial de R^2?	Observar e comparar
(9)		Verifique se o conjunto U de todos os pontos (x,y) em R^2, tais que $x\geq0$ e $y\geq0$, é um subespaço de R^2.	Manipular, comparar e abstrair
(10), (11) e (12)	Combinação linear	[...] o que é uma combinação linear?	Observar, extrair, descrever, refletir
(13)	Subespaço gerado	[...] Posso chamar v e w de um conjunto A = {v,w}. Me digam o que está acontecendo?	Observar, descrever, visualizar, definir generalizar
(14), (15) e (16)	Conjunto gerador	Os vetores geram R^3?	Observar, comparar, conjecturar, manipular
(17)	Independência linear	[...] se você tirar um vetor os que ficam continuam gerando um plano?	Observar, extrair e descrever
(18)	Base	[...] quando havia três vetores o conjunto era LI ou LD?	Observar, comparar e descrever
(19)		[...] Posso dizer que os vetores u, v, w são uma base do R^3?	Observar, comparar e descrever

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Compreendemos que a busca pela superação dos desequilíbrios cognitivos (equilibração), quando junta ao exercício constante dos processos mentais descritos no quadro 16, pode favorecer a manifestação da generalização e da abstração, pois pressupõe a reflexão sobre os objetos estudados, contribuindo para a expansão do *conceito imagem* e apreensão do *conceito definição*. O domínio do segundo também contribuirá para o aprimoramento do pensamento matemático dos discentes, à medida que puderem aplicá-lo a outras situações. A figura 38 resume esta análise.

Figura 38 - Os diálogos e a mediação docente na proposta da SF



Fonte: Pesquisa direta (2017).

A figura 38 destaca o fato de que a mediação docente na Sequência Fedathi permitiu a interação dos participantes, adotando uma atitude disposta a escutar os estudantes, respeitando suas ideias, raciocínios e pontos de vista, mesmo que estes não estivessem em acordo com a comunidade científica, como ocorreu com os diálogos (8), (9) e (16), em que, apesar de alguns equívocos, os estudantes conseguiram chegar às respostas esperadas sem que os corrigíssemos diretamente.

Ao agir dessa maneira, a mediação docente, nos pressupostos da Sequência Fedathi, pôde contribuir positivamente para a construção do *conceito imagem* que os alunos passavam a ter do conteúdo, desde a *tomada de posição*. Em meio a perguntas, conflitos, dúvidas, erros, acertos etc., conforme ilustra a figura 25, foram mobilizados processos de PMA, e, consoante acontecia a mediação, apoiada em perguntas que fomentavam os diálogos, chegava-se na formação do *conceito definição*, propício a acontecer na fase da *prova*.

Assim, não houve um ensino focado na transmissão de conceitos e definições em sua forma final, mas o cuidado para que estes emergissem nas discussões, de maneira significativa. A qualidade dos diálogos foi reflexo da mediação docente, disposta a escutar o que os alunos tinham a dizer, ao mesmo tempo em que havia um direcionamento do ensino, instigando-os a agir, refletir sobre as características e propriedades dos conteúdos, buscando evidenciar as relações e significados.

Nos diálogos, percebemos que as fases de maturação e solução aconteceram quase em paralelo, à medida que iam sendo feitas as perguntas e os alunos expunham seus raciocínios maturando as ideias, apontando aspectos relevantes, levantando hipóteses, dúvidas, erros, iam chegando numa solução mantendo uma linha coerente de raciocínio, que ia sendo construído com a participação de todos os envolvidos, embora não fosse uma construção imediata, pois sempre havia conflitos e dúvidas que aos poucos iam sendo esclarecidos. Assim, havia os desequilíbrios cognitivos necessários à construção do saber.

Olhando esses diálogos mais de perto, percebemos que os alunos eram levados a extrair, classificar, sintetizar, generalizar e abstrair, favorecendo o exercício dos processos de PMA. Isso, sem dúvida, foi facilitado pelos recursos e estratégias utilizados nas aulas, uma vez que as representações desempenham papel fundamental na atividade matemática, servindo como instrumento para se alcançar a generalização e a abstração. Desse modo, convém se ter o domínio de diversas representações de um conceito, porquanto é essencial para se ter flexibilidade de pensamento e estabelecer relações entre os objetos em estudo.

Além disso, ao proporcionar ao estudante a liberdade para se comunicar e expor seus raciocínios e ideias, a Sequência Fedathi se diferenciou dos modelos tradicionais de ensino, de nós exigindo uma postura flexível e aberta ao diálogo. Assim, a comunicação se deu baseada na valorização do pensamento e fala dos discentes, em vez de um comportamento docente que remetesse a imposição ou autoritarismo.

No que se refere à maneira como as representações matemáticas foram trabalhadas, realizamos a análise dos dados utilizando as etapas descritas por Dreyfus (2002). Assim, de acordo com os resultados obtidos, elaboramos o quadro 19, que mostra o uso das representações matemáticas utilizadas durante o Curso de Introdução à Álgebra Linear.

Quadro 19 – Tratamentos e conversões verificadas nas sessões didáticas

Sessão didática	**Conteúdo**	**Manipulação de uma única representação**	**Manipulação de distintas representações em paralelo**	**Processos de PMA associados**
1	Vetores	Operações com vetores	n-uplas => gráfico algébrico => gráfico	Visualização Generalização Abstração
	Espaços vetoriais	Verificação dos axiomas	-	
2	Subespaço vetorial	Verificação dos subespaços	gráfico => algébrico algébrico => gráfico	Visualização
3	Combinação linear	Verificação das combinações	matricial => linguagem natural	Abstração
	Subespaço gerado	-	n-uplas => gráfico gráfico => algébrico	Visualização Generalização
4	Geradores	Verificação dos conjuntos geradores	algébrico => gráfico	Visualização
5	Subespaço gerado, independência linear e base	Verificação algébrica de conjuntos geradores,	n-uplas => gráfico gráfico => algébrico algébrico => gráfico	Visualização Generalização Abstração

		independência linear e base.	gráfico => linguagem natural	

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Na abordagem das representações, sintetizada no quadro 18, observamos que, na sessão didática 1, as representações de vetores passaram por mudanças do registro numérico/algébrico para o geométrico em duas e três dimensões, favorecendo a assimilação e visualização do conteúdo mediante a manipulação de variadas representações em paralelo.

Os espaços vetoriais foram explorados por meio de exemplos distintos, em que os alunos utilizaram inicialmente uma única representação, ao identificar e verificar os axiomas dos espaços vetoriais. Assim, estes exemplos favoreceram a construção do conceito de espaço vetorial, podendo culminar na sua generalização e abstração.

Na sessão didática 2, foi imprimida ênfase aos aspectos geométricos dos espaços vetoriais, cujo foco era a visualização de propriedades implícitas, enfatizando aspectos conceituais essenciais à compreensão do conteúdo. Houve tratamento algébrico, utilizando-se a representação de *n-uplas* para verificação das propriedades dos subespaços, bem como aplicação de exemplos e contraexemplos de subespaços vetoriais como meio de ampliar a percepção do conceito pelos estudantes.

Na sessão didática 3, houve a conversão do registro simbólico (combinação linear) para o registro em língua natural, em que os alunos foram convidados a elaborar uma definição de combinação linear com amparo na observação de um exemplo. Além disso, após as manipulações de vetores no Geogebra, foi possível chegar no conceito de subespaço gerado, no qual utilizamos, paralelamente, representações gráficas e algébricas, observando o comportamento dos vetores ao realizarmos as combinações lineares via *software*. Isso remeteu aos processos de visualização, generalização e abstração, que poderiam ser vivenciados pelos alunos, conforme estabelecessem as relações pertinentes.

Na sessão didática 4, aconteceu o tratamento do registro algébrico, no qual os alunos puderam verificar conjuntos geradores, chegando eles próprios à técnica de resolução. Também foi usado registro gráfico para visualização de vetores geradores no plano e no espaço. Além disso, os alunos fizeram exercícios para determinar os geradores de espaços vetoriais dados, podendo observá-los sob perspectivas diversificadas.

Na sessão didática 5, foram procedidos a tratamentos e conversões, remetendo aos processos de visualização, generalização e abstração dos conceitos de combinação linear, geradores, independência linear e base. Registrou-se maior destaque às transformações de registros, pois os próprios alunos usaram o Geogebra numa atividade que os levou a manipular vetores e realizar tratamentos e conversões, observando atentamente os comportamentos dos vetores e subespaços. Assim, passaram do registro numérico para o gráfico e do gráfico para o registro em língua natural, bem como realizaram tratamentos nos registros algébrico e gráfico.

Já na sessão didática 6, que tratou dos conceitos de base e dimensão houve o uso de representação geométrica e algébrica, em que a primeira teve o intuito de rever o comportamento dos vetores LI e LD no plano, relacionando-os à caracterização de uma base. Enquanto isso, a segunda levou os alunos à observação do vínculo entre o número de vetores na base e a dimensão do espaço. Em seguida, foram feitos exercícios em que os alunos deveriam verificar a dimensão de espaços vetoriais dados.

Assim, os conceitos foram trabalhados usando diversificadas representações em paralelo, auxiliando na visualização e percepção deles, transpondo a manipulação algorítmica, corroborando com as ideias de Dreyfus (2002), quando defende a importância de trabalhar no ensino com várias representações, de modo a levar o estudante a desenvolver habilidades de transitar entre uma representação e outra, ampliando sua visão do conteúdo e obtendo flexibilidade de pensamento.

Não se trata, no entanto, apenas, de trabalhar representações, mas, sobretudo, ter consciência de como conduzir e mediar o ensino para a compreensão da necessidade dessa mudança de registros, bem como de seus significados intrínsecos. Nesse sentido, em todas as sessões didáticas, a postura e a mediação docente foram responsáveis pela qualidade da abordagem das representações matemáticas, permitindo a ação direta dos estudantes, cuja maturação aconteceu, respeitando-se o tempo dos alunos e fornecendo as oportunidades de manipulação de representações distintas, em paralelo.

Além disso, do ponto de vista do conceito imagem e conceito definição, descrito por Tall (1988;1995), observamos que, na *tomada de posição*, o contexto inicial das aulas proporcionou a mobilização de conhecimentos prévios, evocando, assim, as imagens mentais necessárias à formação do conceito imagem referente ao novo conteúdo, introduzido em cada sessão didática. Assim, o conceito imagem começa a ser trabalhado desde o *plateau*, mas o foco é a sua formação sendo viabilizada no curso das fases da Sequência Fedathi, criando, assim, a base para a apresentação do conceito definição, que surge somente após processos de reflexão sobre as relações e propriedades dos conceitos estudados.

Na fase de *maturação,* acontecia a construção do conceito imagem referente ao conteúdo de cada sessão didática, em que, com apoio em exemplos, a mediação docente se utilizava de questionamentos para fomentar o diálogo, a interação e a reflexão sobre os conteúdos estudados. Na *solução,* a exposição das estratégias de resolução e do raciocínio utilizado pelos estudantes nos mostrava como estes estavam compreendendo o conteúdo, fornecendo, assim, dados sobre o conceito imagem que estava sendo formado por eles.

Na *prova,* a formalização do conteúdo proporcionava a aproximação entre o *conceito imagem* (trabalhado na aula) e o *conceito definição*, uma vez que as definições formais só eram expostas após os estudantes terem explorado os conceitos de maneira intuitiva.

Desse modo, a Sequência Fedathi proporcionou um ensino em que o conceito imagem referente aos conteúdos da Álgebra Linear foi explorado de maneira reflexiva e de acordo com o tempo de maturação dos alunos, sendo que não houve a transmissão direta de conceitos e definições em sua forma final, mas o cuidado para que emergissem nos diálogos, de maneira significativa, possibilitando a construção gradativa das imagens conceituais em Álgebra Linear.

7.4 As impressões dos estudantes sobre a Sequência Fedathi

Nesta sessão, tratamos de verificar as impressões dos discentes sobre a vivência da Sequência Fedathi, visando a conhecer os reflexos da mediação docente nas suas percepções. Com efeito, o significado da palavra impressão se refere às ideias recebidas, ou mesmo, às sensações vividas pelos estudantes, ao depararem uma metodologia que rompeu com o contrato didático a que estavam habituados.

As informações foram coletadas com amparo em instrumentos aplicados logo após o curso de Introdução à Álgebra Linear, por meio de questionário e entrevista coletiva, e no decorrer do grupo de estudos, criado para apresentar a Sequência Fedathi aos cursistas, cujos dados foram coletados por meio de fóruns de discussão *online* e questionário impresso. O grupo de estudos teve duração de 20h, semipresencial, utilizando o ambiente virtual Moodle, com foco no estudo da Sequência Fedathi, do qual participaram quatro alunos que concluíram o curso de Álgebra Linear. Os detalhes estão descritos no capitulo 6.

Desse modo, para compreender como os alunos perceberam a experiência com a Sequência Fedathi, no dia 28 de abril, após a última sessão didática do curso de Introdução à Álgebra Linear, realizamos com os seis estudantes presentes na aula, uma entrevista coletiva na forma de grupo focal, registrada em áudio. Na ocasião, eles não conheciam a Sequência Fedathi, uma vez que, durante o curso, nada foi mencionado sobre aspectos metodológicos das aulas.

O quadro 20 apresenta as principais respostas obtidas, trazendo as perguntas feitas pela pesquisadora (representadas por P_n), as unidades de análise ilustrando recortes das respostas dos discentes (representadas por R_n) e as ideias centrais obtidas dessas falas.

Quadro 20 – Trechos das principais falas dos estudantes no grupo focal

<table>
<tr><th>Pergunta</th><th>Unidades de análise</th><th>Ideia central</th></tr>
<tr><td rowspan="4">P1. O que vocês têm a dizer sobre a maneira como os conteúdos foram trabalhados ao longo do curso?</td><td>R1. [...] A gente fica tentando, então, um diz uma palavra, outro diz outra coisa. Um diz uma coisa errada, outro diz outra coisa errada, mas isso vai estimulando que a gente vá pensando, se lembrando e acabe descobrindo aquilo que você está perguntando.</td><td>Interação e descoberta</td></tr>
<tr><td>R2. [...] a gente aprende na disciplina pra verificar que é LI, LD e tudo mais, só que aqui a gente consegue ter uma visão diferente. Por que é LI? Por que é LD?</td><td>Ênfase aos significados</td></tr>
<tr><td>R3. [...] a gente é o principal agente do conhecimento, você só está facilitando isso.</td><td>Autonomia</td></tr>
<tr><td>R4. [...] no geogebra nós conseguimos ver porque quando o sistema tem solução gera um plano. Enfim, tudo isso. Você consegue ter uma visão diferente daquilo que é passado na sala de aula.</td><td>Visualização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">P2. Comparando o que vivenciaram no curso com as aulas a que estão habituados, o que observaram?</td><td>R5. Não tem discussão entre os alunos.</td><td>Interação</td></tr>
<tr><td>R6. Lá passa só a definição. Não tem como imaginar, sem ver... por exemplo, no Geogebra... a gente vê muita definição e não sabe formalizar aquilo, pois é ruim de imaginar. Mas, através do Geogebra que você passou, ficou melhor para imaginar realmente como é que forma as coisas...</td><td>Visualização e imaginação</td></tr>
<tr><td>R7. [...] ele não vai chegar pra cada um e perguntar se está entendendo ou não.</td><td>Interação</td></tr>
<tr><td>R8.[...] um dá uma opinião, o outro completa ai forma uma opinião só, mas em sala cada um tem a sua, aí ele explica de modo geral e pronto.</td><td>Interação</td></tr>
<tr><td rowspan="4">P3. O Geogebra ajudou na compreensão dos conceitos estudados no curso?</td><td>R9. Sim, porque você vê como é que está sendo aplicado aquilo. E desenhar no caderno é muito difícil.</td><td>Visualização</td></tr>
<tr><td>R10. [...] Eu fiquei sempre imaginando, lembrando como foi feito no computador.</td><td>Visualização;
Imaginação;
Representação mental.</td></tr>
<tr><td>R11. A gente viu no Geogebra como funcionam as combinações lineares, mas na prática aprende apenas a calcular sistemas...</td><td>Representações em paralelo</td></tr>
<tr><td>R12. Acho que é fundamental o geogebra no inicio do curso, pois a partir disso você vê o que forma... Então, dá pra imaginar estudando as definições, outras imagens na cabeça da gente, do que a gente está fazendo. Por causa que a gente faz coisa que não sabe nem o que que está fazendo.</td><td>Representação mental;
Visualização;
Imaginação.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Quando falaram sobre a maneira como os conteúdos foram trabalhados (P1), os alunos explicitaram livremente opiniões que remeteram a uma recepção positiva da interação vivenciada entre eles, nós e os conteúdos, destacando-se como ideias centrais os significados matemáticos, o desenvolvimento da autonomia e a oportunidade de visualizar, sob outros pontos de vista, os conteúdos trabalhados, saindo da visão algébrica que costuma prevalecer no ensino tradicional.

Em P2, ao comparar a metodologia adotada no curso com o ensino a que estavam habituados, os estudantes relataram que, neste último, há pouco espaço para troca de ideias entre os participantes. Mencionaram a dificuldade de imaginar os conceitos, uma vez que o ensino se dá mediante a apresentação imediata das definições, tornando a visão do conteúdo muito limitada: "*Lá passa só a definição. Não tem como imaginar, sem ver... [...]a gente vê muita definição e não sabe formalizar aquilo, pois é ruim de imaginar".*(R6).

Desse modo, implícitas às falas dos estudantes, está a percepção da interação dos participantes, bem como do incentivo à visualização e imaginação dos conceitos e definições, sobretudo no que se refere ao uso do *software* Geogebra (P3), em que foram unânimes em apontar as vantagens de seu uso no ensino, facilitando a compreensão dos conteúdos. Assim, destacaram-se as representações mentais e a oportunidade de trabalhar com representações em paralelo.

Após o grupo focal, aplicamos um questionário com questões abertas, buscando verificar as impressões dos alunos sobre a maneira como os conceitos foram trabalhados, o uso de perguntas, a recorrência ao Geogebra e à fase da *solução*, marcada pela apresentação das resoluções na lousa. Cinco alunos responderam a esse questionário. Para análise, apresentamos as respostas como unidades de análise e as ideias centrais, obtidas de cada resposta, que sintetizam a visão dos estudantes sobre cada assunto questionado. As perguntas na íntegra estão no Apêndice M.

O quadro 21 ilustra as respostas referentes à maneira como se deu a abordagem metodológica dos conteúdos, em especial, as impressões que ficaram sobre a construção conceitual incentivada nas aulas.

Quadro 21 - Respostas dos discentes sobre a metodologia do curso

	Unidades de Análise	**Ideia central**
A1	Instiga a curiosidade matemática no sentido de você ser questionado sobre determinados assuntos, logo depois você ver como é formalizado as ideia que foram expressas de forma informal na sala.	Curiosidade

A2	Porque me fez tentar imaginar ~~a~~ a definição ~~mesmo antes~~ a cada passo dado a caminho da definição.	Imaginação (formação do conceito definição)
A3	Melhora na hora de se trabalhar o assunto, esse metodo de primeiro apresentar o conteúdo e discutir em sala com os alunos melhora a compreensão e faz com que desperte a curiosidade sobre o assunto abordado.	Interação e curiosidade.
A4	podemos discutir mais sobre o assunto e ir aprendendo de forma mais amplo e interessante.	Interação e aprendizagem
A5	É importante o uso de exemplos simples antes de explicar o conteúdo pela definição formal, pois isso permite uma melhor visão do que as definições afirmam, e isso melhora na compreensão do conteúdo e nos instiga a estudar mais o conteúdo.	Uso de exemplos (formação do conceito imagem)

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Nas respostas do quadro 21, destacaram-se, como ideias centrais, curiosidade, imaginação, interação, aprendizagem e uso de exemplos. Segundos os relatos, o ensino proporcionou a curiosidade mediante os questionamentos que iam sendo propostos, cuja discussão remetia à imaginação das definições conforme se ia avançando com o conteúdo. Nesse aspecto, houve indícios do quanto a Sequência Fedathi pode contribuir para a construção do conceito imagem e do conceito definição, pois, segundo as falas dos estudantes,

> A2. (...) me fez tentar imaginar a definição a cada passo dado a caminho da definição.
> A5. É importante o uso de exemplos simples antes de explicar o conteúdo pela definição formal, pois isso permite uma melhor visão do que as definições afirmam, e isso melhora a compreensão do conteúdo e nos instiga a estudar mais (...).

Para os alunos, poder imaginar as definições facilitou a compreensão tornando a abordagem dos conteúdos interessante, sobretudo pelo uso de exemplos que os instigou a estudar mais o assunto. A interação como momento de troca de informações, saberes e ideias também foi mencionada nas falas, ao afirmarem que as discussões vivenciadas auxiliaram na compreensão dos conteúdos.

O quadro 22 traz as respostas referentes às impressões dos estudantes quanto ao uso de perguntas como estratégias de mediação do ensino.

Quadro 22 - Respostas dos discentes sobre o uso de perguntas para mediação do ensino

Unidades de Análise	**Ideia central**
Instigaram para que surgissem novas ideias a respeito do assunto, além disso cada aluno ia respondendo a sua maneira, complementando a ideia do outro.	Novas ideias
Instigou-me curiosidade por lembrarem outros caminhos de chegar à solução, me fazendo refletir sobre o assunto.	Curiosidade e reflexão
Fez com que buscassemos compreender mais sobre a disciplina e despertou um senso de estudar e querer aprender com essa curiosidade.	Curiosidade
Com as perguntas feitas em sala, as duvidas surgiram deixando os alunos mais curiosos e buscando uma melhor compreensão.	Curiosidade
Essas perguntas foram importantes para nos fazer refletir melhor sobre alguns assuntos que temos dificuldades em aprender. Essas perguntas nos ajudaram a pensar mais e assim nos instigar para buscar respostas sobre alguma pergunta.	Reflexão e autonomia

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Assim, os estudantes destacaram o surgimento de outras ideias como resultado da reflexão estimulada pelos questionamentos. Todos perceberam as perguntas como elementos essenciais da mediação docente, pois incentivavam o raciocínio, a curiosidade e novas ideias, resultando no desenvolvimento de sua autonomia.

Quadro 23 - Impressões dos discentes sobre a fase da solução

Unidades de Análise	**Ideia central**
Essa dinâmica faz com que haja discussão sobre a forma como o aluno até então chegou sua solução particular, fazendo com que surja novas ideias para complementar a resolução.	Novas ideias
É importante para poder ver diferentes formas de responder as mesmas perguntas.	Diferentes resoluções
Muita das vezes somente o professor corrigindo não dar resultado, os alunos se manifestando e indo para lousa e explicando facilita o aprendizado do aluno e de seus colegas que começam a compreender até melhor.	Facilita o aprendizado
foi importante porque podiemos compartilhar informações entre si, deixando o dialogo e os questionamentos mais interessante.	Interação

Foi muito importante, pois as dúvidas e os questionamentos tem um papel muito importante na construção do nosso conhecimento, ainda mais que estamos se formando para sermos futuros professores.	Questionamentos

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Quanto à fase da solução, descrita no quadro 23, os alunos destacaram que o fato de apresentar suas soluções na lousa facilitou o aprendizado, sobretudo por viabilizar a troca de ideias e exposição de caminhos que levam a mesma solução. Embora tenha reconhecido sua importância, um aluno expressou, durante a realização do grupo focal, sentimentos de receio de estar exposto aos questionamentos da turma no momento em que apresentou a solução de uma questão trabalhada em sala.

O quadro 24 ilustra as respostas dos alunos sobre o que acharam do uso do *software* Geogebra para manipular vetores e subespaços vetoriais em R^2 e R^3.

Quadro 24 - Respostas dos discentes sobre o uso do Geogebra nas aulas

Unidades de Análise	**Ideia central**
Foi muito interessante a utilização do Geogebra, pois tivemos a possibilidade de visualizar algo até então abstrato, e dessa forma podemos perceber o comportamento dos vetores, o que eles formavam e como se comportavam,	Visualização; Percepção do comportamento dos vetores.
Justifique as opções marcadas: Me ajudou a visualizar ~~para porque abstrai os~~ de uma forma ~~diferente~~ mais fácil, e a entender ~~ainda~~ o conceito de base.	Visualização; Compreensão do conceito de base.
Os desenhos são instrumentos algébricos que facilitam e é interessante na aula onde o aluno não visualiza somente no quadro o Geogebra facilita isso é um meio e objeto bom de se trabalhar a álgebra Linear.	Visualização
O uso do Geogebra foi interessante pelo fato de podermos ter uma visualização mais ampla e compreensível em determinados espaços vetoriais.	Visualização
O uso desse software, é bem interessante, pois através dele foi possível visualizar o que as definições afirmam, mas nós não conseguimos ver de maneira imediata.	Visualização

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Corroborando o que foi dito no grupo focal, os estudantes foram unânimes em destacar o quanto o Geogebra permitiu a visualização das definições, o incentivo à imaginação dos conceitos, facilitando a compreensão dos conteúdos. Assim, segundo seus relatos, foi um recurso essencial na apreensão de significado e consequente construção do conceito imagem referentes aos conteúdos de subespaços, geradores e base.

Durante a efetivação do grupo de estudos, foram realizados dois fóruns para discussão no ambiente Moodle para abordar as fases da Sequência Fedathi. Antes da participação nos fóruns, eles foram orientados a realizar leitura do texto de Souza (2013), que caracterizava as fases da Sequência Fedathi. Sintetizamos no quadro 25 as principais falas que retratam, no fórum 1, as impressões dos alunos sobre a tomada de posição e a maturação e, no fórum 2, a solução e a prova.

Quadro 25 - Trechos das principais falas nos fóruns de discussão

	Unidades de Análise	**Ideia central**
FÓRUM 1: TOMADA DE POSIÇÃO E MATURAÇÃO	*R1. [...] indica que o professor deve proporcionar uma maior autonomia para o aluno, e levá-lo a desenvolver o raciocínio matemático, através da exploração, compreensão e investigação [...]*	Autonomia Experimentação Raciocínio matemático Interação Investigação Planejamento Nível de conhecimento dos alunos
	R2. Acredito que seja de grande importância o professor medir o grau de conhecimento dos alunos antes de apresentar o problema para poder aplicar essa metodologia, pois muitos alunos tem níveis de conhecimentos desiguais.	
	R3. Segue será também importante trabalhar o nivelamento da turma.	
	R4. Outra etapa bem interessante é na fase de maturação. Quando existe a interação entre os alunos e o professor, sendo que isso contribui e muito na aprendizagem, pois os alunos questionam uns aos outros e ao professor.	
	R5. Esses questionamentos que têm na maturação só vem a contribuir para que os alunos reflitam e possam adquirir o conhecimento de maneira mais sólida.	
	R6. o professor deve levar seus alunos a construírem suas aprendizagens a partir das experimentações e constatações feita por eles no decorrer da aula.	
	R7. o problema proposto deve proporcionar uma maior autonomia para o aluno, e levá-lo a desenvolver o raciocínio matemático, através da exploração, compreensão e investigação de problemas matemático. Mas antes de passar qualquer problema o professor vai ser um investigador de sua sala de aula, fazendo um diagnóstico para saber o nível que sua turma se encontra.	
	R8. Eu acho o método tradicional válido também, mas penso que possa limitar muito o aluno, pois esse pode se acostumar a esperar resposta para os seus questionamentos dos outros, não se dando ao trabalho de investigar por si mesmo. Sem esse trabalho, seus erros e acertos, eu penso que seja mais difícil de se absorver qualquer que seja o conteúdo.	
FÓRUM 2: SOLUÇÃO E PROVA	*R1. Essa 3 etapa promove diversas trocas de conhecimento entre os alunos. [...] A última etapa é fundamental, pois é a partir dela que os alunos poderão ver como criar um modelo que possas resolver outras situações-problemas.*	Troca de ideias Interação Contraexemplos
	R2. É importante lembrar também que, nessa terceira fase, é preciso dar tempo para que os alunos realmente consigam produzir algo. No modelo tradicional, facilmente você pode passar toda uma aula sem fazer e/ou entender absolutamente nada. Digo isso empiricamente.	
	R3. Na solução do problema o professor deve induzir o aluno para com seus conhecimento possa responder e se ele não conseguir propor contra -exemplos que possam leva-lo chegar numa solução necessaria e através de seu raciocinio	

	R4. O docente deve procurar meios para que o aluno chegue a solução da questão, não quer dizer que o único meio seja o que o professor vai ensinar, poderá haver meios até mais faceis que chegue a mesma solução problema com isso ele deve buscar que o aluno tente através de seus conhecimentos chegar na resposta.	

Fonte: Pesquisa direta (2017).

As falas descrevem uma compreensão mais sistematizada da Sequência Fedathi, uma vez que agora puderam conhecê-la e caracterizar suas fases, relacionando com o que vivenciaram no curso de Introdução à Álgebra Linear. Assim, puderam refletir sobre a mediação e postura docente com base nos pressupostos teóricos da metodologia. Destacamos as respostas R8 e R2, dos fóruns 1 e 2, respectivamente:

> *R8. Eu acho o método tradicional válido também, mas penso que possa limitar muito ao aluno, pois esse pode se acostumar a esperar resposta para os seus questionamentos dos outros, não se dando ao trabalho de investigar por si mesmo. Sem esse trabalho, seus erros e acertos, eu penso que seja mais difícil de se absorver qualquer que seja o conteúdo.*
> *R2. É importante lembrar também que, nessa terceira fase, é preciso dar tempo para que os alunos realmente consigam produzir algo. No modelo tradicional, facilmente você pode passar toda uma aula sem fazer e/ou entender absolutamente nada. Digo isso empiricamente.*

Nessas falas, ficam evidentes as reflexões discentes sobre o método tradicional de ensino e a proposta da Sequência Fedathi. Ao fazer essa comparação, o aluno sinaliza compreender os benefícios à qualidade da aprendizagem mediante um ensino que valoriza a ação e o pensamento discente em sala de aula. A principal ruptura/diferença apontada pelos alunos ao comparar a Sequência Fedathi com o ensino tradicional, foi a ausência da interação, das perguntas, das discussões sobre o assunto, antes de apresentar as definições formais.

No primeiro fórum, os alunos demonstraram compreensão do quanto a Sequência Fedathi pode proporcionar a autonomia discente, à medida que propõe a experimentação que fará com que use de seu raciocínio matemático num ambiente que favorece a investigação e a interação. Também destacaram a importância de um bom planejamento e a necessidade de o professor fazer um diagnóstico sobre o nível de conhecimento da turma.

O segundo fórum sobre a *solução* e a *prova* teve como categorias: o tempo, a interação e o uso de contraexemplos. Destacaram a necessidade de se dar tempo para os alunos resolverem a questão, bem como a importância da interação proporcionada na apresentação da solução e o uso de contraexemplos para estimular o raciocínio dos alunos sobre o conteúdo. Pelo exposto, percebemos que as falas dos fóruns se assemelham aos depoimentos que deram antes de conhecer a Sequência Fedathi, sinalizando aproximação entre o que vivenciaram na prática e o que viram na teoria.

Ao final do grupo de estudos, aplicamos com quatro alunos um questionário para que avaliassem o curso de Introdução à Álgebra Linear (40h) e o grupo de estudos (20h). O intuito foi verificar as impressões dos discentes sobre a experiência vivenciada em ambos os momentos. As respostas na íntegra estão no Apêndice N. Destacamos aqui algumas falas transcritas no quadro 26.

Quadro 26 - Principais respostas obtidas no Questionário 2

Unidades de Análise	**Ideia central**
"Foi uma experiência nova para mim, onde obtive outro modo de ver o ensino da matemática em que se pode deixar o aluno mais a vontade para que eles possam através dos seus conhecimentos chegar no resultado final do problema, e com isso, ter uma interação com os colegas e professor. Assim, o assunto abordado será mais bem aprimorado pelos alunos e com isso o professor irá ter um melhor desempenho em sala de aula [...]"	• Ação discente • Autonomia • Interação
"[...] eu pude ter uma experiência de aprendizado diferente da qual eu estou habituado. Foi como uma nova forma de aprender. E dessa vez eu consegui realmente participar das aulas, podendo ajudar os meus colegas. Isso me trouxe alguns benefícios, ao mesmo tempo que aumentou bastante a minha responsabilidade como aluno: ou nós (alunos) nos esforçamos no processo de aprendizagem, ou nem mesmo com uma boa mediação, feita pela professora, o conteúdo conseguirá ser efetivamente apreendido por nós. [...]"	• Nova forma de aprender • Autonomia • Interação • Esforço
"[...] Através dessa metodologia consegui entender conceitos muito importantes da Álgebra Linear, pois esta disciplina possui um conteúdo muito abstrato. Vivenciar essa sequência como aluno contribuiu muito na minha formação como professor de matemática, pois foi possível perceber de forma bem clara quais são os objetivos da Sequência Fedathi."	• Compreensão • Formação docente
"Vivenciar a Sequência Fedathi como aluna no curso de Álgebra Linear foi muito interessante, visto que essa nova didática de ensino de matemática permitiu a nós alunos uma maior autonomia dentro de sala, fazendo com que pudéssemos aprender a partir de nossas constatações e nos deu a liberdade de discutir sobre determinadas perguntas com nossos colegas."	• Autonomia • Interação • Raciocínio

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Observamos que a ruptura do contrato didático do ensino tradicional foi vivenciada por eles de maneira positiva, uma vez que se destacaram a interação, a autonomia, a compreensão, a formação docente, o esforço e o raciocínio. Os sujeitos demonstraram que sentiram o ambiente de ensino favorável à investigação e à reflexão, despertando-lhes a vontade de continuar aprendendo sobre o conteúdo, corroborando as respostas apresentadas no grupo focal e no questionário 1. Não mencionaram enfado, rotina ou qualquer outro fator que minasse sua predisposição para refletir ativamente sobre o conteúdo. Em um dos instrumentais um aluno relatou a ansiedade que sentiu em alguns momentos por querer ver logo as definições e os métodos algorítmicos, e outro falou sobre a resistência na adaptação à fase da *solução*, pelo receio de ter que apresentar suas respostas na lousa.

Das ideias centrais obtidas, observamos que os termos *interação, autonomia, reflexão, visualização* e *imaginação* ocorreram com frequência nos instrumentais aplicados, caracterizando-se como as impressões mais fortemente percebidas pelos estudantes em relação à metodologia vivenciada.

Desse modo, considerando o contexto das falas, trazemos o quadro 27, que relaciona as principais impressões identificadas às categorias: *cognição*, *socialização*, *afetividade* e *metacognição*, que emergiram das ideias centrais, sinalizando aspectos que, embora subjetivos, não estão dissociados do contexto de sala de aula, uma vez que a ação docente reflete na ação discente ultrapassando os aspectos cognitivos.

Quadro 27 – Categorias emergentes das ideias centrais

Ideias centrais	**Categorias**
Interação	Socialização Afetividade Cognição
Visualização	Cognição
Imaginação	Cognição
Reflexão	Socialização Afetividade Metacognição
Autonomia	Socialização Afetividade Cognição Metacognição

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Na Sequência Fedathi, a *interação* ocorreu em todas as fases, sobretudo na maturação e solução, uma vez que esta pressupõe a socialização das ideias de cada pessoa, que, em suas singularidades, estão repletas dos produtos da atividade cognitiva e, também afetiva, uma vez que estas são indissociáveis, conforme defende Piaget, ao conceber a ideia de que “[...] tanto o aspecto cognitivo quanto o afetivo desempenham papéis chaves no desenvolvimento intelectual.” (WADSWORTH, 1996).

Desse modo, a interação vivenciada durante o curso, mediada segundo a Sequência Fedathi, trouxe ao ambiente de ensino as dimensões sociais e afetivas da aprendizagem, imprescindíveis à construção do conhecimento e, sobretudo, ao desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que as emoções tendem a influenciar diretamente a motivação e o interesse, que, a seu turno, estimulam a curiosidade, o senso investigativo e a consequente mobilização dos processos mentais que constituem o PMA.

A *visualização* e a *imaginação* se relacionam, sobretudo, aos aspectos cognitivos, estando intimamente associadas às representações mentais e simbólicas. A visualização dos objetos no plano e no espaço permitiu que comparassem e manipulassem as representações (numéricas, algébricas e geométricas) em paralelo, favorecendo a imaginação dos conceitos e definições. Isso facilitou a compreensão e forneceu ferramentas para a realização dos processos de generalização e abstração dos conteúdos estudados. O *software* Geogebra foi imprescindível para isso, bem como a mediação docente, ao possibilitar que a interação em sala de aula favorecesse a visualização e a imaginação.

Consequentemente, a *reflexão* se deu à medida que os estudantes eram incentivados a repensar os conceitos, a reconsiderar as informações disponíveis, buscando relações e significados, refletindo sobre estes e acerca das ações realizadas e suas consequências, num processo que se coaduna com a metacognição que "[...] se refere ao conhecimento que se tem dos próprios processos e produtos cognitivos ou de qualquer outro assunto relacionado a eles, por exemplo, as propriedades relevantes para a aprendizagem de informações ou dados". (FLAVELL, 1976, p.232 *apud* ROSA, 2011, p. 42)

No ato de refletir sobre os objetos matemáticos, a pessoa evoca processos mentais que vão desde a simples observação de características relevantes à abstração das definições formais. Desse modo, quando na fase de maturação, a ação docente estimulava a reflexão sobre o conteúdo e discutia procedimentos inerentes ao conhecimento matemático, tal como o papel das estruturas, do raciocínio e da abstração, estava incentivando habilidades metacognitivas que atuam na "[...] avaliação ativa e consequente regulação e orquestração desses processos em função dos objetivos e dados cognitivos sobre o que se quer [...]". (IBID., p.42).

A *autonomia* desenvolveu-se como resultado da interação e reflexão sobre a experiência vivenciada, tanto em seus aspectos cognitivos, quanto sociais, afetivos e metacognitivos, à medida que proporcionaram ao aluno o conhecimento sobre conceitos matemáticos e a respeito da própria atividade matemática, desenvolvendo neste a confiança na própria capacidade de investigar e descobrir caminhos e estratégias de resolução das situações propostas, bem como habilidades de argumentação e defesa de pontos de vista. Com isso, os alunos puderam ter melhores condições de administrar a própria aprendizagem, conforme ilustra a fala de um dos estudantes:

> *[...] essa nova didática de ensino de matemática permitiu a nós alunos uma maior autonomia dentro de sala, fazendo com que pudéssemos aprender a partir de nossas*

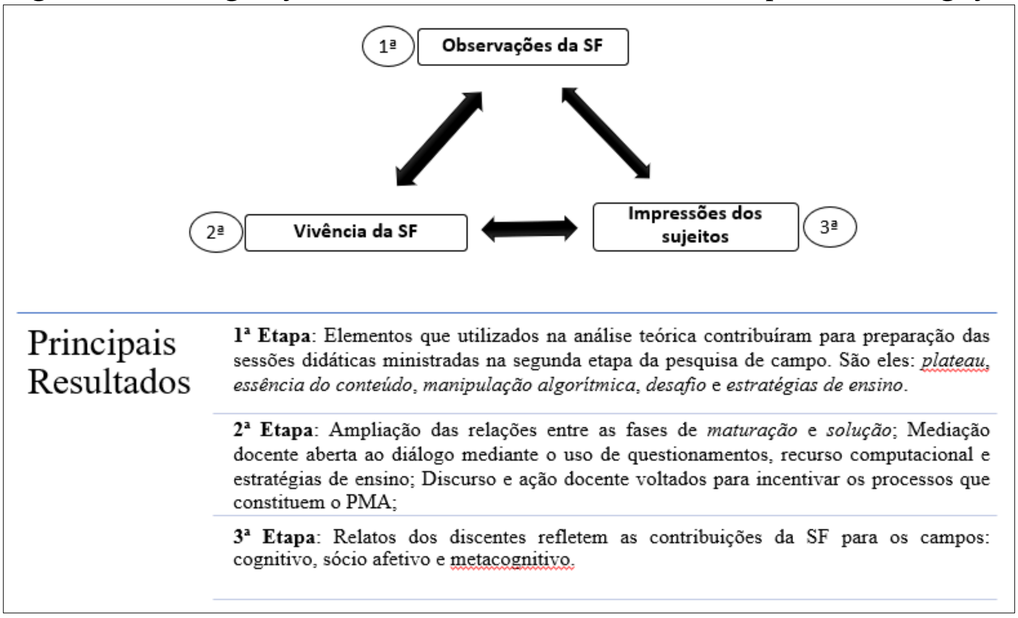
constatações e nos deu a liberdade de discutir sobre determinadas perguntas com nossos colegas.

Desse modo, ao verificar as impressões dos estudantes sobre a experiência vivenciada com a Sequência Fedathi no ensino da Álgebra Linear, deparamos categorias que nos auxiliaram a compreender o quanto essa metodologia interfere positivamente nos aspectos sociais, afetivos, cognitivos e metacognitivos, essenciais na aprendizagem e no desenvolvimento dos processos de Pensamento Matemático Avançado.

7.5 Discussão dos resultados

Nesta sessão, aprofundamos as análises dos resultados, de modo a evidenciar aspectos relevantes que esclareçam como a SF pôde contribuir para o desenvolvimento dos processos de Pensamento Matemático Avançado de alunos de licenciatura em Matemática em aulas de Álgebra Linear. Desse modo, analisamos o resultado de cada etapa, fazendo a triangulação dos resultados, conforme ilustra a figura 39.

Figura 39 - Triangulação dos resultados obtidos nas três etapas da investigação



Fonte: Pesquisa direta (2017).

Os resultados da primeira etapa ajudaram a entender como a Sequência Fedathi pode propiciar a construção conceitual em aulas de Álgebra Linear, fornecendo informações sobre a maneira como o conteúdo das aulas observadas foi explorado nas fases da SF. Com isso, obtivemos um padrão estrutural que auxiliou a compreender como as sessões didáticas de

Álgebra Linear poderiam ser preparadas, uma vez que surgiram elementos que auxiliaram na realização da análise teórica para a elaboração de sessões didáticas voltadas para a construção de conceitos, levando em consideração o raciocínio matemático subjacente a cada conteúdo.

Nos conteúdos da Álgebra Linear, isso foi importante, pois pela natureza de seus conceitos, não é possível introduzi-los por meio de problemas[25], uma vez que estes seriam fáceis ao ponto de serem resolvidos sem uso da Álgebra Linear, ou difíceis, ao ponto de os alunos ainda não possuírem conhecimentos suficientes para resolver. Desse modo, chegar a um modelo que auxiliasse na realização da *análise teórica* foi imprescindível para a preparação das aulas de Álgebra Linear ministradas no curso de Introdução à Álgebra Linear.

Ao realizarmos a análise teórica, precisamos considerar o raciocínio matemático subjacente aos conteúdos que seriam ministrados, para, então, projetá-lo nos desafios propostos aos estudantes. Para isso, foi pertinente questionar-nos: que características os alunos deverão observar no conteúdo para que possam começar a entende-lo? Que relações o aluno precisa estabelecer para compreender o conteúdo? Que processos de pensamento matemático o aluno deve mobilizar para compreender o conteúdo de maneira significativa? Que desafio propor para levar os alunos a estabelecer tais relações e evocar tais processos de pensamento? Estes questionamentos indicam que os processos constitutivos do PMA precisam ser considerados desde a preparação das sessões didáticas, pois, assim, o professor terá claro em seus objetivos quais processos os alunos devem ser motivados a vivenciar e o que fazer para incentivar sua manifestação.

Os elementos *essência do conteúdo* e *manipulação algorítmica* trouxeram implícitas as respostas a estes questionamentos, servindo como ponto de partida para delinear os objetivos da sessão didática e o desafio a ser proposto, exigindo, assim, de modo consciente, ações mentais, como observar, extrair, classificar, relacionar etc. A coordenação destas ações mentais, segundo Piaget, leva o aluno à construção do conhecimento. Para Dreyfus, estas ações configuram os processos que levarão à abstração do conteúdo e desenvolvimento do PMA. Assim, dependendo do desafio proposto, é possível estimar os principais processos que deverão ser mobilizados para que haja uma compreensão do conteúdo. Esta previsão, entretanto, por si, não será suficiente para a manifestação dos processos de PMA pelos estudantes.

Desse modo, cada sessão didática foi pensada buscando partir do que chamamos *essência do conteúdo*, uma vez que esta expressão foi bastante utilizada nas falas do professor doutor Hermínio Borges Neto, na primeira etapa da investigação, trazendo à tona seu papel e

---

[25] Afirmação constatada por Dorier et al. (2000, p. 98).

importância na organização e elaboração de aulas na perspectiva da Sequência Fedathi. Na essência do conteúdo, estavam os principais aspectos a serem explorados em sala de aula, cujo conhecimento docente, aliado à mediação didática, auxiliou na mobilização de processos mentais associados ao PMA.

Assim, pressupusemos a ideia de que, identificada a essência do conteúdo, esta seria a base para que o discente possa desenvolver um raciocínio coerente do qual decorressem processos mentais associados ao desenvolvimento do PMA. O quadro 28 ilustra a essência do conteúdo, extraída de cada assunto trabalhado nas sessões didáticas.

Quadro 28 - *Essência do conteúdo* trabalhada em cada sessão didática

Conteúdo	**Essência do conteúdo**	**Desafio dos estudantes**	**Estratégias de mediação didática**	**Processos mentais associados**
Espaço Vetorial	Adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar	Elaborar os axiomas de espaço vetorial	Uso de perguntas e diferentes exemplos de espaços vetoriais	Observar Extrair Comparar Identificar Descrever Manipular Visualizar Sintetizar Definir Conjecturar Generalizar Abstrair
Subespaço Vetorial	Propriedade de Fechamento referente às operações de soma e multiplicação por escalar	Identificar as propriedades dos subespaços	Uso de perguntas e diferentes representações de subespaços, em paralelo	
Combinação Linear	Adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar	Construir subespaços vetoriais.	Uso de perguntas, do software Geogebra e mudanças de representações	
Conjunto Gerador	Combinação linear	Verificar se um conjunto de vetores gera um subespaço vetorial, sem exposição prévia das regras para tal	Uso de perguntas e resolução de exercícios	
Base	Conjunto de vetores independente máximo ou geradores mínimos	Descrever o que acontece com o subespaço conforme se insere ou extrai vetores	Uso de perguntas, do software Geogebra, diferentes representações. numéricas, algébricas e geométricas	
Dimensão	Número de vetores na base	Perceber a relação entre a noção de dimensão e os vetores de uma base	Uso de perguntas, exemplos, exercícios e diferentes representações em paralelo	

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Saber identificar a essência dos conteúdos a serem trabalhados se tornou imprescindível para o planejamento das sessões didáticas, uma vez que esta guiou as escolhas referentes aos objetivos, desafios e recursos a serem utilizados nas sessões didáticas.

Na vivência da SF, houve em todas as fases o incentivo à mobilização dos processos que constituem o PMA por meio do discurso docente, recurso computacional e estratégias de ensino que colocaram os alunos em situações de desequilíbrio cognitivo. Para isso, a mediação do ensino se deu mediante questionamentos sobre o conteúdo, partindo, principalmente, de exemplos que remetiam aos processos de observação, comparação, descrição, argumentação e dedução.

Assim, em meio à troca de informações e ideias entre os participantes, cada um foi construindo seu *conceito imagem* do conteúdo discutido, cujos processos mentais os levaram às soluções, permeadas pela reflexão e descobertas que foram formalizadas na fase da *prova*, culminando no delineamento do *conceito definição*, havendo, assim, o estímulo à generalização e abstração do conteúdo estudado.

Isso ficou evidente na construção do conceito de espaço vetorial, cuja mediação docente partiu de conceitos simples e conhecidos dos estudantes (vetores), para então trazer variados exemplos de espaços vetoriais (sem tê-lo definido ou apresentado formalmente) com os quais os estudantes puderam observar sua estrutura (começar a construir o conceito imagem) e depois identificar os axiomas, para, só então, serem apresentados à definição formal (relacionando o conceito imagem ao conceito definição). Nesse percurso, se deram as passagens dos processos de observação, comparação, extração de características e síntese, até que os alunos pudessem ter informações suficientes para chegar à posterior generalização e abstração do novo conteúdo: espaço vetorial, havendo a transformação de seus esquemas de assimilação para dar conta deste novo conhecimento.

Nesse sentido, a postura docente teve contribuição imprescindível, pois, sempre aberta ao diálogo, mediou o ensino de modo que não houvesse aulas exclusivamente expositivas com vistas a proporcionar o aprendizado por via de repetição, mas sim a construção dos conceitos estudados, uma vez que ambos os segmentos – alunos e nós – estávamos em constante interação com o saber em jogo. Nesses diálogos, houve a participação ativa dos estudantes, para quem adotávamos a postura mão-no-bolso, deixando-os livres para chegar a alguma conclusão do que fora discutido, intervindo com questionamentos e explanações, conforme a necessidade. Somente após esse momento de troca de ideias, é que o conteúdo era formalizado matematicamente e nós continuávamos com a abordagem de novos conteúdos. A explanação do assunto era necessária ante a abstração envolvida nos conceitos trabalhados, sendo importante o nosso olhar atento no sentido de identificar quando o diálogo entre os alunos não estava sendo produtivo, pois isso poderia levá-los à dispersão.

Destacamos no quadro 29 as principais características da mediação docente como fator determinante para o estímulo ao desenvolvimento do PMA identificados na vivência da SF.

Quadro 29 – Síntese da ação docente e seus reflexos no pensamento matemático

Fase	**Ação docente**	**Implicações ao pensamento matemático discente**
Tomada de Posição	Discurso sobre o raciocínio matemático subjacente ao conteúdo	• Observação do próprio raciocínio; • Verificação de padrões ou características que estruturam o conteúdo; • Relaciona o que já sabe ao novo conteúdo, mantendo um encadeamento de ideias; • O aluno se sente à vontade para expor suas ideias, questionamentos e dúvidas; e • Observação e identificação das variáveis envolvidas.
	Uso/revisão do *plateau*	
	Interação professor-aluno	
	Uso de perguntas	
	Apresentação da situação desafiadora	
Maturação	Interação aluno-aluno	• O aluno ouve, compara, revê e avalia sua percepção e a dos colegas (fala interna e externa); • Foco nas propriedades de um conceito representado sob formas distintas; ampliação da visão do conteúdo e maior significação; • Tempo satisfatório para realizar os procedimentos (e processos de pensamento) necessários à realização da atividade; • O aluno é incentivado a observar, extrair, analisar, conjecturar, testar, validar, generalizar, abstrair etc.; e • O aluno é deixado livre para planejar e executar suas estratégias de resolução.
	Uso de perguntas	
	Manipulação de diferentes representações	
	Respeito ao tempo do aluno	
	Ênfase ao raciocínio matemático	
	Pedagogia mão-no-bolso	
Solução	Acompanha a exposição das soluções dos alunos	• Ao expor sua solução, revisa os procedimentos que utilizou; • O aluno troca ideia com os colegas e com o professor ao apresentar sua solução; e • O aluno é levado a perceber seu próprio erro, revendo seu raciocínio ou estratégia de resolução.
	Uso de perguntas	
	Permite a interação aluno-aluno e professor-aluno	
	Valorização/mediação do erro	
Prova	Formalização do conteúdo	• Conceito imagem passa a se aproximar do conceito definição (todo ou em parte, dependendo da compreensão do aluno); e • O aluno é levado a generalizar ou abstrair os conceitos estudados.
	Generalização de modelos	
	Uso de perguntas	

Fonte: Pesquisa direta (2017).

Pelo quadro 29, na *tomada de posição,* as ações do professor foram voltadas inicialmente para a revisão do *plateau,* criando um contexto no qual os estudantes poderiam relacionar conhecimentos prévios ao assunto a ser tratado e, ao mesmo tempo, fazendo o diagnostico do nível de conhecimento da turma, mantendo um encadeamento das ideias trabalhadas. Além disso, o discurso docente buscou enfatizar o raciocínio matemático e processos mentais subjacentes ao conteúdo, atuando de modo a favorecer a interação professor-aluno para, em seguida, apresentar a situação cognitivamente desafiadora. Como implicações dessas ações ao pensamento matemático dos alunos, observamos que ele passaram a observar o próprio raciocínio, verificando padrões ou mesmo a estrutura subjacente ao conteúdo, se sentindo mais confortáveis para expor seus raciocínios e ideias. Os diálogos descritos no tópico 7.2 ilustram esse resultado.

Na *maturação*, os diálogos foram marcados pela interação ativa dos alunos conosco. Por meio de questionamentos, os remetíamos a observar, extrair características, comparar, relacionar aspectos dos conceitos estudados etc., fazendo com que empregassem constantemente processos mentais que poderiam levá-los a outros mais complexos, tais como a generalização e a abstração.

Além disso, nessa fase, os alunos vivenciaram atividade mental significativa, à medida que, além de expor seus raciocínios, também escutavam os argumentos dos colegas, avaliavam as respostas, comparavam com as suas, percebendo o conteúdo sob outros pontos de vista. Não temos como mensurar a qualidade de tais processos, mas, certamente, isso facilitou o acompanhamento do assunto, fazendo com que fossem, aos poucos, criando os *conceitos imagem* dos conteúdos discutidos. Em suas impressões, uma estudante relatou:

> *[...] A gente fica tentando, então, um diz uma palavra, outro diz outra coisa. Um diz uma coisa errada, outro diz outra coisa errada, mas isso vai estimulando que a gente vá pensando, se lembrando e acabe descobrindo aquilo que você está perguntando.*

Este relato evidencia que, de fato, eles iam aos poucos construindo uma imagem mental do conceito estudado, sobretudo pela troca de ideias e informações sobre o tema em que um contribuía com o raciocínio do outro. Essa imagem mental ia sendo construída mediante a interação de processos de pensamento que eram mobilizados no desenrolar das discussões.

Além disso, ao analisarmos especificamente a maneira como os conteúdos foram representados, temos que, de fato, houve um cuidado em trabalhar com as distintas representações de um conceito, possibilitando a ampliar a visão do aluno sobre o tema. Houve passagem do quadro algébrico para o gráfico e vice-versa, tanto na explicação do conteúdo, quanto na manipulação direta pelo próprio aluno, tendo este último efeito mais significativo.

Manipular vetores usando o Geogebra, no plano e no espaço, proporcionou ferramentas para que os alunos pudessem rever seus conceitos e estabelecer relações mais significativas entre as representações e suas propriedades. Vejamos algumas falas extraídas do grupo focal:

> *[...] você vê como é que está sendo aplicado aquilo. E desenhar no caderno é muito difícil. [...] Eu fiquei sempre imaginando, lembrando como foi feito no computador. [...] A gente viu no Geogebra como funcionam as combinações lineares, mas na prática aprende apenas a calcular sistemas... [...] Acho que é fundamental o geogebra no inicio do curso, pois a partir disso você vê o que forma... Então, dá pra imaginar estudando as definições, outras imagens na cabeça da gente, do que a gente está fazendo. Por causa que a gente faz coisa que não sabe nem o que que está fazendo.*

Por via desses relatos, observamos que foi uma experiência enriquecedora em termos de apreensão de significados, tanto que, posteriormente, ao resolver outras atividades, ficavam lembrando como era a visualização dos conceitos manipulados via *software*.

Observamos, também, que, muitas vezes, as fases da *maturação* e *solução* aconteceram quase simultaneamente, durante a discussão do assunto proposto, o que nos leva a concluir que ambas, nem sempre, irão se dar, exclusivamente, no debruçamento físico e mental do aluno para resolver as questões propostas, no qual o professor adota, literalmente, a postura mão-no-bolso. Ambas, também, podem acontecer em meio a discussões acaloradas, permeadas de reflexões que acontecem na ação, quando os estudantes se questionam, expressam conhecimento, opiniões e ideias, quando desafiados pelo professor. Além disso, ao expor sua solução, o aluno revisa os procedimentos que utilizou e conhece distintos caminhos para chegar à solução.

Na *prova,* destacaram-se a formalização do conteúdo e a generalização de modelos, implicando a construção do *conceito definição* do aluno, sendo, portanto, momento favorável para chegar à síntese, generalização e abstração. Quanto melhor o aluno tiver formado o *conceito imagem*, melhor irá relacioná-lo ao *conceito definição*, daí a importância de se abordar conceitos abstratos com suporte em exemplos e ir construindo o conceito mediante a observação de suas características. Do contrário, se apresentarmos as definições de imediato, a formação do conceito imagem pode ser prejudicada, tornando-se fragmentada e superficial.

Segundo os alunos, no ensino tradicional,

> *R2. [...] a gente aprende na disciplina pra verificar que é LI, LD e tudo mais, só que aqui a gente consegue ter uma visão diferente. Por que é LI? Por que é LD?*
> *R2. Lá passa só a definição. Não tem como imaginar, sem ver... por exemplo, no Geogebra... a gente vê muita definição e não sabe formalizar aquilo, pois é ruim de imaginar. Mas, através do Geogebra que você passou, ficou melhor para imaginar realmente como é que forma as coisas...*

Pelas falas, percebemos que os estudantes sentem a necessidade de um ensino que trabalhe o conteúdo, utilizando recursos que proporcionem outros pontos de vista, além das manipulações algorítmicas, instigando a imaginação e a descoberta dos porquês matemáticos implícitos às regras e definições.

Na terceira etapa da pesquisa, as falas dos discentes revelaram que, na prática, a mediação do ensino proporcionada pela SF lhes permitiu melhor compreender os conteúdos, uma vez que possibilitou “visualizar, imaginar, interagir, descobrir e refletir”, antes de serem expressas as definições formais.

Suas falas corroboraram os resultados e constatações inferidas do curso de AL, principalmente quanto ao que se esperava do uso do Geogebra, da mediação dialogada e do processo de trazer as definições somente na fase da prova. Para eles, isso foi um diferencial significativo, sobretudo pela facilitação do entendimento dos conceitos estudados. Além disso, obtivemos ideias-centrais que sinalizaram o desenvolvimento de atitudes e/ou habilidades que vão além dos aspectos cognitivos da aprendizagem, incluindo a socialização, a afetividade e a metacognição.

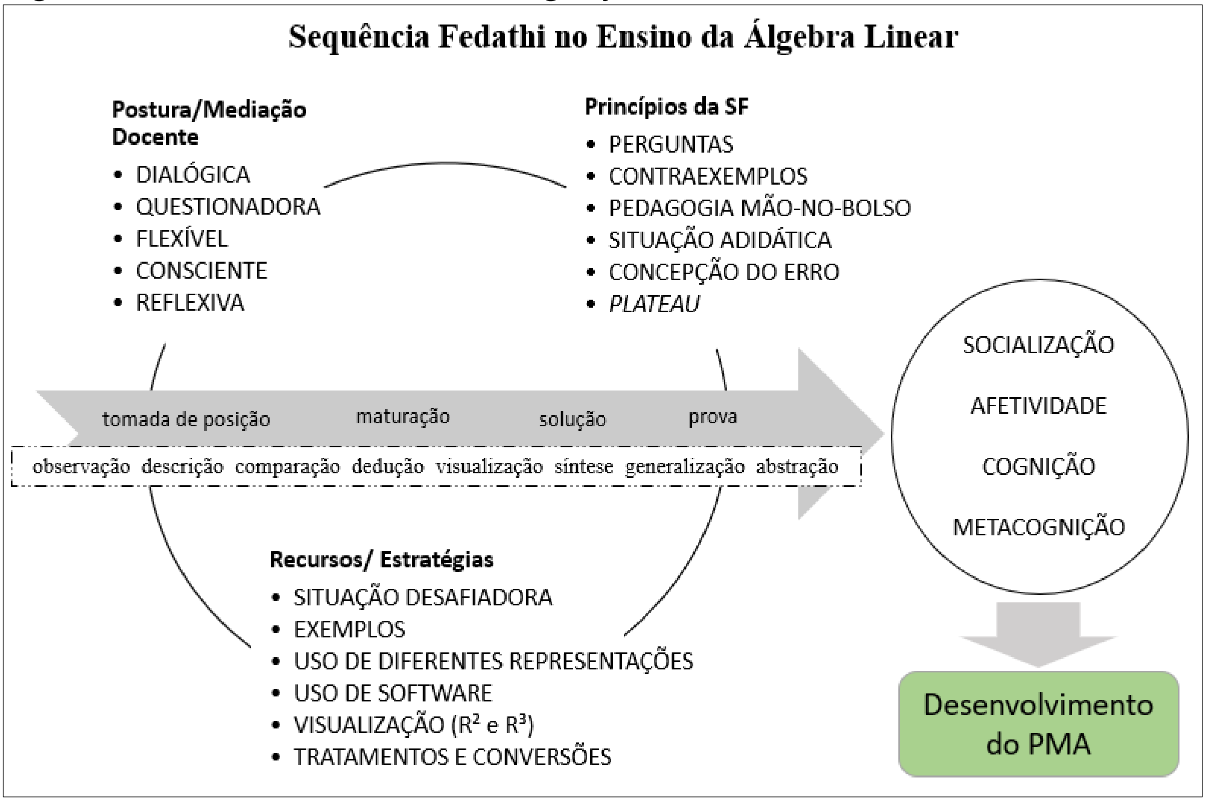
O desenvolvimento cognitivo se deu mediante a construção dos conceitos estudados num ambiente investigativo que remeteu os alunos a pensarem ativamente, elaborando seu raciocínio com base nos conhecimentos e dados de que dispunham, construindo um conceito imagem que só após maturado ia sendo formalizado matematicamente.

O desenvolvimento social e afetivo aconteceu em virtude da mediação voltada para a interação e o diálogo desencadeado por questionamentos, planejados para fomentar a reflexão e discussão de ideias sobre os conteúdos, que criou um ambiente de ensino permeado de relações de confiança mútua entre os participantes, contribuindo para que os estudantes fossem se adaptando ao contrato didático implícito à Sequência Fedathi.

O desenvolvimento metacognitivo se tornou evidente quando a mediação docente visava a incentivar o raciocínio matemático do ponto de vista do conhecimento matemático, ou seja, da observação das estruturas e padrões, dos procedimentos da atividade matemática, levando o aluno a pensar sobre a própria atividade matemática, a maneira como observa os conteúdos fazendo refletir de modo consciente sobre processos de pensamento.

Pelo exposto, fazendo a triangulação dos resultados obtidos nas três etapas da investigação, por meio das distintas fontes de evidência, respondemos à pergunta principal do estudo, sintetizando a resposta na figura 40, que traz informações sobre como a mediação docente influenciou o desenvolvimento do PMA.

Figura 40 - Síntese dos resultados da triangulação dos dados



Fonte: Pesquisa direta (2017).

Pela figura 40, vemos que a postura docente seguindo os princípios da Sequência Fedathi se mostrou: dialógica, no sentido de escutar os estudantes, estejam suas ideias corretas ou não; questionadora, com vistas a mediar o ensino, fazendo uso de questionamentos; flexível, porquanto se adapte à realidade e necessidades da turma; consciente, do papel como educador que está a formar futuros professores; e reflexiva, que repensa a própria prática, buscando aperfeiçoamento constante.

Além disso, constatamos que, nas sessões didáticas baseadas na Sequência Fedathi houve ênfase em: fatores cognitivos, sociais, afetivos e metacognitivos, que influenciaram a aprendizagem operando em conjunto, à medida que a mediação docente não apenas seguiu as fases da SF, mas também pôs em prática princípios pedagógicos determinantes na criação de um ambiente didático favorável a construção do conhecimento, tais como: a postura mão-no-bolso, a concepção do erro e o uso de perguntas e contraexemplos.

Com estas características, a Sequência Fedathi se opõe ao ensino propiciado pelas metodologias tradicionais/tecnicistas, que, centralizadas nos aspectos cognitivos, deixam em segundo plano a interação, que desenvolve a socialização e a afetividade, bem como a metacognição tendente a ficar sob encargo do aluno, uma vez que os conteúdos são apresentados em sua forma final. Essa dissociação da dimensão afetiva em aulas de matemática do Ensino Superior tende a limitar ou mesmo coibir o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, uma vez que as emoções interferem diretamente na aprendizagem da Matemática, sendo determinantes no que se refere a predisposição do aprendiz a buscar novos conhecimentos.

Desse modo, descrevemos a maneira como a Sequência Fedathi pode contribuir para o desenvolvimento de processos de Pensamento Matemático Avançado, buscando compreender como e por que essa metodologia pôde cumprir esse papel neste estudo de caso. Ao emergirem os aspectos sociais, afetivos, cognitivos e metacognitivos, abrimos espaço para novas reflexões, sugerindo outros estudos que esclareçam melhor as relações destes com a SF.

Não trazemos uma receita de como ensinar Álgebra Linear, mas mostramos algumas possibilidades metodológicas em face de uma problemática que situa o ensino tradicional como um modelo a ser superado, quando se busca a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem dessa disciplina. No capítulo que segue, trazemos as considerações finais.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, não tivemos como objetivo “medir” o pensamento matemático dos sujeitos, mas analisar a prática docente, buscando evidenciar a maneira como a mediação do ensino baseado na SF pode favorecer o desenvolvimento do PMA de alunos em sala de aula. Fazendo uma análise geral dos resultados, observamos que os processos constitutivos do PMA foram manifestados nos três níveis da Sequência Fedathi: preparação, vivência e análise – tendo a mediação docente papel determinante e significativo.

Os resultados da primeira etapa da investigação mostraram evidências do incentivo ao pensamento matemático, partindo da mediação do professor, sobretudo no nível do discurso, que buscava instigar o raciocínio da turma mediante a participação ativa dos estudantes. Nas aulas de Álgebra Linear observadas, na qualidade de docente, nos preocupamos, desde o início, com a ênfase na observação da estrutura matemática subjacente aos conteúdos trabalhados e no raciocínio matemático voltado para a generalização e abstração.

Além disso, subjacentes à mediação e às falas do professor, identificamos a estrutura organizacional dos conteúdos, que forneceu informações sobre como a SF pode propiciar a construção conceitual. Com este resultado, pudemos pensar no planejamento de aulas dirigidas à construção de conceitos, chegando ao delineamento de categorias, que foram inseridas na análise teórica da SF e utilizadas para preparação das sessões didáticas ministradas no curso de Álgebra Linear (extensão), realizado na segunda etapa da pesquisa de campo.

No caso específico da Álgebra Linear, o preparo da aula nessa perspectiva supre a impossibilidade de introduzir seus conceitos abstratos por meio de “bons” problemas, sendo este, um caminho viável para contornar essa dificuldade e prosseguir o ensino com foco na construção conceitual. Assim, estes resultados atenderam ao primeiro objetivo específico, que visava a compreender como a SF pode auxiliar o professor a promover o ensino da Matemática como uma construção.

Após etapa de observação da SF nas aulas de Álgebra Linear, ao planejar as sessões didáticas do curso de extensão, identificamos o fato de que a manifestação dos processos de PMA pelos estudantes pode ser potencializada, com auxílio da mediação docente quando, na *análise teórica,* o professor refletir sobre como estimular o raciocínio matemático dos discentes, levando em consideração o *plateau*, a *essência do conteúdo*, as *manipulações algorítmicas* e o *desafio* a ser proposto.

Olhando especificamente para o *plateau*, verificamos que este forneceu a base necessária para que o ensino acontecesse em sala de aula num contexto favorável à conexão entre saberes antigos e novos. Seu diagnóstico é imprescindível à compreensão e construção dos conceitos estudados, uma vez que, ao levar o aluno a se lembrar de conteúdos já estudados, relacionando-os ao novo saber, o professor favorece a ocorrência dos processos de PMA, pois as imagens mentais e procedimentos realizados partem de conhecimento prévio que ajudarão na reorganização do saber antigo que se ampliará no contexto do novo saber.

Além disso, também destacamos o fato de que as fases de maturação e solução podem acontecer durante a explanação dos conteúdos, nos diálogos estabelecidos entre alunos e professor, de modo que a fase de *maturação* da Sequência Fedathi, neste estudo, não se limitou ao debruçamento do aluno para resolver um problema proposto, mas também se deu na reflexão, nas ações mentais direcionadas à compreensão do assunto discutido, cuja busca pelas respostas às questões expressas retirou o aluno da passividade e zona de conforto, chegando na fase da solução quase em paralelo com a maturação, à medida que nos diálogos havia a troca de ideias.

Consideramos que esta constatação, juntamente com os elementos identificados como constituintes da *análise teórica*, sejam uma contribuição deste trabalho para o aperfeiçoamento e ampliação da Sequência Fedathi, no sentido de que, posteriormente, estes possam ser aprofundados e discutidos, visando a melhor compreender a dinâmica de suas fases em variados contextos.

Ao analisarmos a mediação docente, notamos o quanto esta foi determinante para que a abordagem dos conteúdos fluísse em meio a diálogos, sem a centralização das falas na nossa figura como professora/pesquisadora. De um lado, nos preocupamos em conduzir o foco da conversa para aspectos importantes do conteúdo, e, de outro, em deixar os alunos à vontade para explicitar seus raciocínios. Mesmo nas aulas de exercícios algorítmicos não nos limitamos a apenas explicar os passos para resolução, mas possibilitamos que houvesse uma reflexão sobre os significados envolvidos nos procedimentos realizados, de modo que eles próprios chegavam no “como fazer”.

A mediação docente seguiu os princípios da Sequência Fedathi, dos quais destacamos: a postura mão-no-bolso, a valorização do erro, o uso de perguntas e contraexemplos, sendo o tempo todo dialógica, buscando estimular o raciocínio matemático do aluno, conforme os conduzíamos a pensar sobre os processos de PMA envolvidos nas situações trabalhadas.

Este fato foi importante, pois, por exemplo, a visualização, nem sempre, se dá de maneira espontânea e imediata pelos estudantes. Ao desenhar um gráfico na lousa ou no Geogebra, o aluno precisa fazer relações, que, dependendo da situação, não irá de imediato perceber o que deve observar ou quais relações estabelecer. É preciso que o professor esteja atento a como mediar essa “visualização”, pois não convém simplesmente apontar “onde está o que deve ser visto”, mas fazê-lo rever as propriedades estudadas ou descrever o que acontece ao se realizar determinadas ações sobre os objetos matemáticos e, dessas observações, fazer deduções, levantar hipóteses e verificá-las.

O mesmo acontece com os processos de generalização e abstração. Não é suficiente que o professor diga o que será generalizado, mas sim que crie situações em que os alunos possam vislumbrar essa generalização como consequência da reflexão acerca dos resultados de suas ações sobre os conteúdos, seja resolvendo exercícios ou discutindo aspectos conceituais assentados em exemplos. As discussões e reflexões, no entanto, só foram possíveis por causa do uso de perguntas, que estimularam o pensar, a curiosidade e a busca pelos porquês implícitos nos conteúdos, auxiliando, também, na mediação dos processos de Pensamento Matemático Avançado.

Assim, constatamos que a mediação pode ser direcionada a fazer uso das perguntas para levar o aluno a perceber os processos envolvidos e refletir sobre os procedimentos adotados numa ação mental que remete à metacognição (no sentido atribuído por Flavell). Se o aluno adquire o hábito de pensar nesses processos, conscientemente, terá melhores condições de desenvolver a autonomia, o pensamento matemático. O professor desempenha papel essencial neste processo, pois o estimulo ao raciocínio deve ser intencional, previsto desde a preparação da sessão didática.

Além disso, a mediação como diálogos possibilitou a interação dos participantes, de modo a ensejar relações de confiança do aluno para conosco - professora/pesquisadora - criando a realidade propícia para os alunos exporem seus raciocínios de modo espontâneo, rompendo o medo e/ou receio de serem avaliados pelos colegas. A qualidade dos diálogos foi reflexo da mediação docente disposta a escutar os estudantes sem o interesse prévio do julgamento ou avaliação de suas capacidades cognitivas, mas com o proveito de facilitar o acesso a aprendizagem mediante a reflexão e a troca de conhecimento.

O ambiente de confiança entre os participantes foi a base para motivação dos processos de PMA, constantemente estimulados, uma vez que os alunos ficaram a refletir ativamente sobre o assunto, de modo que chegavam aos conceitos desejados pelo próprio esforço e raciocínio, alimentando com isso a autoestima, curiosidade e desejo de aprender mais. Aliada a essa interação, a pedagogia mão-no-bolso, também, contribuiu para criar um ambiente de ensino propicio à atividade investigativa e ao desenvolvimento da independência e autonomia do aluno.

Olhando especificamente para os processos de representação, que, segundo Dreyfus, levam a generalização e abstração, sendo necessária a exploração de distintas representações associadas a um mesmo conceito, observamos nas aulas que, desde o início do curso, foram explorados os registros figurais (representações geométrica e gráfica), simbólicos (n-uplas, numérico, algébrico, combinações lineares) e registro em língua natural (definições de vetor, espaço vetorial, combinação linear), de modo a haver, tanto na explicação na lousa quanto nas atividades realizadas, tratamentos e conversões de registros.

Para isso, o uso do *software* Geogebra foi essencial, pois possibilitou que os alunos manipulassem os vetores, sendo possível explorar a visualização de conceitos abstratos, como os de espaço, subespaço, geradores, base e dimensão, manipulados na forma numérica, n-upla, algébrica e gráfica, propiciando ao aluno a oportunidade de construir imagens mentais destes conceitos, aperfeiçoando o pensamento visuoespacial que trabalha processos mentais como abstração reflexiva, descoberta de relações, transformações mentais, verificação, comparação, intuição, generalização, reconstrução mental da visão de um objeto, planificações mentais, previsão mental e transferência. Tais processos ajudam o aluno a ampliar seu conceito imagem, recorrendo a eles quando necessitar relembrá-los.

Estes resultados ilustram que o segundo objetivo da pesquisa foi atendido, pois identificamos relações entre a mediação do ensino na Sequência Fedathi e os processos que constituem o PMA, instigados no discurso, nos diálogos e nas atividades, sobretudo por proporcionar ao aluno participação ativa e reflexiva, acompanhadas pela nossa mediação como professora.

Sobre a experiencia dos estudantes com a Sequência Fedathi, identificamos o fato de que sentiram o ambiente de ensino favorável à ação reflexiva e à investigação, despertando neles a vontade de continuar aprendendo sobre o conteúdo. Pelas falas, observamos que vivenciaram as aulas de maneira positiva, cuja ruptura do contato didático aconteceu sem que mencionassem sensações de enfado, rotina, resistência ou qualquer outro fator que minasse a predisposição para refletir ativamente sobre o conteúdo.

As falas forneceram ideias que classificamos nas categorias socialização, afetividade, cognição e metacognição – uma vez que estas resguardam os principais reflexos do ensino da Álgebra Linear propiciado pela Sequência Fedathi, e que trazem consequências favoráveis ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em sala de aula. Com isso, atendemos ao terceiro objetivo específico, que visou a conhecer as impressões dos discentes sobre a Sequência Fedathi, extraindo informações sobre suas relações com o PMA.

Pelos resultados, observamos o quanto a Sequência Fedathi pode contribuir não apenas para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, mas também para o desenvolvimento social, as relações afetivas e metacognitivas, que contribuem significativamente para a predisposição do aluno em adquirir conhecimentos e pôr em prática o raciocínio investigativo.

Desse modo, é pertinente que as dimensões sociais, afetivas e metacognitivas sejam estudadas de maneira mais aprofundada, com o fito de esclarecer suas relações com a Sequência Fedathi, uma vez que nesta investigação emergiram como consequência da mediação do ensino. Será possível otimizar as relações socioafetivas no sentido de trabalhar a autoestima e o gosto pela matemática no Ensino Superior? E a metacognição em que medida está na SF? Indagações como estas impulsionam novas reflexões que esperamos poder elucidar futuramente, ampliando as investigações sobre estes temas.

Além disso, não podemos deixar de mencionar o fato de que talvez o leitor se questione se este estudo, que contou com sete sujeitos, pode ser replicado numa sala de aula regular com 30 ou 40 estudantes. Consideramos que sim! Isto porque, embora seja uma realidade diferente e o professor tenha outras variáveis para se preocupar, não tratamos aqui de uma “receita”, pois o docente tem a flexibilidade de adaptar-se à turma, considerando suas particularidades. Um número maior de alunos também pode ser mediado dialogicamente, por meio de perguntas e dando-se tempo para maturação das soluções.

Para facilitar a comunicação em salas de aula numerosas, sugerimos o trabalho em equipe, em que os alunos troquem ideias em pequenos grupos. No caso da Álgebra Linear, equipes utilizando o Geogebra no computador, aparelho celular ou *tablet* para discutir conceitos e propriedades; ou, ainda, explorar nas equipes a demonstração de um teorema. Exploramos no curso de extensão a construção de conceitos, mas poderíamos ter incluído a construção de teoremas. Esta pode ter sido uma limitação do estudo, que sugerimos também como tema de pesquisas futuras.

Desse modo, neste trabalho, a Sequência Fedathi foi discutida não apenas do ponto de vista de suas fases, mas verificamos características que conduzem a ação do professor a agir de maneira que possa favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, à medida que possibilita ação e reflexão em sala de aula mediada com base em princípios didáticos que o tornam um professor questionador, dialógico, reflexivo.

Portanto, em razão dos resultados, estes princípios didáticos, aliados às concepções de ensino e aprendizagem do professor, constituem o primeiro passo para a promoção do desenvolvimento do PMA em sala de aula, uma vez que estes orientam a ação docente. O segundo passo está na compreensão e domínio dos significados e implicações de cada fase da

Sequência Fedathi para a aprendizagem do aluno, pois estas o conduzirão a agir e mediar o ensino com foco nos processos de aprendizagem, e não somente na verificação das respostas corretas e formalização do conteúdo.

O professor precisa ter consciência da importância de sua mediação, pois ela pode favorecer, ou não, os processos de pensamento matemático que, dependendo da maneira como forem mediados, tenderão a evoluir para nível "avançado" conforme o estudante vivenciar a experiência de agir como um matemático em sala de aula, sob o acompanhamento do professor, cujo domínio da Matemática auxiliará a enxergar as relações necessárias, sem que precise, para isso, apenas mostrar a resposta ou o caminho, sem dar chances ao aluno de pensar por si mesmo e vislumbrar os significados.

Numa aula convencional, o aluno exercitará seu pensamento e raciocínio, porém, estará sob as limitações de um ensino que se satisfaz com a exposição do conteúdo, obedecendo a sequência definição-teorema-exercício-aplicação, que, conforme destacado na problemática e referencial teórico, pouco contribui para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado dos estudantes.

Portanto, esperamos que esta pesquisa possa contribuir para que docentes de Matemática superior, sobretudo das licenciaturas, reflitam sobre sua prática e a respeito de como favorecer o desenvolvimento do PMA em sala de aula; e, além disso, reflitam também sobre os reflexos de sua prática na formação de estudantes, futuros professores de Matemática, que precisam de um ensino que valorize o desenvolvimento do raciocínio matemático.

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle. SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

ALVES, Francisco Régis Vieira. **Aplicação da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do cálculo a variáveis**. Tese de doutorado em Educação. Universidade Federal do Ceará – UFC, 2011.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BARDIN, Lawrence. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, [2004?].

BARROSO, Natália Maria Cordeiro. **Um modelo de ensino dos conceitos de cálculo para os cursos de engenharia fundamentado em uma epistemologia histórica e baseado na metodologia da engenharia didática:** validação por meio do conceito de integral. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

BEZERRA, Antonio Marcelo Araújo. O *plateau* como elemento de reflexão e melhoria das práticas escolares. *In:* BORGES NETO, H. (Org.). **Sequência Fedathi**: fundamentos. Curitiba: Editora CRV, 2018.

BEZERRA, Cristina Alves. **Proposta de abordagem para as técnicas de integração usando o *software* Geogebra**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

BECKER, Fernando. **A epistemologia do professor de Matemática**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BERTOLAZI, Kátia Socorro. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares**. 2012. 227 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000171495>. Acesso em: 13 jan. 2016.

BITTENCOURT, Jane. A epistemologia genética e o ensino de matemática. **Zetetikê**, Campinas, v. 4, n. 6, pp.75-85, jul. 1996.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BOLDRINI, José Luiz. *et al*. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo, SP: Harper & Row do Brasil, 1980.

BORGES NETO, Hermínio. **Uma proposta lógico-dedutiva-construtiva para o ensino de Matemática**. Fortaleza, 2016.

BORGES NETO, Hermínio. (Org.) **Sequência Fedathi no ensino de Matemática**. Curitiba: CRV, 2017.

________________________ . **Sequência Fedathi**: fundamentos. Curitiba: CRV, 2018.

DOMINGOS, António Manuel Dias. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados:** a Matemática no início do superior. 2003. 407 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Ciências de Educação, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003. Disponível em: <http://run.unl.pt/bitstream/10362/78/1/domingos_2003.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2016.

DORIER, Jean-Luc. et al. **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, Jean-Luc. **Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University**. EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION I:GROUP 1. 1999. pp. 103-112. Disponível em:< http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf> Acesso em: 12 mar. 2012.

_________________ Recherche en Histoire et em Didactique des Mathématiques sur l'Algebre Linéaire – perspequitives théorique sur leurs interations. **Les Cahiers Du Laboratoire Leibniz**. Nº 12. Grenoble, France. 2008. Disponível em: <http://www-leibniz.imag.rf/LesCahiers> Acesso em: 10 Mar. 2012.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.**New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002. pp. 25-41.

DUBINSKY, Ed; MCDONALD, Michael A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research. In D. Holton et. (Eds.), **The teaching and Learning of Mathematics at University Level**: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, 2001. pp. 273-280.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *In*: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p. (Coleção Contextos da Ciência).

FIGUEIREDO, Luiz Manoel. **Álgebra Linear I**. v.1. 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. **A Sequência Fedathi no ensino da Álgebra Linear:** o caso da noção de base de um espaço vetorial. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/7521/1/2013-DIS-FCFFONTENELE.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2014.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 63. ed. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra, 2017.

GERETI, Laís Cristina Viel. **Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de Questões do ENADE.** 2014. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000188998>. Acesso em: 12 jan. 2016.

HAREL, Guershon. TALL, David. The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. **For the learning of mathematics**. 1991. v. 11, n. 1, pp. 38-42.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Sousa. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT)

HERLINA, Elda. Advanced Mathematical Thinking and the Way to Enhance IT. **Journal Of Education And Practice,** v. 6, n. 5, pp.79-88, 2015. Disponível em: <http://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/20026/20383>. Acesso em: 08 jan. 2016.

JOOGANAH, Kamilah; WILLIAMS, Julian. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Socio-cultural and Cognitive perspectives. In: **Proceedings of the British Congress for Mathematics Education (BCME).** 2010. v. 30, pp. 113 - 120. Disponível em: <http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-15.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2016.

KAMII, Constance. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas: Papirus, 2012.

KARRER, Monica**. Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/monica_karrer.pdf> Acesso em: 06 Ago. 2012.

LAY, David C. **Álgebra Linear e suas aplicações.** Rio de Janeiro, RJ: LTC.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Algebra linear.** 8.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

MACEDO, Marcos Antonio de. **Manifestação geométrica das formas indeterminadas de funções**: situações didáticas apoiadas na tecnologia. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

MARINS, Alessandra Senes. **Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo transformações lineares.**2014. 170 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade

Estadual de Londrina, Londrina, 2014. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000190115>. Acesso em: 02 nov. 2015.

MATA-PEREIRA, Joana. PONTE, João Pedro da. Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações. **Boletim GEPEM**. 2013. n.62, pp. 17-31.

MOREIRA, Marília Maia. **Análise da visão do professor-tutor sobre a adequabilidade do material didático de matemática à luz da Sequência Fedathi:** o caso da licenciatura em Matemática do IFCE. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

MELO, Virlane Nogueira. A concepção do erro. *In:* BORGES NETO, H. (Org.). **Sequência Fedathi**: fundamentos. Curitiba: Editora CRV, 2018.

NASSERALA, Alessandro Mendonça. **Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na Sequência Fedathi:** o caso da integral imprópria. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

NISS, Mogens. Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. **Educational Studies In Mathematics,** [s.l.], v. 40, n. 1, pp.1-24, 1999.

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

___________. **Biologia e conhecimento:** ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos. Petrópolis: Vozes, 1973.

PINHEIRO, Ana Cláudia Mendonça. **Concepção e desenvolvimento de uma formação continuada de professores de Matemática baseada na Sequência Fedathi**. 2016. 135f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Fortaleza, 2016.

PONTE, João Pedro da. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, 25, pp.105-132, 2006.

PÓLYA, George. Dez mandamentos para professores. **Revista do Professor de Matemática**, nº. 10, 1987, pp. 1-10.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2011.

PRADO, Sônia de Cássia Santos. **O uso da calculadora e o Pensamento Matemático Avançado:** uma análise a partir das situações de aprendizagem nos Cadernos do Professor de Matemática da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. 2012. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=15256>. Acesso em: 29 jul. 2015.

ROGALSKI, Marc. Un enseignement de l'algebre lineaire en DEUG A primiere annee. **Cahiers de DIDIREM - Didactique des Mathematiques**, Universite Paris VII. 1991.

ROGALSKI, Marc. L'enseignement de l'algebre lineaire en primiere annee de DEUG A. **Gazette des Mathématiciens**, nº 60, avril 1994.

ROSA, Cleci Teresinha Werner da. **A metacognição e as atividades experimentais no ensino de Física.** 2011. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/95261/290643.pdf?sequence=1> Acesso em: 20 jun. 2018.

SANTANA, Ana Carmen de Souza. Mão no bolso: postura, metodologia ou pedagogia? *In:* BORGES NETO, H. (Org.). **Sequência Fedathi**: fundamentos. Curitiba: Editora CRV, 2018.

SANTANA, José Rogério. **Educação matemática**: favorecendo investigações matemáticas através do computador. 2006. 412f. Tese (Doutorado) em Educação Brasileira. Universidade Federal do Ceará, 2006.

SANTOS, Maria José Costa dos. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas**: desafio para a formação inicial. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

SOARES, Raianny Lima. Sessão Didática. *In:* BORGES NETO, H. (Org.). **Sequência Fedathi**: fundamentos. Curitiba: Editora CRV, 2018.

SOUSA, Francisco Edisom Eugênio de. **Formação contínua e mediação pedagógica no ensino de Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.

_____________ **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de Matemática por meio da Sequência Fedathi.** 2015. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

SOUSA, Francisco Edisom Eugênio de. *et al*. (Org.). **Sequência Fedathi**: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

SOUZA, Maria José Araújo. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediada por tecnologias digitais.** 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

______________. Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. *In*: SOUSA, F. E. E. *et al*. (Org.). **Sequência Fedathi**: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações.** São Paulo, SP: Cengage Learning, 2009.

TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002. 310 p.

TALL, David. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: **Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, 1995, Recife, 1995. v. 1, pp. 161 - 175.

TALL, David. Concept image and concept definition. In: **Senior Secondary Mathematics Education**, Utrecht, 1988.

TRIGUEROS, María. OKTAÇ, Asuman. La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire**. Annales de didactique et de sciences cognitives.** vol. 10, 2005, pp. 157 - 176.

YIN, Robert K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WADSWORTH, Barry J. **Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget**. 4. ed. São Paulo: Pioneira, 1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - PPGE
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

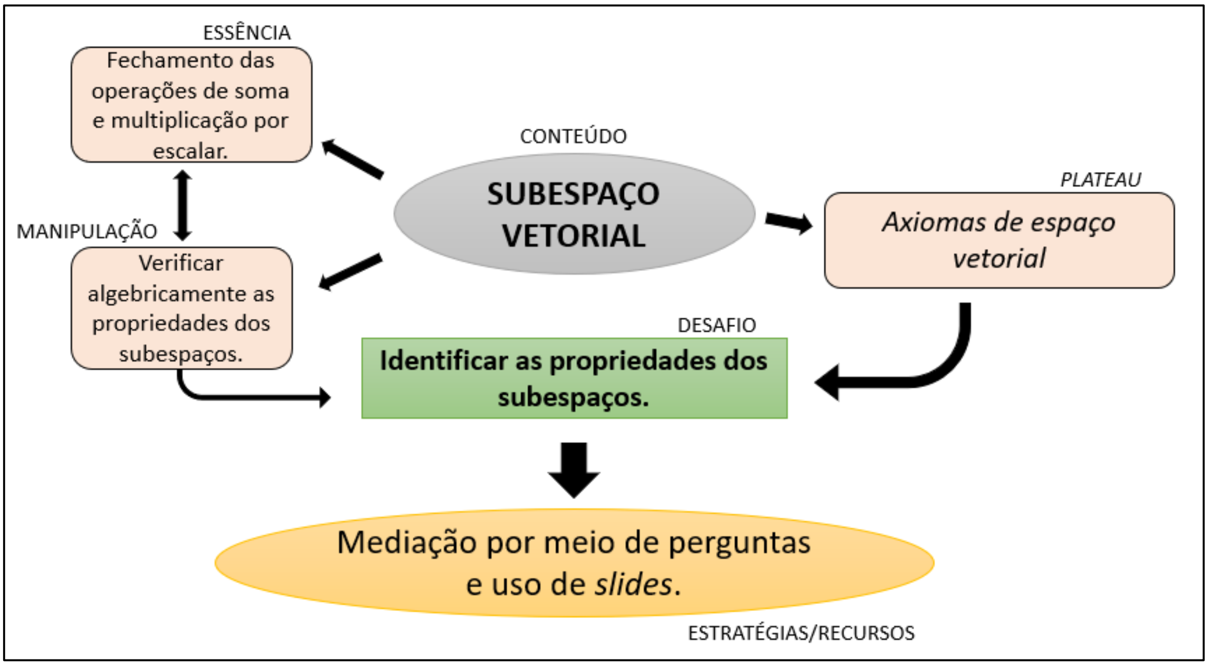
Eu, ____, portador(a) do RG ____________________________ e CPF ________________________, aluno(a) matriculado(a) no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA, autorizo Francisca Cláudia Fernandes Fontenele, estudante do curso de Doutorado em Educação da Universidade Federal do Ceará - UFC, com orientação do Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, a utilizar em partes, ou integralmente, as informações referentes à minha participação no projeto de pesquisa, intitulado: “Construção de conceitos abstratos em Álgebra Linear: reflexões sobre ensino e aprendizagem”, para fins de pesquisa científica, coletadas por meio de registro escrito, imagens, áudios, vídeos e depoimentos. Declaro, por oportuno, estar ciente de que a pesquisadora se compromete a respeitar os critérios científicos de sigilo, responsabilidade e respeito aos sujeitos, no decorrer de todo o processo de coleta de dados. Declaro, ainda, que fui informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação desenvolvida.

Sobral, 22 de março de 2017.

____

Aluno(a)

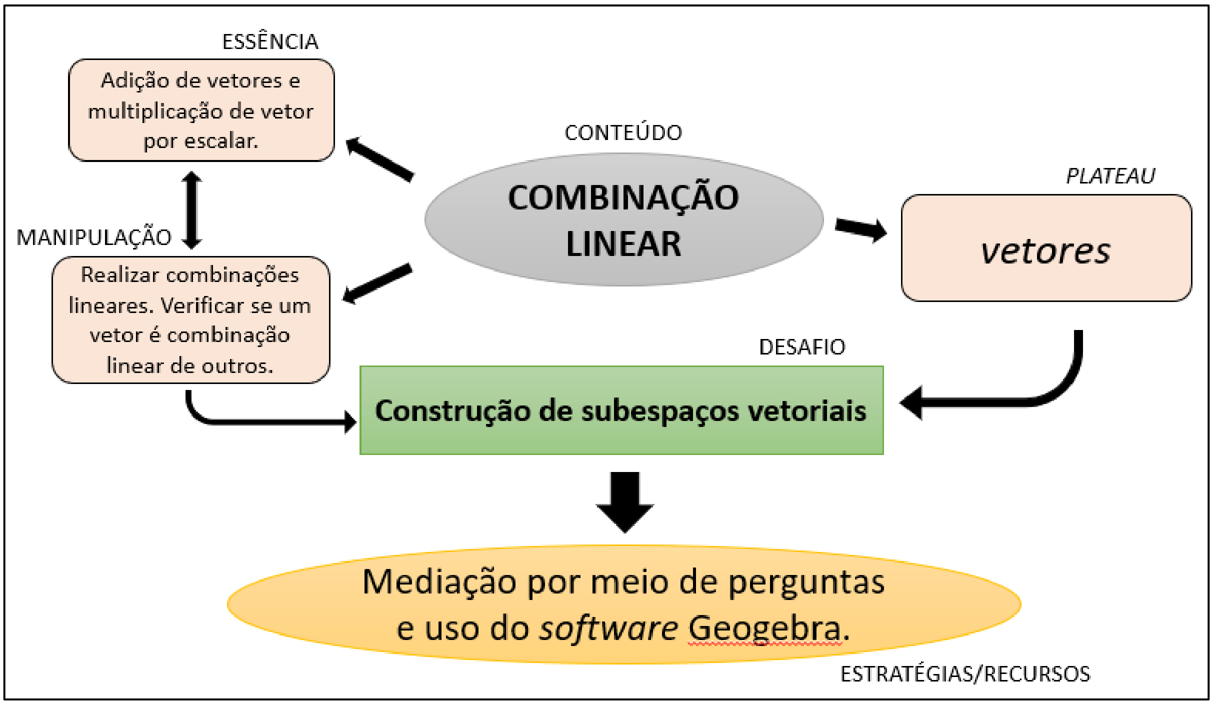
APÊNDICE B: ANÁLISE TEÓRICA REALIZADA NA SESSÃO DIDÁTICA 2 – TEMA: SUBESPAÇOS VETORIAIS



Nesta sessão didática, o *plateau* foi verificado com suporte nos conhecimentos trabalhados na aula anterior, especificamente, os axiomas de espaço vetorial, que servirão de base para construção/elaboração da noção de subespaço. A *essência do conteúdo* se constituiu como a propriedade de “fechamento das operações de soma e multiplicação por escalar”. A *manipulação algoritmica* diz respeito ao domínio da verificação algébrica das propriedades dos subespaços, que constituem a definição de subespaço. Assim, o *elemento desafiador* foi construir a noção de subespaço, ou seja, compreender as propriedades que garantem que um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço. As *estratégias e/ou recursos* utilizados foram a mediação dialogada com apoio do *PowerPoint*, baseada no uso de perguntas que estimulassem a reflexão sobre o assunto. Assim, delinearam-se os seguintes objetivos, a seguir dispostos.

- Construir o conceito de subespaço vetorial.
- Identificar as propriedades que garantem que um determinado conjunto é um subespaço vetorial.
- Verificar se um subconjunto é um subespaço.

APÊNDICE C: ANÁLISE TEÓRICA REALIZADA NA SESSÃO DIDÁTICA 3 – TEMA: COMBINAÇÃO LINEAR



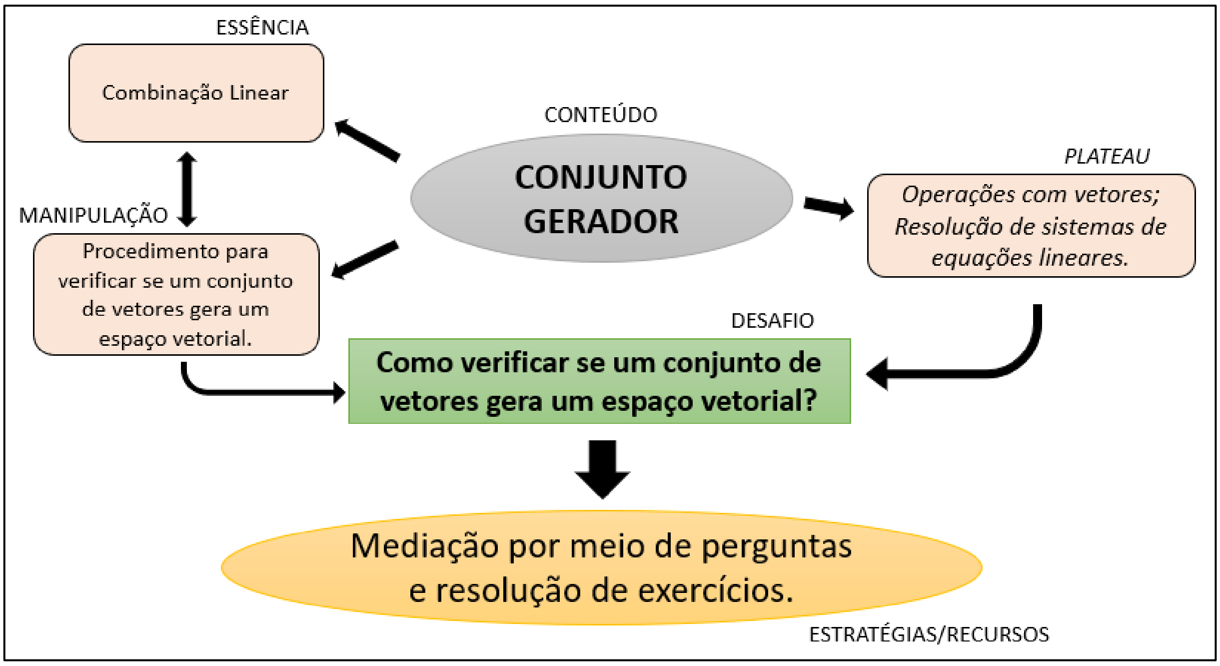
O tema central nesta sessão didática foi a combinação linear. A *essência do conteúdo* são as operações de soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar, intrínsecos à definição de combinação linear. A *manipulação do algorítmica* se refere tanto ao domínio da realização das combinações, quanto a verificar se um dado vetor é combinação linear de outros. O *plateau*, nesse caso, foi diagnosticado com amparo nos conhecimentos referentes às operações com vetores.

Considerando a essência do conteúdo e a sua manipulação algébrica, se faz interessante inserir nesse quadro os aspectos geométricos que possibilitam a compreensão do comportamento dos vetores nas combinações lineares realizadas nos subespaços de R^2 e R^3.

Portanto, o *elemento desafiador* escolhido para motivar os estudantes à reflexão sobre o conteúdo desta sessão didática foi *a construção de subespaços vetoriais de* R^2, a partir de combinações lineares realizadas com alguns vetores do espaço. Desse modo, os recursos utilizados foram a mediação dialogada e o *software* Geogebra. Assim, foram expressos os seguintes objetivos, que vêm na sequência.

- Reconhecer uma combinação linear como resultado da soma de vetores e multiplicação por escalar.
- Perceber que uma combinação linear produz um novo vetor.
- Visualizar as combinações lineares nos quadros algébrico e geométrico.
- Compreender a construção de subespaços vetoriais a partir de combinações lineares de um dado conjunto de vetores.

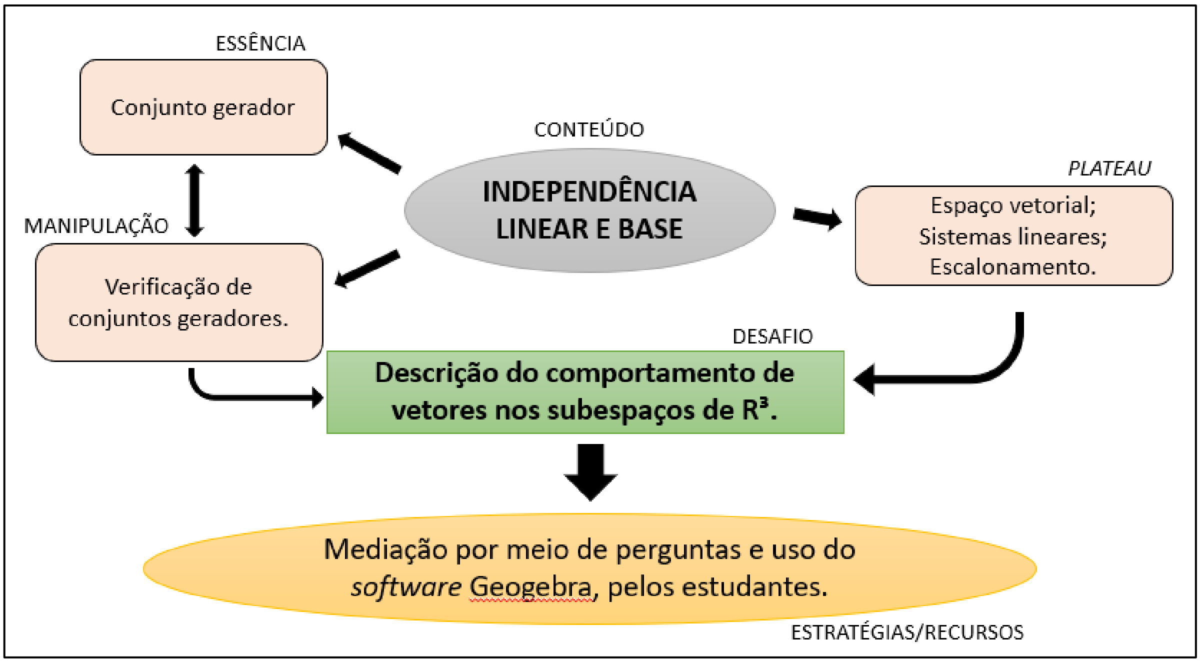
APÊNDICE D: ANÁLISE TEÓRICA REALIZADA NA SESSÃO DIDÁTICA 4 – TEMA: .CONJUNTO GERADOR



O tema conjunto gerador teve como essência a combinação linear, no sentido de que, compreendendo o significado e papel da combinação linear na construção dos espaços vetoriais, o aluno poderá melhor entender o conceito e função do conjunto gerador, nesta teoria. O foco do ensino, entretanto, foi a manipulação algoritmica, uma vez que a ideia de geradores como vetores cujas combinações geram um espaço vetorial já havia sido trabalhada. Aqui, o objetivo foi conhecer como verificar se um dado conjunto de vetores gera um espaço vetorial, de modo que se pudesse trabalhar as relações entre o significado de gerar um espaço e como fazer a verificação. Assim, os recursos/estratégias de ensino utilizadas foram a resolução de exercícios, expressa nas fases da Sequência Fedathi e na mediação dialogada, por meio de perguntas. Desse modo, eis os objetivos foram.

- Conhecer como verificar algebricamente se um conjunto de vetores gera um espaço.
- Compreender o significado da técnica de verificação.
- Perceber que, dado um espaço vetorial, é possível obter os geradores e vice-versa.

APÊNDICE E: ANÁLISE TEÓRICA REALIZADA NA SESSÃO DIDÁTICA 5 – TEMA: INDEPENDENCIA LINEAR E BASE



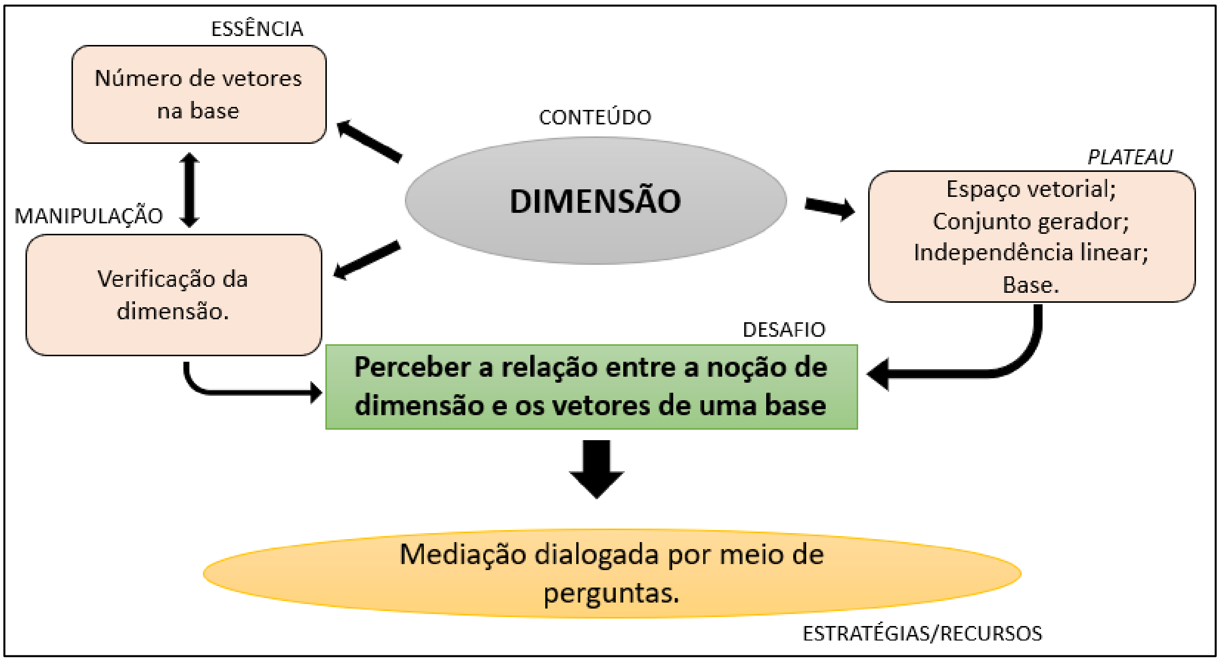
Esta sessão didática se propôs a, inicialmente, revisar os principais conceitos trabalhados até então, por meio da abordagem geométrica dos conceitos de espaço vetorial, subespaço, combinação linear e conjunto gerador, estudados até então. Após essa revisão, seriam, então, introduzidas as noções de independência linear e base.

Neste esquema, a ideia de conjunto gerador levará ao conteúdo principal independência linear e base. Consideramos que a combinação linear seja o ponto chave para que o estudante compreenda esta noção. A manipulação algorítmica, imprescindível para a fixação dos significados, se dá com a técnica de verificação, que permite constatar se um dado conjunto gera determinado espaço vetorial. A estratégia da mediação por meio de perguntas também desempenha papel essencial para que os estudantes possam compreender os significados conceituais envolvidos na atividade.

Organizamos a sessão didática de modo que, após o fechamento da atividade com o Geogebra (fase da *prova*), prosseguíssemos observando os vetores trabalhados no seu curso, de modo que, por meio de perguntas e reflexões sobre o que acontece com o subespaço à medida que acrescentamos ou retiramos vetores dos conjuntos geradores, chegássemos à noção de independência linear. E, observando o que acontece quando temos vetores "sobrando", ou se retiramos vetores demais, chegássemos à noção de base. Desse modo, os objetivos dessa sessão didática estão sequenciados.

- Visualizar geometricamente o significado de "gerar" um espaço vetorial.
- Compreender o papel das combinações lineares na teoria dos espaços vetoriais.
- Estabelecer relações entre conjunto gerador e discussão de sistemas lineares.
- Perceber que vetores distintos podem gerar o mesmo espaço vetorial.
- Discutir dependência e independência linear.
- Introduzir a noção de base.

APÊNDICE F: ANÁLISE TEÓRICA REALIZADA NA SESSÃO DIDÁTICA 6 – TEMA: DIMENSÃO



Para o planejamento dessa sessão didática, levamos em conta a maneira como a noção de base foi introduzida na aula anterior, de modo que pudéssemos rever, exercitar e introduzir o conceito de dimensão. Desse modo, o foco foi rever o conceito de base, por meio de exercícios e discussões, que culminaram na noção de dimensão. Assim, os objetivos estão na sequência.

- Rever o conceito de base de um espaço vetorial.
- Introduzir a noção de dimensão relacionando-a ao número de vetores na base.
- Verificar se um conjunto de vetores é base de um espaço vetorial, conhecendo-se a sua dimensão.

APÊNDICE G: RESUMO DAS FASES DA SEQUÊNCIA FEDATHI VIVENCIADAS NA SESSÃO DIDÁTICA 1.

Fase	Ações realizadas
Tomada de Posição	Após nivelamento do *plateau* trouxemos o questionamento: *"Estas operações de soma e multiplicação por escalar se aplicam a outros conjuntos matemáticos? Imaginem outros conjuntos e reflitam sobre isso."*
Maturação	Os alunos buscaram respostas, refletiram sobre exemplos que obedecessem as operações discutidas.
Solução	Um aluno cita o exemplo dos números naturais, mas percebe que é falho.
Prova	Falamos sobre o exemplo dado e trazemos outros, chegando à ideia intuitiva de espaço vetorial.
Tomada de Posição	Após abordar a noção de espaço vetorial, questionamos: *Até o momento, vimos que um espaço vetorial possui as operações de soma e multiplicação por escalar. Mas será que para identificar um espaço vetorial, basta verificar se o conjunto obedece tais operações? Considerando estas operações, que propriedades podem garantir que um conjunto é um espaço vetorial?*
Maturação	Os alunos se debruçaram para identificar as propriedades dos espaços vetoriais tendo como base seus conhecimentos prévios referentes às propriedades da adição e multiplicação.
Solução	Alguns alunos apresentaram suas soluções na lousa.
Prova	A partir das soluções apresentadas e de discussão sobre as características de um espaço vetorial, formalizamos o conteúdo, apresentando a definição formal.
Tomada de Posição	É apresentada uma atividade: Mostre que R^2 é um espaço vetorial. (Parece um exercício simples, no entanto, é a primeira vez que fazem; não resolvemos nenhum similar antes!)
Maturação	Os alunos se debruçaram para resolver.
Solução	Após a maturação, dois alunos apresentaram suas soluções na lousa, um mostrou as propriedades da adição e outro da multiplicação.
Prova	Discutimos as soluções apresentadas e fizemos o fechamento do assunto.

Fonte: Pesquisa direta (2017).

APÊNDICE H: RESUMO DAS FASES DA SEQUÊNCIA FEDATHI VIVENCIADAS NA SESSÃO DIDÁTICA 2

Fase	Ações realizadas
Tomada de Posição	Após trabalhar o *plateau* apresentamos a seguinte situação: Mostre que R^n é um espaço vetorial.
Maturação	Os alunos se debruçaram para resolver. Tiveram dificuldade por se tratar de um espaço n-dimensional.
Solução	Apresentação da resolução, dessa vez, fomos escrevendo na lousa o que os alunos iam ditando como resposta, pois nenhum se dispôs a expor sua solução.
Prova	Reforçamos a formalização da definição de espaço vetorial, enfatizando como fazer a verificação, destacando os pontos em que os alunos tiveram dificuldade. Para isso, foram utilizados exemplos com matrizes e diagramas de Venn para ilustrar a ideia de espaço vetorial e introduzir a noção de subespaço.
Tomada de Posição	Após falarmos dos subconjuntos dos espaços vetoriais, a pesquisadora questiona: “Que características um subconjunto de um espaço vetorial precisa ter para que ele próprio seja um espaço vetorial?”
Maturação	Caracterizou-se pela discussão entre os alunos, que buscavam identificar tais características. Houve diálogos marcados por perguntas que os instigavam a olhar os subconjuntos sob o prisma das operações de soma e multiplicação por escalar. Assim, houve reflexão, discussão, socialização, dúvidas etc.
Solução	Aconteceu concomitante à maturação; à medida que refletiam, discutiam, expunham suas ideias, suas conclusões. Não foi algo “feito a mão”, mas construído com base nas discussões.
Prova	Até aqui, não houve ainda um fechamento. Fizemos uma nova tomada de posição, prosseguindo a discussão.
Tomada de Posição	Após os alunos concluírem que um subespaço deve obedecer as mesmas propriedades do espaço vetorial ao qual pertence, questionamos: “Vocês constataram que valem todas as propriedades, mas sendo assim, será que é preciso verificar todas os axiomas para que se prove que tem-se um subespaço vetorial?”
Maturação	Novamente se dá na discussão, no diálogo entre nós e os alunos.
Solução	Também não foi feita no papel, mas aconteceu concomitante à maturação. À medida que discutiam, refletiam, iam elaborando solução à pergunta colocada. Os próprios alunos chegam à solução.
Prova	Aproveitamos as respostas dos alunos e formalizamos o assunto, apresentando a definição formal e justificando-a.
Tomada de Posição	Apresentação de três gráficos com os quais os alunos deveriam dizer se eram subespaços.
Maturação	Discussão entre os alunos.
Solução	Acontece concomitante à maturação.
Prova	Apresentamos os subespaços de R^2 e R^3.
Tomada de Posição	É apresentada a questão: Verifique se o conjunto U de todos os pontos (x, y) em R^2, tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, é um subespaço de R^2. Estes são os pontos do primeiro quadrante!
Maturação	Os alunos se debruçam para resolver.
Solução	Os grupos divergem na solução. Um aluno apresenta sua solução na lousa e defende veementemente sua resposta, em detrimento das respostas dos demais; porém, mediante as colocações dos colegas, percebe que está equivocado e ele mesmo corrige seu erro.
Prova	Aproveitamos as respostas e fizemos um fechamento da questão, apresentando seu gráfico. Destacamos a importância de se defender ideias e que o erro é parte importante da aprendizagem.

Fonte: Pesquisa direta (2017).

APÊNDICE I: RESUMO DAS FASES DA SEQUÊNCIA FEDATHI VIVENCIADAS NA SESSÃO DIDÁTICA 3.

<table>
<tr><th>Fase</th><th>Ações realizadas</th></tr>
<tr><td>Tomada de Posição</td><td>Mostramos três gráficos e perguntamos aos alunos se eram exemplos de subespaços vetoriais.</td></tr>
<tr><td>Maturação</td><td>Os alunos responderam sem dificuldade os dois primeiros, mas tiveram que fazer a verificação algébrica do terceiro.</td></tr>
<tr><td>Solução</td><td>Um aluno foi à lousa apresentar sua solução, justificando-a.</td></tr>
<tr><td>Prova</td><td>Foi feita a sistematização das soluções e foram relembradas as propriedades dos subespaços.</td></tr>
<tr><td>Tomada de Posição</td><td>Indicamos combinações de matrizes e perguntamos: “Observando o exemplo, o que é uma combinação linear? Vocês estão diante de uma combinação linear, tentem descrever isso no papel.”</td></tr>
<tr><td>Maturação</td><td>Os alunos se debruçam para responder.</td></tr>
<tr><td>Solução</td><td>Após algum tempo, uma aluna exprime sua definição de combinação linear.</td></tr>
<tr><td>Prova</td><td>Sistematizamos as soluções e a definição formal de combinação linear.</td></tr>
<tr><td>Tomada de Posição</td><td>Questionamos: “Como construir subespaços de R^2?”</td></tr>
<tr><td>Maturação</td><td rowspan="2">Acontece concomitante com a fase da solução, mediada por perguntas sobre o comportamento de vetores no R^2 quando se fazem as combinações lineares. Foi uma construção realizada pelos alunos e por nós.</td></tr>
<tr><td>Solução</td></tr>
<tr><td>Prova</td><td>Aproveitamos as respostas e discussões para relacionar a construção de subespaços de R^2, à ideia de subespaço gerado, em que, após explicar e discutir com eles o que acontece, algebricamente e geometricamente, com as combinações lineares de um dado conjunto de vetores, apresenta a definição formal de subespaço gerado.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa direta (2017).

APÊNDICE J: RESUMO DAS FASES DA SEQUÊNCIA FEDATHI VIVENCIADAS NA SESSÃO DIDÁTICA 4.

Fase	Ações realizadas
Tomada de Posição	Sem que tivesse sido resolvido nenhuma questão semelhante, foi apresentado o seguinte exercício: Determine se os vetores geram o R^3. a) $v_1 = (2, 2, 2)$ $v_2 = (0, 0, 3)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$
Maturação	Houve discussão sobre como resolver. Num primeiro momento os alunos propuseram igualar a combinação linear ao vetor nulo. Mas, após alguns esclarecimentos decorrentes da discussão desencadeada, concluem que deveriam igualar ao vetor genérico. Só então se debruçam para resolver.
Solução	Apresentam suas soluções.
Prova	É feita uma breve explicação sobre os procedimentos de resolução, uma vez que era a primeira vez que resolviam questão como esta, no decorrer do curso.
Tomada de Posição	Determine os geradores dos seguintes espaços vetoriais: a) $S = \{(x, 2x); x \in R\} \subset R^2$ b) $S = \{(x, x + y, y); x, y \in R\} \subset R^3$ c) $S = \{(x, y, z) \in R^3; x + y + z = 0\}$ d) $S = \{(x, y, z) \in R^3; x - y + z = 0\}$ e) $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(R); a = -d \text{ e } c = 2b\}$
Maturação	Os alunos se debruçam para resolver.
Solução	Apresentam e discutem suas soluções.
Prova	Fizemos um fechamento do assunto, explicando os procedimentos utilizados na resolução dos exercícios.

Fonte: Pesquisa direta (2017).

APÊNDICE K: RESUMO DAS FASES DA SEQUÊNCIA FEDATHI VIVENCIADAS NA SESSÃO DIDÁTICA 5.

Fase	Ações realizadas
Tomada de posição	Questões dirigidas sobre conjuntos geradores.
Maturação	Alunos se debruçam para responder as questões, utilizando o Geogebra.
Solução	Alunos apresentam suas soluções.
Prova	Fizemos o fechamento das questões, destacando os principais aspectos do conteúdo estudado, tais como: combinação linear, resolução/discussão de sistemas lineares e conjunto gerador.
Tomada de posição	Ao comparar os conjuntos de vetores trabalhados na atividade proposta anteriormente, questionamos: É possível tirar um vetor do item (C) e ele continuar gerando o subespaço? Quais as relações entre os vetores do item (B)? E entre os de (C)?
Maturação	Aconteceu no diálogo, cujos raciocínios e reflexões são compartilhados, discutidos, aceitos, refutados, ampliando a visão dos alunos sobre o conteúdo.
Solução	Acontece quase concomitante com a maturação, sendo que os alunos não se debruçaram para resolver no papel, mas nos diálogos chegaram nos conceitos esperados.
Prova	Apresentação da definição de independência linear, contextualizando-a com tudo que foi discutido até então.
Tomada de posição	A discussão continua partindo do questionamento: o que acontece se tirarmos ou acrescentarmos vetores no conjunto de vetores do item (B) e nos do item (C)?
Maturação	Aconteceu como discussão da qual todos participaram, expressando suas ideias e o modo como estavam compreendendo o assunto tratado.
Solução	Aconteceu quase concomitante com a maturação.
Prova	Considerando o que discutido, foi feita a formalização do assunto com a apresentação da definição de base de um espaço vetorial.
Tomada de posição	Exercício: verificar se os vetores do conjunto de vetores do item (A) formam uma base de R^3.
Maturação	Os alunos se debruçaram para resolver.
Solução	Um aluno foi à lousa apresentar sua solução.
Prova	Houve um fechamento do conteúdo, enfatizando os procedimentos realizados.

Fonte: Pesquisa direta (2017).

APÊNDICE L: RESPOSTAS DA ATIVIDADE REALIZADA NA SESSÃO DIDÁTICA 5.

02. Represente geometricamente cada item acima usando o Geogebra. Em seguida, salve cada arquivo, separadamente, na área de trabalho (Arquivo => Gravar como) nomeado com "seunome_ITEM". Em seguida, faça o que se pede no quadro abaixo:

	(A)	(B)	(C)
Faça combinações lineares entre os vetores de cada item e descreva o que acontece à medida que os vetores vão sendo combinados.	Geram $\mathbb{R}^3$.	Geram um único plano.	Geram um único plano.
Descreva o comportamento geométrico dos vetores que geram o espaço e dos que não geram.	Quando os vetores geram espaço não ficam no mesmo plano. Os que não geram, ficam.		

03. Insira nos gráficos dos itens "B" e "C", respectivamente, as equações que tornaram o sistema impossível. Em seguida responda:

	(B)	(C)
Qual foi a equação inserida e que gráfico foi exibido?	$-2x+y+6z=0$ um plano	$-2x+y+6z=0$ um plano
Descreva as relações entre os vetores e o gráfico inserido.	Os vetores pertencem ao gráfico.	Os vetores pertencem ao gráfico.
O que há em comum entre os vetores de "B" e de "C"?	Pertencem ao mesmo plano.	
Que diferença há entre os entre os vetores de "B" e de "C"?	Os vetores de B e C geram os mesmos vetores, mas com escalares diferentes.	
O que se pode afirmar com este exemplo?	Que vetores que não geram $\mathbb{R}^3$ podem gerar um único plano ou uma reta, caso sejam colineares. Os vetores de B e de C são subespaços do plano gerado por $-2x+y+6z=0$.	

02. Represente geometricamente cada item acima usando o Geogebra. Em seguida, salve cada arquivo, separadamente, na área de trabalho (Arquivo => Gravar como) nomeado com "seunome_ITEM". Em seguida, faça o que se pode no quadro abaixo:

	(A)	(B)	(C)
Faça combinações lineares entre os vetores de cada item e descreva o que acontece à medida que os vetores vão sendo combinados.	Infinitos planos	Gera único plano.	Gera único plano
Descreva o comportamento geométrico dos vetores que geram o espaço e dos que não geram.	Vejo que não gera um único plano (figuras A e B), o mesmo para entender em todos os vetores simultaneamente.		

03. Insira nos gráficos dos itens "B" e "C", respectivamente, as equações que tornaram o sistema impossível. Em seguida responda:

	(B)	(C)
Qual foi a equação inserida e que gráfico foi exibido?	6z + y − 2x = 0 Gerado único espaço	−30z + 5y + 10x = 0. Gerado único espaço.
Descreva as relações entre os vetores e o gráfico inserido.	O gráfico passa unicamente por todos os vetores.	O gráfico passa unicamente por 2 vetores.
O que há em comum entre os vetores de "B" e de "C"?	Há um único espaço.	
Que diferença há entre os entre os vetores de "B" e de "C"?	Que os vetores (a e z) do item C não faz parte do subespaço do mesmo.	
O que se pode afirmar com este exemplo?	Que o espaço gerado pelos itens são iguais, mas que os vetores especificados podem ou não fazer parte do espaço gerado.	

02. Represente geometricamente cada item acima usando o Geogebra. Em seguida, salve cada arquivo, separadamente, na área de trabalho (Arquivo => Gravar como) nomeado com "**seunome_ITEM**". Em seguida, faça o que se pede no quadro abaixo:

	(A)	(B)	(C)
Faça combinações lineares entre os vetores de cada item e descreva o que acontece à medida que os vetores vão sendo combinados.	ESTÃO GERANDO NOVOS VETORES QUE TAMBÉM GERAM O $\mathbb{R}^3$. E QUANDO ALGUM ESCALAR É NEGATIVO O SENTIDO MUDA DOS VETORES	NÃO GERAM O $\mathbb{R}^3$, POIS ESTÃO GERANDO UM PLANO.	não geram o $\mathbb{R}^3$, pois estão gerando um plano.
Descreva o comportamento geométrico dos vetores que geram o espaço e dos que não geram.	Nos vetores que geram um espaço não existe um plano que passe por todos eles simultaneamente, enquanto nos vetores que não geram um espaço no $\mathbb{R}^3$ um plano passa por todos eles		

03. Insira nos gráficos dos itens "B" e "C", respectivamente, as equações que tornaram o sistema impossível. Em seguida responda:

	(B)	(C)
Qual foi a equação inserida e que gráfico foi exibido?	Foi exibido um plano de equação $-2x+y+6z=0$	Foi exibido um plano de equação $-2x+y+6z=0$
Descreva as relações entre os vetores e o gráfico inserido.	Foi possível perceber que os vetores passam pelo $\mathbb{R}^3$ que [illegible]	Por todos os vetores é possível perceber que estão formando um plano, todos passam pelo o
O que há em comum entre os vetores de "B" e de "C"?	diferentes vetores estão gerando um mesmo vetor resultando, ou seja a equação do plano	
Que diferença há entre os entre os vetores de "B" e de "C"?	Os diferentes vetores e diferentes combinações estão gerando um mesmo plano	
O que se pode afirmar com este exemplo?	Que os vetores que não geram um espaço no $\mathbb{R}^3$, formam um único plano que passam todos os vetores	

	(A)	(B)	(C)
Faça combinações lineares entre os vetores de cada item e descreva o que acontece à medida que os vetores vão sendo combinados.	O sistema continua em um mesmo sentido e dando qualquer valor positivo ou negativo para os escalares o vetor continua no $\mathbb{R}^2$	Fazendo as combinações lineares colocando qualquer valores para os escalares o sistema é indeterminado e [illegible]	Sistema impossível, que fazendo todas combinações vai sempre parar em um ponto específico.
Descreva o comportamento geométrico dos vetores que geram o espaço e dos que não geram.	O vetor que gera o espaço no $\mathbb{R}^2$, fazendo-se as combinações está direcionado para o primeiro quadrante e dependendo das combinações esse irá mudar. Nos vetores que não geram isso é contrário.		

03. Insira nos gráficos dos itens "B" e "C", respectivamente, as equações que tomaram o sistema impossível. Em seguida responda:

	(B)	(C)
Qual foi a equação inserida e que gráfico foi exibido?	$-2x+y+6z=0$ gráfico com pontos em um plano	$-2x+y+6z=0$ Onde os espaços vetoriais passam pelo plano.
Descreva as relações entre os vetores e o gráfico inserido.		
O que há em comum entre os vetores de "B" e de "C"?		
Que diferença há entre os entre os vetores de "B" e de "C"?		
O que se pode afirmar com este exemplo?		

02. Represente geometricamente cada item acima usando o Geogebra. Em seguida, salve cada arquivo, separadamente, na área de trabalho (Arquivo => Gravar como) nomeado com "**seunome_ITEM**". Em seguida, faça o que se pede no quadro abaixo:

	(A)	(B)	(C)
Faça combinações lineares entre os vetores de cada item e descreva o que acontece à medida que os vetores vão sendo combinados.	A combinação entre os vetores, geram novos vetores de mesma direção invertendo o sentido quando o sinal do vetor for trocado, pertencendo ao R^3.	a combinação entre os vetores, geram novos vetores que não pertencem ao R^3 e que pertencem ao mesmo plano.	A combinação entre os vetores, geram novos vetores que não pertencem ao R^3 e que pertencem ao mesmo plano.
Descreva o comportamento geométrico dos vetores que geram o espaço e dos que não geram.	os que geram R^3, formam vetores de mesma direção e que também pertencem ao R^3, já os que não geram, formam vetores de direções variadas e que não pertencem ao R^3		

03. Insira nos gráficos dos itens "B" e "C", respectivamente, as equações que tornaram o sistema impossível. Em seguida responda:

	(B)	(C)
Qual foi a equação inserida e que gráfico foi exibido?	$6z+y-2x$, e no gráfico foi exibido um plano onde todos os vetores os pertence.	$6z+y-2x$, no gráfico foi gerado um plano onde os vetores pertence
Descreva as relações entre os vetores e o gráfico inserido.		
O que há em comum entre os vetores de "B" e de "C"?	todos pertence a R^2	
Que diferença há entre os entre os vetores de "B" e de "C"?		
O que se pode afirmar com este exemplo?		

02. Represente geometricamente cada item acima usando o Geogebra. Em seguida, salve cada arquivo, separadamente, na área de trabalho (Arquivo => Gravar como) nomeado com **"seunome_ITEM"**. Em seguida, faça o que se pede no quadro abaixo:

	(A)	(B)	(C)
Faça combinações lineares entre os vetores de cada item e descreva o que acontece à medida que os vetores vão sendo combinados.	Irá gerar infinitos planos	Irá gerar um único plano	Irá gerar um único plano.
Descreva o comportamento geométrico dos vetores que geram o espaço e dos que não geram.	Para os que geram o $\mathbb{R}^3$ formam infinitos planos, Já para os não geram eles permanecem no mesmo plano.		

03. Insira nos gráficos dos itens "B" e "C", respectivamente, as equações que tornaram o sistema impossível. Em seguida responda:

	(B)	(C)
Qual foi a equação inserida e que gráfico foi exibido?	$-2x+y+6z=0$ Foi exibido um plano	$6z-2x+y$ Foi exibido um plano
Descreva as relações entre os vetores e o gráfico inserido.	Os vetores estão inseridos no plano	Os vetores estão inseridos no plano
O que há em comum entre os vetores de "B" e de "C"?	Os vetores pertencem ao mesmo plano	
Que diferença há entre os entre os vetores de "B" e de "C"?	geram os mesmos vetores, no entanto, com escalares diferentes.	
O que se pode afirmar com este exemplo?	Vetores que não geram $\mathbb{R}^3$, geram um único plano, que passa pela origem além disso, fazendo combinações lineares com esses vetores, os gerados vão estar contidos nesse plano.	

APÊNDICE M: MODELO DO QUESTIONÁRIO I APLICADO APÓS TÉRMINO DO CURSO DE EXTENSÃO.

Curso Introdução às noções elementares da Álgebra Linear

QUESTIONÁRIO

Marque as opções de acordo com sua vivência ao longo das aulas e justifique sua resposta.

01. Em relação à construção conceitual, feita através de exemplos, na qual se apresentou a definição somente após a discussão do conteúdo, você considera que:

( ) Tornou a compreensão mais consistente.

( ) Tornou o assunto mais difícil.

( ) Instigou a curiosidade matemática.

( ) Tornou a aula cansativa.

Justifique as opções marcadas:

____
____
____

02. Sobre as perguntas feitas em sala pela professora aos alunos, você considera que:

( ) Instigaram a curiosidade matemática para buscar compreender o assunto.

( ) Tornaram a compreensão confusa, logo foram desnecessárias.

( ) Fizeram-me refletir mais sobre o conteúdo estudado, favorecendo a compreensão do mesmo.

( ) Foram desnecessárias.

Justifique as opções marcadas:

____
____
____

03. Sobre ir a lousa mostrar as soluções dos exercícios realizados em sala, você considera que:

( ) Foi importante, pois pôde aprender com os colegas e discutir mais o assunto estudado.

( ) Tornou a aula cansativa.

( ) Dificultou a compreensão do conteúdo.

( ) Foi importante, pois fez com que fossem levantados novos questionamentos que ajudaram a refletir sobre o assunto e compreendê-lo de modo mais amplo.

Justifique as opções marcadas:

____
____
____

04. Em relação ao uso do Geogebra, você considera que:

( ) Foi irrelevante.

( ) Dificultou a compreensão do conteúdo.

( ) Ajudou-me a visualizar o comportamento dos vetores ao gerar os subespaços de R^2 e R^3.

( ) Tornou a aula mais dinâmica e interessante.

Justifique as opções marcadas:

____
____
____

APÊNDICE N: RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO 2 APLICADO APÓS TÉRMINO DO GRUPO DE ESTUDOS.

O que aprendi neste projeto?

Descreva o que você aprendeu neste projeto analisando como foi vivenciar a Sequência Fedathi como "aluno", nas aulas do curso de Álgebra Linear, e em seguida, como "professor", ao estudar e planejar uma aula de Matemática com base em seus pressupostos.

Primeiramente, como aluno, eu pude ter uma experiência de aprendizado diferente da qual eu estou habituado. Foi como uma nova forma de aprender.

E, dessa vez, eu consegui realmente participar das aulas, podendo ajudar os meus colegas. Isso me trouxe alguns benefícios, ao mesmo tempo que aumentou bastante a minha responsabilidade como aluno: ou nós (alunos) nos esforçamos no processo de aprendizagem, ou nem mesmo com uma boa mediação, feita pela professora, o conteúdo conseguiria ser efetivamente aprendido por nós.

Agora, como professor, as dificuldades foram muitas. Por não ter feito um plano de aula antes, tanto nos moldes da Sequência Fedathi quanto da forma tradicional, o meu plano de aula ficou com muitas lacunas que, sem essas, a minha aula teria ocorrido com menores problemas. Uma dessas lacunas ocorreu no diagnóstico dos alunos, para só então poder a melhor atividade que abordasse o meu tema.

Avalie criticamente:

a) O projeto

O projeto conseguiu cumprir com o seu objetivo: nos dar uma introdução tanto aos conceitos de álgebra linear quanto à metodologia da Sequência Fedathi.

Para mim, a principal experiência que esse projeto pode oferecer foi a de nos dar espaço para sermos "professores por um dia", mesmo que o tempo tenha sido curto demais para isso.

b) A mediação da professora/pesquisadora ao utilizar a Sequência Fedathi:

A mediação da professora foi boa. Ela conseguiu revisar bem os pré-requisitos que nós teríamos de dominar para a compreensão do conteúdo.

Agora, em relação ao tempo, também foi conseguido por nós ter uma visão geral do assunto com um pequeno atraso (sem contarmos com os imprevistos, é claro). E, quanto a isso, creio eu, não foi muito apenas nosso, mas da professora também.

E, por fim, ela conseguiu nos fazer vivenciar bem a Sequência Fedathi como alunos.

O que aprendi neste projeto?

Descreva o que você aprendeu neste projeto analisando como foi vivenciar a Sequência Fedathi como "aluno", nas aulas do curso de Álgebra Linear, e em seguida, como "professor", ao estudar e planejar uma aula de Matemática com base em seus pressupostos.

Foi bem importante ter participado desse projeto, pois foi possível vivenciar na prática como funciona essa metodologia de ensino. Através dessa metodologia consegui entender conceitos muito importantes de álgebra Linear, pois esta disciplina possui um conteúdo muito abstrato. Vivenciar essa sequência como aluno contribuiu e muito na minha formação como futuro professor de matemática, pois foi possível perceber de forma bem clara quais são os objetivos da sequência Fedathi. Poder vivenciar a sequência Fedathi na prática, foi sem dúvida, o grande diferencial desse projeto, pois consegui ver quais são as possíveis dúvidas que os alunos têm em aprender um conteúdo. O uso do programa Geogebra durante as aulas foi bem interessante para poder visualizar ~~o que~~ os conceitos e definições ~~que eram~~ de forma bem simples. Quanto vivenciar a sequência Fedathi como professor, no princípio foi um pouco difícil adaptar um conteúdo utilizando essa metodologia, pois devemos pensar em aplicar as quatro etapas da metodologia. Entretanto, com mais estudos sobre essa metodologia, com a vivência adquirida no curso de álgebra Linear essas dificuldades foram aos poucos desaparecendo.

Todas as interações que ocorreram em todas as etapas da sequência Fedathi durante todo o projeto foi muito importante para a minha formação, e pretendo continuar estudando melhor essa metodologia de ensino na area da matemática

Avalie criticamente:

a) O projeto

O projeto poderia ter tido um tempo de duração maior, para assim poder explorar mais conteúdos do curso de álgebra Linear, pois poder vivenciar e sequência Fedathi como aluno e professor me motivou a buscar mais conhecer outros conteúdos estudados em álgebra Linear.

b) A mediação da professora/pesquisadora ao utilizar a Sequência Fedathi:

não há uma avaliação crítica em relação à professora/Pesquisadora, pois estudando melhor essa sequência Fedathi, foi possível perceber que em todo momento a professora/pesquisadora buscava sempre obedecer as quatro etapas da sequência Fedathi. todas as interações da Pesquisadora/Professora com os alunos foi bem proveitosa e, certamente contribuiu na aprendizagem de todos os estudantes envolvidos no projeto.

O que aprendi neste projeto?

Descreva o que você aprendeu neste projeto analisando como foi vivenciar a Sequência Fedathi como "aluno", nas aulas do curso de Álgebra Linear, e em seguida, como "professor", ao estudar e planejar uma aula de Matemática com base em seus pressupostos.

Vivenciar a sequência Fedathi como aluna no curso de algebra linear foi muito interessante, visto que, essa nova didática de ensino de matemática permitiu a nós alunos uma maior autonomia dentro de sala, fazendo com que pudéssemos aprender a partir de nossas constatações e nos deu a liberdade de discutir sobre determinadas perguntas com nossos colegas.

No entanto planejar uma aula nos pressupostos da sequência Fedathi, foi algo prazeroso mas ao mesmo tempo trabalhoso, pois na preparação para aula o professor deve estar sempre buscando situações problemas que induzam o aluno a chegar no resultado esperado e somente depois formalizar o conteúdo.

Avalie criticamente:

a) O projeto

O projeto foi algo bastante construtivo na minha vida acadêmica pois além de ter aprendido sobre algebra linear, tive a oportunidade de conhecer o método de ensino Fedathi, como aluna e como "professora".

O curso de algebra poderia ter tido uma maior duração e o grupo de estudo também poderia ter tido mais encontros para discussões presencial, de forma que foi muito interessante no ambiente EAD.

b) A mediação da professora/pesquisadora ao utilizar a Sequência Fedathi:

Nas aulas mediadas pela professora, a postura adotada pela mesma nos proporcionou a oportunidade de ir em busca das soluções, para somente então esclarecer, ou seja, formalizar o conteúdo. Como também, se indagada não nos mostrava diretamente a resposta, mas fazia com que nós ~~f~~ refletíssemos sobre a solução, sempre seguindo as etapas da sequência.

O que aprendi neste projeto?

Descreva o que você aprendeu neste projeto analisando como foi vivenciar a Sequência Fedathi como "aluno", nas aulas do curso de Álgebra Linear, e em seguida, como "professor", ao estudar e planejar uma aula de Matemática com base em seus pressupostos.

Foi uma experiência nova para mim, onde obtive outro modo de ver o ensino da matemática em que se pode deixar o aluno mais a vontade para que eles possam através dos seus conhecimentos chegar no resultado final do problema, e com isso tem uma interação com os colegas e professor. Assim o assunto abordado será mais bem aprimorado pelos alunos e com isso o professor vai ter um melhor desempenho em sala de aula e isso foi conseguido pela professora através da Sequência Fedathi. Planejar uma aula é bem complicado quando se tem que seguir um novo método, em que se deve seguir cada passo da sequência, mas foi bem interessante onde podemos aplicar o que estávamos aprendendo em sala e aplicar isso em uma aula para a professora e os colegas. Às vezes pode não se sair bem na primeira vez que vai planejar uma aula através da Sequência Fedathi, pois os passos da sequência devem ser aplicados de forma a não perder a própria sequência onde seram 4 passos a ser seguido. 1º Tomada de posição: em que será apresentado o problema abordado, 2º maturação: onde o aluno vai tentar compreender e identificar as variáveis envolvidas no problema, e então vai gerar os questionamentos, 3º solução: representação e modelos que solucionem o problema; Nessa etapa que eles deverão organizar e apresentar seus raciocínios que irão conduzi-los a encontrar a solução para o problema, 4º Prova: É a formalização do modelo matemático para o ensino dos alunos.

Avalie criticamente:

Avalie criticamente:

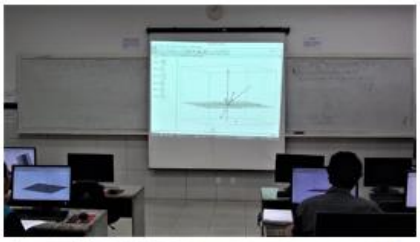
a) O projeto

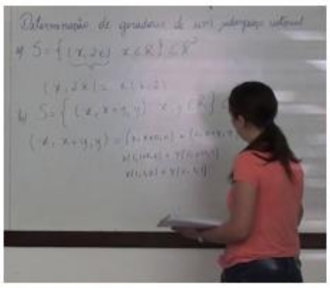
É um modelo muito inovador para os alunos, porém de difícil assimilação pois segue uma sequência em que os alunos terão dificuldades para se adequar a esse ensino. Para ser aplicado no ensino fundamental e médio deve-se fazer uma análise antes para se ter um resultado positivo ou negativo, pois tem que ver como os alunos irão se adaptar a essa sequência.

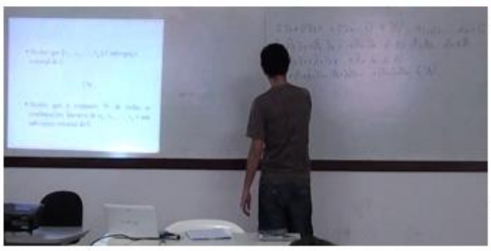
b) A mediação da professora/pesquisadora ao utilizar a Sequência Fedathi:

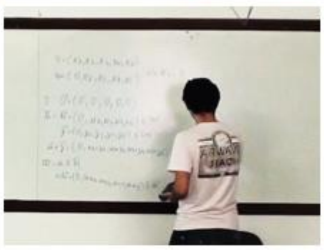
Facilitou muito o ensino do curso em que se teve um bom resultado aplicando a Sequência Fedathi. Ela aplicou muito bem e ao passar das aulas foi tendo bom êxito, através do Geogebra que facilitou muito, a forma das figuras que eram abordadas através de alguns vetores aplicados no programa. E com isso foi mais fácil de entender o conteúdo proposto pela professora, e com a interação de professor aluno, e aluno e aluno, onde o problema dado era de início complicado e de difícil compreensão, dessa forma e através do nosso conhecimento se tornou mais fácil e mais bem compreendido por nós todos.

APÊNDICE O: FOTOGRAFIAS DE ALGUNS MOMENTOS DO CURSO DE INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR.









ANEXOS

ANEXO 1 – EMENTA DA DISCIPLINA OBSERVADA NA PRIMEIRA ETAPA DA PESQUISA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
MA 33 - Introdução à Álgebra Linear

Ementa

Sistemas lineares e matrizes. Transformação de matrizes e resolução de sistemas. Espaços vetoriais. O espaço $\mathbb{R}3$. Transformações lineares. Transformações lineares e matrizes. Espaços com produto interno. Determinantes. Diagonalização de operadores.

Referência Bibliográfica

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C.S. Introdução à algebra linear. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

Programa

1. O que é álgebra linear?
2. Matrizes
3. Transformações elementares de matrizes, matriz escalonada
4. Matrizes elementares, resolução de sistemas
5. Subespaços vetoriais
6. Dependência e independência linear
7. Bases e dimensão
8. Espaço linha de uma matriz
9. Retas e planos em $\mathbb{R}^3$, posições relativas
10. Determinantes e geometria
11. Transformações lineares, núcleo e imagem
12. Teorema do núcleo e da imagem. Operações com transformações lineares
13. Matriz de uma transformação linear, operações de transformações lineares e matrizes
14. Operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$, mudança de base
15. Produto interno, ângulo entre vetores e ortogonalidade
16. Bases ortonormais, operadores em espaços com produto interno
17. Determinantes
18. Matriz adjunta, regra de Cramer
19. Polinômio característico – autovalores e autovetores
20. Diagonalização de operadores
21. Teorema espectral para operadores simétricos, reconhecimento de cônicas

ANEXO 2 – FOMULÁRIO DE SOLICITAÇÃO DE ABERTURA DO AMBIENTE VIRTUAL PARA REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES À DISTÂNCIA.

NEaD UVA
Núcleo de Educação a Distância
Universidade Estadual Vale do Acaraú

UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ

GOVERNO DO ESTADO DO CEARÁ
Secretaria da Ciência, Tecnologia e Educação Superior

FORMULÁRIO PARA SOLICITAÇÃO DE SERVIÇOS – NEAD/UVA

SOLICITAÇÃO Nº_________/_________ (Preenchimento NEaD)

1) TÍTULO DA ATIVIDADE

Projeto: Construindo conceitos abstratos em Álgebra Linear: reflexões sobre ensino e aprendizagem

2) COORDENADOR (A) / RESPONSÁVEL

NOME: Márcio Nascimento da Silva/Fca. Cláudia Fernandes Fontenele TELEFONE:
SETOR/CENTRO/CURSO: Matemática E-MAIL:

3) SERVIÇO SOLICITADO

(X) ABERTURA DE AMBIENTE VIRTUAL
( ) GRAVAÇÃO DE VÍDEO
( ) EDIÇÃO DE VÍDEO
( ) WEBCONFERÊNCIA
( ) OUTRO – ESPECIFICAR:____

4) NATUREZA DA ATIVIDADE

( ) DISCIPLINA SEMIPRESENCIAL ( ) GRADUAÇÃO ( ) PÓS-GRADUAÇÃO
( ) APOIO A DISCIPLINA PRESENCIAL ( ) GRADUAÇÃO ( ) PÓS-GRADUAÇÃO
( ) CURSO DE EXTENSÃO
( ) OFICINA
( ) GRUPO DE ESTUDO
( ) GRUPO DE PESQUISA
(X) PROJETO – ESPECIFICAR: Construção de conceitos abstratos em Álgebra Linear: reflexões sobre ensino e aprendizagem
( ) PROGRAMA – ESPECIFICAR:____
( ) OUTRO – ESPECIFICAR:____

5) ANEXO (S)	6) CARGA HORÁRIA	7) N° DE PARTICIPANTES
( ) SIM (X) NÃO	60H	15

8) DATA PREVISTA PARA A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE	9) LOCAL DE EXECUÇÃO
PERÍODO: 22/03 A 02/06	CCET
10) PÚBLICO ALVO	
ALUNOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	
11) OBJETIVO (S) / OBSERVAÇÃO	
SUBSIDIAR AÇÕES DO REFERIDO PROJETO, SERVINDO DE SUPORTE PARA REALIZAR ATIVIDADES COMPLEMENTARES (FÓRUNS, PORTIFÓLIOS, DISPONIBILIZAÇÃO DE MATERIAL DE ESTUDO, VIDEOS, ETC.) DO CURSO "INTRODUÇÃO ÀS NOÇÕES ELEMENTARES DA ÁLGEBRA LINEAR" E DO "GRUPO DE ESTUDOS" A SER REALIZADO.	

OBSERVAÇÃO.: DEIXAR EM BRANCO O CAMPO QUE NÃO CORRESPONDA A SOLICITAÇÃO.

DATA DA SOLICITAÇÃO: 16/03/2017

COORDENADOR (A) DA ATIVIDADE / RESPONSÁVEL — **FUNCIONÁRIO NEAD**

ANEXO 3 – EMENTA DA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR DO CURSO DE MATEMÁTICA DA UVA

Álgebra Linear (80 horas)

Objetivos

Oferecer ao estudante e futuro professor uma visão mais ampla dos espaços vetoriais que são vistos na educação básica como plano, espaço, conjunto de matrizes e espaço de polinômios.

Ementa Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores, Espaços com produto interno.

Conteúdo Programático

1. Espaços Vetoriais
1.1.Vetores em Rn
1.2.Definição de espaços vetoriais
1.3.Subespaços vetoriais;
1.4.Soma direta;
1.5.Combinação linear
1.6.Subespaço gerado
1.7.Base e dimensão
1.8.Mudança de base

2. Transformações lineares
2.1.Definição
2.2.Determinação de transformações lineares
2.3. Imagem e núcleo de transformação linear
2.4.Teorema do Núcleo e Imagem
2.5. Isomorfismos e Automorfismos
2.6.Transformação inversa
2.7.Matriz de uma transformação linear
2.8.Transformações lineares associadas a matrizes

3. Autovalores e Autovetores
3.1.Polinômios de matrizes e de operadores lineares;
3.2.Autovalores e Autovetores;
3.3.Diagonalização de operadores;
3.4.Polinômio Característico

4. Espaços com produto interno
4.1.Produto escalar;
4.2.Produto interno;
4.3.Norma;
4.4.Desigualdade de Cauchy-Schwarz
4.5.Ortogonalidade
4.6.Processo de Gram-Schmidt.

Bibliografia Básica

[1] LIMA, E. L. Álgebra Linear. 7ª ed IMPA. Rio de Janeiro, 2004.

[2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S.R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. Álgebra Linear. 3ª ed Harbra. São Paulo, 1986.

[3] DOS SANTOS, N. M. Vetores e Matrizes – Uma introdução a Álgebra Linear. 4ª ed Thompson Editora. Rio de Janeiro, 2007. Complementar

[4] LEON, S. J. Álgebra Linear com aplicações, 4ª ed LTC Editora. Rio de Janeiro, 1999. [5] CARLEN, E. A.; CARVALHO, M. C. Álgebra Linear Desde o Início. LTC. Rio de Janeiro, 2009.

[6] LAY, D. C. Álgebra Linear e Suas Aplicações, 2ª. Edição. LTC, Rio de Janeiro, 1999.

ANEXO 4 – PROJETO DE PESQUISA APRESENTADO À COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UVA

UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PROJETO DE PESQUISA

TÍTULO DO PROJETO: Construção de conceitos abstratos em Álgebra Linear: reflexões sobre ensino e aprendizagem.

PROPONENTE (ORIENTADOR): Márcio Nascimento da Silva [professor da UVA]
Francisca Cláudia Fernandes Fontenele [pesquisadora]

(x) Projeto inicial ( ) Renovação
( ) solicitação de 1 bolsista ( ) solicitação de 2 bolsistas

Área e a sub-área do conhecimento (*): Matemática, Álgebra.
*Conforme Tabela de Áreas do Conhecimento do CNPq

1. RESUMO DO PROJETO:

Ante a complexidade dos problemas inerentes ao ensino e aprendizagem de conceitos abstratos da Álgebra Linear, surge a necessidade de investigar maneiras de abordar o conteúdo de modo a proporcionar aos discentes uma aprendizagem mais significativa. Desse modo, este projeto tem como objetivo explorar conceitos abstratos de Álgebra Linear na perspectiva de um ensino centrado na construção conceitual e ação discente em sala de aula, por meio da metodologia Sequência Fedathi. Serão ministradas aulas no contra turno (curso 40h), com as quais se espera, principalmente, que os alunos participantes possam estudar os conteúdos abordados de forma mais participativa e reflexiva, bem como vivenciar o ensino e aprendizagem como um processo construtivo, ampliando suas concepções de ensino e fortalecendo sua formação docente.

Palavras-chave: Matemática, Álgebra Linear, Ensino, Aprendizagem.

2. INTRODUÇÃO/REFERENCIAL TEÓRICO/REVISÃO DE LITERATURA

A Álgebra Linear é um ramo da Matemática que cada vez mais se destaca no âmbito acadêmico, em razão das diversas possibilidades de aplicações em distintas áreas do conhecimento científico, inclusive dentro da própria Matemática, sendo uma disciplina comum na grade curricular da maioria dos cursos da área das Ciências Exatas e afins. Seus conceitos e definições, no entanto, possuem um caráter complexo e abstrato que, aliado a outros fatores, contribui para o surgimento de problemas no ensino que comprometem a aprendizagem dos estudantes e consequente uso em seus respectivos campos de atuação profissional.

Os problemas inerentes ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear se referem principalmente às dificuldades que os alunos enfrentam para tentar compreender noções abstratas, tais como: espaço vetorial, subespaços gerados, base e dimensão. A ênfase que geralmente se dá na "algoritmização", bem como o excesso de formalismo, constituem entraves no ensino dessa disciplina, conforme apontam estudos de Dorier (2000; 2008) e Rogalski (1994) que se dedicaram a compreender os problemas específicos do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear no contexto francês, cujo cenário de dificuldades não difere muito do que acontece em outros países, inclusive no Brasil. Segundo o Dorier (2008)

Nesse caso, há indícios de que esses alunos conseguem encontrar a solução de modo meramente mecânico, via algoritmo, sem necessariamente compreender seu sentido e significado dentro da teoria de espaço vetorial. No entanto, apesar das consequências negativas desses problemas de natureza didática para a aprendizagem discente, ainda é essa a postura habitual de professores de matemática de nível superior, que geralmente seguem em suas aulas, o padrão: definição, teorema, demonstração, exercício.

Compreende-se que a superação dessas dificuldades perpassa pelo trabalho docente em sala de aula. A maneira como acontece a mediação do professor pode ser determinante para aprimorar o pensamento matemático do aluno, levando-o a desenvolver processos de representação, síntese, generalização e abstração, cujo desenvolvimento requer prática e o hábito da reflexão sobre a experiência matemática. Há, portanto, a necessidade de um ensino que proporcione mais ação ao aluno em sala de aula, no sentido de motivá-lo a refletir sobre os conteúdos trabalhados, buscar soluções, traçar estratégias, analisar seus erros, aprendendo assim a ter mais autonomia na construção de seu conhecimento matemático.

Autores como Tall (1995), Dreyfus (2002) e Dubinsky (2002) defendem que o ensino baseado unicamente na exposição de conteúdo, pouco favorece o desenvolvimento cognitivo discente em sala de aula, uma vez que ao apenas reproduzir o que lhe foi passado, o aluno, não adquire o hábito de refletir sobre os conceitos trabalhados e seus porquês matemáticos. É necessário que o estudante ao chegar no ensino universitário possa ser estimulado a passar do pensamento matemático elementar ao pensamento matemático avançado, melhorando assim sua forma de lidar com os conceitos, definições e abstrações.

Nesse sentido, traz-se a metodologia de ensino nominada Sequência Fedathi (SOUSA et al., 2013), cujos pressupostos teórico-metodológicos coadunam com essa perspectiva. Constituída por quatro fases – *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova* – pode proporcionar um ensino que sai dos moldes do ensino tradicional, conforme verificado por Barroso (2009), Alves (2011), Fontenele (2013), Nasserala (2014), entre outros, que investigaram a aplicação dessa metodologia no ensino de matemática superior.

Assim, nesta pesquisa aborda-se o ensino da Álgebra Linear, especificamente, os conceitos abstratos, como espaço vetorial, base e dimensão, dando ênfase à construção conceitual, que de certa forma, desconstrói a sequência: "definição-teorema-prova-exemplificação", na qual estas noções são geralmente ensinadas. Destaca-se desse modo, a maneira como o professor pode estar conduzindo o processo de ensino, observando suas implicações para o desenvolvimento do pensamento matemático discente.

3. OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS

Objetivo Geral: Explorar conceitos abstratos de Álgebra Linear na perspectiva de um ensino centrado na construção conceitual e ação discente em sala de aula, mediado por meio da metodologia Sequência Fedathi.

- ✓ Realizar sequências didáticas mediadas segundo a Sequência Fedathi, abordando os conceitos de espaço vetorial, subespaço gerado, base e dimensão;
- ✓ Conhecer os reflexos dessa forma de ensino na compreensão dos conceitos trabalhados e na formação docente dos alunos participantes da pesquisa.

4. JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA DO PROJETO EM FACE AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

A motivação desse estudo se dá pela compreensão da complexidade que envolve os problemas inerentes ao ensino dos conteúdos da Álgebra Linear, que surgem diante da crescente importância dessa disciplina para o cenário científico e tecnológico, em que cada vez mais seus conceitos e aplicações se fazem necessários aos profissionais da área das ciências exatas e afins.

O convívio com essa realidade e a convicção de que alguma intervenção pode ser feita para a melhoria no ensino dessa disciplina, remete a buscar novas formas de abordar os conteúdos em sala de aula, de modo que a mediação docente preconizada pela Sequencia Fedathi, condiz com esta perspectiva. Segundo Fontenele (2013) a Sequência Fedathi valoriza a ação discente em sala de aula, direcionando o aluno ao fazer cientifico à medida que oportuniza e instiga a curiosidade, a descoberta, a reflexão, o levantamento de hipóteses, as validações, advindas da ação do próprio aluno, não apenas imposta ou transmitida por meio externo (professor).

Este projeto se torna relevante à medida que possibilita ampliar as reflexões sobre o ensino da Álgebra Linear e da matemática como um todo, podendo despertar diferentes percepções e atitudes na práxis docente, suscitando a vontade de reelaborar a forma de abordagem dos conceitos matemáticos discutidos, percorrendo caminhos favoráveis à reflexão discente sobre as noções abstratas da Álgebra Linear e buscando superar as dificuldades inerentes ao próprio conteúdo.

5. METODOLOGIA

Para explorar conceitos abstratos de Álgebra Linear na perspectiva de um ensino centrado na construção conceitual e ação discente em sala de aula, pretende-se realizar, no contra-turno, um curso de 40h, planejado e executado com base nos pressupostos teórico-metodológicos da Sequência Fedathi, abordando os conceitos de espaço vetorial, subespaço gerado, base e dimensão.

Para conhecer os reflexos dessa metodologia na compreensão dos conceitos trabalhados e formação docente dos alunos participantes da pesquisa, serão coletados dados através de:

- Observação participante;
- Questionários;
- Entrevista Semi-Estruturada.

A Análise dos resultados se dará numa abordagem qualitativa (LAVILLE; DIONE, 1997). O registro das aulas do curso se dará por meio de gravações em áudio e/ou vídeo, bem como, diário de campo. Além disso, contar-se-á com a presença de 3 monitores voluntários, que já tenham cursado a disciplina Álgebra Linear, atuando como observadores externos, que registrarão suas impressões, falas dos participantes do curso, bem como fornecer um *feedback* ao término de cada aula, para que se possa ter uma melhor visão do andamento do curso e ainda evitar perda de dados importantes.

Participarão do curso 20 alunos que já tenham cursado a disciplina Álgebra Matricial, mas que não tenham cursado Álgebra Linear. Terão direito a certificação, caso concluam até 70% da carga horária.

6. RESULTADOS ESPERADOS/FORMA DE DIVULGAÇÃO/APLICAÇÃO DOS RESULTADOS

Espera-se que os alunos participantes do projeto, executado na forma de um curso de 40h, possam:

- ✓ Estudar as noções abstratas da Álgebra Linear de maneira mais participativa e reflexiva em sala de aula;
- ✓ Vivenciar a aprendizagem matemática como um processo construtivo, em detrimento da mera repetição de técnicas desprovidas de relações e significados;
- ✓ Desenvolver habilidades de representar, sintetizar, generalizar e abstrair;
- ✓ Compreender o ensino e aprendizagem de matemática como um processo e não como produto pronto e acabado;
- ✓ Ampliar suas concepções sobre como ensinar matemática com vistas a construção do conhecimento;

A divulgação dos resultados se dará por meio de publicação em eventos e periódicos especializados, bem como na página do curso.

7. CRONOGRAMA

ATIVIDADES	ago 2016	set 2016	out 2016	nov 2016	dez 2016	jan 2017	fev 2017
Planejamento e elaboração do curso	■	■	■	■			
Abertura das inscrições				■			
Realização do curso			■	■	■		
Análise dos dados e divulgação dos resultados						■	■

8. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. **Aplicação da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do cálculo a variáveis**. Tese de doutorado em Educação. Universidade Federal do Ceará – UFC, 2011.

BARROSO, N. M. C. **Um modelo de ensino dos conceitos de cálculo para os cursos de engenharia fundamentado em uma epistemologia histórica e baseado na metodologia da engenharia didática:** validação por meio do conceito de integral. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

DORIER, Jean-Luc. et al. **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, Jean-Luc. **Recherche en Histoire et em Didactique des Mathématiques sur l'Algebre Linéaire** – perspequitives théorique sur leurs interations. Les Cahiers Du Laboratoire Leibniz. Nº 12. Grenoble, France. 2008. Disponível em: <http://www-leibniz.imag.rf/LesCahiers> Acesso em: 10 Mar. 2012.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.**New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *In*: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

FONTENELE, F. C. F. **A Sequência Fedathi no ensino da Álgebra Linear:** o caso da noção de base de um espaço vetorial. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/7521/1/2013-DIS-FCFFONTENELE.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2014.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. São Paulo, SP: Artmed Editora, 1997.

NASSERALA, A. M. **Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na Sequência Fedathi:** o caso da integral imprópria. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

ROGALSKI, M. **L'enseignement de l'algebre lineaire en primiere annee de DEUG A.** GAZETTE DES MATHÉMATICIENS, nº 60, avril 1994.

SOUSA, F. E. E. *et al*. (Org.). **Sequência Fedathi**: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: **Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, 1995, Recife, 1995. v. 1, p. 161 - 175.