Universidade Federal do Ceará – UFC
Faculdade de Educação – FACED
Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira
Curso de Doutorado em Educação

Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES

FORTALEZA/CE

2011

Aplicação da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do Cálculo a Várias Variáveis

Tese apresentada à Banca examinadora da Universidade Federal do Ceará, como exigência parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação, sob a orientação do prof. Dr. Hermínio Borges Neto

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

FORTALEZA/CE

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências Humanas

A479a Alves, Francisco Regis Vieira.

Aplicação da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do Cáculo a Várias Variáveis / Francisco Regis Vieira Alves – 2011.

397 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza, 2011.

Área de Concentração: Métodos e técnicas de ensino.
Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.
Coorientação: Prof. Dr. Paulo Meireles Barguil.
Profa. Dra. Marcília Chagas Barreto.

1.Cálculo diferencial – Estudo e ensino – Fortaleza(CE). 2.Variáveis(Matemática) – Estudo e ensino – Fortaleza(CE). 3.Cálculo diferencial – Ensino auxiliado por computador. 4.Variáveis (Matemática) – Ensino auxiliado por computador. 5.Fedathi,Seqüência. 6. Semiótica. 7.Percepção. 8.Intuição. 9.Aprendizagem por atividades – Fortaleza(CE). 10.Sistemas de ensino – Fortaleza(CE) – Projetos. 11.Matemática – Estudo e ensino(Superior) – Fortaleza(CE). 12.Instituto Federal de Educação,Ciência e Tecnologia do Ceará. I. Título.

CDD 378.1734098131

Francisco Regis Vieira Alves

Aplicação da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do Cálculo a Várias Variáveis

Tese apresentada em: 28/11/2011

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto – Orientador
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof.ª Dr. ª Marcília Chagas Barreto – Co-orientadora
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. Paulo Meireles Barguil – Co-orientador
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. Guilherme Aguiar Lincoln Ellery
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof.ª Dr. ª Tânia Maria Mendonça Campos
Universidade Bandeirantes – UNIBAN

Profª. Dr. ª Marlene Alves Dias
Universidade Bandeirantes - UNIBAN

Fortaleza-CE, Brasil
Novembro - 2011

AGRADECIMENTOS

Na condição de um humilde professor de Matemática, agradeço ao meu orientador, matemático e professor, Hermínio Borges Neto.

Pela paciência da professora Marcília Chagas Barreto que atuou de modo decisivo também em minha orientação.

Pelas considerações incisivas do professor Paulo Meireles Barguil e sua paciência na orientação de questões importantes deste trabalho.

Ao professor Guilherme Ellery pelas indicações e sugestões relacionadas à fundamentação matemática envolvida na tese.

Agradeço também a participação da professora Tânia Maria Medonça Campos que inspirou uma visão ampliada da área de estudo que chamamos de Educação Matemática.

Agradeço os momentos de considerações e sugestões concedidas pela professora Marlene Alves Dias, nas ocasiões em que estive presente no Programa de Pós-graduação da Universidade Bandeirantes em São Paulo.

RESUMO

Este estudo trata do ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis - CVV. Seu objetivo geral foi a identificação/descrição das categorias do raciocínio intuitivo ao longo das fases de ensino da metodologia nominada *Sequência Fedathi*. A estruturação e a concepção de situações didáticas de ensino envolvendo situações-problema diferenciadas, entretanto, com respeito aos rituais algorítmicos identificados nos livros didáticos de CVV, foram atingidos com base numa visão de complementaridade entre a *Teoria das Representações Semióticas* e as categorias do raciocínio intuitivo descrita por Fischbein (1987), exploradas nas quatro fases previstas pela *Sequência Fedathi*. Assim, iniciamos o trabalho com o levantamento e compreensão do ensino e da aprendizagem do Cálculo em Uma Variável Real – CUV e dos poucos estudos científicos desenvolvidos, tanto no Brasil como no Exterior acerca do ensino do CVV. Damos ênfase final à descrição da *transição interna* do CUV para o CVV, o que não se observa em estudos acadêmicos. Em seguida, com a intenção de delinear, caracterizar, discutir e compreender a natureza do principal raciocínio que tencionamos registrar, discutimos a natureza epistemológica, filosófica e psicológica do raciocínio intuitivo, suas categorias (*intuição afirmativa*, *intuição conjectural* e *intuição antecipatória*) e outras faculdades psíquicas vinculadas a este, nomeadas por percepção e *insight*. Depois de caracterizar um ensino de CVV apoiado na crença e na certeza matemática, apresentamos e discutimos os principais elementos da *Sequência Fedathi* e das teorias propostas por Fischbein (1987) e Duval (1991; 1995a). Em seguida, no que diz respeito ao desenvolvimento da pesquisa e a investigação de campo, com arrimo no viés de complementaridade destas teorias, analisamos obras didáticas reconhecidas de CVV, que servem como referência de estudo, com a intenção de identificar e superar possíveis entraves no tocante à elaboração das atividades aplicadas aos estudantes. Os dados empíricos foram obtidos por meio de documentos produzidos por um grupo de oito estudantes escolhidos em uma amostra total de 80 alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE – Fortaleza, no período de 2009/2010, matriculados na disciplina Cálculo III, por meio de entrevistas *semiestruturadas* efetuadas durante e após as atividades, de modo individual e com o registro visual do momento em que desenvolveram suas estratégias. Todavia, para efeito de discussão no corpo da tese, apresentamos apenas oito estudantes. No final deste estudo, podemos dizer que a exploração didática de categorias do raciocínio intuitivo (*intuição afirmativa*, *intuição conjectural* e *intuição antecipatória*), com base em uma mediação didática que envolveu a exploração de registros de representação semiótica, pode proporcionar a evolução do conhecimento do estudante a respeito dos conceitos principais do CVV. Para tanto, o apoio computacional, com o emprego de *softwares* como o *Geogebra* e do *CAS Maple*, pode indicar elementos mais significativos no que diz respeito à *transição interna* do CUV para o CVV. Outro ponto relevante concerne à importância do estímulo à elaboração de imagens mentais produzidas pelo ensino que estimula a intuição matemática, a produção de metáforas e a apreensão perceptual dos objetos em 3D do CVV e, deste modo, a evolução de crenças e valores epistêmicos não contraditórios relativos às propriedades formais do CVV.

Palavras-Chave: Sequência Fedathi; Intuição; Cálculo a Várias Variáveis; Representações semióticas.

ABSTRACT

This study focuses on the teaching / learning of the Differential and Integral Calculus Several Variables - CVV. Its general objective was the identification / description of the categories of intuitive reasoning through the phases of the methodology of teaching sequence Fedathi nominated. The structure and design of didactic teaching situations involving different problem situations, however, with respect to the rituals algorithmic identified in textbooks of VVC, were reached based on a vision of complementarity between the Representation Theory of Semiotics and the categories of intuitive reasoning described by Fischbein (1987), explored in the four planned phases of the sequence Fedathi. So we started the work to the study and understanding of teaching and learning of calculus in one real variable - CUV and the few scientific studies developed in Brazil and abroad about the teaching of the CVV. We emphasize the final description of the internal transition of the CUV for the CVV, which is not observed in academic studies. Then, with the intention to outline, describe, discuss and understand the nature of the main reason that we intend to register, we discuss the epistemological, philosophical, psychological and intuitive reasoning, their categories (yes intuition, intuition conjectural anticipation and intuition), and other linked to this psychic, named for insight and perception. After characterizing a teaching CVV supported in belief and mathematical certainty, we present and discuss the main elements of the sequence Fedathi and theories proposed by Fischbein (1987) and Duval (1991, 1995a). Then, with regard to the development of research and field research, with the breadwinner bias complementarity of these theories, we analyze the textbooks recognized CVV, which serve as a reference study, with the intention to identify and overcome potential barriers regarding applied to the preparation of activities for students. The total empirical data were obtained from documents produced by a group of eight students chosen from a total sample of 80 students of Bachelor in Mathematics at the Federal Institute of Education, Science and Technology - IFCE - Fortaleza, enrolled in Calculus III course through semi-structured interviews conducted during and after the activities, both individually and with the visual record of the time developed their strategies. However, for purposes of discussion in the body of the thesis, we present only eight students. At the end of this study, we can say that the exploitation of didactic categories of intuitive reasoning (affirmative intuition, insight and intuition anticipatory conjectural), based on a didactic mediation involving the exploitation of semiotic registers of representation, can provide the development of knowledge of students about the concepts of the CVV. For this, computer support, with the use of software such as Maple CAS Geogebra and may indicate the most significant with regard to the internal transition of the CUV for the CVV. Another important point concerns the importance of stimulating the production of mental images produced by the teaching that encourages mathematical intuition, the production of metaphors and perceptual apprehension of objects in 3D CVV and thus the evolution of epistemic beliefs and values not contradictory for the formal properties of the CVV.

Key-words: Fedathi Sequence; Intuition; Multivariable Calculus; Semiotic Representations.

RESUMÉ

Cette étude se concentre sur l'enseignement / apprentissage du différentiel et calcul intégral Plusieurs variables - CVV. Son objectif général était l'identification / description des catégories de raisonnement intuitif à travers les phases de la méthodologie de séquence d'enseignement Fedathi nominé. La structure et la conception des situations d'enseignement didactique impliquant des situations problématiques différentes, cependant, à l'égard des rituels algorithmique identifiés dans les manuels de VVC, ont atteint basé sur une vision de complémentarité entre la théorie des représentations de la sémiotique et les catégories de raisonnement intuitif décrit par Fischbein (1987), exploré dans les quatre étapes prévues dans la Fedathi séquence. Nous avons donc commencé les travaux à l'étude et la compréhension de l'enseignement et l'apprentissage du calcul à une variable réelle - CUV et le peu d'études scientifiques développés au Brésil et à l'étranger sur l'enseignement de la CVV. Nous insistons sur la description finale de la transition interne de la CUV pour le CVV, qui n'est pas observée dans les études universitaires. Puis, avec l'intention de présenter, décrire, discuter et comprendre la nature de la principale raison pour laquelle nous avons l'intention d'enregistrer, nous discutons de l'épistémologique, le raisonnement philosophique, psychologique et intuitive, leurs catégories (oui l'intuition, l'intuition conjecturale d'anticipation et de l'intuition), et d'autreslié à cette psychique, nommée pour la perspicacité et la perception. Après la caractérisation d'un enseignement de CVV pris en charge dans la croyance et certitude mathématique, nous présenter et discuter les principaux éléments de la séquence et Fedathi théories proposées par Fischbein (1987) et Duval (1991, 1995a). Puis, à l'égard du développement de la recherche et de la recherche sur le terrain, avec le soutien de la complémentarité biais de ces théories, nous analysons les manuels scolaires reconnus CVV, qui servira d'étude de référence, avec l'intention d'identifier et de surmonter les obstacles potentiels au sujet appliquée à la préparation des activités pour les étudiants. Les données empiriques au total ont été obtenus à partir des documents produits par un groupe de huit élèves choisis parmi un échantillon total de 80 étudiants du baccalauréat en mathématiques à l'Institut fédéral de l'Education, la Science et Technologie - IFCE - Fortaleza, inscrits en calcul bien sûr III par le biais d'entretiens semi-structurés menées pendant et après les activités, à la fois individuellement et avec l'enregistrement visuel de l'époque au point leurs stratégies. Toutefois, aux fins de discussion dans le corps de la thèse, nous présentons seulement huit élèves. A la fin de cette étude, nous pouvons dire que l'exploitation des catégories didactique de raisonnement intuitif (l'intuition positive, la perspicacité et conjecturale intuition anticipatrice), basée sur une médiation didactique impliquant l'exploitation des registres sémiotiques de représentation, peut assurer le développement de la connaissance des élèves sur les concepts de l'CVV. Pour cela, le soutien informatique, avec l'utilisation de logiciels tels que Maple CAS Geogebra et peut indiquer les plus significatifs à l'égard de la transition interne de la CUV pour le CVV. Un autre point important concerne l'importance de stimuler la production d'images mentales produites par l'enseignement qui encourage l'intuition mathématique, la production de métaphores et d'appréhension perceptive des objets en 3D CVV et donc l'évolution des croyances et des valeurs épistémiques pas contradictoire pour les propriétés formelles de l'CVV.

Mots-clées: Sequence Fedathi ; Intuition; Calcul a Plusieurs Variables; Représentations Sémiotiques.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

É bastante compreender o ponto de vista dos matemáticos que se ocuparam da resolução de problemas topológicos na segunda metade do século XIX. Quando tratavam de curvas, superfícies e, depois com variedades em dimensões arbitrárias, com sua intersecção e existência admitida sob várias condições, etc. Eles se apoiaram exclusivamente na intuição e, entretanto seguiram com o ímpeto característico dos passos de Riemann, comportando-se exatamente como os analistas dos séculos XVIII e XIX quando tratavam das questões de convergência ou continuidade (DIEUDONNÉ, 1989, p. 15).

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo principal a descrição e a adequação das categorias intuitivas (*intuição afirmativa*, *intuição conjectural* e *intuição antecipatória*) às fases de ensino do previstas pela proposta metodológica nominada *Sequência Fedathi* – SF. Tais categorias intuitivas são assumidas como essenciais para a evolução do processo de ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis.

Em razão da natureza complexa do raciocínio fundado na intuição, assumimos a importância da aplicação de uma metodologia de ensino que possibilite tal descrição; deste modo, optamos pela metodologia chamada de *Sequência Fedathi* - SF, com a intenção de realizar uma abordagem diferenciada com respeito às que observamos nos livros didáticos deste conteúdo, e com relação também às práticas de ensino preocupantes descritas em trabalhos acadêmicos citados neste ensaio.

Por outro lado, para que nos certificamos de que nossa mediação didática não permanece restrita ao quadro recorrente de exploração algorítmica das ideias do Cálculo, e proporciona de fato a apreensão perceptiva e a intuitiva de propriedades específicas destes conceitos, inclusive suas propriedades geométricas, diante de situações-problemas geradoras de conflitos cognitivos, empregamos as noções de *formação*, *tratamento* e *conversão* de registros de representação semiótica concebidas por Duval (1996). Seu inicial uso referendou a análise de três obras didáticas de CVV e a estruturação das situações-problema aplicada no estudo, além de fundamentar determinadas escolhas e posições didáticas assumidas no decorrer de cada sessão de ensino, apresentadas a um total de 80 alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE – Fortaleza – Ceará, no período de 2009/2010.

Note-se que a *Sequência Fedathi*, se apresenta estruturada em quatro fases de ensino ou momentos didáticos. Deste modo, ao longo do desenvolvimento desta investigação, procuramos adequar, caracterizar e descrever as formas de manifestação do *raciocínio intuitivo* para cada um de suas fases de ensino (*tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*).

Ademais, para conceber e aplicar uma experimentação, baseada em sequências de ensino, com uma atenção direcionada para os pontos destacados há pouco, tornou-se premente um levantamento do quadro atual do ensino de Cálculo na Universidade. Assim, no Capítulo 1, salientamos alguns dos resultados obtidos em estudos empíricos e a opinião de pesquisadores a respeito do assunto, com uma atenção especial voltada ao emprego de recursos tecnológicos como suporte à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Uma Variável Real - CUV. No mesmo segmento, discutimos ainda uma aplicação inusitada da noção de Conflitos Teóricos Computacionais – CTC no âmbito do ensino do CVV. Além disso, descrevemos, identificamos entraves e obstáculos relacionados à etapa de *transição interna* vivenciada pelos estudantes de graduação, entre a disciplina de CUV para a disciplina de CVV, algo que ainda não mereceu a devida atenção por parte dos pesquisadores, tanto no Brasil como no Exterior.

Discutimos na literatura especializada problemas de ordem epistemológica, filosófica, psicológica e didático-metodológica, relacionados à natureza da faculdade cognitiva que priorizamos explorar no decorrer da aplicação de nossa metodologia de ensino, conhecida como intuição.

Deste modo, no Capítulo 2, analisamos a opinião, os consensos e divergências a respeito da importância do papel da *intuição*, sua função na atividade inventiva, criativa e solucionadora de problemas, além de outras faculdades psicológicas que podem fornecer subsídios para a descrição das categorias intuitivas que tencionamos estimular por meio de nossa mediação didática. Destacadamente, ainda, as noções comumente estudadas na área da Psicologia Cognitiva chamadas de *percepção* e *insight*. Ao final deste capítulo, assumimos alguns posicionamentos epistemológicos e filosóficos que nos auxiliarão a caracterizar o raciocínio intuitivo, necessário em uma abordagem de ensino baseada na *crença* ou na *certeza* do conhecimento matemático do CVV.

No Capítulo 3, descrevemos a metodologia de ensino chamada de *Sequência Fedathi*- SF, que possibilita a criação de um clima experimental de investigação em Matemática. Em seguida, exibimos e adaptamos as noções de *formação*, *tratamento* e *coordenação* de *representações semióticas*, devidas a Duval (1995), ao nosso objeto matemático de ensino, fazendo referência aos momentos e fases de ensino descritas na SF, na medida em que, com suporte nos elementos apontados no Capítulo 2, indicamos as formas/categorias de *raciocínio intuitivo* adequadas para estas fases. Tais categorias intuitivas foram extraídas das concepções de Fischbein (1987).

No Capítulo 4, trazemos o desenvolvimento da pesquisa, destacando determinadas etapas deste trabalho que apresentam algumas das características previstas nas etapas da *Engenharia Didática*. A discussão no Capítulo 4 se apoia nos elementos evidenciados nos capítulos anteriores, os quais compuseram os momentos das *análises preliminares* (Capítulo 1), *análises a priori* (Capítulos 2 e 3), como também nos dados inferidos com a *aplicação* e *observação das atividades* dos sujeitos participantes, ao longo das sete atividades propostas neste estudo.

Constituindo ainda parte de nossas *analises preliminares*, acrescentamos o exame das principais obras didáticas adotadas no ensino ordinário desta disciplina, acessíveis no IFCE, tradicionalmente disponibilizadas aos alunos da disciplina Cálculo III. Os resultados desta análise de livros em que empregamos Duval (1991; 1995), nos auxiliaram na estruturação das situações-problema empregadas no estudo.

Para concluir o módulo, realizamos uma análise das sete tarefas estruturadas a partir dos dados relevantes colhidos nas seções anteriores, os quais foram aplicados na etapa de *experimentação* da pesquisa desenvolvida no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Campus Fortaleza, que demandou um período de quatro semestres, no período 2009/2010.

No Capítulo 5, discutimos os dados da *aplicação* e *experimentação* da SF, aportamos os resultados mais proeminentes colhidos das *entrevistas semi-estruturadas* realizadas individualmente com um grupo de quatro alunos (e mais quatro no anexo II), nos momentos de aulas de 'tira dúvidas', e quando da aplicação das sete atividades distribuídas em dois momentos avaliativos após abordagem dos conteúdos previstos na disciplina Cálculo III. Note-se que as entrevistas foram realizadas antes, durante e após a aplicação das sete tarefas estruturadas. Neste capítulo, encontram-se também os dados referentes à análise das *concepções* dos estudantes referentes à *transição interna* do Cálculo do CUV para o CVV, discutidas na perspectiva de Duval (1991).

Por fim, encerramos com o Capítulo 6, retomando alguns elementos pertinentes à metodologia de ensino, a qual nos auxiliou para efetivar da mediação didática dos conteúdos do CVV. Rediscutimos, também, com referências aos dados obtidos empiricamente, as potencialidades e limitações da *Teoria das Representações Semióticas*, empregadas neste estudo com um determinado grau de ineditismo, relacionado ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis - CVV, seguido de explicações e sugestões a respeito do uso do *software Maple*, inclusive suas potencialidades didáticas e possíveis limitações, relativamente à sua exploração efetiva em sala de aula.

Encerramos a trabalho, discutindo pontos importantes, originados da prática e convívio direto com os estudantes, que apontam respostas aceitáveis no âmbito do ensino/aprendizagem, com arrimo no raciocínio intuitivo na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV.

Capítulo 1: ESTUDO SOBRE O ENSINO DO CÁLCULO NA UNIVERSIDADE

De início, traçamos um contexto geral do ensino no *locus* acadêmico de Matemática e, de modo particular, com ênfase no Cálculo. Para referenciar determinados pressupostos que declaramos importantes vinculados ao seu ensino, destacamos figuras emblemáticas do século passado, que desenvolveram intensivo trabalho em Matemática Pura e que não se furtaram a sistematizar orientações para melhorias no ensino/aprendizagem desta matéria em sua época. Outro ponto de relevo delatado diz respeito aos estudos desenvolvidos nos anos 80 aos dias atuais sobre as noções de *limite*, *derivada* e *integral*.

1.1 Considerações sobre o ensino do Cálculo

> É importante saber como os estudantes resolvem vários tipos de problemas matemáticos, que dificuldades eles devem encontrar e a fonte de tais dificuldades, os erros sistemáticos que cometem, e assim sucessivamente. (FISCHBEIN, 1993, p. 161; tradução nossa)

> [...] uma característica importante de nossa definição do pensamento matemático avançado é a combinação da necessidade de raciocínio dedutivo e rigoroso a respeito dos conceitos e o fato de que estes conceitos não são acessíveis ao indivíduo por intermédio dos cinco sentidos. (EDWARDS; DUBINSKY; MCDNALD, 2005, p. 18; tradução nossa)

Com a evolução da Matemática e a sua subdivisão em vários ramos, a linguagem, as notações e as *definições formais* adquiriram papel cada vez mais essencial e decisivo. A evolução e, consequentemente, a complexidade das simbologias que representam os objetos matemáticos são conseqüências da generalização das formas de abstração, cognição e memória necessárias para a apreensão destas entidades conceituais abstratas peculiares da Matemática.

Tamanha evolução, entretanto, tem seu preço, afinal, nossas formas de pensamento não conseguem apreender tudo o que nos circunda no âmbito da percepção do sensível, quiçá os objetos matemáticos produzidos pela abstração. Lacroix (1838, p. 150), com uma preocupação semelhante, lembrava que

> A comunicação de nossos pensamentos não pode se efetuar sem o auxílio de signos; a formação destes signos que, para ser bem feita, deve tomar em consideração a ligação das ideias, e uma sequência imediata da lógica; mas, infelizmente, o espírito filosófico nem sempre presidiu a construção das línguas, e a que nós fazemos uso

apresenta suas imperfeições, parece ainda pertencer mais ao domínio da memória do que ao do julgamento. (tradução nossa)

Observamos que o Matemático francês, ao tempo em que destaca a importância do aparato simbólico utilizado na atividade matemática, argumenta em seguida que o seu bom emprego é possibilitado apenas na condição de uma boa organização das ideias, embora tudo dependa, em última instância, de uma boa memória e sistematização da atividade de raciocínio abstrativo e lógico.

As palavras do professor da escola politécnica de Paris, Sylvestre-François Lacroix[1] (1765-1843), são produzidas num âmbito de preocupação com o ensino, algo marcante em sua produção acadêmica. Além disso, elas são de uma contemporaneidade indiscutível, quando, por exemplo, focamos o ensino do *Cálculo Diferencial* e *Integral*.

De fato, um dos elementos que mereceram a preocupação de Lacroix no ensino de Matemática diz respeito ao excessivo emprego de *definições matemáticas* e simbologias. Com efeito, ele mencionou que "o próprio Pascal sentiu o abuso de definições, e as reduziu ao seu valor justo, isto é, a descrições e a imposições do nome; mas longe de prescrever ainda uma maneira de raciocinar." (LACROIX, 1838, p. 219).

Não apenas este tipo de abuso no contexto do ensino era criticado por Lacroix (1838, p. 185). De fato, quando observava as obras didáticas de sua época, alertava

> No que diz respeito aos objetos mais complicados, não existe algo mais inconveniente ao recorrer aos livros; e eu não vejo nenhuma necessidade de mudar seu modo de demonstração e de fórmulas. O que é necessário possuir é a marcha do método, o valor de seus termos técnicos, a inteligência dos idiotismos na linguagem, ou a faculdade de extrair o sentido das frases e as formas de expressão particulares dos principais escritores que trataram a ciência, a fim de poder a uma simples leitura, compreender suas obras. (tradução nossa)

No excerto acima, o insigne professor questiona a metodologia empregada nos livros didáticos e mantém sua atenção ao próprio modo de organização e estruturação do *saber matemático* de sua época. Lacroix (1838, p. 168) lembra que apresentava, perante auditórios numerosos, os métodos concebidos. Sua aplicação poderia confirmar a necessidade de modificá-los algumas vezes. Então, obtinha procedimentos metodológicos próprios que poderiam assegurar o sucesso dos seus livros.

Neste âmbito de reflexão, explicava que o ensino de Ciências era submetido a regras semelhantes às artes ao mencionar que "a escolha de exemplos é mais importante

---

[1] No que diz respeito à atividade de ensino ele se referia da seguinte forma: "completamente entregue ao trabalho do ensino, eu sempre voltei às minhas meditações sobre o modo de apresentar os resultados da ciência por meio de fatos os mais simples e na ordem mais natural." (LACROIX, 1838, p. 167).

do que sua quantidade; qualquer verdade bem aprofundada esclarece muito mais sobre o método do que um grande número de teorias que discutem de uma maneira incompleta." (LACROIX, 1838, p. 169).

Por parte do aluno, ele destaca a noção de que, em cada Ciência, encontramos coisas que não podem ser ensinadas diretamente pelo professor. Estes elementos deveriam ser adquiridos por meio do desenvolvimento de hábitos de estudo dos alunos como, por exemplo, os procedimentos próprios que a Aritmética e a Álgebra prescrevem ou as construções peculiares da Geometria.

Em virtude da quantidade de procedimentos nesses ramos da Matemática, Lacroix (1838, p. 170) orientava no sentido de que "a memória seria necessária para a condução das descobertas, pois esta forneceria, à medida que se necessita da segurança, o que nos libertaria dos livros". A única forma de o professor cultivar, porém, tal memória nos seus alunos é o uso frequente dos livros, sem que se caracterize um trabalho forçado e de repetições contínuas, como vemos hoje em dia as repetições e mecanizações de rotinas matemáticas sem sentido.

Sublinhamos a ideia de que os aspectos criticados por Lacroix podem ser identificados tanto no discurso diário do professor de Matemática, manifestando-se em mediação didática, como no repertório veiculado pelos livros didáticos. Assim, concordamos com Ehrlich (1980, p. 186), quando assume em seu estudo a hipótese de que

> Quando um sujeito lê um texto, ele constrói uma representação deste texto, que inclui um maior ou menor número de conceitos e relações que dependem das intenções do leitor e dos objetivos que ele quer alcançar, sendo isto consciente ou não. Em outras palavras, eu considero que a representação elaborada pelo sujeito reflete sua compreensão do texto. (tradução nossa)

O discurso desenvolvido pelo autor, entretanto, pode ser decisivo na promoção e estímulo destas representações. Vale observar que a linguagem característica de cada ramo da Matemática pode ser mais ou menos propensa a uma compreensão mais rápida do leitor. Neste sentido, Condorcet (1903 *Apud* GOMES, 2003, p. 2) declara

> Ouvi um grande filósofo censurar a Álgebra por querer conduzi-lo à verdade de uma maneira despótica, sem lhe dizer por que se lhe fazia seguir tal ou qual caminho, e como se chegava a saber que ele levaria ao resultado desejado: ele confessava que esse defeito, não do método em si, mas dos livros, inspirava-lhe uma espécie de desgosto involuntário por esse estudo. (tradução nossa)

Notamos que o Filósofo salienta o lado muitas vezes pouco compreensível e cifrado da linguagem algébrica tradicionalmente explorada pelos autores de livros e, consequentemente, no ensino. Além disso, seu uso inapropriado propicia o surgimento de sentimentos negativos e aversão ao conhecimento matemático. Vale recordar a mediação impregnada pelo espírito *formalista*[2], não assume como prioritário o ato de promover de modo frutífero a produção e a diversificação do repertório de representações mentais do estudante.

Por outro lado, muitos pensadores sustentam que a intuição (BOREL, 1905; BUTCHART, 2001; BUNGE, 1996; BURTON, 1999; FISHBEIN, 1987, 1993; KLEIN, 1893; POINCARÉ, 1904; 1905) assume um papel essencial, tanto na investigação como no processo de ensino da Matemática e, consequentemente, no ensino/aprendizagem do Cálculo. Note-se que, com origem nas considerações destes autores, a exploração da intuição pode evitar consideráveis malefícios no ensino; entretanto, temos que compreender seu papel em duas frentes distintas: a primeira diz respeito à formulação do *saber matemático* e a segunda no *locus* onde se processa o seu ensino/aprendizagem.

Para discutir a elaboração ou formulação do *saber matemático* e extrair implicações para o ensino acadêmico, particularmente no ensino de Cálculo, temos que recorrer à História da Matemática.

Neste campo de estudo, os objetos conceituais são investigados num âmbito isento de preocupações pedagógico/didáticas. De fato, os momentos de criação e descoberta do *saber matemático* são marcados por solidão, angústia, insegurança, incerteza e, em alguns casos, sofrimento dos homens, que se debruçam diante de problemas homéricos. Neste sentido, Simmons (1992, p. 135) descreve que

> Em 1693, Newton sofria de uma severa indisposição mental acompanhada por ilusões, profunda melancolia, e medo de perseguição. Ele reclamava que não podia dormir, e disse que perdia seu "padrão de consistência mental". [...] Newton parece ser capaz de, quase sem esforço, sustentar a concentração nos seus problemas por horas, dias e semanas, mesmo com a necessidade ocasional de comida e dormindo raramente. (tradução nossa)

Note-se que, na frente pedagógica de manifestação do *saber matemático*, as circunstâncias vivenciadas por Isaac Newton não podem se manifestar explicitamente, embora o hábito do esforço mental deva ser sempre cultivado nos alunos. E uma

[2] Ernest (1991, p. 7) explica que "a visão absolutista do conhecimento matemático consiste em considerá-la como um conjunto de verdades imutáveis. Nesta perspectiva, o saber matemático é construído a partir de verdades absolutas, e representa o único campo de conhecimento". A corrente *formalista* é considerada por Paul Ernest, dentre outras, como uma corrente absolutista da Matemática.

abordagem para o ensino do Cálculo[3] que imprima ênfase, até certo ponto, no modo como tal teoria progrediu, os entraves que foram superados até a concretização do estádio atual, é sempre bem-vinda.

Com efeito, recorrendo aos episódios na história da Matemática, encontramos as contribuições fornecidas por Leibniz à teoria. Simmons (1992, p. 155) explica que

> Leibniz publicou um dos seus primeiros tratados de Cálculo Diferencial na sétima página do artigo intitulado *Acta Eruditorum* de 1684. Os significados das diferenciais dx e dy estava longe de estar claro, e de fato ele nunca esclareceu tal ponto para ninguém de modo satisfatório. Ele estabeleceu que $d(x, y) = xdy + ydx$, $d\left(x/y \right) = \frac{(ydx - xdy)}{y^2}$, e $d\left(x^n\right) = n \cdot x^{n-1}$, porém não tentou explicar ou justificá-las. (tradução nossa)

Neste trecho, podemos conjecturar a noção de que parte das ideias de Leibnitz eram fundadas na intuição[4] e no *feeling* matemático, uma vez que ele as utilizava, e não sabia justificar completamente o porquê do seu emprego; mas obteve um êxito imenso. Neste sentido, Simmons (1992, p. 157) explica que, diferentemente de Newton, que produziu uma grande e memorável obra intitulada *Principia*. Simmons (1992) relata que Leibniz não deixou uma grande obra, entretanto, marcou um "divisor de águas" na história do Cálculo ao aplicar seu modo pessoal de pensamento de ideias e métodos matemáticos inovadores. Percebemos isto num dos trechos de uma carta enviada a um colega, quando relata que

> Nos símbolos, observamos uma vantagem na descoberta bem maior do que eles expressam e a natureza exata e resumida de uma coisa, como se fosse algo pintado; então, decerto o esforço mental é maravilhosamente reduzido. (SIMMONS, 1992, p. 156; tradução nossa)

Qual lição podemos extrair, até o momento para o ensino do Cálculo, com respaldo destes dois grandes mestres? Perante determinados episódios, como os que descrevemos, que modificações se fazem necessárias em nossa prática didático-metodológica? Aos olhos de um principiante, os trechos que comentamos podem parecer apenas pitorescos e episódicos.

---

[3] Grabner (2009, p. 5) recorda-se de que "quando Newton e Leibnitz inventaram o Cálculo no final do século XVII, eles não usaram épsilon e delta. Foram necessários cerca de 150 anos para a sua evolução." Assim, pode parecer difícil para o moderno estudante compreender a base formal atual do Cálculo.

[4] Boyer (1949(a), p. 188) lembra que "não havia inconsistência no pensamento de Newton e Leibnitz, entretanto, não se pode afirmar que eles foram responsáveis pelas ideias e definições do Cálculo nos tempos atuais". Assim, embora tivessem produzido em sua época ideias inovadoras, não conseguiram o mais elevado grau de sistematização e formalização.

De outra parte, com respeito ao professor, que carrega consigo uma formação mais aprofundada do *saber matemático*, por meio da análise pormenorizada do que discutimos, extraímos inúmeras implicações metodológicas para o ensino do Cálculo.

Com efeito, a *intuição* revela elementos que o *processo de formalização*[5] desconsidera ou encobre. Observamos, por exemplo, o significado atribuído por Leibniz à simbologia e/ou a notação em Matemática. Em suas expressões, identificamos o poder da síntese e o menor esforço mental para a realização de determinadas operações.

Na perspectiva de Couturat (1901), Leibniz faz referência clara ao processo mental da abstração que envolve a criação de símbolos e se relaciona de modo íntimo com o raciocínio intuitivo. Por outro lado, Boyer (1949a) relata que ele descrevia um trabalho pessoal, aparentemente isento de uma preocupação didática, embora possamos identificá-la de modo implícito, quando ele mesmo enunciou explicitamente "suas regras e operações, mesmo a mais simples. Leibniz apresentou-as como regras do pensamento algébrico, e explicou que a relação recíproca das potências e das raízes como análogas ao que subsistia entre suas somas e diferenças, ou integrais e diferenciais." (BOYER, 1949a, p. 208).

No pequeno trecho, percebemos sua preocupação com a pormenorização das ideias e dos elementos presentes em sua produção intelectual, o que na atividade matemática[6] não é peculiar. Deste modo, evidenciamos nas considerações de matemáticos profissionais, tanto na frente científica de investigação e produção do *saber matemático*, como na ala pedagógica, a importância da *intuição matemática*.

As práticas desenvolvidas, entretanto, no *locus acadêmico* tomam sentido completamente contrário do percurso histórico com vistas a esvaziar o papel da intuição. Com efeito, Artigue (2002, p. 118) nos informa que "os primeiros resultados provenientes da investigação realizada nos níveis universitários podem ser considerados negativos".

[5] Dreyfus e Eisenberg (1996, p. 267) advertem para a ideia de que, "com a intenção de expressar qualquer proposição matemática, conceito, ou problema, uma representação deve ser utilizada. O professor, entretanto, deve ficar atento, pois uma representação expressará algumas, mas nem todas as informações; explicitará algumas e esconderá outras". Note-se que uma das grandes características do processo de formalização é o emprego de notações e simbologias.

[6] Grugnetti e Rogers (2000, p. 52) explicam que, o cenário típico de apresentação de resultados de pesquisa pode deixar algumas pessoas atônitas. Primeiro, "a sala de leitura não estará superlotada, e o tamanho da audiência não refletirá o nome famoso do cientista, porém consiste de um pequeno número de pesquisadores matemáticos e poucos graduados. Durante a leitura notamos que somente uma pequena parte dos colegas que trabalham no mesmo campo de especialidade estão aptos de compreender a prova do teorema, mesmo diante do esforço dos leitores e inquestionável capacidade".

Mais adiante, a mesma autora assinala que os resultados obtidos “proporcionam evidências estatísticas das limitações tanto das práticas educativas tradicionais como das práticas que favorecem um enfoque formal e teórico, que refletem o estilo Bourbaki” (ARTIGUE, 2002, p. 119). Sabemos, entretanto, que o grupo *Bourbaki* criticou diversos pressupostos defendidos pelos matemáticos que sustentavam a validade dos conhecimentos obtidos por meio da *intuição*.

Deste modo, com apoio nas constatações da pesquisadora francesa Michelle Artigue, referentes ao ensino acadêmico francês, não podemos criar expectativas diferentes em relação ao ensino acadêmico no Brasil. Deixaremos, todavia, parte desta discussão para as sessões seguintes, quando discutiremos de modo específico o ensino de Cálculo, com respeito às noções de *limite*, *derivada* e *integral*, para o caso de Uma e a Várias Variáveis.

Para finalizar, destacamos um fragmento do pensamento do filósofo Condillac, descrito por uma metáfora, e uma comparação descrita por Bertrand (1891) em relação ao estilo matemático de Blaise Pascal e Leibniz. Estas últimas reflexões podem advertir a nós, professores, acerca da capacidade limitada de apreender tudo o que observamos. Isto posto, observamos na sequência as reflexões de Condillac, discutidas em Bertrand (1891, p. 11), quando sugere que

> Imaginemos um castelo que domina uma vasta e abundante planície, na qual a natureza se deleitou em propagar a variedade, e na qual a arte soube aproveitar situações para multiplicá-las e embelezá-las. Atingimos este castelo durante a noite. No dia seguinte, as janelas abrem-se no momento em que o sol começa a dourar o horizonte. E se fecham em seguida. Apesar de esta planície ter-nos sido mostrada apenas por um instante, é certo que vimos tudo o que ela abrange. No segundo instante, receberíamos as mesmas impressões que os objetos causaram sobre nós. Aconteceria da mesma maneira no terceiro dia. Consequentemente, se não tivéssemos fechado as janelas, não continuaríamos a ver o que havíamos visto. O primeiro instante, porém, não basta para conhecermos a planície, ou seja, distinguirmos os objetos que ela abrange: é porque, quando as janelas se fecharam, nenhum de nós pôde se dar conta do que viu. Eis como se pode ver muitas coisas e não apreender nada. (tradução nossa)

As considerações do Filósofo podem esclarecer e inspirar aquele professor que costuma reservar um lugar especial para o conteúdo, uma grande quantidade de conteúdo, em detrimento de uma preocupação com a aprendizagem e seu entendimento, o que é marcante no ensino atual. Perante uma situação crítica, como já mencionamos, uma posição de atenção indicada por Condillac é sempre benquista.

Concluímos, sintetizando duas qualidades por nós defendidas e que deveriam se manifestar em simbiose num professor de Matemática que atua na academia. Tais qualidades são lembradas por Bertrand (1891, p. 283), quando compara Blaise Pascal e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Ele acrescentava que "a Matemática, para eles, se assemelhava mais a um divertimento, jamais a principal ocupação de seu espírito, mas o objetivo de suas vidas".

Com a mesma profundidade e iguais aptidões, seus espíritos, porém, eram dessemelhantes. Leibnitz, curioso de tudo, pouco detalhista, propôs métodos novos, deixando para outros a honra da aplicá-los. Pascal, ao contrário, queria precisar tudo; os resultados somente o interessavam. Leibnitz descobria a árvore, a descrevia e se afastava. Pascal mostrava seus frutos sem dizer sua origem. "Podemos comparar Leibnitz a uma montanha sobre a qual as nuvens não permanecem. Pascal a um vale que esconde suas águas, e acrescentando que a montanha é imensa enquanto o vale profundo é escondido." (BERTRAND, 1891, p. 284).

Dessas últimas reflexões, podemos inferir o seguinte: inicialmente, um professor de Matemática não pode encarar as investigações em sua matéria apenas como necessidade profissional, mas, também, com o objetivo de alimentar o sentimento de beleza que encontra na Matemática, além de transmitir este sentimento cotidianamente aos seus alunos.

Na relação direta com estes, ele pode se orientar pelas ideias de Leibnitz, evitando apresentar os argumentos por completo, abordando as ideias como instrumento de resolução de problemas, mas, também, valorizando-as em si mesmas, como objetos que independem do ambiente em que estão sendo empregadas. A riqueza de detalhes auxilia o conhecimento discursivo, todavia, empobrece o uso da *intuição matemática*.

Sendo assim, a descrição pormenorizada das ilações empregadas, conforme Pascal, é imprescindível, entretanto, deve ocorrer apenas num momento didático adequado que requer maior exatidão, rigor e busca pela *verdade*, como destaca Pascal.

Mostrando apenas seus frutos, o professor pode exibir a face superficial de uma Ciência que a maioria das pessoas toma como "exata", entretanto, tal característica só é alcançada após inúmeros equívocos, e estes devem ser profundamente conhecidos para que possam ser conscientemente evitados.

Note-se que mencionamos no início deste capítulo, alguns aspectos históricos e outros de natureza geral, no contexto do ensino de Matemática e do Cálculo. Muitos destes aspectos mantêm uma atualidade constante nos discursos produzidos por investigações no Brasil e no Exterior. Na próxima seção, continuaremos nossa discussão em torno da intuição e do ensino particular do Cálculo a Uma Variável Real, entretanto, num contexto de debate das pesquisas mais recentes em Educação Matemática.

1.2 Sobre o ensino de Limites e Continuidade

> A definição por $\varepsilon - \delta$ é apresentada numa seção diferente da que as ideias intuitivas sobre limite são discutidas e, em que, os cálculos algébricos para a determinação do limite são descritos. (HARDY, 2009, p. 342; tradução nossa)

No âmbito da pesquisa, no plano nacional e internacional, a quantidade de pesquisas (BARUFFI, 1999; CELESTINO, 2008; CUJÓ, 2003; ECHEVERRY, 2001; GIRALDO, 2004; REVUZ, 1968; 1972; SILVA, 2001; SIERPINSKA, 1987; TALL, 2002; ZUCHI, 2005) sob esta temática é extensa. Desde a década de 1980, encontramos nos estudos de Tall (2002) inúmeras reflexões sobre o assunto, com a intenção de explicar os processos cognitivos necessários para a compreensão e a aquisição deste *objeto matemático* que exige o uso constante de regras formais.

Destacamos dois aspectos relacionados a este conceito, aptos a funcionar como fatores que dificultam o seu ensino/aprendizagem. O primeiro refere-se à sua “natureza epistemológica reconhecidamente complexa.” (ARTIGUE, 2003). O segundo, diz respeito aos “processos mentais requeridos na compreensão desta ideia.” (ARTIGUE, 2003; TALL, 2002).

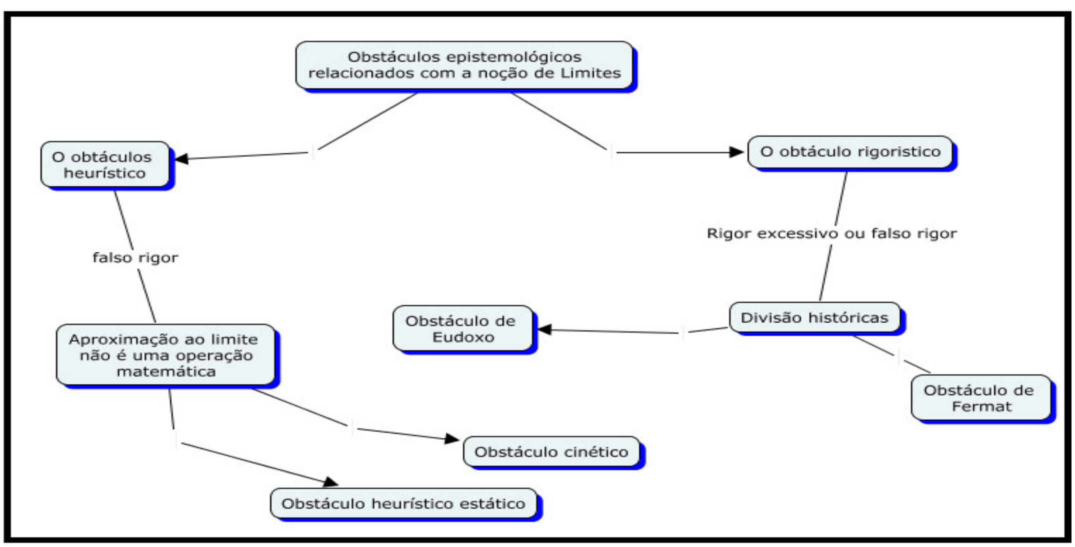


Figura 1. Quadro ilustrativo das ideias discutidas em Sierpinska (1987, p. 372) sobre os obstáculos epistemológicos relacionados à noção de limite (elaboração própria).

A figura 1 da página anterior caracteriza de modo simplificado um quadro de relações proposto por Sierpinska (1987). A autora descreve os *obstáculos heurísticos estáticos* com intuições livres da ideia de movimento. Enquanto isso, os *obstáculos heurísticos cinéticos* são relacionados às ideias vinculadas ao movimento. Em cada relação estabelecida acima intervêm, de algum modo, as categorias do raciocínio intuitivo mencionados pela autora.

Note-se que quando Sierpinska fala sobre intuições livres da ideia de movimento fornece como, por exemplo, na expressão “encontrar o limite” significando algo do qual as aproximações são conhecidas”. E quando sublinha às ideias vinculadas ao movimento, exemplifica a situação em que “encontrar um limite significa algo que se aproxima infinitamente” (SIERSPINSKA, 1987, p. 372).

Sierpinska (1987) categoriza quatro possibilidades de obstáculos. A partir de (1) temos: (i) *Obstáculos heurísticos estáticos geométricos* – (ObEG); (ii) *Obstáculos estáticos numéricos* – (ObEN); (iii) *Obstáculos cinéticos geométricos* – (ObCG); (iv) *Obstáculos cinéticos numéricos* – (ObCN).

Ao apresentar as possibilidades de surgimento de barreiras e entraves[7] à aprendizagem da noção de limites, Sierpinska (1987, p. 373) lembra que

> A propriedade da dualidade dos obstáculos epistemológicos fornece um sinal: se a presença dos obstáculos epistemológicos no estudante é relacionada com uma convicção de alguma espécie, então, superar tal obstáculo não consiste em substituir uma convicção por oposição a outra. Isto poderia falhar em virtude da dualidade do obstáculo. (tradução nossa)

A pesquisadora canadense faz considerações de situações de sala de aula que encerram conflitos didáticos e cognitivos que não podem ser evitados de modo simples. Quando falamos sobre o ensino do conceito de *limite*, vale a pena explicar que este é abordado geralmente no primeiro ano dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Sob os prismas epistemológico e psicológico, sua compreensão é necessária para a aquisição das noções de *derivada* e *integral*, tanto no caso de Uma como no caso de Várias Variáveis. Sua importância histórico-epistemológica, por exemplo, é destacada por Bos (1985, p. 153), que sublinha a posição de d´Alembert, ao declarar que “a teoria dos limites é a verdadeira base metafísica do cálculo diferencial”.

---

[7] Na conclusão do seu artigo, Sierpinska (1987) argumenta que é claro, com base nos dados precedentes que “nenhum obstáculo epistemológico foi completamente superado em qualquer estudante. Porém, conflitos mentais nascem e podem ser um ponto de partida inicial”.

Por outro lado, quando nos atemos a uma preocupação com vista ao ensino, Brolezzi (2004 *apud* ZUCHI, 2005, p. 19) refere-se à noção de *limite*, cuja *definição* é apresentada na disciplina Cálculo, em cursos regulares de Matemática, como “um exemplo de abstração mais forte e que deveria ser adiada até um momento de apresentação mais oportuno para os alunos que iniciam o Cálculo I”.

O mesmo autor relata ainda o exemplo das dificuldades encontradas pelos gregos, no que se refere ao domínio de uma linguagem algébrica apropriada que permitisse o tratamento da noção de *limite*. Deste modo, é natural a manifestação de alguma incompreensão dos estudantes no estudo e no emprego deste conceito no primeiro ano de universidade, como indicam alguns estudos (PINTO, 1998; ALVES e BORGES NETO, 2007; 2009a).

Estas incompreensões surgem não apenas como consequência das propriedades explícitas e intrínsecas à *definição formal*. Neste sentido, Tall (2002, p. 17) lembra que “um matemático usualmente toma uma idéia matemática complexa e simplifica-a, quebrando-a em componentes mais simples e mais fáceis de ensinar numa seqüência lógica e acrescentamos não necessariamente didática”.

Por outro lado, pensamos que “um conceito não é dado somente por sua explicação formal, contudo vem equipado com uma intenção informal.” (KRÖMER, 2007, p. 2). Estas duas faces da moeda, no caso, explicação formal/intenção informal, são facilmente identificadas pelo matemático profissional, entretanto, por parte do aluno não se pode esperar o mesmo. De fato, Hardy (2009, p. 356) evidenciou num estudo empírico que, “enquanto um matemático enxerga um limite que pode ser obtido por meio de substituição direta, os estudantes observam o mesmo como algo que pode ser determinado por meio de uma técnica algébrica”.

Partes destas incompreensões e reducionismos podem ser produzidas com um ensino e/ou metodologia inadequadas, que desconsiderem elementos intrínsecos a esta noção, como alguns que mencionamos anteriormente. Tentaremos exemplificar esta situação mais uma vez, recorrendo aos episódios na História da Matemática.

De fato, o conceito de *limite* de funções em uma variável, do ponto de vista da Matemática Moderna, é simbolizado por $Lim_{x \to a} f(x) = L$ (LAGES, 2010, p. 196). Este foi motivo de querelas ideológicas entre matemáticos, como Jean Le Rond d´Alembert (1717-1783), Benjamin Robins (1707-1751) e James Jurin (1684-1750). “E se olharmos de perto alguns episódios da História da Matemática relacionadas a este conceito, percebemos o quanto a noção de limite para d´Alembert envolvia uma falta de clareza" (BOS, 1985, p. 31).

D´Alembert tenta resolver alguns problemas com a seguinte *notação*: $Lim_{x \to a} f(x) = Lim\ \mathrm{y}, \mathrm{onde\ y = f(x)}$, mas a obscuridade, segundo seus críticos, ainda permanece. Aliás, "uma das polêmicas entre seus contemporâneos, como por exemplo, os outros dois matemáticos citados anteriormente, se referiam se a variável alcança seu limite ou não." (Idem, 1985, p. 31).

Episódios como os que ora relatamos, apontam os entraves enfrentados pelos matemáticos ao lidar com a referida noção. O curioso é que, alguns deles manifestam uma tendência, conforme apontam os estudos, em se manifestar também no ensino ordinário da academia. Com efeito, Maurice (2002, p. 8) sublinha que

> Vários tipos de limite ensinados fazem apelo à noção de infinito. A definição desta noção proposta pelos manuais é sucinta. A presença de uma defasagem entre o conceito de infinito e o seu modo de calcular torna o ensino desta noção obscuro (tradução nossa).

Apesar de fazer referência, no contexto do ensino canadense[8], à noção de *limite no infinito*, as considerações de Maurice podem perfeitamente ser generalizadas às outras formulações matemáticas do mencionado conceito. Afinal, de um modo geral, "no primeiro curso de cálculo com limites, os alunos cometem inúmeros erros" (MAURICE, 2000, p. 13). Assim, em sua tese, ele destaca os seguintes tipos de erros: (i) *erros de notação*; (ii) *erros algébricos*; (iii) *escolha inadequada de técnica operatória pata eliminar indeterminações*. Adverte para a noção de que "os motivos dos erros podem ser inúmeros e diversos, entre outros, eles podem ser de ordem pedagógica ou de ordem matemática". (MAURICE, 2000, p. 16).

Um erro pedagógico clássico, que já mencionamos, ocorre quando o professor inverte a real ordem histórica de surgimento do conceito em sala de aula. Giraldo (2004, p. 30) lembra as observações de Cornu (1991), em sua tese, quando explica que, na primeira metade do século XX, os livros-textos franceses introduziam a noção de limite de forma intuitiva, para, então, introduzir a noção formal de derivada, caracterizando uma inversão do real sentido histórico do conceito.

---

[8] Hardy (2009, p. 355) relata em seu artigo que, "quando tratam com os problemas propostos, os estudantes tem mostrado que seu pensamento não é o pensamento matemático. Eles justificam suas escolhas de uma técnica manejando um problema por intermédio do estabelecimento de suas crenças e convicção de que a técnica de fato se aplica. Estas convicções e crenças são elas mesmas baseadas em elementos comunicados por tradição (explicitamente comunicadas nas soluções escritas pelos professores e tornadas válidas aos estudantes".

Ghedamsi (2008, p. 12), caracteriza outro fator de ordem pedagógica que proporciona dificuldades para os alunos quando explica que os tipos de raciocínios requeridos são frequentemente difíceis de identificar, "mas podemos notar que os programas não prevêem os tipos de tarefas para trabalhar os raciocínios do tipo condição necessária e suficiente". Apesar de fazer referência ao ensino de *Análise Real*, Ghedamsi enfatiza que, assim como o ensino de *Cálculo*, o de *Análise* pode ser baseado na intuição, embora na prática seu papel seja enfraquecido.

Ghedamsi, assim, destaca a noção de que "tudo se passa como se as escolhas didáticas conduzissem à condução do rigor neste ensino pela validação formal, mas de modo não declarado." (2000, p. 12). E estas exigências, principalmente no que diz respeito às exigências formais, proporcionam e ensejam incompreensões nos estudantes.

Outros fatores são relatados de modo interessante por Celestino (2008). Ele manifesta uma preocupação específica com *obstáculos epistemológicos*[9] e outras dificuldades. Em seguida, identifica as concepções dos estudantes do Ensino Superior referentes ao referido objeto matemático.

Note-se que, dentre as concepções divisadas por Celestino, merecem destaque as que caracterizam

> [...] o limite como um valor do qual os termos da sequencia se aproximam cada vez mais e esta aproximação deve ser obtida com valores crescente ou que estejam bem próximo de um certo número, entretanto, este não é atingido. A simbologia também proporciona dificuldades, quando declara que o obstáculo do símbolo *li*m traz dificuldades aos alunos em perceber que o limite é" e a "a função se aproxima de", em geral, lêem "o limite se aproxima". (CELESTINO, 2008, p. 170).

Os elementos ora apontados que se relacionam e caracterizam a incompreensão dos estudantes, em alguns dos casos, não são atuais e podem possuir uma forte raiz no passado. Sendo assim, na tese de Zuchi (2005), no capítulo 3, encontramos um levantamento histórico com uma atenção às incertezas, tentativas, conflitos e contribuições em torno da noção de *limite*. Zuchi recorda, por exemplo, a subdivisão infinita progressiva em torno da disputa entre Aquiles e a tartaruga

Neste episódio emblemático, identificamos a noção de *limite* envolvida quando nos atemos à necessidade de aproximação, na medida em que o tempo passa. Outra ideia que envolvia a noção ingênua de *limite* na Antiguidade diz respeito às tentativas de

[9] Giraldo (2004, p. 33) explica que "os obstáculos epistemológicos não estão associados a quaisquer fatores externos, mas à própria natureza do conhecimento científico – são inerentes ao próprio ato de saber, constituintes essenciais e inevitáveis do próprio conhecimento a ser construído ou adquirido".

inscrever e circunscrever, por paste dos matemáticos, “figuras retilíneas em uma figura curva”. (ZUCHI, 2005, p. 39)

A autora recorda-se de que, na “Quadratura da Parábola, Arquimedes calculou a área do segmento parabólico. Ele inscreveu sucessivos triângulos no segmento de parábola, calculou a área desses triângulos e obteve valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos.” (ZUCHI, 2005, p. 40).

Já no século XVII, encontramos em Cavalieri (1598-1647) o uso do conceito dos indivisíveis, bem como nos trabalhos de Blaise Pascal (1623-1662). Outro matemático lembrado por Zuchi, que desenvolveu um trabalho usando alguma noção ligada ao conceito de *limite*, foi John Wallis (1616-1703). Zuchi sublinha que “o símbolo que atualmente usamos para representar o infinito (∞) é uma curva chamada, tecnicamente, de lemniscata. Esse símbolo foi usado nas obras de seções cônicas.” (ZUCHI, 2005, p. 42).

Refere-se que a noção do *infinito* é discutida por vários autores. Evocamos, por exemplo, Couturat (1896, p. 435), quando argumenta que “a relação entre uma grandeza qualquer e uma grandeza nula é maior que todo número racional ou inteiro [...] Nós a representaremos pelo símbolo ∞, que se diz o infinito, e escreveremos $\frac{1}{0}=\infty$”. O lógico, matemático e filósofo francês Louis Couturat (1868-1914) descreve uma variedade de significados em diversos contextos matemáticos para o símbolo ∞, frequentemente empregado no ensino ordinário de limites.

Vale observar que o infinito inspirou incertezas entre os próprios matemáticos enquanto sua significação exata e precisa não se estabelecia. De fato, muitos matemáticos o refutavam e não o compreendiam. Por outro lado, “a Matemática apoderou-se do conceito de infinito dando-lhe um sentido não só operativo, mas também filosófico. Arquimedes é talvez o primeiro a dar ao infinito o sentido que ele tem para os físicos.” (ZUCHI, 2005, p. 49).

O matemático inglês David Tall e colaboradores produziram trabalhos pioneiros sobre o assunto de limites desde a década de 1970. Assim, Schwarzenberger & Tall (1978, p. 44) salientam que, “no primeiro ano de universidade, estudantes de matemática são questionados se $0,9999......$ é igual ou menor do que 1?”. Muitas das respostas fornecidas envolvem conceitos infinitesimais. Neste âmbito de ensino, Schwarzenberger e Tall lembram que o uso da linguagem informal pode permitir traduções não intencionais da linguagem e proporcionar algumas dificuldades.

Schwarzenberger e Tall (1978, p. 44) advertem, ainda, para o fato de que os professores não ajudam numa situação em que "mostram claramente apreensivos com o processo de limite e, deste modo, transmitem seus temores aos alunos. Problemas do subconsciente como este produzem grandes dificuldades posteriores, impedindo ou mesmo bloqueando uma posterior compreensão.". Em outro estudo individual, Tall (1980, p. 170) explica que "o pensamento matemático extrapola a experiência prática individual".

O processo do cálculo de limites é justamente um exemplo disso. Com efeito, "para entender a natureza do processo de pensamento é insuficiente analisar a própria Matemática, necessitamos compreender o próprio processo de raciocínio." (TALL, 1980, p. 170). Adotando posição que valoriza o entendimento dos processos cognitivos, conscientes e inconscientes para a apreensão conceitual deste e de outros conceitos de Matemática do nível acadêmico, David Tall desenvolve interessante discussão acerca das representações mentais que o indivíduo elabora ao interagir com tais objetos conceituais de natureza complexa.

Amparando-se numa categoria cunhada em parceria com Slomo Vinner, ele explica que um indivíduo pode carregar consigo todas as representações visuais relacionadas a determinado conceito matemático, chamada de *imagem mental*. Tais representações auxiliam na elaboração de um conjunto de representações associadas a um conceito, na mente de um indivíduo.

Assim, com suporte na noção de imagem conceitual (*concept image*), Tall caracteriza a ideia de definição conceitual (*concept definition*) que é "a forma em palavras para a descrição do conceito." (TALL, 1980, p. 172). Mais adiante, ele adverte para o fato de que "podem ocorrer ocasiões em que a definição formal (formal definition) seja fornecida de modo antecipado num curso de Matemática, e os exemplos e o trabalho que segue criem diferentes imagens conceituais nos estudantes".

É o caso, por exemplo, do símbolo $Lim_{x \to a} f(x)$. "Na Inglaterra, eles são introduzidos no seu manuseio informal, e a definição formal surge apenas depois. Isto significa que a imagem conceitual é construída antes que qualquer definição formal conceitual seja fornecida." (TALL, 1980, p. 176).

O percurso metodológico sugerido por Tall nem sempre, é o mais valorizado, e as consequências, em certos casos da inversão de sua introdução, podem causar o surgimento de *obstáculos epistemológicos*. Com uma preocupação semelhante, Giraldo

(2004, p. 34) recorda os *obstáculos epistemológicos* relacionados à noção de limite, descritos pela primeira vez na tese de Bernard Cornu, que são "a falha em relacionar números com áreas; as noções de infinitamente pequeno e infinitamente grande; o aspecto metafísico da noção de limite; o limite é atingido ou não?"

Hodiernamente, no contexto ainda do seu ensino, Giraldo (2004, p. 36) chama atenção de que,

> Embora a questão da formulação rigorosa do conceito de limite tenha se esgotado na definição formal em termos dos seus épsilons e delta, a comunicação matemática informal continua a lançar mão de termos imprecisos, tais como 'arbitrariamente pequeno' – da mesma forma em que se fazia nos tempos de Cauchy. No contexto pedagógico em particular, expressões como essa são usadas por professores na tentativa de simplificar situações teoricamente complicadas para ajudar os estudantes.

Giraldo recorda algumas reflexões importantes de Cornu, ao destacar o fato de que muitos professores ingenuamente acreditam que "a simplicidade e a clareza da explicação são condições suficientes para garantir a compreensão dos estudantes - quando na verdade seria importante apresentá-los o conceito ensinado em toda sua complexidade.".

Note-se que, em muitos casos, ante ao quadro de incompreensão do referido conceito, o seu ensino se restringe a determinados aspectos manipulatórios, o que preserva as semelhanças com o treinamento escolar anterior, a que, o estudante foi submetido durante anos. Edwards, Dubinsky e McDolnald (2005, p. 18) se manifestam em relação a tal fato do seguinte modo:

> Nos cursos de Cálculo, os estudantes são frequentemente obrigados a avaliar limites, entretanto, tal atividade não necessariamente requer um pensamento matemático avançado por que pode ser reduzido a manipulações simbólicas automáticas. (tradução nossa)

Para concluir esta seção, apresentaremos e desenvolveremos raciocínio comparativo entre duas definições. A primeira, formalmente, é descrita por $Lim_{x\to a} f(x) = L$ (LIMA, 2010, p.123), ou, equivalentemente, temos a seguinte formulação descrita pelo modelo *épsilon* e *delta*: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - L| < \varepsilon$ (*). A segunda definição equivalente ao símbolo $Lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ equivale a dizer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

A segunda formulação descreve uma noção que chamamos de *continuidade*. Aparentemente, apesar de diferenças sutis em ambas as formulações envolvendo o modelo por *épsilon* e *delta*, a segunda noção produz uma interpretação intuitiva, sobretudo quando observamos sua exploração por parte dos autores (LANG, 1971; GUIDORIZZI, 2010; STEWART, 2004) de livros didáticos de CUV, ao atribuírem os termos explicativos e metafóricos de "salto" ou "rupturas" no gráfico de uma função descontínua.

Note-se que, em geral, os alunos "são familiarizados com funções contínuas" (REVUZ, 1972, p. 284). Além disso, observamos que

> Eles sabem dizer o que é em geral uma aplicação, mas quando requisitamos exemplos de aplicações de um intervalo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, eles citam no máximo polinômios ou funções homográficas. A palavra contínua em linguagem corrente evoca situações nas quais a descrição matemática faz apelo à noção de conexidade e, mais raramente, à de aplicação contínua, e a linguagem matemática elementar é contaminada pelo uso vulgar. Os alunos citam como exemplo a função descontínua $x \to \frac{1}{x}$. (REVUZ, 1972, p. 284; tradução nossa)

Observamos neste trecho a crítica do matemático André Revuz que questiona o emprego metafórico e a interpretação livre da noção de continuidade de funções. No que diz respeito à definição formal, Revuz critica as abordagens que discutem a *noção de continuidade* num ponto, sem considerar a ideia de *continuidade uniforme*. Ele adverte que "a noção de continuidade num ponto é mais fina do que a noção de continuidade uniforme" (1972, p. 287), além disso, a primeira noção é consequência da segunda.

Revuz salienta o caráter intuitivo da noção de *continuidade* num ponto, ao explicar que "podemos obter um valor $f(x)$ tão próximo que desejamos de $f(x_0)$, tomando-se um valor x tão próximo o quanto desejamos de x_0". Outra interpretação fornecida por ele, geralmente omitida do ensino de Cálculo, é descrita por: uma aplicação $f: U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto x_0 se, e somente se, para todo intervalo centrado em $f(x_0)$, existe um intervalo aberto J centrado em x_0, tal que a imagem de todo elemento em J pertence a I, ou seja, $f(J) \subset I$.

Revuz fornece desenhos ilustrativos para significar esta última caracterização. Explica que "as que são mais sugestivas são as que apresentam duas retas verticais e $\mathbb{R}$ como conjunto de saída. A correspondência entre x e f(x) é simbolizada por flechas." (REVUZ, 1972, p. 288).

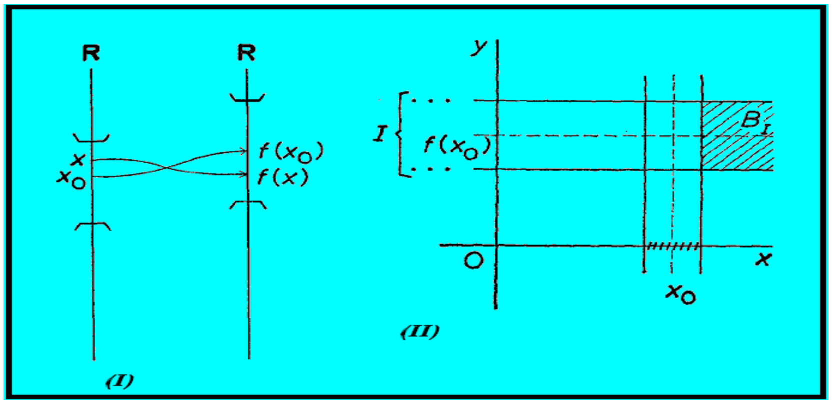


Figura 2. Discussão da noção de continuidade proposta por Revuz (1972, p. 288-289).

No lado direito da figura 2, vemos outro desenho explicativo fornecido por Revuz. Ele interpreta-o da seguinte forma:

> Outra figuração interessante consiste em representar o $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ na parte do plano utilizada. Designando por B_I a banda paralela ao eixo Ox e projetando sobre o eixo Oy segundo o intervalo I, ela nos conduz ao enunciado: f é contínua em x_0 se para toda banda B_I a projeção sobre Ox da interseção de B_I com o gráfico de $f(x)$ contém um intervalo de centro x_0. (REVUZ, 1972, p. 288; tradução nossa)

Observamos a preocupação de Revuz com a diversidade de formulações e interpretações geométricas da mesma noção. Revuz argumenta ainda que

> Não compreendemos verdadeiramente o sentido de um enunciado se não somos capazes de reconhecê-lo de formas diferentes e fazer comparar as formas diversas com o objetivo de facilitar a compreensão. (REVUZ, 1972, p. 290; tradução nossa)

As colocações de Revuz se harmonizam a uma crítica do ensino atual de Cálculo que, mesmo com a apresentação e discussão, o que não é muito frequente, de inúmeras formulações/interpretações, como, neste caso, do conceito de *continuidade*, via de regra, o professor finda por empregar e adotar como principal estratégia reducionista, na abordagem de resolução de situações-problema, as seguintes condições:

(i) $\exists f(a)$; (ii) $\exists \lim_{x\to a} f(x)$; (iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Antes de debater a maneira intuitiva pela qual a *noção de continuidade* é apresentada, recorremos a Fischbein (2002a, p. 312), quando explica que "o termo metáfora foi empregado, de modo geral da poesia e literatura.". Em sua definição original significa "uma transferência de significado de um conceito para outro". Mais adiante no mesmo artigo acrescenta que em muitas instâncias, "o uso do termo ‘modelos mentais’ em vez de metáfora ou analogia é mais apropriado. Parece que o termo ‘modelos mentais’ é, teoricamente, mais rico em potencialidades.”.

Agora que comentamos uma noção discutida por Efrain Fischbein, evidenciamos um ensino da *noção de continuidade* eminentemente apoiado em *metáforas* conceituais e, consequentemente, na promoção de *modelos mentais*. De fato, encontramos, no ensino de CUV, alguns expedientes interessantes que, num curso introdutório, produzem resultados alvissareiros.

Destacamos a argumentação intuitiva sugerida tanto pelos livros didáticos (STEWART, 2004, p. 123) como pelo professor, ao declarar que “funções contínuas não apresentam saltos ou rupturas no gráfico.”.

Em outros casos, detectamos indicações, sugerindo até mesmo um procedimento para se verificar a *continuidade* da função. Neste procedimento, o aluno é orientado a colocar a ponta do lápis no gráfico e percorrê-lo. Se, em algum ponto, for necessário retirar a ponta do lápis do papel, será neste ponto onde a função perde a referida propriedade local.

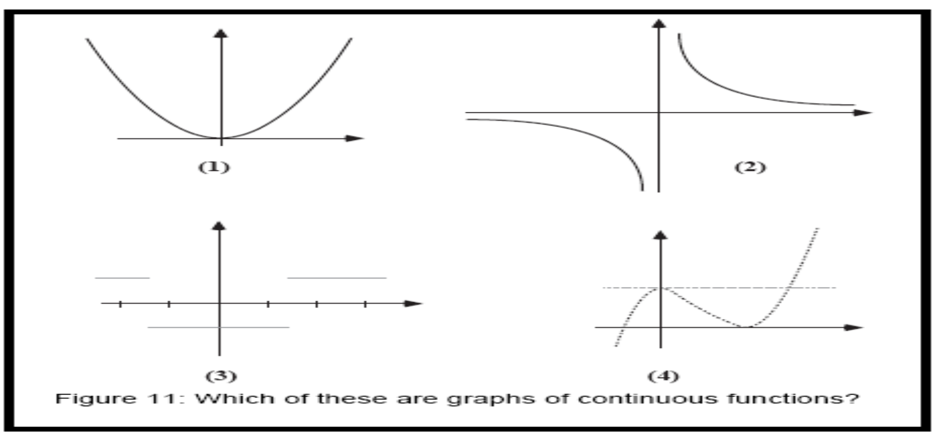


Figura 3. Situação-problema discutida por Tall (1988, p. 12).

Neste sentido, Tall (1988) discute os resultados evidenciados em outras investigações. Ele apresenta funções que possuem gráficos com “rupturas” (figura 3) e, mesmo assim, são contínuas em todos os pontos do seu domínio (item 4). Finaliza dizendo que “uma abordagem espaço-visual pode fornecer aos estudantes poderosas intuições, porém, uma vez mais, não são suficientes.” (TALL, 1988, p. 11)

Deste modo, notamos a prática do ensino da *noção de continuidade* por meio de *metáforas* ou *modelos mentais* que deveriam ser pensados de modo provisório, uma vez que, o embasamento teórico formal *a posteriori* não pode ser posto de lado; entretanto, como relacionar as condições (i) $\exists f(a)$; (ii) $\exists \lim_{x\to a} f(x)$; (iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;

usualmente aplicadas, com a continuidade ou descontinuidade de uma função? Como identificar, por exemplo, o caráter limitado da função contínua num ponto por meio destas condições formais?

Referendando-nos em nossa experiência, observamos que os livros didáticos (APOSTOL, 1967; CALLAHAN, 2010; GHORPADE e LIMAVE, 2010; GRABINER, 1981; HAIRER e WARNER, 2008; KAPLAN e LEWIS, 1970), de modo predominante, apresentam *definições formais* fundamentadas no modelo *épsilon* e *delta*, entretanto, exploram *a posteriori* procedimentos analíticos, que não evidenciam de forma explicita o viés intuitivo da mesma noção e, adotam, de forma peremptória *metáforas* e *analogias* que, para um iniciante, dificilmente se relacionam ou explicam o modelo formal.

De fato, ao analisarmos as três condições que caracterizam a *noção de continuidade*, é possível extrair alguma informação relativa à existência de alguma "ruptura" ou a necessidade de se retirar a ponta do lápis do papel que se relaciona com a presença de "pulos de descontinuidade." (STEWART, 2004, p. 123)?

A relação é menos evidente, quando necessitamos extrair alguma informação geométrica do modelo por *épsilon* e *delta*, entretanto, "nos processos de raciocínio devem intervir modelos sobre os quais não estamos conscientes, que substituem tacitamente alguns dos componentes originais dos processos de raciocínios." (FISCHBEIN, 2002a, p. 313). Assim, o professor precisa manter sua vigilância com vistas a explorá-los, na medida em que sejam necessários e significativos ao aprendizado dos estudantes.

O uso de argumentações de natureza metafórica e intuitiva pode fornecer uma compreensão inicial, provisória e limitada para o nosso caso de *continuidade* de uma função. E, num momento posterior, as relações mais profícuas com o modelo formal precisam ser efetivadas pelo docente.

Na próxima seção, discutiremos o contexto do ensino e as pesquisas voltadas ao conceito de derivada, que pode ser simbolizado por $f'(a)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}(a)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $df(x)$ ou $D_x f(x)$. Nele, a noção de *limite* é essencial para a sua caracterização.

1.3 Sobre o ensino de Derivada

> Foi apenas em 1893 que Stolz introduziu a noção de difenrenciabilidade em várias variáveis e, somente em 1911, o desenvolvimento da análise funcional permitiu a Fréchet introduzir a diferencial em termos modernos de interpretação como mapas tangentes lineares. (ARTIGUE, 2002, p. 168; tradução nossa)

> É sabido que alguns estudantes são introduzidos na noção de diferenciação como uma regra que se aplica sem muita atenção a fim de revelar as razões para justificações e procedimentos. (ORTON, 1983a, p. 242; tradução nossa)

Dall´anese (2006, p. 13) lembra, após analisar inúmeros trabalhos discutidos em (JIMENEZ, 2003), relacionados com o ensino do Cálculo, que seu ensino não apresenta muitas modificações e as dificuldades dos alunos permanecem.

Em parte, como evidencia Dall´anese, os motivos decorrem do fato de que os conceitos do Cálculo são difíceis e anti-intuitivos. Note-se que, em sua tese, o autor trabalha com um objeto matemático chamado de *taxa de variação* o qual apresenta um viés bastante intuitivo, quando comparado à noção de *limite* e que tratamos na seção passada.

Stedall (2008, p. 106), por sua vez, apresenta um diagrama "que reproduz a riqueza e a complexidade das ideias que impulsionaram o Cálculo. O que serve para mostrar que o progresso matemático em qualquer simples problema é raramente tratado de modo linear.".

O caráter de linearidade, marcante do raciocínio matemático lógico-formal, preserva características que o diferenciam do raciocínio intuitivo. Note-se que Stedall (2008) indica a predominância das ideias heurístico/intuitivas das noções do Cálculo que não evoluíram com origem neste modelo linear, tradicional, do raciocínio matemático.

Seu ensino é, por vezes, estabelecido com vistas a desrespeitar a evolução particular do conceito de *diferenciação*. Na citação da segunda epígrafe, Orton realça um viés deste ensino, quando reduz a aprendizagem do Cálculo ao domínio de 'técnicas' e procedimentos necessários na *diferenciação*.

Outro fator de preocupação destacado por Orton diz respeito ao ensino baseado no rigor excessivo, ao acentuar que "nenhuma prova algébrica se faz necessária e isto pode ser uma adequada introdução inicial para a diferenciação." (ORTON, 1983a, p. 242).

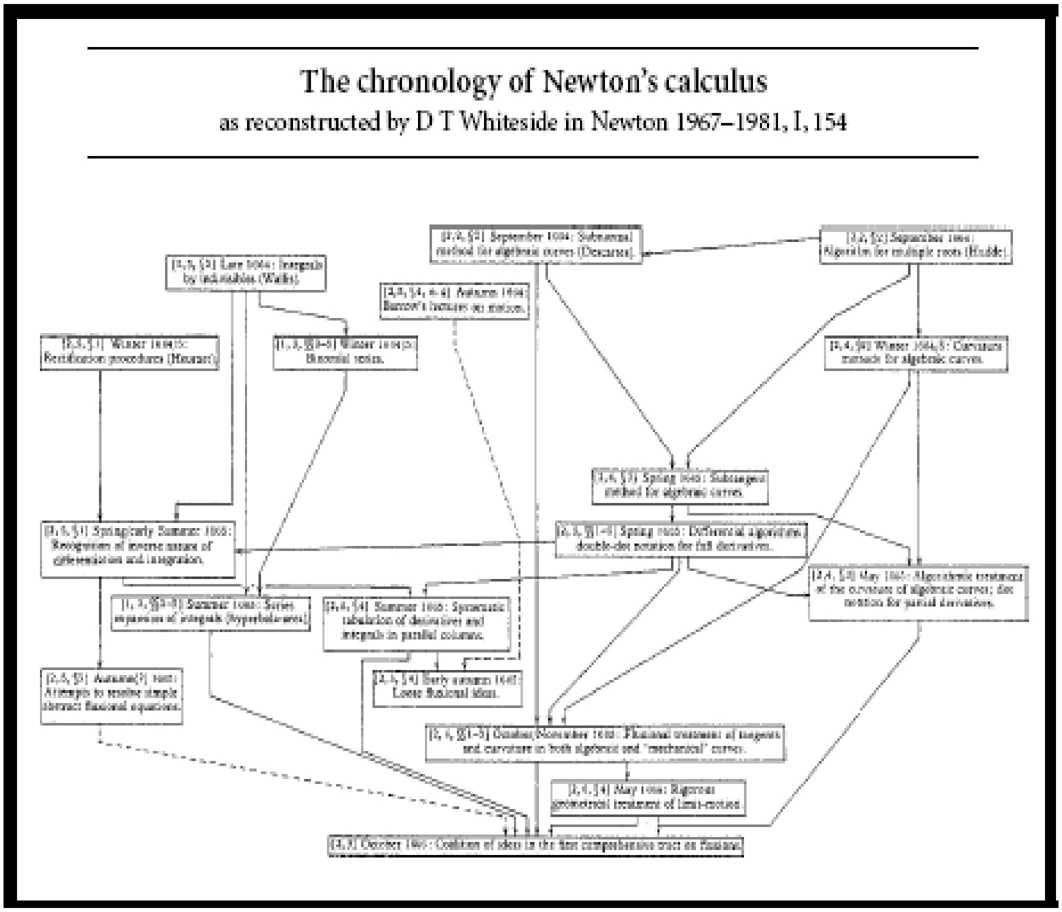


Figura 4. Diagrama explicitando os progressos e fases de evolução das ideias do Cálculo descrito por Stedall (2008, p. 106).

Acima (figura 4) perspectivamos a distância entre os momentos iniciais de imprecisão, pouco rigor e o tratamento intuitivo das noções em sua gênese. Sublinhamos o fato de que, parte das dificuldades de *rigorização* (CARAÇA, 1970; GRABINER, 1981; HILBERT, 1902; HOEFER, 1874; WILDER, 1959) de alguns dos conceitos do Cálculo, particularmente a noção de *derivada*, decorre da "complexidade das noções intuitivas referentes a tais objetos conceituais." (BOYER, 1959)

Deste modo, diferenciamos uma intuição que possibilita a compreensão de objetos captados pelos órgãos sensórios, e outra faculdade intuitiva, que possibilita ao matemático captar a essência de objetos, conceitualmente falando, mais complexos. Vejamos um exemplo de concepção partilhada por alguns matemáticos. Começamos por Felix Klein (1849-1825) que, num de seus artigos, se referia da seguinte forma

> A intuição ingênua, por outro lado, foi especialmente ativa durante o período de gênese do Cálculo Integral. Assim, vemos Newton assumir sem hesitar sobre a existência, para todo caso, da velocidade de um ponto móvel, sem questionar a si mesmo sobre se quer a possibilidade

> de uma função descontínua e sem derivada. (KLEIN, 1893, p. 15, tradução nossa)

Mais adiante, explica a diferença entre o que ele nomeou de ‘intuição ingênua’ (*naive intuition*) e outra expressão tratada por ele como ‘intuição refinada’ (*refined intuition*), acrescentando que,

> Em minha opinião, a raiz deste assunto pertence ao fato de que a intuição ingênua não é exata, enquanto que a intuição refinada não é propriamente uma intuição, porém, surge a partir do desenvolvimento de axiomas, considerados perfeitamente exatos. (KLEIN, 1898, p. 15, tradução nossa).

Klein (1898)[10] fornece exemplos ilustrativos e argumenta que, quando pensamos num ponto, não pintamos em nossa mente um ponto matemático abstrato, porém, substituímos algo concreto por este. Quando imaginamos uma linha, não descrevemos para nós próprios, comprimento sem espessura. Quando, porém, consideramos uma faixa com determinada extensão, esta possui sempre uma tangente, isto é, podemos sempre imaginar uma linha reta que possui uma pequena porção em comum com uma curva (figura 5). Para Klein, as *definições matemáticas* nesse caso são aproximativas e indiscutivelmente necessárias para a atividade matemática.

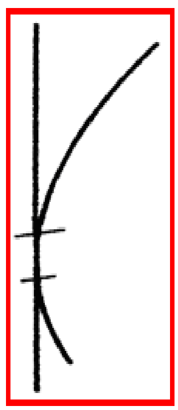


Figura 5. Desenho sugerido por Klein (1898), relativamente à noção intuitiva de derivada

Temos aqui um exemplo interessante, onde evidenciamos a flagrante contradição entre nossas crenças intuitivas, que podem ser tomadas, segundo Klein, por intuições ingênuas, e nossas crenças formuladas com base num *corpus teórico*, como no caso do Cálculo. Episódio semelhante é recordado em Hersh (1997, p. 50), quando menciona que “Edmund Landau, um dos mais poderosos pesquisadores em teoria dos

[10] A argumentação desenvolvida por Félix Klein (1849-1925) apresenta íntima dependência com a diversidade de representações mentais que o indivíduo possui e consegue mobilizar por intermédio da *percepção*. A existência destas *representações mentais* no processo perceptivo é assumida por Morais (2006, p. 20).

números, descobriu fatos importantes sobre funções analíticas descritos pelo teorema das duas constantes.”. Ele provou, mas não acreditava no teorema. Hersh acrescenta que “ele trabalhou ainda por anos até que sua intuição aceitasse o fato.” (HERSH, 1997)

Este fato evidencia que o processo intuitivo pode ocorrer antes, durante e após determinado estabelecimento de um fato matemático ou o estabelecimento de uma *verdade matemática*. Neste caso, referimo-nos à demonstração de um teorema procedente de Landau. Neste episódio, temos, marcadamente, o uso da *refined intuition*, na acepção de Klein. Sua importância é atestada também por Bunge (1996, p. 127), quando esclarece que “a relação entre certas construções (símbolos, conceitos, proposições) e as correspondências sensoriais não é lógica e sim intuitiva, como destacou Einstein”.

Deste modo, concordamos em parte com Dall´anese (2000, 2006) ao discutir o caráter intuitivo da noção de *taxa de variação*, entretanto, preferimos a explicação dando conta de um modo peculiar de intuição capaz de captar e proporcionar o entendimento dos conceitos matemáticos.

De fato, necessitamos de uma habilidade intuitiva para diferenciar aspectos que se relacionam de modo intrínseco a este ou a outro conceito. Neste sentido, Pinto (1998, p. 117) nos fornece informações interessantes, quando detectou o fato de que alguns dos sujeitos participantes de sua investigação evocavam “imagens mentais relacionadas à diferenciabilidade que não distinguiam uma função diferenciável de uma função contínua”.

Mais adiante, a autora acrescenta que “os estudantes não foram capazes de fornecer exemplos de funções contínuas, mas não diferenciáveis”. (PINTO, 1998, p. 117). Deste modo, neste caso, depreendemos que, desde as respectivas *definições formais* do fenômeno local, que caracteriza a noção de *continuidade*, e do objeto matemático conhecido por *derivada*, os alunos manifestam dificuldades de entendimento, em grande parte com base elaboração progressiva de *imagens mentais* dos referidos conceitos matemáticos.

No caso específico da *derivada*, considerando de modo mais pormenorizado seu viés intuitivo, concluímos que, em parte, isto decorre da outra noção, nomeadamente a noção de *limite*. Neste sentido, D´Avoglio (2002, p. 59) evidencia que “os alunos têm dificuldade para entender o conceito de *derivada* de uma função no ponto, definida de maneira formal, a partir do conceito de limite.”. Giraldo (2004, p. 30) desenvolve uma argumentação que reforça o mesmo ponto de vista. Ele declara que

> A conceituação formal de limite, por meio de épsilons e delta, demanda um nível de abstração incompatível com os cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral. A definição forma de derivada, por sua vez, depende do conceito de limite $f'(x) = lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Desta forma, uma estratégia pedagógica comumente utilizada para a introdução do conceito de derivada envolve a expressão algébrica acima (muitas vezes ilustrada por uma figura representando retas secantes aproximando-se de uma reta tangente), sem qualquer tratamento formal anterior para o conceito de limite.

Tall (1997, p. 3) aponta a contribuição, nem sempre profícua, dos livros didáticos, quando se recorda de que “alguns textos não fornecem a definição formal da reta tangente e, preferivelmente, exploram a ideia intuitiva da reta tangente que toca a curva.”. Mais adiante, ele explica que, “no ensino, trabalhamos a noção de que quando um gráfico possui uma tangente, mesmo com alguma ampliação do gráfico, o trecho que compreende a reta tangente e o gráfico é indistinguível.” (TALL, 1997, p. 3-4). Entretanto, “em minha experiência, acredito que os estudantes necessitam de uma orientação melhor deste ponto de vista.” (Idem, 1997, p. 4).

David Tall menciona o componente de responsabilidade do livro didático, que nem sempre justifica o termo “didático”. Por exemplo, a mudança notacional verificada do CUV para o CVV é considerável, como percebemos na figura 6, na sequência abaixo.

Referendando-nos em nossa experiência, defendemos a ideia de que alguns aspectos do CVV poderiam ser explorados no CUV, por exemplo, explorar as três dimensões. Por que o CUV é desenvolvido pelos livros apenas no $\mathbb{R}^2$?

Por que não se consideram funções do tipo $z = f(y)$ ou $z = f(x)$ e se pede a *taxa de variação* das variáveis “z” e “y” ou a taxa de variação $\dfrac{dz}{dx}$?

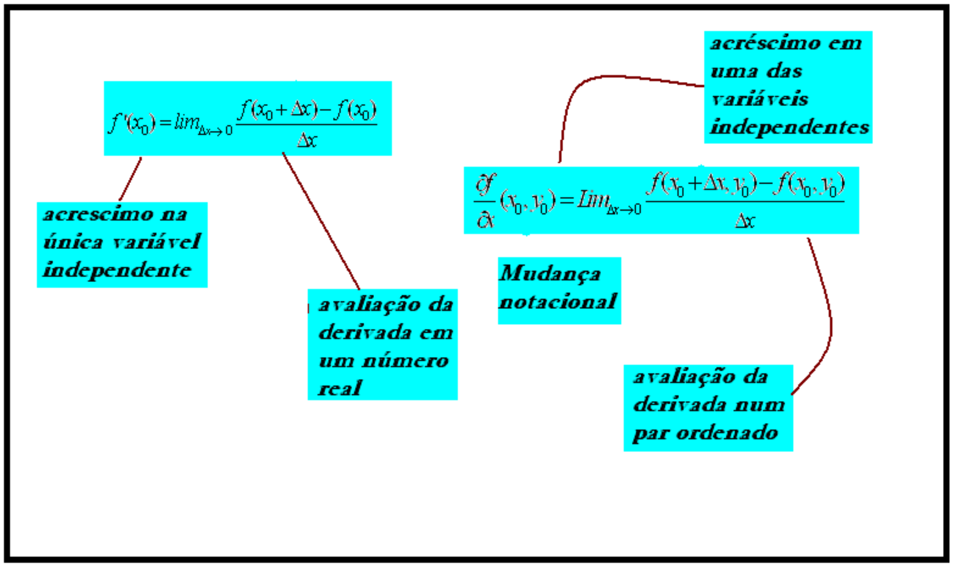


Figura 6. Quadro comparativo da noção de derivada no CUV e no CVV.

Por outro lado, os livros didáticos expressam e refletem os paradigmas educacionais e modelos vigentes de uma época. Particularmente na Matemática, ocorre o mesmo, bastando-se observar as reflexões desenvolvidas por Michelle Artigue, ao recordar alguns episódios da História da Matemática, relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, e as reformas impulsionadas na Europa e França, promovidas pelo CIEM – *International Commission for Mathematical Instruction*.

Ao relatar as reformas educacionais ocorridas, por exemplo, na Inglaterra, em 1989, Michelle Artigue salienta que

> Os conceitos são explicados por uma via dinâmica (como “x” tende para “a” ou “$x \to a$”) e o curso é principalmente voltado a métodos de aplicação da diferenciação e integração; somente alguns poucos vêem as definições envolvendo *épsilon* e *delta* no último estágio. [...] Na universidade, os estudantes de matemática estudam os fundamentos lógicos da Análise, usando as definições de $\varepsilon - \delta$ (ou equivalências topológicas), enquanto outros estudantes estudam métodos de cálculo ou teorias analíticas para o nível apropriado para o seu assunto principal. Análise formal é conhecida por provocar dificuldade para a maioria dos estudantes de matemática e em algumas universidades existe uma tentativa de reduzir as formalidades do assunto e concentrar mais em suas aplicações. (ARTIGUE, 2002, p. 174; tradução nossa).

No mesmo trabalho, Artigue (2002) descreve alguns conceitos *a priori* que podem ser associados à noção de uma *derivada* no ponto $x = a$ para uma função f como:

- o limite do quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$;

- o primeiro coeficiente da expansão limitada de ordem 1 da função em $x = a$;

- o coeficiente caracterizando um mapa linear, tangente em $x = a$;

- o coeficiente angular da tangente no ponto $x = a$ e

- o número ou a função obtida pela aplicação de regras usuais de diferenciação, conhecendo-se as derivadas elementares.

Na atividade matemática, inerente ao *habitat* do matemático profissional, Artigue (2002, p. 175) destaca a ideia de que “podemos imaginar que estes pontos de vista podem coexistir entre os matemáticos, e alguns deles mais preferido em virtude do contexto matemático ou em virtude da preferência individual.”. Em todo caso, Artigue questiona, ante a multiplicidade de pontos de vista em relação ao mesmo objeto conceitual, o que acontece com os estudantes? Que obstáculos se identificam?

Artigue desenvolve um estudo, não com a intenção de responder a tais questionamentos específicos, entretanto, com o objetivo de investigar as concepções dos estudantes relacionadas às disciplinas Matemática e Física. Parte dos resultados de Artigue aponta uma importante diferença entre o *nível declarativo* (como os estudantes descrevem os conceitos) e o *nível procedural* (como eles trabalham com os conceitos). Neste sentido, ela esclarece:

> No nível declarativo, a aproximação linear pela tangente dominou, conforme a definição no curso. E no nível procedural, a diferencial tendeu a perder o seu papel funcional e o status de aproximação desapareceu, que foi substituído por algoritmos algébricos usando derivadas parciais e matrizes Jacobiana. (ARTIGUE, 2002, p. 180; tradução nossa.).

Para concluir esta secção, ante as colocações e conclusões de Artigue, de modo semelhante aos posicionamentos de Klein (1893), Poincaré (1904) e Tarski (1994), defendemos um ensino sem a prevalência de um rigor excessivo ou um falso rigor. Um ensino introdutório para a noção de diferenciação, por exemplo, “pode ser informal e baseado largamente em explorações numéricas e gráficas assistidas por uma calculadora eletrônica.” (ORTON, 1983b, p. 244)

Discutiremos de modo aprofundado o papel da tecnologia no ensino do Cálculo; para finalizar, entretanto, lembramos que as simbologias empregadas na atividade matemática são condicionadas pelas formas idiossincrásicas de abstração do matemático que as emprega.

De fato, a representação de derivada f' ou $f'(x)$ atual se aproxima da notação designada por Joseph L. Lagrange, em sua obra *Théorie de fonction analytiques* de

1797. Segundo Cajori (1901, p. 207), “o próprio Lagrange dizia que por ‘simplicidade’ e ‘uniformidade’, denotamos a primeira função derivada da f por f´x .”. Destacaremos duas significações para os termos por nós sublinhados.

No primeiro caso, desde que consideramos também o contexto de ensino de Matemática, cabe o seguinte questionamento: simplicidade para quem, professor ou aluno? E, no segundo caso, sabemos que a *uniformização* e *formalização* de várias noções e *definições* no Cálculo necessitaram de séculos até atingir sua forma atual, não seria previsível o sentimento de incompreensão dos alunos?

Como, porém, estamos falando de *notações* matemáticas e notações relacionadas com a ideia de *derivada*, talvez o matemático mais famoso pela criação de “boas” *notações* tenha sido segundo Cajori (1901, p. 181). Leibniz, num de seus manuscritos, comentados por Couturat (1901, p. 86), esclarece que “os algarismos árabes possuem sobre os algarismos romanos a vantagem de melhor expressar a “gênese” dos números, e em seguida sua definição, de sorte que sejam mais cômodos, não somente pela forma de escrevê-los, mas também pelo cálculo mental.”. Ele mostrou a importância atribuída aos *signos*, e as condições de sua utilidade.

A invenção do *Cálculo Infinitesimal* procede da pesquisa de *símbolos* os mais apropriados (COUTURAT, 1901, p. 87). Ele confirma a perspectiva de Leibniz sobre a importância capital e a proficuidade vantajosa de um *símbolo* bem escolhido. Veremos agora de que maneira a *notação* relacionada a uma *definição* pode interferir diretamente na aprendizagem e no ensino do *Cálculo*.

Deste modo, apesar de termos a disposição um número variado de simbologias para a noção de derivada, como: $\left[\frac{df}{dx}(x_0)\right]$, $\left[\frac{dy}{dx}(x_0)\right]$ $f\,'(x_0)$, $df(x_0)$, $D_x[y(x_0)]$, etc, nem sempre conhecemos os significados ou os entraves e efeitos psicológicos que esta ou aquela notação pode causar no estudante. Identificamos tal preocupação em Poincaré. Este, nos cursos introdutórios, preferia a noção de *taxa de variação*, denotando a derivada por $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dy(x)}{dx}$.

Poincaré (1899, p. 106) comenta um artigo de M. H. Laurent, sobre a *notação diferencial, sistema simbólico do Cálculo*. Ele adverte Laurent em virtude da frase: “(...) eu penso que é conveniente de mostrar o quanto a *notação diferencial* é mais cômoda do que a de *derivada*. É em relação aos competentes que me refiro e não aos alunos, e eu acredito que ninguém contestará a grande influência da doutrina diferencial.”.

No parágrafo seguinte, Poincaré manifesta a surpresa com estas palavras, pois, para ele, algumas das ideias apontadas estavam há muito tempo abandonadas. Contrariamente, ele contesta fortemente a vantagens da *notação diferencial* e aconselha que tal *notação* deve ser apresentada aos alunos, no momento em que estes já estejam familiarizados com a *notação* das *derivadas*. (POINCARÉ,1899, p. 106)

Na seção que vem, discutiremos alguns aspectos relacionados ao ensino/aprendizagem da noção de *integral*.

1.4 Sobre o ensino da Integral

Melo (2002) desenvolveu um estudo interessante no que diz respeito ao ensino da noção de *integral* no CUV. O Pesquisador inseriu o estudo deste objeto no ambiente computacional e realizou a análise produzida por um grupo de alunos. Evidenciou que, com o uso de questões abertas, proporcionou uma discussão e a produção maior de conjecturas a respeito das situações-problema propostas.

Constatou "procedimentos/raciocínios" fortemente sedimentados, caracterizados "pela tendência de estender uma conclusão válida num contexto e, pode não ser válida em outro contexto" (MELO, 2002, p. 146). Destacamos, também, as seguintes dificuldades apontadas pelo autor: *dificuldades em relacionar a noção de Limite com a noção de Integral; os alunos não interpretam o significado da área ou do número obtido por meio do algoritmo aplicado na integração; os alunos não têm o significado na noção de aproximação ou tendência.*

No estudo de Herculino (2004), encontramos uma interessante análise referendada pela teorização de Anna Sfard. Segundo este ponto de vista teórico, os conceitos são tratados inicialmente como instrumentos (concepção operacional) para a solução de problemas e, no segundo momento, num nível mais elevado de conceitualização, os conceitos são vistos e cuidados como objetos (concepção estrutural).

A pesquisa desenvolvida por Oliveira (2004) é semelhante ao de Herculino (2004). As obras investigadas foram James Stewart e Michael Spivak. Herculino (2004, p. 27) destaca o percurso seguido por Stewart, que se caracteriza pela discussão intuitiva e visual da situação-problema e, num momento subsequente, desenvolve a construção rigorosa da noção de *integral* baseada na área.

Por outro lado, ao discutir a obra de Michael Spivak, destaca o seguinte percurso a partir de suas análises: $\begin{array}{c} teorema \Rightarrow aplicação \\ ou \\ \text{teorema} \Rightarrow \text{exemplos} \end{array}$ o que, para o autor, caracteriza a transição da concepção estrutural para a concepção operacional. Mais adiante, Herculino (2004, p. 750) conclui também que, na obra de Spivak (1996), dá-se ênfase aos exercícios de natureza estrutural, o passo que, no livro de Stewart, vemos uma ênfase na concepção operacional dos exercícios propostos.

Herculino sublinha a ideia de que, no ensino de Álgebra, "o ensino se dá na contramão do seu real desenvolvimento, ou seja, da concepção estrutural para a operacional" (2004, p. 77). Não apenas na Álgebra observamos tal fenômeno. No ensino de CUV, da noção de *integral*, percebemos a mesma hegemonia da concepção estrutural, a predominância do rigor e o uso de estratégias e desenhos que explicam as situações-problema apenas como recurso provisório e casual.

Em outra investigação a respeito do *Teorema Fundamental* do *Cálculo*, o qual caracteriza uma interessante propriedade da *integral*, Anacleto (2007, p. 138) conclui dizendo que

> Os dados analisados nos protocolos permitem concluir que os estudantes sabem derivar a integral e verificar que a derivada da integral é a função integranda. No entanto esta relação fica evidente no domínio algébrico, mas quando mudamos para o domínio geométrico, muitos estudantes não utilizam os conhecimentos contidos nas representações para a solução das questões apresentadas, o que pode significar que eles dominam parcialmente estes conceitos.

O interesse dos investigadores acerca da noção de *integral* não é recente. De fato, Orton (1983b) analisou o desempenho de um grupo de 110 estudantes ao lidarem com a noção de *integral*. Orton argumenta a importância do real entendimento da noção de *limite* para a posterior aprendizagem das ideias de *diferenciação* e *integração*, entretanto, não se dedica muito tempo a noção de *limite* após ter sido empregado em outras noções.

Ele conclui que "a compreensão da integração como o limite de uma soma constitui uma árdua barreira". Parece que a maioria dos estudantes "não alcança passos importantes. Aparentemente a introdução da integração pode se tornar fácil na medida em que assumimos que desejamos apenas que eles adquiram habilidades de integrar e obter respostas para simples aplicações." (ORTON, 1983b, p. 9). Deste modo, assim como no caso da *derivada*, observamos que a aprendizagem deficitária da noção de *limite* pode comprometer, de modo semelhante, a aprendizagem de *integral*.

1.5 Sobre o ensino do Cálculo em Várias Variáveis e os conflitos teóricos computacionais – CTC

> O potencial gráfico do *Maple* faz com que o livro eletrônico se converta em uma ferramenta competente para o desenvolvimento da intuição dos conceitos matemáticos. (ARENAS, 2003, p. 286; tradução nossa)

Como mencionamos nas seções anteriores, uma diferença considerável do Cálculo a Várias Variáveis - CVV para o Cálculo em uma Variável Real – CUV reside na possibilidade de visualizar os objetos matemáticos no espaço $\mathbb{R}^3$; diferentemente do caso anterior, em que contamos predominantemente com duas dimensões.

Por outro lado, desde que optamos por utilizar um aparato computacional[11] como apoio ao processo de ensino/aprendizagem do CVV, necessitaremos de alguns cuidados no que diz respeito às potencialidades e limitações do instrumento tecnológico.

É inegável que o ambiente de lápis e papel para a aprendizagem desta teoria apresenta barreiras intransponíveis, tanto para o ensino como para a aprendizagem. É tanto que encontramos com facilidade na *internet* investigações apoiadas em suporte tecnológico. O ambiente fornecido pelo computador, no entanto, assim como o caso anterior, pode, de modo semelhante, fornecer e provocar aprendizagens indesejáveis e, facilmente, conduzir o aluno ao erro.

O uso de tecnologias computacionais no ensino/aprendizagem de Matemática é objeto de debate há décadas (ARTIGUE, 1996; 2009; ARTIGUE e DAGHER, 1993; DESERTI, 2002; MURPHY; GOODMAN e WHITE, 1999; WU, 2008). Nesses trabalhos, encontramos de modo predominante considerações acerca das potencialidades trazidas pelo advento do computador à aula de Matemática.

Neste sentido, Emmer (1993, p. 233) destaca a ideia de que

> A visualização de uma série de exemplos auxilia os estudantes na absorção de conceitos que podem ser difíceis de compreender em suas formulações matemáticas abstratas, especialmente nos primeiros dois anos do currículo universitário. A partir deste ponto de vista o uso do computador é prático e eficiente, e se o *software* conduz a uma

[11] Artigue (1997, p. 138) adverte para o fato que "a introdução de um novo instrumento para a atividade matemática pode desestabilizar o campo de práticas associadas a um objeto dado ou aonde ele pertence, para compreender certos fenômenos didáticos, necessitamos estudar tais desestabilizações".

> interativa modificação dos dados, podemos facilmente mudar os parâmetros para um exemplo dado e realizar nova escolha. (tradução nossa)

Ante seu raciocínio, podemos depreender que o caminho para a superação de determinados entraves para aquisição dos conceitos do Cálculo é a *visualização*? Que a compreensão intuitiva dos objetos matemáticos envolvidos numa situação será viabilizada quando recorrermos à *visualização* proporcionada pelo computador?

É razoável suspeitar que não podemos adotar uma resposta positiva a tais questionamentos, nem uma resposta completamente positiva. Possivelmente um ponto de vista mais razoável em relação a este dilema é perceber que a *visualização* pode inegavelmente superar alguns entraves para a aprendizagem, mas também pode produzir outros extras. Ademais, a compreensão intuitiva ensejada pela *visualização* é necessária à compreensão, mas não é suficiente para a evolução de um raciocínio conceitual posterior relacionado ao mesmo objeto matemático.

Afinal, um “conceito matemático não é um objeto monolítico. Um simples conceito pode ser compreendido a partir de vários pontos de vista e pode apresentar diversas representações, adaptando-se ao local onde o conceito é utilizado”. (DOUADY, 1984, p. 84). Deste modo, o cuidado com a *visualização* e a percepção dos objetos, propriedades intuitivas não pode se restringir apenas ao ambiente computacional, mas também quando usamos as tecnologias do lápis e papel, embora na aprendizagem do Cálculo “os microcomputadores podem fornecer desenhos móveis que proporcionam um poderoso suporte cognitivo para estas imagens mentais.” (TALL, 1997, p. 5).

Certamente, perante tais argumentos das décadas de 80 e 90, vislumbramos a larga contribuição que o uso de tecnologias trouxe para o ensino de Matemática. Ademais, hodiernamente, estas posições se mantêm e esta categoria do discurso ainda se preserva de modo atual. Percebemos isto quando analisamos os estudos de Borba e Villarreal (2005).

Borba e Villarreal (2005, p. 51) lembram que, “de 1980 até 1990, observamos uma tendência dos matemáticos educadores com o trabalho envolvendo múltiplas representações.”. Além disso, as múltiplas representações de um *software* têm sido desenvolvidas para calculadores e computadores com tanta rapidez que se torna difícil lidar com estas. Mais adiante, os autores destacam que, desde o fim dos anos 1990, as pesquisas sobre esta temática decresceram consideravelmente, persistindo nos experimentos que envolviam Geometria.

Borba e Villarreal (2005, p. 77-78) apontam alguns fatores que contribuíram para o abandono, por parte dos pesquisadores, deste tipo de abordagem. Por outra parte, eles relatam que a evolução das calculadoras e computadores mudou a natureza das relações estabelecidas entre o homem e a mídia. Como consequência, percebemos o retorno das investigações que tomam como objeto de estudo as *múltiplas representações*, embora a terminologia específica não seja mais adotada.

Em todo o caso, vemos a ocorrência, no passado como em tempos mais atuais, de mudanças, evolução e adaptação das relações entre homem e máquina, refletindo até nas abordagens e pontos de vista assumidos em pesquisas empíricas que analisam tal relação. Vemos que as próprias terminologias são descartadas e/ou modificadas para o desenvolvimento mais preciso da interpretação dos fenômenos e dos dados.

Mantendo esta preocupação em destaque, adotamos nesta investigação uma posição semelhante às de Giraldo, Carvalho e Tall (2002, p. 153), quando assinalam "que diversos resultados de pesquisas recentes indicam que o uso inadequado de ambientes computacionais pode ter efeitos negativos (ou ao menos inócuos)".

Com efeito, eles identificam alguns dados obtidos em pesquisas realizadas no Brasil que realçam os efeitos negativos dos recursos computacionais. Em alguns estudos envolvendo o *Derive*[12], os estudantes não precisam substituir valores para obter uma tabela e esboçar o gráfico. Em consequência, não desenvolveram a capacidade de cálculo por substituição.

Giraldo, Carvalho e Tall (2002, p. 153-154) relatam no estudo com professores do ensino médio que estes hesitam em reconhecer resultados 'errados' ou 'incompletos', em virtude das limitações do programa. Em outro estudo, discute-se a implantação de um laboratório de ensino de Cálculo numa grande universidade brasileira e, no decorrer das entrevistas, os professores revelam acreditar que tais atividades são uma perda de tempo.

No âmbito das investigações que analisam a aprendizagem de Matemática, os autores advertem para a noção de que "muitas das limitações das representações computacionais para os conceitos matemáticos são decorrentes da estrutura finita dos algoritmos empregados." (GIRALDO; CARVALHO e TALL, 2002, p. 154).

[12] Artigue (1997, p. 142) destaca que, no plano cognitivo, "o *DERIVE* pode favorecer um funcionamento mais reflexivo, estratégico e conceitual, ao liberar o estudante do trabalho técnico. O *DERIVE* pode auxiliar no desenvolvimento de imagens mentais, por meio das possibilidades oferecidas na visualização, bem como melhor compreensão das relações entre os registros numéricos, algébricos e geométricos".

É interessante observar as consequências que podem ser extraídas destas limitações, uma vez que grande parte destas consequências ocupa espaço dentro da sala de aula e vão influenciar de modo direto à cognição dos estudantes. Neste sentido, Giraldo e Carvalho (2003) lembram que "os exemplos citados sugerem que os "benefícios" ou "malefícios" do uso de novas tecnologias no ensino não são intrínsecos à máquina, mas determinados pelo seu emprego em sala de aula". (2003, p. 9)

No trabalho de Giraldo (2004, p. 1), encontramos a interessante noção de *conflito teórico-computacional*, que é descrito pelo autor como "qualquer situação pedagógica onde ocorra uma aparente contradição entre uma representação computacional para um dado conceito matemático e formulação teórica associada". Observamos a descrição do autor na figura 7.

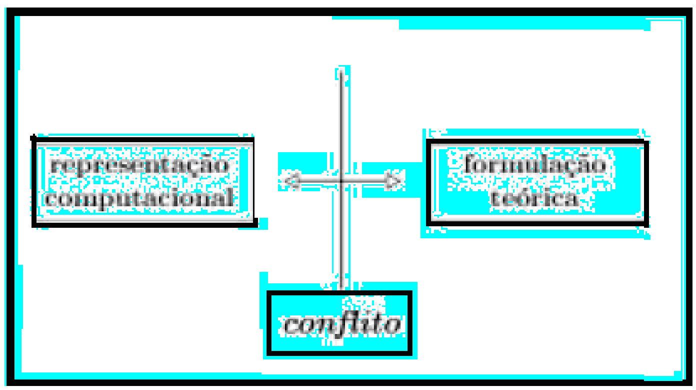


Figura 7. Caracterização de um CTC, fornecida por Giraldo (2004, p. 6).

Em nosso âmbito de estudo, podemos exemplificar a possibilidade do aparecimento de um CTC, por meio da seguinte parametrização $\alpha(t) = (t^4 - 1, t - t^2, 0)$. Na figura 8, observamos do lado esquerdo seu comportamento num ponto de mudança brusca, se imaginamos a trajetória de uma partícula. Por outro lado, quando alteramos os parâmetros, passamos a perceber, no lado direito, uma impressão de maior suavidade local. Neste caso, a *curva parametrizada* adquire aparência de *diferenciabilidade*. Este e outros casos serão analisados no capítulo 4.

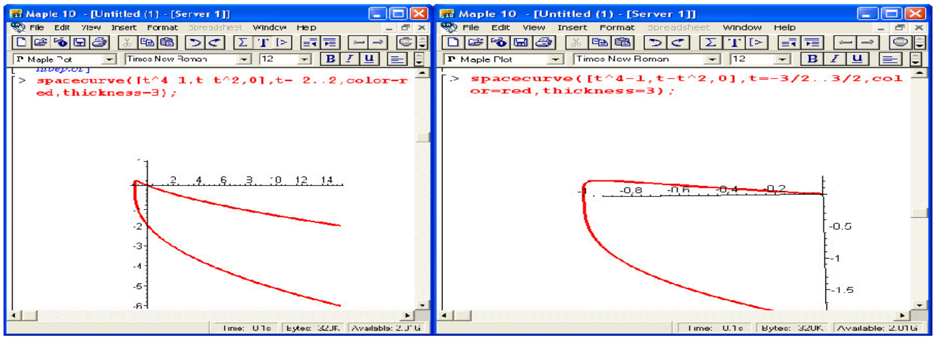


Figura 8. Mudança de parâmetros usando o Maple 10.

Temos outro exemplo, ao considerar a seguinte função $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

Facilmente concluímos que esta não pode estar definida quando $x^2 - y^2 = 0 \leftrightarrow x = \pm y$. Portanto, a função não pode estar definida sobre os eixos (retas) que dividem os quadrantes pares e ímpares do plano (figura 9).

Quando observamos, entretanto, o comportamento do seu gráfico no $\mathbb{R}^3$, principalmente explorando a vista de cima, notamos que não existe gráfico da função numa faixa bem maior do que as retas em azul, dando a impressão de que existem outros pontos onde a função não é definida.

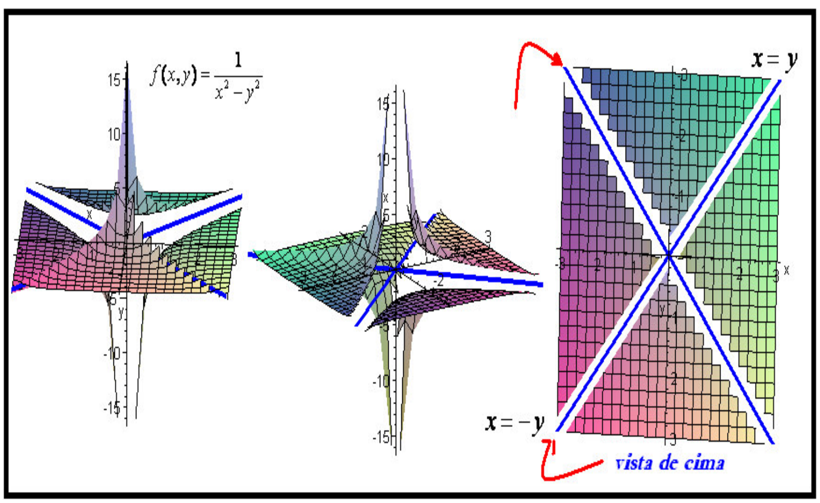


Figura 9. CTC relacionado à noção do gráfico da função.

É interessante notar as considerações de Giraldo (2001; 2004), inseridas no ambiente de uso da máquina, como recurso didático. Tal ambiente requer atenção maior do professor no que diz respeito a estas limitações, pois pode evitar a formulação de falsas concepções ou *imagens conceituais* contraditórias e inconsistentes.

Uma tomada de posição crítica do professor, buscando identificar as limitações do ambiente lápis/papel, pode ser contornada com o dispositivo informático e vice-versa. Com uma reflexão que se aproxima da nossa argumentação, Dubinsky e Tall (1991, p. 234) lembram que

> A performance do *softwares* de manipulação simbólica (*Mathematica*, *Maple*, *Derive*, etc) é um instrumento poderoso, porém eles advertem que é enganoso acreditar que o computador fornece fácil modo de adquirir o conhecimento matemático. Acrescentam ainda que a execução rápida do algoritmo pelo computador não garante a compreensão dos conceitos e para se adquirir conhecimento é necessário a elaboração de um guia de intenções educacionais para os processos de aprendizagem e de ensino. (tradução nossa)

Observamos que esses pesquisadores apontam uma falsa concepção constituída com base nas relações estabelecidas com a máquina. Por outro lado, no ambiente lápis/papel não estamos livres de falsas concepções semelhantes a esta, como, por exemplo, a crença em acreditar que o conhecimento de um grande número de teoremas torna o aluno mais competente e sábio. Criticam e alertam, de modo incisivo, o caráter nocivo desta crença os pesquisadores Fischbein (1987; 2001), Lakatos (1976), Sierpinska (1994) e Tall (2002).

Este último declarava que a Matemática "não surge a partir de um crescente e monótono número de teoremas estabelecidos de modo indubitável, porém, a partir de uma incessante melhora das suposições pela conjectura e o criticismo, pela lógica das provas e refutações." (LAKATOS, 1976, p. 5).

Deste modo, percebemos, com base nos depoimentos de Imre Lakatos, um posicionamento crítico-reflexivo do próprio momento de *prova* e/ou *demonstração*. Nesta ocasião, lidamos com o *rigor matemático*, que pode manifestar um significado variado, dependendo do contexto que se considera.

No âmbito do ensino com o uso do aparato computacional, evidenciamos um uso pedagógico que supera o emprego apenas de *definições formais* e teoremas. De modo semelhante, as ideias essenciais de uma *prova* ou *demonstração* podem ser exploradas, criticadas e não assumidas de modo peremptório e irrefletido, uma vez que "uma abordagem baseada em uma só forma de representação está comumente associada a obstáculos pedagógicos de diferente natureza." (GIRALDO e CARVALHO, 2003, p. 8)

Deste modo, o aparato computacional possibilita outro viés interpretativo do conhecimento matemático. De fato, Mariotti (2002, p. 700) explica que "um pedaço de conhecimento matemático é incorporado num pedaço do *software*. Trabalhando com a solução de um problema dentro de um ambiente computacional de um micro mundo, o usuário constrói o seu próprio conhecimento". Assim, o aluno tem a oportunidade de comparar, inferir e avaliar o comportamento de um objeto do Cálculo num horizonte mais abrangente do que o horizonte perspectivado pelos *formalistas* (ERNEST, 1991).

Yerushalmy e Chazan (2002, p. 745-746) analisaram o comportamento dos estudantes, quando descreveram uma tarefa proposta a estes que envolvia uma atividade com o reconhecimento e comparação entre funções em duas variáveis reais. Os autores destacam o aprendizado dos estudantes por analogia com o comportamento da função em uma variável para duas variáveis, quando declaram a ideia de que

> Sua estratégia generalizante foi construída diretamente a partir do que eles aprenderam em uma variável. Se for realizado com atenção, existe uma analogia direta que pode ser seguida passo a passo. Seguindo-se esta analogia exige-se, entretanto, a mudança de perspectiva à respeito de representações tabulares e gráficas, bem como a semântica dos símbolos na equações e sistemas de equações. (Yerushalmy e Chazan, 2002, p. 746; tradução nossa)

Na figura 10, vemos a página inicial de um *software* utilizado pelos autores. O estudo realizado em Israel analisou as concepções dos estudantes ao comparar os gráficos de duas funções em duas variáveis. Yerushalmy & Chazan trabalharam com grupos de estudantes, explorando, por exemplo, $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = 2x - y$, que possuem os gráficos respectivamente no espaço $\mathbb{R}^3$. Note-se que a representação exibida pelo computador, neste como em outros casos, pode ser determinante para a promoção de uma '*imagem conceitual'* nos aprendizes.

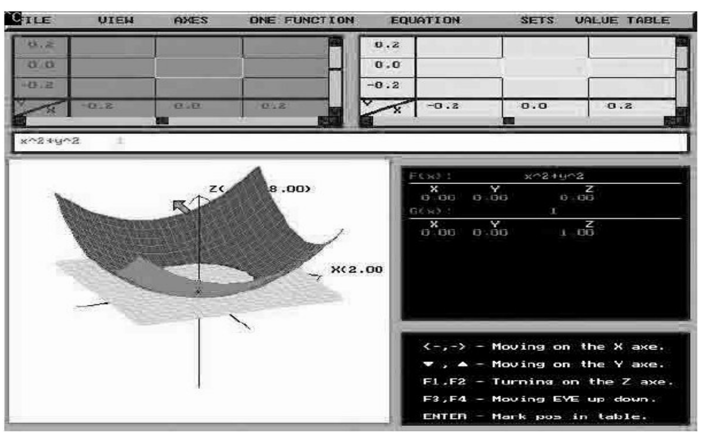


Figura 10. Situação comparativa descrita por Yerushalmy e Chazan (2002, p. 746).

Mamona-Downs e Mamona (2002, p. 177) diferenciam os termos *imagem conceitual* e *imagem mental*. Eles explicam que a expressão *imagem conceitual*, indiferentemente, pelo menos em espírito, possui um significado similar ao termo *imagem mental*. Isto porque precisamos realizar uma acomodação mental do significado aprendido numa situação; todavia, uma *imagem mental* pode se referir ao significado pertencente a qualquer situação antes do que apenas a um conceito isolado.

Deste modo, experimentos como os realizados por Yerushalmy e Chazan (2002) proporcionam a evolução de uma *imagem conceitual* a respeito da ideia de função em uma e em varais variáveis, e nesse caso, a *visualização*[13] foi assumida como via essencial para o referido processo, embora a "visualização seja um largo ramo da pesquisa educacional sofre, porém, pela falta de uma definição uniforme; interpretações podem ser em termos do pictórico, geométrico e gráfico, estímulo interno e externo ou da intuição." (MAMONA-DOWNS e MAMONA, 2002, p. 178)

Pode-se dizer que a capacidade de *visualização* é uma *habilidade matemática*. Bishop (2008, p. 71) esclarece que "habilidade matemática é concebida como uma combinação de inteligência aplicada num contexto matemático". Mais adiante, Ele salienta que *habilidade espacial* e *habilidade matemática* diferem dependendo do estudo. E, num dos estudos focados pelo autor, ressalta que "a habilidade espacial depende do grau de envolvimento da percepção, retenção, recognição (ou re-produção) da figura ou dos padrões em suas corretas proporções." (BISHOP, 2008)

Outros pesquisadores manifestam reconhecido interesse pela *visualização* são Borba e Villareal (2005). Eles advertem para a noção de que, "quando focamos a palavra *visualização*, encontramos diferentes caracterizações". No rol dos estudos comentados por eles, destacamos a pesquisa desenvolvida por Zazkis, Dubinky & Dautermann, que fornecem a seguinte definição:

> *Visualização* é um ato no qual um indivíduo estabelece uma forte conexão entre uma construção interna e algo que é alcançado e obtido por meio dos sentidos. Tal conexão pode ser feita em uma ou outra direção. Um ato de visualização pode consistir de construções mentais de objetos ou processos que um indivíduo associa com objetos ou eventos percebidos por ele ou ela externamente. Alternativamente, um ato de *visualização* pode consistir de uma construção, de algum instrumento como um papel, tela de computador ou objetos e eventos que o indivíduo identifica como objetos e processos em sua mente. (2005 apud BORBA e VILLAREAL, p. 81; tradução nossa).

Sem dúvida, nesta extensa citação, identificamos elementos de natureza filosófica que, aparentemente, se apresentam como de fácil ou rápida explicação. Por exemplo, a construção mental de objetos e a construção mental de processos matemáticos. Estabelecemos, no entanto, um compromisso de voltar a discutir alguns

[13] Observamos que, não apenas no meio investigativo na área de Educação Matemática o termo *visualização* é empregado num sentido multivariado, mas, também na História da Matemática, "o status da palavra se alterou ao longo do tempo." (BRÄTING, 2009, p. 11)

destes elementos, principalmente o papel da *percepção* que possibilita o direcionamento nem sempre consciente do foco de atenção do sujeito.

Em todo caso, é possível afirmar que existe uma concordância teórica a respeito do valor pedagógico da *visualização* no ensino e aprendizagem de Matemática. No âmbito pedagógico, "as funções do *software* principalmente fornecer aos estudantes oportunidade de explorar ideias matemáticas, analisar contra-exemplos, e obter as intuições necessárias para o alcance de poderosos insights formais" (BORBA e VILLAREAL, 2005, p. 88).

Parece-nos, todavia, que, embora a *visualização* seja reconhecida como relevante, o objetivo final continua sendo a prova formal e rigorosa, como se observa na comunidade de matemáticos.

Em termos atuais e de acordo com a tendência filosófica, o recurso visual desempenha ainda um pequeno papel da atividade investigativa. Por outro lado, quando falamos sobre ensino/aprendizagem, a mesma atitude filosófica é promissora, uma vez que, por meio da *visualização*, proporcionamos ao estudante situações que evidenciam o lado *falibilista* da Matemática.

Vale recordar que os simpatizantes do *formalismo* não costumam dar muita importância ao seu emprego na investigação matemática. Um dos motivos provém das incertezas, equívocos e inconsistências apresentadas por determinadas teorias. Kline nos fornece uma perspectiva interessante, após analisar, no início de sua obra, alguns exemplos de ilusões de óptica que enganam nossos sentidos.

Sublinha que "a maior parte destas ilusões foram deliberadamente concebidas por psicólogos, porém nós não precisamos reunir figuras elaboradas para apreciar que nossos sentidos da visão estão constantemente em erro – e por causas compreensíveis." (KLINE, 1985, p. 30)

É interessante que o eminente Matemático alemão, diante dos casos discutidos, em que evidenciamos as limitações do raciocínio intuitivo empregado na *visualização*, explica de modo teórico, referenciando-se nos modelos da Física e da Matemática, o motivo de sua ocorrência.

Kline (1985, p. 26) recorda que a intenção de "apresentar uma cena de três dimensões numa superfície ou num quadro em duas dimensões. Tal intenção é identificada nos pintores da Renascença que conceberam um esquema matemático, conhecido como perspectiva linear, que atinge o resultado pretendido". Compreendemos seu ponto de vista observando a figura 11.

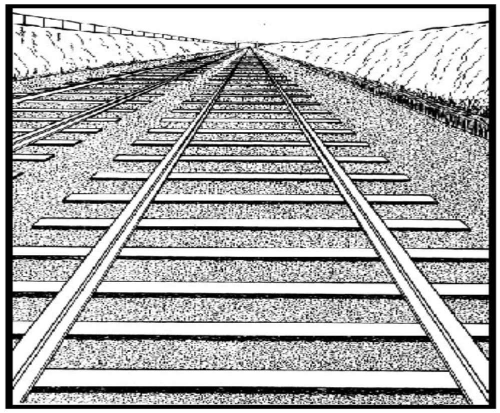


Figura 11. Gravura analisada por Kline (1985, p. 11), que exemplifica a *perspectiva linear*.

Frery, Gomes e Velho (2009, p. 135) lembram que "uma imagem é o resultado de um estímulo de luz por meio de um suporte em duas dimensões". Assim, quando observamos o desenho apoiado no plano (duas dimenssões), destacado por Felix Klein (1849-1925), temos o estimulo de uma atividade perceptiva em relação às três dimensões.

Hodiernamente, a tecnologia amplificou as possibilidades exploradas de modo rudimentar pelos pintores da Renascença. Neste sentido, Frery, Gomes & Velho (2009, p. 3) lembram que "o objetivo da visão computacional, fornecida uma quantidade de informação, obter informação sobre o mundo físico, geométrico, ou propriedades topológicas do objeto exibido".

Portanto, desde que dispomos atualmente de instrumentos poderosos que proporcionam a *visualização*, podemos prever o estímulo de determinadas habilidades matemáticas cuja concepção era impossível no século passado. Neste contexto, a visão computacional nos fornece valiosas informações e resposta a algumas questões que, até então, tinham sido discutidas no âmbito filosófico.

De fato, Frery, Gomes e Velho (2009, p. 82) mencionam os trabalhos versando sobre o espaço de cores do olho humano. Destacam as antigas investigações de Isaac Newton e Thomas Young. O modelo proposto por este último descreve o olho humano como um receptor físico de cores com três dimensões. Os dados empíricos obtidos em seu estudo mostram que o olho humano manifesta maior resposta quando temos "*wavelengths"* correspondentes às cores vermelho, verde e azul.

Ora, presenciamos dados empíricos fornecidos pela pesquisa computacional e inteligência artificial. Perante estes, na condição de matemáticos educadores e, primeiramente, professores, necessitamos adotar uma posição que propicie a apropriação adequada deste saber produzido em outras áreas científicas e desenvolver as adaptações e implicações pertinentes ao ensino/aprendizagem de Matemática.

Frery, Gomes e Velho (2009, p. 137) definem, por exemplo, uma aplicação contínua de imagem (*continuous image*) como sendo uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to C$, onde C é um *espaço vetorial*, podendo ser um espaço de cores. Enquanto que U é chamado de *suporte da imagem*. É interessante a descrição dos autores, quando C é um espaço unidimensional de cores.

Neste caso, pode gerar uma figura no $\mathbb{R}^3$ correspondente ao gráfico da função, e, neste caso, “a interpretação geométrica conduz a uma visualização mais intuitiva de certos aspectos da imagem”. Note-se que “sentividade visual a pequenas diferenças entre cores é de fundamental importância em experimento de percepção de cores.” (FRERY, GOMES e VELHO, 2009, p. 116).

Deste modo, proporcionamos uma experiência visual inusitada, envolvendo o Cálculo, quando exploramos a *visualização* proporcionada por instrumentos tecnológicos, embora, em alguns casos, a mesma nos conduz às contradições.

Todavia, podemos ainda extrair implicações pedagógicas positivas, quando recorremos a Balacheff (1988, p. 71). Sobre o papel das contradições, explica que

> A tomada de consciência de uma contradição supõe uma predição, isto é, o engajamento efetivo de um aluno sobre uma afirmação. Isto significa que seu desprendimento da ação, um passo de lado graças a qual a ação é considerada como suscetível de uma reflexão. A ação não é apenas o agir. Produz escolhas, ela se relaciona com as condições de validade e seus efeitos. Ela é submetida a uma finalidade. A contradição surge da não realização desta finalidade. Ela coloca então a questão da escolha e de condições da ação. (tradução nossa)

Deste modo, ao passo que em que no processo de *visualização* concorrem inúmeros elementos como alguns que mencionamos, seus efeitos negativos podem desempenhar um papel de geradores de conflitos cognitivos e contradições.

Os Conflitos Teóricos Computacionais (GIRALDO, 2004) podem ser explorados de modo didático no ensino do CVV, uma vez que propiciam, segundo o ponto de vista de Balacheff há pouco destacado, uma reflexão e tomada de consciência das ações e o motivo do não alcance de determinada finalidade. Discutiremos, todavia, um pouco mais sobre estes temas na seção seguinte no contexto da *transição interna* do CUV para o CVV.

1.6 O ensino do Cálculo a Várias Variáveis – transição e simbologias

> Os estudantes não sabem de onde os axiomas vêem, e por que são escolhidos de modo particular e aonde a sequencia interminável de teoremas que se produz. Mesmo quando um estudante acompanha o que esta sendo verificado em cada passo da prova, ele usualmente não compreende o raciocínio, o pensamento básico por traz da prova. (KLINE, 1977, p. 65; tradução nossa)
>
> Na transição para o pensamento matemático avançado, o foco de atenção muda em consideração aos novos mundos teóricos claramente construídos axiomaticamente. (TALL, 1997, p. 18; tradução nossa)

Mencionamos ao longo deste trabalho uma diversidade de pesquisas (GARCIA, 2006; HERSHKOWITZ, 2002; TALL e VINNER, 1981; TALL, 1985; TALL e WEST, 1986) voltadas à identificação dos problemas e entraves sentidos pelos estudantes na "transição do ensino escolar para o ensino de Matemática no ambiente universitário". (EDWARDS, DUBINSKY e MCDONALD, 2005). Não encontramos com a mesma facilidade, todavia, estudos que analisam a *transição interna* do Cálculo a uma Variável Real - CUV para o Cálculo a Várias Variáveis – CVV, tanto no cenário nacional como internacional.

Alguns trabalhos (ALVES e BORGES NETO, 2008; 2009b, 2009c; 2010a; 2010b) no ensino deste conteúdo apontam algumas questões e elementos que precisam ser considerados nesta *transição interna*, a saber:
(i) um sistema de representação simbólica mais complexo do que o outro; (ii) as argumentações envolvidas nas demonstração dos teoremas são mais complexas, inclusive a natureza das *definições formais* envolvidas; (iii) a natureza geométrica dos objetos envolvidos; (iv) a mudança da significação conceitual interpretada em um novo *locus matemático* e (v) o surgimento de regras operatórias particulares do CUV e do CVV; (vi) regras operatórias válidas num contexto e inapropriadas em outro; (vii) teoremas do CUV sem interpretações semelhantes no CVV; (viii) definições formais que envolvem uma mudança de significado de acordo com a teoria formal; (ix) generalização de noções e definições formais; (x) surgimento de conceitos no CVV que não possuem significados correspondentes no CUV.

No que diz respeito ao primeiro elemento, exibimos na figura 12, restritivamente ao caso de funções do tipo $y = f(x)$ e $z=f(x,y)$, elementos presentes na referida mudança. É de se esperar o surgimento *elementos de transição* (ver Anexo V, p. 389)e outros que atuam como entraves e rupturas à aprendizagem (*elementos de ruptura*), uma vez que em toda mudança há conflitos. Neste sentido, com relação à transição escola universidade, Mariani (2006, p. 208) recorda-se de que

> A transição da Educação Básica para o Ensino Superior pode propiciar o desenvolvimento de inúmeras pesquisas na área de Educação Matemática, uma vez que, este período, caracterizado por conflitos e propício a mudanças, interfere no reconhecimento e na mobilização dos conhecimentos que já foram acessados, bem como o que deverão ser adquiridos no curso de Graduação.

No exterior, vários investigadores desenvolvem intensa sinergia com vistas a identificar elementos marcantes na transição comentada por Mariani (2006). Alguns deles (EDWARDS, DUBINSKY e MCDONALD, 2005, p. 18) sustentam não haver um ponto ou estágio hipotético no qual o pensamento matemático elementar é substituído pelo pensamento matemático avançado.

Esses autores concebem um fluxo matemático em um *continuum* e esclarecem que uma das importantes características da definição de um pensamento matemático avançado é a "necessidade constante da combinação e necessidade de raciocínio dedutivo e rigoroso sobre conceitos não acessíveis ao indivíduo por meio dos cinco sentidos." (EDWARDS; DUBINSKY e MCDONALD, 2005, p. 18)

(I) **(II)**

$$Lim_{x\to a} f(x) = L \xrightarrow{\text{processo de limite}} Lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

$$f'(x_0) = Lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\text{derivação}]{} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = Lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow[\text{processo de integração}]{} \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$

Figura 12. Quadro de *transição interna* do CUV para o CVV.

Quando lançamos uma visão aprofundada para os livros didáticos do ensino de Cálculo a Várias Variáveis – CVV, comparando-se aos do Cálculo a uma Variável Real, com facilidade, identificamos o aumento de complexidade e de comprimento das demonstrações dos teoremas. Uma questão interessante é observar que tipo de *raciocínio* estes livros promovem, entretanto, a partir das considerações de Baruffi, podemos suspeitar da qualidade didático-metodológica de tais manuscritos. Com efeito, em sua tese, a autora aponta que

> Um primeiro exame de diversos livros selecionados nos mostra diferenças muito grandes na abordagem realizada. Ainda que, nos diferentes textos, o assunto, basicamente, seja sempre o mesmo, em cada caso, o autor definiu objetivos principais, realizou escolhas metodológicas para viabilizar a consecução dos objetivos. Por exemplo, privilegiou determinada sequencia na abordagem considerada, estabeleceu preponderância da lógica ou da retórica no desenvolvimento do texto, imprimiu um caráter mais algébrico ou geométrico, propôs questões mais ou menos criativa, além daquelas "burocráticas", que objetivam a técnica. (BARUFFI, 1999, p. 50)

Na sequência, em sua tese, Baruffi (1999) sublinha a existência de diferença entre os textos de CUV que pretendem negociar significados, para a elaboração do conhecimento, mediante a apresentação puramente lógica e a revelação seqüencial de um edifício pronto chamado Cálculo Diferencial e Integral. Daqueles que procuram negociar os significados por meio de problemas interessantes e motivadores, buscando, inicialmente, muito mais promover as ideias intuitivas do que estabelecer as relações formais e lógicas.

Em sua tese, foram analisados 18 livros adotados no ensino desta matéria no *locus* acadêmico. Dentre algumas de suas considerações finais formuladas com substrato nesta analise documental, sublinhamos: alguns dos livros apresentam propostas que se aproximam mais de um curso de *Análise Real*; outros que, embora não partam de situações-problema, conseguem mostrar diferentes aplicações do Cálculo; livros que não focalizam as ideias geradoras do Cálculo; quase metade das obras utiliza recursos provenientes da Lógica Clássica, caracterizando a dedução e evitando ao máximo a intuição que poderia tornar mais razoáveis os raciocínios efetuados; e preocupação predominante com a transmissão do conhecimento em detrimento da construção/negociação.

Os dados apontados por Baruffi no que diz respeito ao ensino do CUV são preocupantes. Além disso, enquanto observamos uma evolução das práticas educativas que garantem a compreensão estudantes em outras matérias estudadas na academia, como no caso da Geometria, no curso de Cálculo, aparentemente, a crença segundo a qual "a estrutura lógico-matemática é garantia suficiente para a aprendizagem" ainda é constante, como destaca Baruffi (1999, p. 149).

Deste modo, que expectativas podemos criar a respeito das obras didáticas utilizadas no ensino do Cálculo a Várias Variáveis – CVV? Haveria alguma mudança radical no discurso, nos objetivos metodológicos e nas práticas de sala de aula estabelecidas no ensino do CVV, quando comparado ao ensino do CUV?

Respaldando-nos em nossa prática diária, conjecturamos que não ocorrem mudanças significativas no que se refere aos reducionismos metodológicos. Além disso, temos alguns fatores agravantes. O nosso primeiro exemplo é discutido em Harel e Kaput (2002). Eles esclarecem que "uma função de valores reais $f(x,y)$ é usualmente pensada como um processo de aplicação de pontos d plano (x,y) em pontos da reta real". Os estudantes que apresentam a ideia dinâmica possibilitada pelo modelo de $f(x,y)$, têm mais chances de êxito.

Por outro lado, "outra sutil interpretação pode tomar $f(x,y)$ como um processo que associa pontos da reta x, com funções $f_x(y)$, onde este último assume valores de $f(x,y)$". (HAREL e KAPUT, 2002, p. 86)

Mais adiante, os autores analisam o contexto de ensino de limites do tipo $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, e do *limite interado* $\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)]$. Notamos que, enquanto "computacionalmente o limite interado seja mais simples de calcular do que o limite duplo, conceitualmente o limite interado envolve ideias mais sofisticadas, que causa dificuldades para estudantes em circunstâncias particulares." (HAREL e KAPUT, 2002, p. 86)

Os autores concebem o seguinte diagrama (figura 13) que descreve o limite interado como uma espécie de composição de operadores descritos como seguem:

(i) M : $\mathrm{x} \to \mathrm{f_x}(y)$ com domínio no conjunto dos reais e imagem num conjunto de funções;

(ii) $\lim_{y\to b}$: $\mathrm{f_x}(y) \to f(x)$ cujo domínio e imagem está num conjunto de funções;

(iii) $\lim_{x\to a}$: $\mathrm{f}(x) \to c$ com o domínio num espaço de funções e imagem num conjunto dos reais.

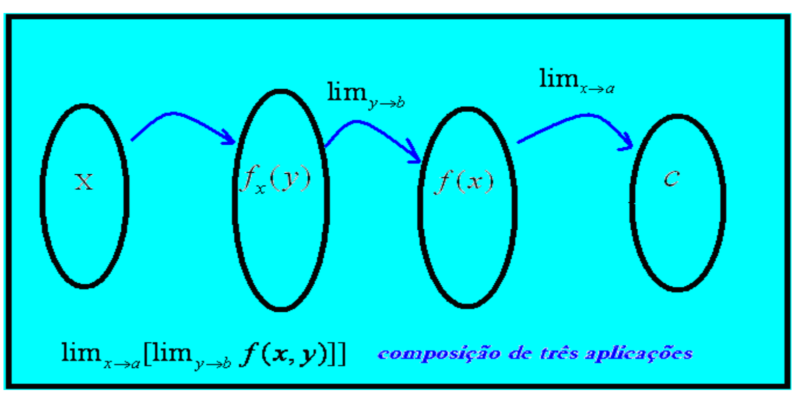


Figura 13. Fluxograma conceitual descrito por Harel e Kaput (2002, p. 86).

Segundo os autores, “as respostas dos estudantes indicam dificuldades no tratamento concernente ao operador M, como caracterizado anteriormente, um objeto que requer uma noção de função como objeto. Enquanto o operador M deve ser compreendido como um operador de valores, os outros dois operadores $\lim_{y \to b}$ e $\lim_{x \to a}$ pode ser vistos de dois modos, que determinam diferentes níveis de compreensão do conceito de limite interado” (HAREL e KAPUT, 2002, p. 87).

Falar de *limite*, semelhantemente ao que vimos no ensino do CUV, exige que mencionemos o caso da seguinte igualdade $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Temos aqui a noção de continuidade de funções. Geralmente, apresentada com referência às três condições:

(i) $\exists f(a,b)$

(ii) $\exists lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

(iii) $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Note-se que, de modo semelhante à crítica desenvolvida em Revuz (1972) na seções anteriores, tais condições não sugerem de modo imediato, para o aprendiz, um significado geométrico. Muito menos um modo de relacionar o modelo intuitivo ou ‘modelo metafórico’ da noção de continuidade do CUV com o CVV.

De fato, já mencionamos as metáforas empregadas no CUV com a intenção de fornecer um sentido intuitivo à referida noção, todavia, como interpretá-la com um viés semelhante no caso de funções do tipo $z = f(x,y)$?

Por exemplo, quando consideramos os gráficos abaixo de duas funções descontínuas, identificamos uma região na origem na qual o gráfico não comparece. Por outro lado, ao passo que, no primeiro caso, pela vista de cima, identificamos um ‘buraco’, no caso (II), notamos uma ‘cratera’ acentuada na figura 14.

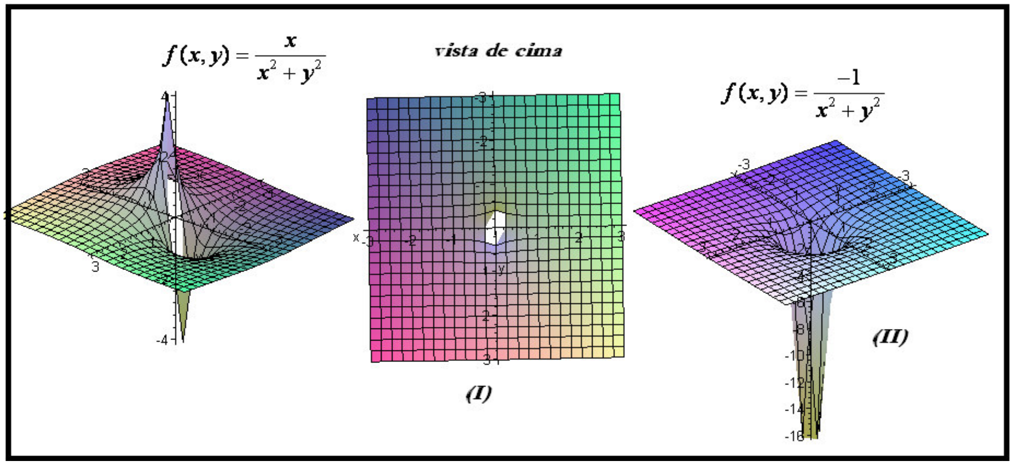


Figura 14. Em (I) temos o gráfico com aparência de um buraco na origem e em (II) uma 'cratera'.

E quando nos referimos à formulação por épsilon e delta, revemos $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.≡. dado ε>0, existe δ>0, de modo que se $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \to |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$. Observamos na literatura especializada o tratamento dispensado para a interpretação geométrica da formulação por *épsilon* e *delta*. Notamos que a figura 15, exibida pelo autor, ou a sua argumentação, não sugere uma argumentação metafórica semelhante à empregada no CUV.

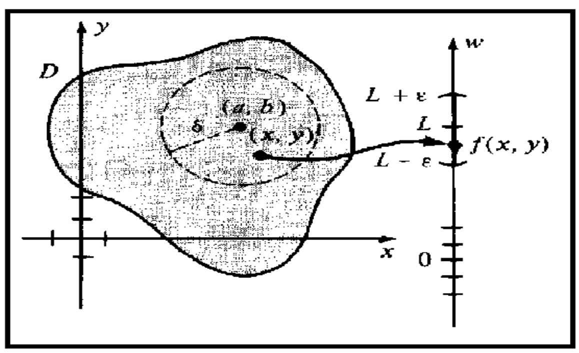


Figura 15. Interpretação geométrica discutida por Swokowski (1979, p. 721).

Além disso, podemos identificar com facilidade vários exemplos nos quais não conseguimos efetivamente estabelecer uma relação direta entre ε e δ, conforme habitualmente o aluno encontra nos livros didáticos $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } \delta = \frac{\varepsilon}{3}\ , etc\right)$, como nos casos de $f(x,y) = \frac{x^3 y^4}{x^6 + y^{10}}$ ou $f(x,y) = sen(x^2 + y^2) \cdot \left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$. Assim, além de o próprio modelo se mostrar ineficiente em alguns casos, o aluno se depara ainda com a exigência de aprendizagens de determinados tipos de raciocínios que podem propiciar dificuldades ao iniciante.

Para discutir um exemplo referente ao tipo de raciocínio empregado no CVV, recordamos as colocações de Guerrier (2005, p. 52), que destaca o pensamento de George Polya quando indicava a importância da noção de raciocínio plausível.

Para Polya, “quando se faz uma conjectura sobre A e dispomos de um teorema da forma $A \Rightarrow B$, o fato de poder estabelecer a verdade sobre B permite se aumentar o grau de verossimilhança, e por seguinte de confiança, na conjectura A. Neste caso Polya afirma que A é mais crível.” (GUERRIER, 2005, p. 52)

Temos, então, um exemplo de raciocínio em Matemática utilizado nas demonstrações do CVV; entretanto, a noção de *raciocínio plausível* é explorada pelos autores de livros? Como utilizá-lo e como identificá-lo?

Guerrier (2005, p. 52) nos fornece um exemplo clássico de uso deste raciocínio, quando diz que

> Nós utilizamos, por exemplo, este tipo de raciocínio quando buscamos saber se uma função de duas variáveis é diferenciável num ponto. De fato, é mais fácil estudar a continuidade no ponto de uma função de duas variáveis do que sua diferenciabilidade neste ponto. Ou a diferenciabilidade implica a continuidade; em seguida, se a função não é contínua neste ponto considerado, podemos concluir também que a função não será diferenciável neste ponto, e economizamos um cálculo bastante fastidioso. Por outro lado, se a função é contínua no ponto considerado, prosseguimos o estudo nos interessando por suas derivadas parciais. No caso em que a função não admite no ponto as derivadas parciais, ela não será diferenciavel neste ponto. Do contrário, se as derivadas parciais existem, prosseguimos o estudo. A função passou com sucesso por dois testes, e aumentamos nossa confiança para uma resposta positiva sobre a questão de sua diferenciabilida no ponto considerado. Para prosseguir ao estudo sem recorrer a definição, podemos utilizar neste estádio o fato de que a continuidade das derivadas parciais implica a diferenciabilidade; em seguida, podemos fazer o estudo da continuidade neste ponto das derivadas parciais e concluir positivamente no caso onde elas são contínuas. Por outro lado, no caso em que elas não são contínuas, não se pode concluir, e é necessário agora retornar a definição para concluir o estudo. (tradução nossa)

Na figura 16, descrevemos, passo a passo, os níveis de argumentações e raciocínio empregados na investigação do caráter diferenciável de uma função. Notamos que a argumentação mais interessante é aquela fundada em condições necessárias, mas não suficientes.

Nestas condições, o aluno tem a oportunidade de desenvolver um raciocínio nãolinear, em busca de contraexemplos e casos patológicos no CVV que, na maioria dos casos, envolvem objetos complexos.

Quando prosseguimos com esta preocupação, podemos prolongar o tempo investido pelo aluno no que diz respeito ao caráter da *diferenciabilidade*, em vez de empregar, mecanicamente, a condição do *limite* (condição formal) descrito por $Lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[\frac{E(x_0+\Delta x.y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}]=0$, onde o termo do numerado $E(x_0+\Delta x.y_0+\Delta y)$ representa o "erro" que se comete ao aproximar-mos a função $f(x,y)$ por um plano tangente ao ponto de intersecção (x_0,y_0).

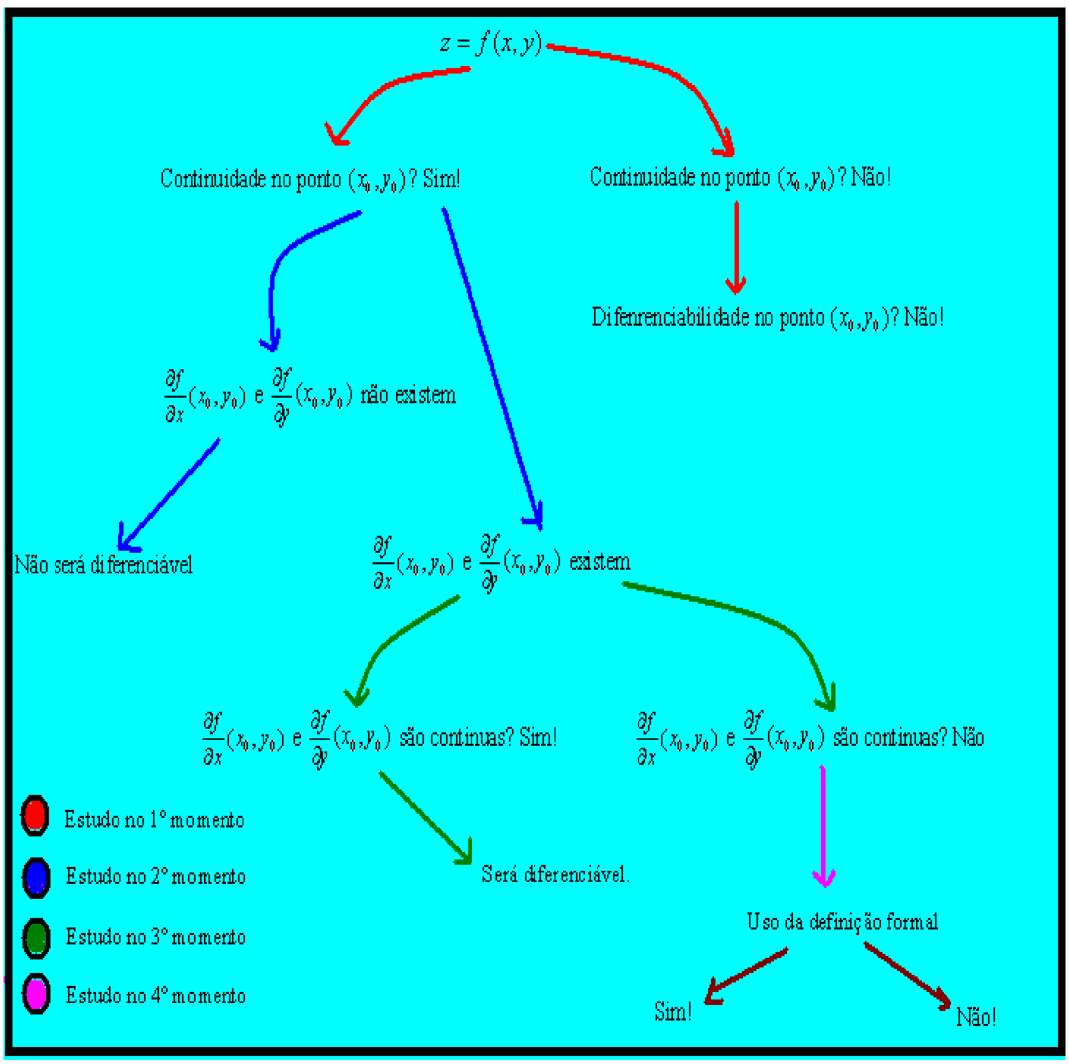


Figura 16. Fluxograma esquemático caracterizado por Guerrier (2005, p. 52).

Esquematicamente, elaboramos um fluxograma que sintetiza a investigação necessária desenvolvida pelo aluno para descobrir se a função $z=f(x,y)$ é diferenciável ou não. Para desenvolver um raciocínio comparativo com o Cálculo em uma Variável Real, quando buscamos saber se uma função do tipo $y = f(x)$ é *diferenciável*, observamos primeiro se ela é contínua.

Se não for continua, digamos num ponto $x = a$, em virtude de um teorema, não poderá ser *diferenciável*. Por outro lado, se $y = f(x)$ for contínua neste ponto, nossa investigação continua, entretanto, diferentemente da trajetória apontada por Guerrier, temos nesse caso que imediatamente verificar a *definição formal* $f'(x) = Lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ como encontramos em Stewart (2004, p. 163). Vejamos isto na figura 17.

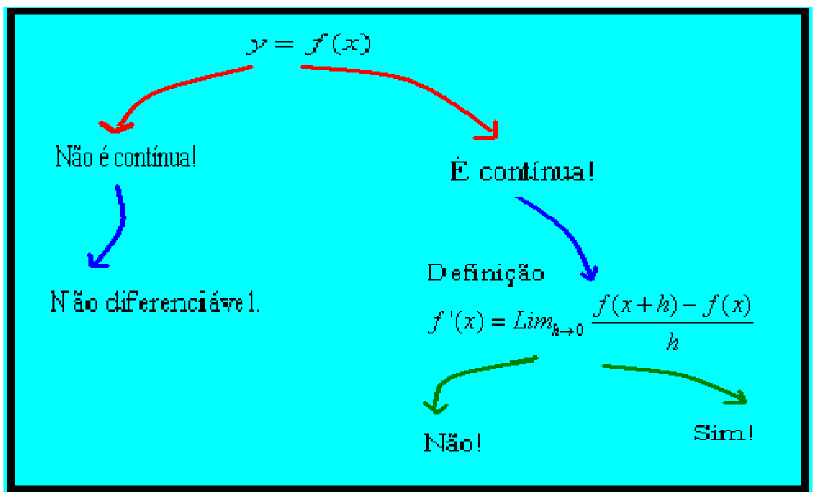


Figura 17. Condições de validade ou não da propriedade no CVV.

Note-se que assumimos, para efeito de investigação, a fato de ser a maior importância para a aprendizagem a possibilidade da não ocorrência da propriedade; ou melhor exprimindo, quando um aluno sabe que uma função é *contínua*, esta pode ser ou não *diferenciável*, assim, o que acreditamos envolver maior relevância para à aprendizagem é a compreensão do estudante relativa aos aspectos matemáticos *necessários* para o preenchimento da condição formal, e não os aspectos *suficientes*.

Como mencionamos o modelo de *diferenciabilidade*, vamos desenvolver um raciocínio comparativo/analógico incomum nos cursos de CVV. Inicialmente, vamos tomemos a função $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$. Tal função pode ser vista apenas como uma curva, quando fazemos $y = f(x, 0) = 10 - x^2$. Na figura 18, exibimos a reta tangente no ponto $x = 2$, portanto, $y = f(x) = 10 - 2^2 = 6$. Obtivemos o seu coeficiente angular que representa a taxa de variação por

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10-(2+\Delta x)^2-6}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6-4\Delta x-\Delta x^2-6}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x}=-4.$$

No caso da função $f(x,y)=10-x^2-y^2$, devemos considerar o ponto $f(2,0)=10-2^2-0^2=6\therefore(2,0,6)$. De modo semelhante, precisamos identificar o coeficiente angular de uma reta tangente à curva parametrizada por $f(t,0)=10-t^2-0^2$. Empregamos a seguinte parametrização $\alpha(t)=(t,0,10-t^2)$ e podemos observá-la sobre a superfície (parabolóide) na figura 18. .

Para a obtenção do coeficiente angular neste ponto, temos um recurso a mais, em derivar a curva $\alpha'(t)=(1,0,-2t)$. Notemos que no ponto $\alpha(t)=(t,0,10-t^2)=(2,0,6)\leftrightarrow t=2$; assim, precisamos do vetor velocidade com o parâmetro $t=2\therefore\alpha'(2)=(1,0,-4)$, o que equivale a equação paramétrica da reta $\begin{cases}x=2+t\\ y=0\\ z=6+4t\end{cases}$. Por outro lado, temos $x-2=\dfrac{6-z}{4}\leftrightarrow 4x-8=6-z\leftrightarrow z=-4x-14$.

Vejamos que poderíamos apenas ter tomado a função $f(x,y)=10-x^2-y^2$ e avaliado sua derivada parcial no ponto $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x,0)-f(2,0)}{\Delta x}=-4$. Conclusão: apesar de empregarmos procedimentos mais complexos, obtivemos, de modo análogo, o coeficiente angular da reta tangente à superfície.

Por fim, vamos agora considerar de modo arbitrário uma direção no plano, digamos, o vetor $u=(1,1)$. Vamos em seguida avaliar o seguinte limite que caracteriza a derivada direcional no ponto $(2,0)$. Assim, escrevemos: $\dfrac{\partial f}{\partial u}(2,0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(2+t\cdot 1,0+t\cdot 1)-f(2,0)}{t\cdot\sqrt{2}}=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(2+t,t)-f(2,0)}{t\cdot\sqrt{2}}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(2+t,t)-6}{t\cdot\sqrt{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{10-(2+t)^2-t^2-6}{t\cdot\sqrt{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{10-4-4t-t^2-t^2-6}{t\cdot\sqrt{2}}=$$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{-4t-2t^2}{t\cdot\sqrt{2}}=\lim_{t\to 0}\dfrac{-4-2t}{\sqrt{2}}=-4$. Notamos a coincidência dos valores numéricos obtidos. De fato, no primeiro caso, encontramos $\dfrac{dy}{dx}(2)=-4$. No segundo, vimos que

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = -4$ e, por fim, ao utilizar a derivada direcional na direção do vetor $u = (1,1)$, obtivemos $\frac{\partial f}{\partial u}(2,0) = -4$. Consideramos agora $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 0+t \\ z = 6 \end{cases}$

Notemos que a interpretação geométrica neste caso é bem mais complexa.

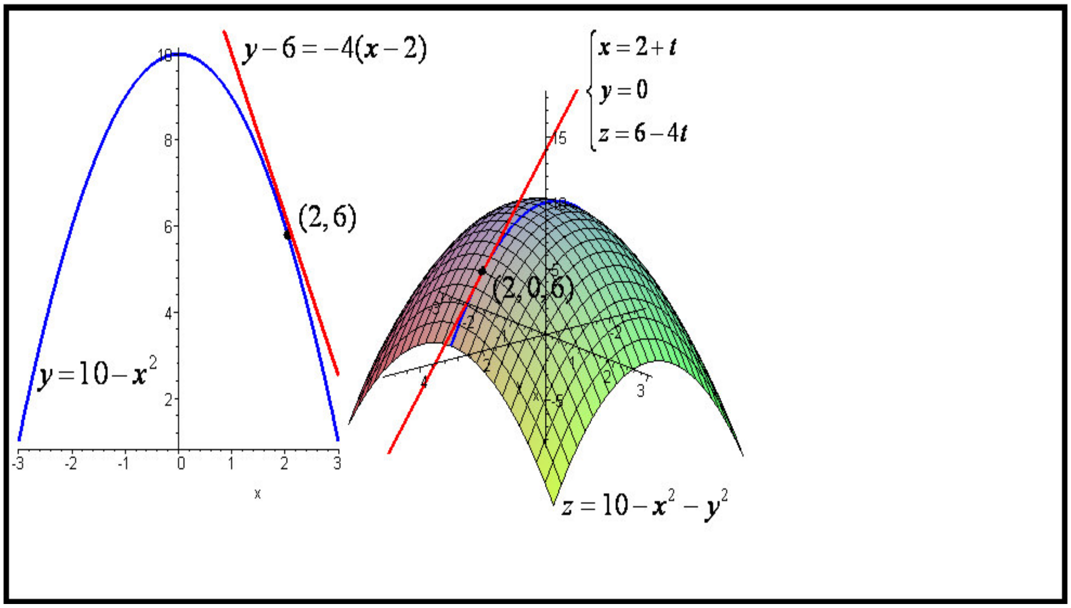


Figura 18. Relações entre os tipos de derivada construídos pelo *Maple*.

Tal posição assumida pelo professor requer um discurso baseado na *crença* e não na *certeza matemática*. De fato, quando sabemos que uma função $z = f(x, y) \notin C^2$, não há nada mais o que duvidar quanto à propriedade $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, fato matemático conhecido pelo teorema de Claireaut-Scharwrz. Os alunos, em geral, sentem dificuldades em raciocinar termos do enfraquecimento das hipóteses ou o resultado inverso, ou seja, se ocorre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, então a função $z = f(x, y) \in C^2$.

Observemos que, em Lages (2010, p. 146), é enunciado como o "teorema de Schwarz". Já no livro eletrônico disponível na pagina http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/HighOrderPartialDerivs.aspx, vemos o seguinte enunciado: Supondo uma função definida num disco D, que contém o ponto (a,b). Se f_{xy} e f_{yx} são contínuas nele, então $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. É notável o emprego de outra notação. Assim, evidenciamos na própria literatura a variedade de enunciados equivalentes e a variação de nome do próprio teorema, inclusive a simbologia empregada. Na figura 19, exibimos as possibilidades conceituais, quando enfraquecemos as hipóteses.

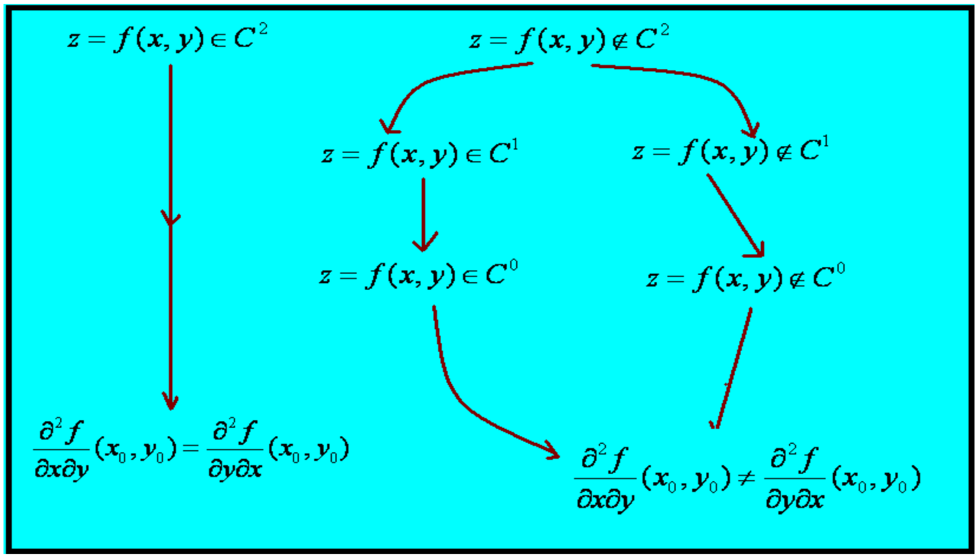


Figura 19. Condições de validade e não validade do teorema de Claireaut-Schwarz.

Experimentalmente falando, trabalhar com tais condições possibilita mediar a *crença* sobre estes objetos, na medida em que se esta produzindo inferências, e não a *certeza* dos enunciados matemáticos, uma vez, que "quando enfraquecemos as condições suficientes nos enunciados de um teorema, proporcionamos a atividade declarativa dos sujeitos." (ARTIGUE, 2002, p. 18)

Por outro lado, apresentar e discutir os resultados com toda a sua generalidade e condições suficientes abrevia a investigação e possibilita o emprego de formulações de modo pouco refletido. Podemos citar, para exemplificar, a condição de *diferenciabilidade* para uma função $z = f(x,y)$ é caracterizada por

$$Lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} [\frac{E\,(x_0 + \Delta x . y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}] = 0 \,,$$

onde

$$E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

representa o *erro que se comete ao calcular a aproximação da função por um plano tangente* determinado pelas *derivadas parciais*.

Quando o aluno verifica que tal limite vale zero, declara sem hesitação, baseado na definição, que a função perde seu caráter diferencial, entretanto, nos casos em que o limite não existe ou quando este limite vale $Lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[\frac{E(x_0+\Delta x.y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}]=k$ (k=cte), diferente de zero, o aprendiz pode manifestr uma incapacidade de interpretação do que pode ocorrer naquele ponto.

Em situações como esta, o auxílio ao raciocínio, disponibilizado pelo professor ou pelo livro, assume um papel essencial. Por exemplo, observamos em algumas obras, uma preocupação com o entendimento do leitor.

Destacamos, por exemplo, a obra de Hairer e Wanner (2008). Encontramos no trecho referente à noção formal de função definida a várias variáveis sua generalização descrita por $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, como observamos na figura 20, entretanto, para efeito didático, o autor apresenta dois casos particulares que auxiliam a visualização do objeto definido anteriormente.

Let A be a subset of $\mathbb{R}^n$. A function

(2.1) $$f : A \to \mathbb{R}^m$$

maps the vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ to the vector $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Each component of y is a function of n independent variables. We thus write

(2.2) $$y = f(x) \quad \text{or} \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

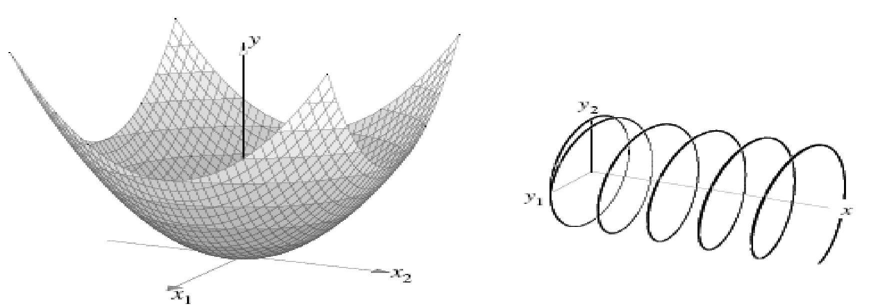


FIGURE 2.1a. The function $y = x_1^2 + x_2^2$

FIGURE 2.1b. $y_1 = \cos 10x$, $y_2 = \sin 10x$, $0 \le x \le 3$

Figura 20. Trecho do livro de Hairer e Wanner (2008, p. 287).

Evidenciamos o estilo do autor se manter o mesmo ao longo da apresentação das *derivadas parciais*, como observamos no trecho que segue (figura 21). Nele, Hairer e Wanner (2008, p. 300) caracterizam as *derivadas parciais* em sua maior generalidade, todavia, a ideia do conceito é transmitida por via geométrica, restrita às funções que possuem seus gráficos no espaço $\mathbb{R}^3$. Aliás, todos os exemplos concretamente trabalhados são de funções que admitem sua interpretação geométrica.

Na sequência, o autor explica de modo intuitivo a noção de diferenciabilidade de funções, ao adotar mais uma vez a função $z = f(x, y)$ para a caracterização da aproximação local por um plano. Reparemos no final do trecho, na figura 21, que o autor caracteriza o plano como uma boa aproximação da função nas vizinhanças do ponto (x_{10}, x_{20}).

Como exemplo do conceito de *diferenciabilidade*, encontramos o caso particular da função $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. O autor analisa a aproximação local pelo plano tangente no ponto $(0,8;1,0)$, mas deparamos a dificuldade em localizar a região precisa da "boa aproximação", como sublinha o autor (figura 21).

Partial Derivatives. If, in considering a function $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, we fix all variables but one and regard f as a function of this single variable, we can apply Definition III.6.1. Consider, for example, a function $y = f(x_1, x_2)$ of two variables in a neighborhood of (x_{10}, x_{20}). We then denote the derivatives by

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{10}+h, x_{20}) - f(x_{10}, x_{20})}{h} &=: \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20}) \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{10}, x_{20}+h) - f(x_{10}, x_{20})}{h} &=: \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10}, x_{20}) \end{aligned}$$

and call them *partial derivatives* of f with respect to x_1 and x_2, respectively. Other notations are $f_{x_i}(x_{10}, x_{20})$, $D_i f(x_{10}, x_{20})$, $\partial_i f(x_{10}, x_{20})$, or the like.

Geometrically, these partial derivatives can be interpreted as follows: the function $y = f(x_1, x_2)$ defines a surface in $\mathbb{R}^3$ (with coordinates x_1, x_2, and y) whose intersection with the plane $x_2 = x_{20}$ is the curve $x_1 \mapsto f(x_1, x_{20})$. Therefore, the partial derivative $\partial f/\partial x_1$ is the slope of this curve, and

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10})$$

is the tangent to this curve at (x_{10}, x_{20}). Similarly, the tangent to the curve $x_2 \mapsto f(x_{10}, x_2)$ is $y = f(x_{10}, x_{20}) + \partial f/\partial x_2(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20})$, and the plane spanned by these two tangents is given by

$$(3.2)\quad y = f(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}).$$

The function $f(x_1, x_2)$ will be called differentiable at (x_{10}, x_{20}), if the plane (3.2) is a "good" approximation to $f(x_1, x_2)$ in a neighborhood of (x_{10}, x_{20}) and not only along the lines $x_1 = x_{10}$ and $x_2 = x_{20}$.

Figura 21. Trecho do livro de Hairer e Wanner (2008, p. 300).

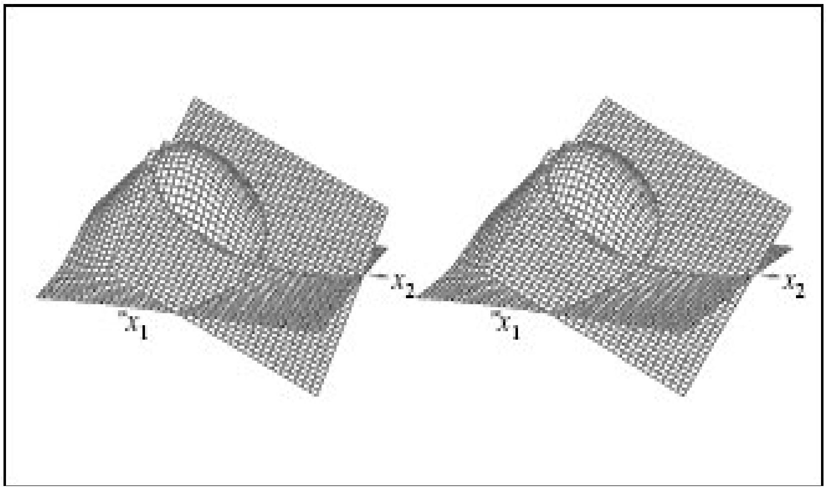


Figura 22. Aproximação da função pelo plano (Hairer e Wanner, 2008, p. 300).

Na sequência, Hairer e Wanner (2008, p. 301) continuam a desenvolver a teoria, discutindo a definição de *diferenciabilidade* e *derivada direcional*. Identificamos, entretanto, o fato de que todos os contraexemplos são discutidos no espaço $\mathbb{R}^3$, como por exemplo, a função descontínua que apresenta *derivadas direcionais* em todos os pontos, que é descrita por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ se } x^2+y^2>0\\ 0 \text{ se x=y=0}\end{cases}$.

O autor destaca o fato de não ser contínua, mas possuir a derivada direcional na origem em todas as direções. De fato, pondo o vetor $v=(\cos(\theta), sen(\theta))$, temos $f((0,0)+t\cdot v)=f(t\cdot v)=\dfrac{(t\cos(\theta))^2(tsen(\theta))}{(t\cos(\theta))^4+(tsen(\theta))^2}=\dfrac{t\cdot\cos(\theta)^2\cdot sen(\theta)}{t^2\cdot\cos(\theta)^4+sen(\theta)}$. Assim, a função $g(t)=f(t\cdot v)=\dfrac{t\cdot\cos^2(\theta)\cdot sen(\theta)}{t^2\cdot\cos^4(\theta)+sen^2(\theta)}$ é diferenciável para qualquer t. Hairer e Wanner discutem na figura 23, com a interpretação geométrica do comportamento da função. Por outro lado, exibimos o gráfico ao lado do seu comportamento.

Tomando a parametrização $\alpha(t)=(t,a\cdot t^2)\therefore f(\alpha(t))=\dfrac{t^2a\cdot t^2}{t^4+at^4}=\dfrac{a}{1+a^2}$, observamos que nas vizinhanças da origem $(0,0)$, a imagem $f(\alpha(t))$ assume todos os valores entre $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$.

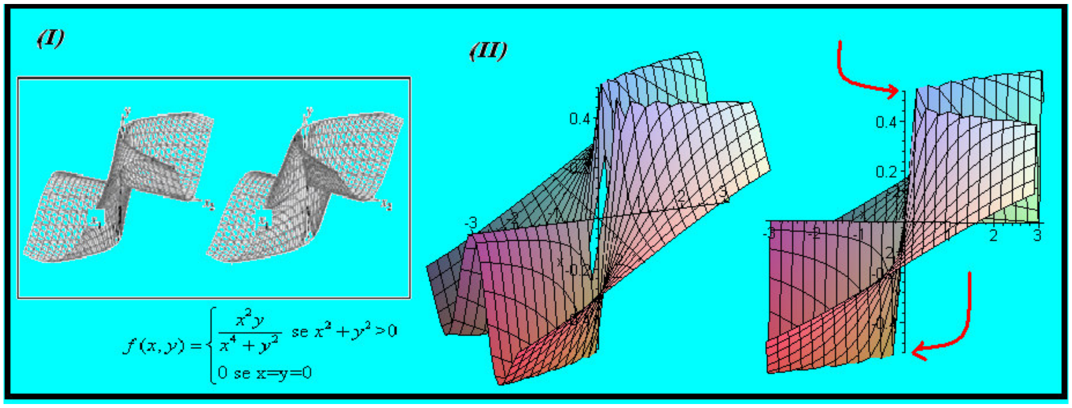


Figura 23. Interpretação geométrica da derivada direcional de uma função descontínua.

Observa-se o intensivo emprego de simbologias que requerem um tratamento operacional peculiar. Advertimos o fato de que a manipulação, em muitos casos das representações envolvidas, não determina a compreensão e um domínio de significado. Neste sentido, Imafuku (2008, p. 42) salienta que

> Em relação às derivadas parciais, parece-nos simples o fato de fazer ora uma depois a outra variável assumir o status de constante, porém não é de difícil interpretação, pois se fala que y é constante, mas no momento em que os estudantes vão derivar encontram a letra “y” e, para muitos, uma letra representa uma variável e não uma constante.

Artigue (2002, p. 184) relata que, num estudo aplicado, “as respostas dos questionários mostravam que o papel funcional da diferencial é raramente presente no nível declarativo dos estudantes”. Além disso, “as imagens associadas com o conceito mostraram-se frágeis e restritas a uma dimensão.” (ARTIGUE, 2002, p. 185)

No seu estudo, destacamos a seguinte situação-problema: “o mapa da aplicação $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definido por $f(x,y)=e^{y^2+x}\cdot sen(xy)$. Encontrar a *diferencial* no ponto $(1,0)$ e fornecer sua interpretação geométrica”.

Artigue descreve algumas dificuldades manifestadas pelos alunos ao decorrer de solução desta situação-problema. Observamos que a autora explora a interpretação geométrica da diferencial. Reconhecidamente, a formação de uma *imagem mental* destes objetos sem o auxilio computacional é bastante complicada.

De fato, Artigue destaca a noção de que

> [...] dos 85 estudantes questionados, somente 31 lidavam com interpretações geométricas e 8 forneceram uma interpretação correta em termos do plano tangente. Em particular, muitos falavam de plano tangente da curva como se ainda estivessem num caso unidimensional. (ARTIGUE, 2002, p. 184)

A compreensão relacional do quadro analítico com o quadro geométrico é essencial para a evolução da aprendizagem do estudante. Podemos mencionar alguns livros que ainda preservam esta preocupação; como em relação aos autores Hairer e Wanner (2008, p. 323), sobre os quais já havíamos apresentado algumas considerações. Eles caracterizam os pontos extremantes de uma função.

Mais uma vez, antes de realizar a generalização do teorema apresentado na sequencia para funções do tipo $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Assim, enuncia o teorema devido a Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Reparemos que o caso $z = f(x, y)$ é discutido e o exemplo envolvendo o comportamento da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, após a compreensão do comportamento das *curvas de nível* da função. Observamos isto nas figuras 24 e 25.

(4.7) Theorem (Lagrange 1759). *Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be twice continuously differentiable and suppose that (4.24) is satisfied.*

a) *The point (x_0, y_0) is a local minimum, if, at (x_0, y_0),*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0. \tag{4.26}$$

b) *The point (x_0, y_0) is a local maximum, if, at (x_0, y_0),*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0. \tag{4.27}$$

c) *In the case where*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0 \tag{4.28}$$

at (x_0, y_0), then this point is a saddle point.

Figura 24. Teorema enunciado no caso particular por Hairer & Wanner (2008, p. 323-324).

Notemos que o caso em que a expressão no teorema acima se anula é omitida pela obra.

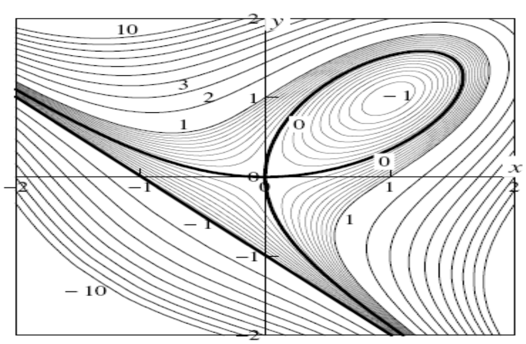


Figura 25. Comportamento geométrico das curvas de nível.

Tall (1997, p. 10) menciona que "existem vários pontos no currículo de Matemática que caracteriza uma mudança significativa em direção ao pensamento matemático formal". Uma das mudanças mais drásticas, segundo o Matemático inglês, ocorre quando "os processos de pensamento dependem de definições formais estabelecidas axiomaticamente dentro de teorias matemáticas." (TALL, 1997). Na sequência, ele argumenta que

> De fato, quando pensamos em conceitos matemáticos, tais como limites, grupos, espaços vetoriais, funções contínuas, e assim por diante, lidamos com bem mais coisas do que apenas definições formais e deduções formais a partir destas definições. O estudante deve possuir uma experiência prévia que desenvolva suas intuições o que sugere que construa boas definições e quais teoremas podem ser semelhantemente demonstrados. (TALL, 1997, p. 10; tradução nossa).

Deste modo, uma maior preocupação com o tipo de raciocínio adquirido pelo aluno se justifica, com suporte nas observações a descrição das mudanças por Tall (1997). O Matemático destaca a importância de se vivenciar situações que desenvolvam suas intuições e que devem ser condicionadas pelas definições formais e teoremas.

Questionamos, todavia, que tipo de *percepção* ou *intuição* a questão presente na prova do ENADE (2008) pode proporcionar ao estudante? Ou ainda, que tipo de declarações ou conjecturas a questão abaixo proporciona nos estudantes, antes mesmo do emprego efetivo de determinadas estratégias?

QUESTÃO 26

Analisando a função $f(x, y) = x^2(x - 1) + y(2x - y)$, definida no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, um estudante de cálculo diferencial escreveu o seguinte:

A função f tem um ponto de mínimo global em D

porque

o ponto $(0, 0)$ é um ponto crítico de f.

A respeito da afirmação feita pelo estudante, assinale a opção correta.

A) As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira.

B) As duas asserções são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira.

C) A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa.

D) A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira.

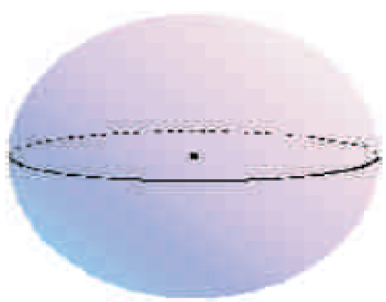
E) Ambas as asserções são proposições falsas.

Figura 26. ENADE (2008).

Analisamos o enunciado e a estratégia necessária para resolver a questão exibida na figura 26, como, eminentemente, de natureza algébrico-computacional. Além disso, perde-se a oportunidade de explorar certas noções estudadas no CUV no ambiente de tratamento do CVV. Destacamos outro exemplo de questão apresentada em outra prova do ENADE.

A abordagem diferenciada é identificada neste caso, uma vez que, na medida em que o conceito de *derivada direcional* seja bem conhecido, o aluno pode conjecturar e/ou eliminar os itens com menores chances de envolver uma resposta correta, sem o emprego de nenhuma simbologia ou representação.

QUESTÃO 27



Considere em R^3 uma bola de centro na origem e raio 4. Em cada ponto (x, y, z) dessa bola, a temperatura T é uma função do ponto, expressa por

$$T(x, y, z) = \frac{50}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Nessa situação, partindo-se de um ponto (x_0, y_0, z_0) da fronteira da bola e caminhando-se em linha reta na direção do ponto $(-x_0, -y_0, -z_0)$, observa-se que a temperatura

A será máxima nos pontos da fronteira da bola.
B estará sempre aumentando durante todo o percurso.
C estará sempre diminuindo durante todo o percurso.
D atingirá o seu maior valor no centro da bola.
E assumirá o seu maior valor em 4 pontos distintos.

Figura 27. ENADE (2005).

Sublinhamos que a questão acima (figura 27) envolve um caráter aplicado da *derivada direcional*, simbolizada por $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$. Vamos aproveitar o contexto de delate da situação-problema presente na questão 27, da prova do ENADE (2005) para comparar as seguintes simbologias: (I) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ e

(II) $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t \cdot (a,b)) - f(x_0, y_0)}{t \cdot \|(a,b)\|}$, onde $u = (a,b)$ é um vetor e

(III) $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$.

Quando observamos as simbologias (I), (II) e (III), o que notamos de semelhante e dessemelhante? Tais simbologias podem ser interpretadas como *taxas de variação*? O comportamento das variáveis é o mesmo em ambos os casos? Em que diferem as construções geométricas necessárias para se prever tais taxas? Tais construções são exequíveis no ambiente lápis e papel?

Note-se que, no caso (I), o aluno deve compreender, desde a simbologia, que, enquanto x varia de $x_0 \to x_0 + \Delta x$, o outro elemento $y_0 = cte$. Já no caso (II) em que temos $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = Lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t \cdot (a,b)) - f(x_0, y_0)}{t \cdot \|(a,b)\|}$, não é muito imediato concluir que a duas variáveis variam. Para tanto, com um detalhamento pouco explorado pelos livros didáticos, podemos escrever $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = Lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot a, y_0 + t \cdot b) - f(x_0, y_0)}{t \cdot \|(a,b)\|} = Lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{t \cdot \|(a,b)\|}$, onde tomamos acima $\Delta x = t \cdot a$ e $\Delta \text{y} = t \cdot b$.

No último caso, temos outro fator complicador. De fato, notemos que temos duas igualdades possíveis para o mesmo objeto: $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) \overset{Definição}{=} Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t \cdot (a,b)) - f(x_0, y_0)}{t \cdot \|(a,b)\|} \overset{Teorema}{=} \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$. Vejamos que a primeira igualdade é garantida por meio de uma definição formal, enquanto a segunda é validada por um teorema, na condição em que saibamos que a função é diferenciável.

Para concluir esta seção, salientamos, ainda, as mudanças topológicas condicionadas pela mudança notacional e a possibilidade da exploração do $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, no caso de limites, no CUV, o aluno estuda e opera a simbologia $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Pouco mais adiante, o aluno deve aprender o significado do símbolo $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ significando que o comportamento da imagem da função está sendo avaliado na condição em que nos aproximamos pela direita e pela esquerda, respectivamente.

De modo padrão, os livros didáticos de CUV atribuem à simbologia $x \to a^+$ o sentido de que a variável $a < x$, mas se aproxima paulatinamente de a. Além disso, na reta, temos a noção de orientação, assim, empregamos os termos “à esquerda do ponto”.

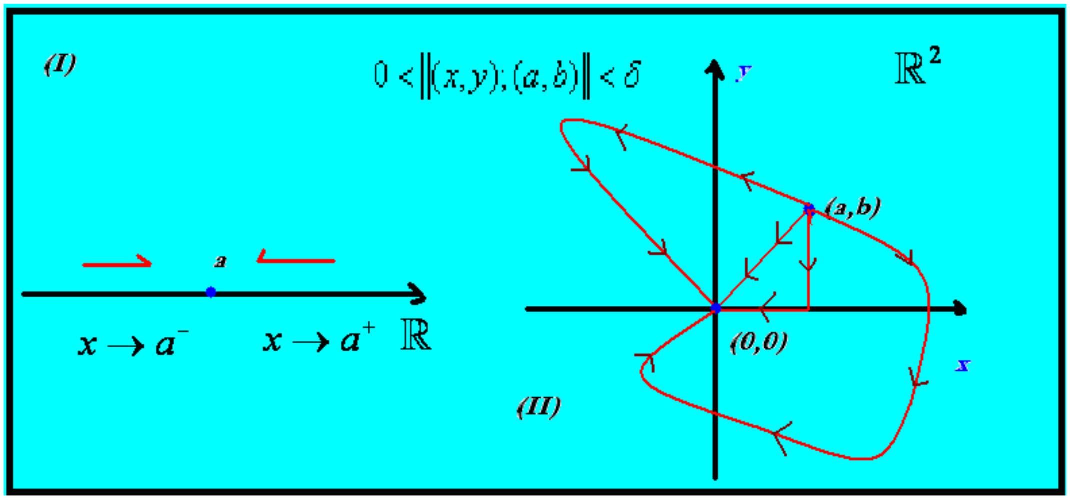


Figura 28. Aproximação de um ponto no CUV e no CVV.

Quando o aluno chega no CVV, todavia, ele depara a seguinte notação $\lim_{(x,y)\to(a,b)^+} f(x,y) = L$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)^-} f(x,y) = L$. Aliás, tais simbologias não têm sentido. Sublinhamos que, na formulação por (ε,δ) que apresentamos nas páginas precedentes, encontramos a condição $0 < \|(x,y);(a,b)\| < \delta$, o que, topologicamente, significa que tomamos um ponto (x,y) próximo do ponto (a,b) e podemos realizar o mesmo processo de aproximação de inúmeros modos no plano (figura 28).

Outra mudança topológica diz respeito à seguinte condição $|f(x)| \le k_1$, na condição em que o limite existe no CUV. Já no caso do CVV, temos $|f(x,y)| \le k_2$, onde k_1 e $k_2 \in \mathbb{R}$. Geometricamente, temos que a imagem da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é limitada nas proximidades do ponto $x = a$. No segundo caso, temos que a função $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ possui *imagem limitada* nas proximidades do ponto $(x,y) = (a,b)$.

Apesar de mencionarmos em ambos os casos a noção de *imagem limitada*, no caso do CUV, sua limitação deve ser observada no eixo das ordenadas (Oy), enquanto no caso de funções do tipo $z = f(x,y)$, sua limitação pode ser observada no eixo das cotas (Oz).

Com origem na noção da *imagem limitada*, podemos falar sobre a ideia de gráfico de funções. Aqui temos outra mudança notacional considerável. De fato, o gráfico de funções do tipo $y = f(x)$ é descrito por $Grf(f(x)) = \{(x,y) \text{ tal que y=f(x)}\} \subset \mathbb{R}^2$ e no caso do CVV, temos $Graf(f(x,y)) = \{(x,y,z) \text{ tal que z=f(x,y)}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Uma noção que geralmente provoca dificuldades nos estudantes é a de gráfico. No caso do CVV, encontramos estudos que identificam os possíveis entraves. Mas nos caso do CVV, observamos o surgimento de outras dificuldades.

De fato, exibimos abaixo na sequência gráfico das funções $y = sen(x)$ e $z = sen(x \cdot y)$. No lado esquerdo, vemos o gráfico da primeira função limitada nas vizinhanças de $(0,0)$; no segundo caso, evidenciamos algumas dificuldades perceptíveis no sentido de se compreender a mesma propriedade, embora, em ambos os casos, tenhamos $|sen(x)| \leq 1$ e $|sen(x \cdot y)| \leq 1$. A primeira desigualdade é facilmente observada, uma vez que podemos imaginar uma faixa no eixo Oy para o intervalo $[-1,1]$, onde a imagem fica restrita.

Por outro lado, no caso da função $z = sen(x \cdot y)$, enquanto que, por meio das trajetórias em azul que destacamos no seu gráfico, observemos que a sua imagem se aproxima da origem $(0,0,0)$, não identificamos rapidamente sua propriedade limitada.

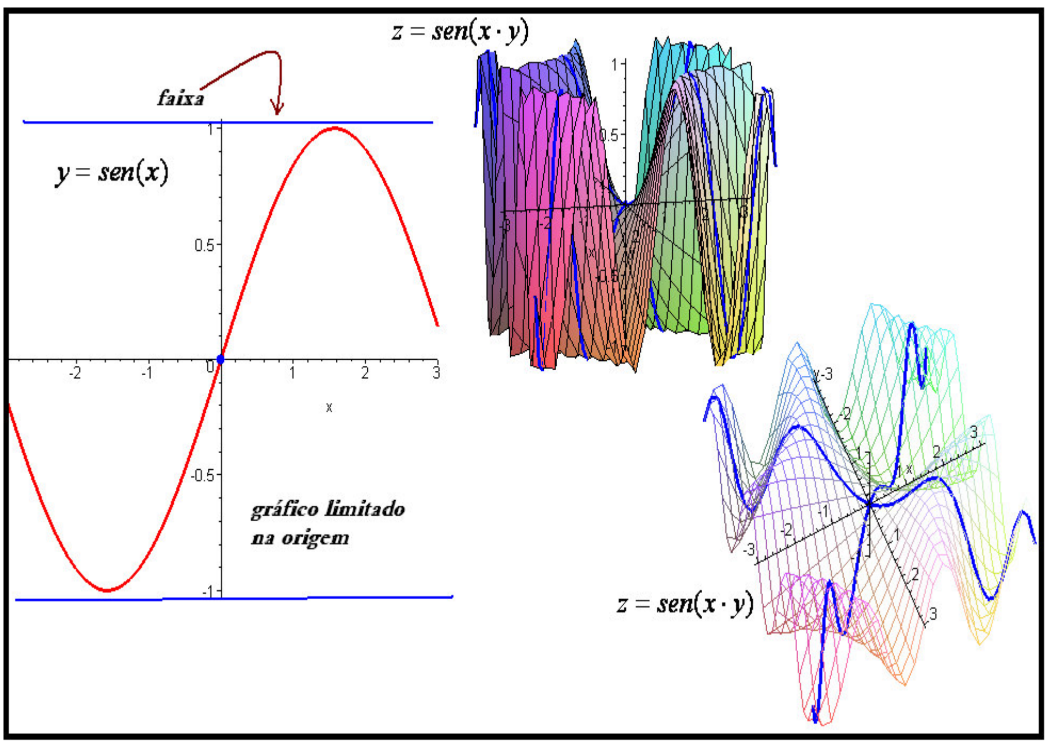


Figura 29. Quadro comparativo do CUV e CVV - gráfico de funções.

Na figura 29, apresentamos a mesma *superfície*, entretanto, mudamos o ângulo de observação da superfície. Podemos agora imaginar, semelhantemente ao caso para uma variável real, uma faixa que corta o eixo das cotas.

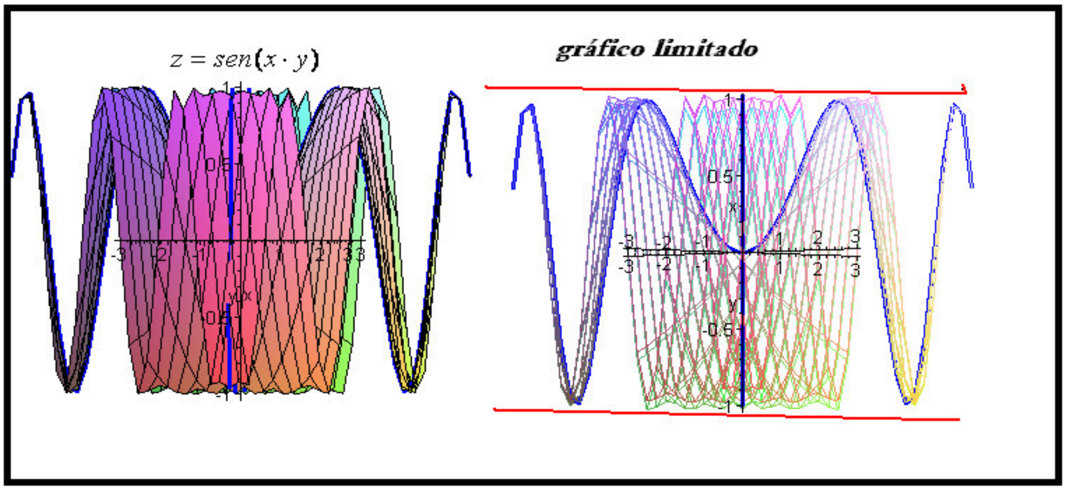


Figura 30. Mudança do ângulo de observação da superfície no $\mathbb{R}^3$.

Falta ainda desenvolver uma argumentação convincente no que diz respeito ao caráter limitado do gráfico; mas dizer que o gráfico da função $Graf\,(f\,(x,y)) = \{(x, y, sen(x \cdot y))$ tal que z=f(x,y)$\} \subset \mathbb{R}^3$ é limitado significa dizer, num ponto de vista geométrico, que o referido conjunto pode ser colocado dentro de uma esfera ou bola no espaço $\mathbb{R}^3$. Vejamos isto na figura 30 e figura 31.

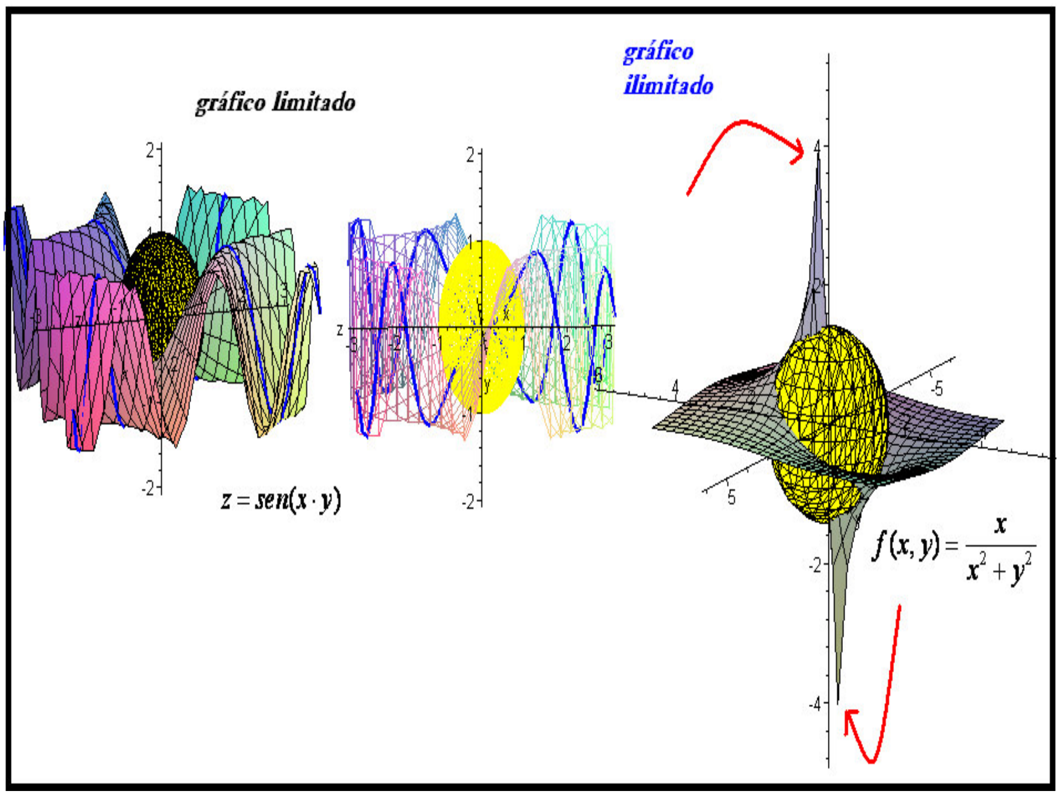


Figura 31. Interpretação geométrica da limitação local de uma função.

Para concluir esta seção, recorremos às colocações de Edward, Dubinsky e Macdonald (2005, p. 23) quando explicam que

> Em Matemática, quando raciocinamos sobre objetos que não são acessíveis por meio dos cinco sentidos, é geralmente necessário criar um modelo que representa um ou mais, porém, nem todas, as características do objeto desejado. Existem modelos imperfeitos que tentam representar por esta via a garrafa de Klein. Para o matemático o uso de modelos não pode ser comunicado diretamente aos outros, e existem difíceis potencialidades na descrição de modelos para o uso no ensino de matemática. (tradução nossa)

As considerações de Edward, Dubinsky e Macdonald são notadas quando nos esforçamos na exploração no ensino de determinados modelos que auxiliam a aprendizagem. De fato, se por um lado alguns modelos podem sugerir imagens mentais diferenciadas e mais ricas, por outro, podem proporcionar o surgimento de concepções indesejadas.

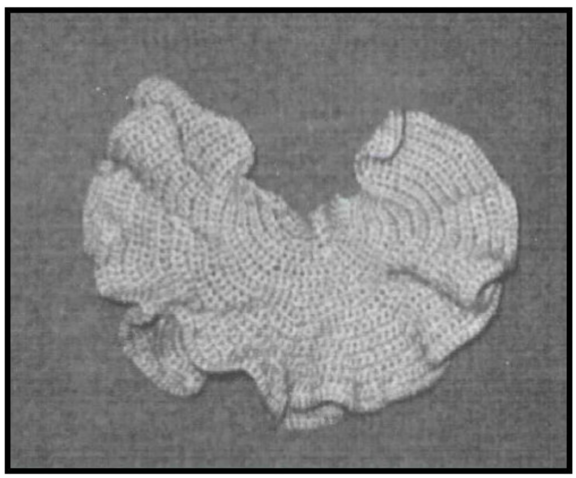
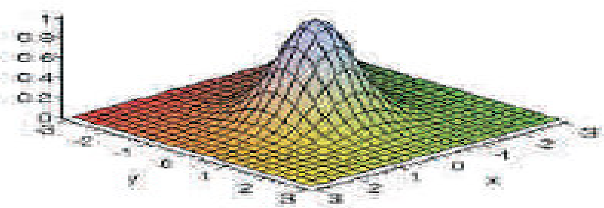


Figura 32. Modelo imperfeito de um plano hiperbólico representado por um crochê. (EDWARD, DUBINSKY e MCDONALD, 2005, p. 23).

De fato, na figura 33, não é incomum identificarmos nos estudantes, ao observarem o comportamento da superfície apresentada na questão 28, a concepção de que a função (item III) é limitada inferiormente, um vez que, se baseando na figura, o estudante percebe o limites de plotagem do gráfico no plano $\mathbb{R}^2$. Deste modo, se por um lado proporcionamos outras heurísticas por meio da observação do gráfico e a análise de um modelo geométrico, proporcionamos também a evolução de interpretações inconsistentes que precisam ser modificadas. Isto proporciona o estimulo da percepção e da visualização dos conceitos do CVV.

QUESTÃO 28



A figura acima ilustra parte do gráfico da função $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, definida para $(x, y) \in R^2$. Sabendo que se $a > 0$, então $\iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi(1-e^{-a^2})$, julgue os itens a seguir.

I Os conjuntos $C_k = \{(x, y) \in R^2 : f(x, y) = k,\ 0 < k < 1\}$, que representam curvas de nível da função f, são circunferências de centro na origem.

II $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x, y) = 0$.

III A função f é limitada superiormente, mas não é limitada inferiormente.

IV $\iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi$.

Estão certos apenas os itens

A I e III.
B II e IV.
C III e IV.
D I, II e III.
E I, II e IV.

Figura 33. ENADE/2008.

Assim, concluímos esta seção, indicando alguns problemas conhecidos há algum tempo no contexto de ensino do CUV, e damos indicações de outros problemas e elementos que podem funcionar como entraves ao entendimento do estudante e que abordagens metodológicas específicas precisam ser pensadas no sentido de proporcionar a *transição interna* do CUV para o CVV.

Por outro lado, antigos problemas com o formalismo e as demonstrações e construções que envolvem as definições formais dos conceitos continuam oferecendo sérias dificuldades aos estudantes.

Deste modo, preocupações metodológicas, tanto no ensino do CUV como no ensino do CVV, não podem descuidar da importância da aquisição destas noções por intermédio de um raciocínio intuitivo e, depois, sua sistematização e generalização.

Assim, com a intenção de compreender a própria natureza e o papel do raciocínio intuitivo, ou, mais precisamente, o papel e a natureza da intuição, passaremos à discussão de alguns elementos de ordem histórica, epistemológica, filosófica e psicológica no próximo capítulo.

Capítulo 2: O PAPEL DA INTUIÇÃO NA MATEMÁTICA

Neste capítulo nos deteremos a uma análise indispensável neste estudo que diz respeito ao entendimento da natureza, do papel da *intuição* e suas relações entre o que os psicólogos chamam de percepção e *insight*. Este último vocábulo, do ponto de vista histórico, adquire importância no contexto da resolução de problemas e na atividade do matemático profissional.

2.1 A intuição na perspectiva filosófica

> Não existe uma aceitação comum para a definição de conhecimento intuitivo. O termo 'intuição' é usado como um termo matemático primitivo semelhante a um ponto, linha, conjunto, etc. O significado de uma intuição é implicitamente considerado como intuitivamente evidente. Tradicionalmente, a propriedade implícita aceitada é referente à auto-evidencia, o que é oposto ao esforço lógico/analítico. (FISCHBEIN, 1999, p. 12; tradução nossa).

A preocupação relativa ao que captamos, entendemos e interpretamos o mundo que nos cerca remonta à história dos povos antigos. Por tradição, a civilização helênica se apresenta de modo insuperável com uma contribuição que se distingue de outras civilizações. De fato, os gregos, desde cedo, refletiram sobre a relação entre homem e objeto e sobre os elementos da relação estabelecida que permitem compreender e investigar propriedades intrínsecas do objeto.

Entendemos este posicionamento dos antigos gregos, quando observamos as colocações de *Aristóteles* ao declarar que

> Querer conhecer os fatos, não apenas do modo como se apresentam mais, também, do modo como devem ser; ele quer resolver o contingente e o necessário. É necessário, todavia, investigar as condições pelas quais o espírito concebe algo como necessário; em outras palavras, é necessário inicialmente encarar a ciência em sua forma, abstração feita do seu conteúdo: é o objeto da lógica (BOUTROUX, 1908, p. 116; tradução nossa).

Étienne Émile Marie Boutroux (1845-1921) descreve uma preocupação de Aristóteles com a Ciência, em conhecer e sistematizar os seus dados. Ele manifesta, ainda, como vemos no final do excerto acima, que um dos elementos que podem promover o entendimento na investigação do espírito decorre da Lógica Formal.

Reconhecidamente, os jônicos atribuíam um papel de relevo às ciências matemáticas que recorrem à Lógica para o estabelecimento de vários dos seus fundamentos, apesar de que, em sua origem, a Matemática não obedeceu a regras explícitas e fórmulas bem formadas que explicassem sua gênese.

Deste modo, a contribuição dos helenos no sentido da sistematização e depuração das crenças e concepções que formamos a partir, em alguns casos, dos nossos sentidos, é inigualável. Recorremos ainda a Boutroux quando extrai um ensinamento influenciado pela tradição helênica, quando assinalou que

> No que concerne a inteligência, uma boa educação aprimora e dirige as faculdades, mais do que forçar a memória. Existem dois exercícios da faculdade: um é livre, é o jogo; o outro imposto é o trabalho. Este ultimo é obrigatório por si mesmo e no ensino não é substituído pelo primeiro. A faculdade da intuição deve ser formada antes do entendimento. Todo o ensino será inicialmente intuitivo, representativo e técnico. (BOUTROUX, 1908, p. 394; tradução nossa).

No final do excerto, vemos claramente a orientação e valorização de um ensino intuitivo, entretanto, se desconhecemos a natureza, a fonte, o propósito e as possibilidades alcançadas pelo entendimento humano ao fazer uso da habilidade ou faculdade intuitiva, incorreremos por uma via infrutífera que torna inexequível seguir o ensinamento de Boutroux.

A intuição mereceu a atenção de Immanuel Kant[14] (1724-1804). Kant assegurava que "um conceito permanecia vazio a menos que o mesmo se correspondesse com a intuição; intuição é necessária para o estabelecimento de uma realidade objetiva do conceito, isto é, a possibilidade de uma instância". (PARSONS, 2008, p. 8).

Kant se interessou de modo especial pelas figuras geométricas na Matemática, que o mesmo denominava de formas (empíricas) ou objetos. Nas provas tais objetos são construídos intuitivamente; no sentido de que podem ser intuídos. "Representações intuitivas surgem também na Matemática a partir de outros objetos, embora para os números de modo particular estas surgem a partir de uma intuição mais indireta do que as formas geométricas". (PARSONS, 2008, p. 8).

Parsons (2008, p. 8) dedica algumas páginas de sua obra para explicar o termo em inglês "*intuitability*" que traduziremos por "a capacidade de aprender por intuição". Parsons caracteriza o mencionado termo na acepção de uma condição geral dos objetos. O autor recorda que "Kant empregava o termo intuição (*intuition*) como uma representação imediata de um objeto individual." (PARSONS, 2008, p. 8).

---

[14] Buffet (2003, p. 34) destaca que "Kant se interessou particularmente pelo conceito e sua construção. Neste sentido, a função da intuição assume um lugar de destaque na construção do conceito".

Por outro lado, que significado atribuímos ao termo "imediato" (immediate)? Conforme o autor, este termo foi fruto de intensa polêmica; mas, retornando a discussão do termo "*intuitability*" e o papel da intuição, observamos que seu conceito ocupa um lugar não trivial de discussão entre diferentes noções que merecem atenção por parte de filósofos e matemáticos (GIAQUINTO, 2007; OTTE, 1991, 2008; SHAPIRO, 2000).

Na Matemática, a importância do seu papel foi defendida por alguns e atacada por outros, como recorda Parsons (2008, p. 139). Num âmbito filosófico, intuição é mencionada em ambas as relações estabelecidas com objetos e relações com proposições. Parsons usa as expressões "*intuition of*" e "*intuition that*" para marcar as duas relações possíveis na perspectiva de alguns filósofos.

Para compreender o significado dos termos "*intuition of*" e "*intuition that*" e o seu emprego no âmbito filosófico, observamos suas colocações na sequência

> O que fornece a "intuition of" um importante local na filosofia é provavelmente o fato de que Kant´s Anschauung é intuição de objetos. Todavia, Kant certamente confere ao conhecimento intuitivo ou uma indicação do que seria uma espécie de "intuition of". Eu penso ser bastante claro que Kant possuía tal concepção, porém, não as designou pelo termo Anschauung ou igualmente usando como na frase anschauliche Erknntnis. (PARSONS, 2008, p. 140; tradução nossa).

Pode-se falar, seguindo-se a esta tradição de influencia kantiana, em *intuição de objetos* e *intuição de verdades*, embora, neste último caso, alguns dilemas e ambiguidades de âmbito filosófico precisem ser esclarecidos. Parsons (2008, p. 140) diz que "quando temos uma intuição sobre $\wp$ (proposição), isto significa que seguimos tal proposição". Por exemplo, "quando um filósofo fala sobre suas ou sobre as intuições dos outros, isto frequentemente significa que a pessoa em questão esta inclinada em acreditar, pelo menos de início da inquirição, ou apenas como uma matéria do senso comum." (PARSONS, 2008, p. 141).

Com efeito, as intuições não precisam ser sempre verdadeiras. Elas podem ser guias bastante falíveis para o alcance da verdade. Parsons analisa as concepções e os sentidos atribuídos por figuras ilustres ao termo intuição. Quando menciona Descartes, explica que o Filósofo e Matemático francês diferenciava intuição de dedução. Em sua acepção, a conclusão de uma inferência poderia não ser intuição.

Na discussão das fontes de conhecimento, "não apenas a intuição seria distinguível dos resultados dos argumentos envolvendo inferências, porem tais resultados poderiam não se tratar de intuição, embora possivelmente uma proposição possa ser ou não conhecida por intuição." (PARSONS, 2008, p. 142).

Mais adiante, o autor destaca que a explicação de Descartes[15] de *intuitio* apresentada na *Regras* (Rules) fornece uma analogia com percepção. “E é claro que o mesmo se refere a *intuition that* nos exemplos que Descarte forneceu na Regra Terceira para todo proposição.” (PARSONS, 2008, p. 144).

Já em Leibniz, Parsons compara, dizendo que este não usa tais analogias como Descartes, em suas explicações acerca do conhecimento claro e distinto na obra “*Meditations on Knowledge, truth and ideas”* de 1684. E existe um contraste comparativo entre intuitivo (*intuitive*) e o conhecimento cego ou simbólico. Neste sentido, “conhecimento de uma noção é intuitivo quando podemos considerar todos os seus componentes ao mesmo termo.” (PARSONS, 2008, p. 145).

Outra figura emblemática discutida por ele é Edmund Husserl, para o qual a noção de *intuição* assume posição de significância geral; na sua teoria, os atos ou experiências intencionais que constituem nossa consciência e as relações com o objeto. Tal relação é realizada ou cumprida se o objeto se apresenta à *intuição* (ou ao menos representado na imaginação); “no caso da intuição atual (actual intuition).” (PARSONS, 2008, p. 145).

Por outro lado, pode-se identificar uma estreita conexão dos pensamentos kantianos e husserlianos, como destaca Parsons, no que diz respeito à noção de *intuition that* e *intuition of*. De acordo com Kant, *intuition* (que temos observado como *intuition of*) em Matemática confere evidência ao que é imediato. Como por exemplo, o caso dos axiomas; mas, “evidentemente, a imediaticidade de um julgamento origina-se da construção da intuição sobre um objeto.” (PARSONS, 2008, p. 146).

Parsons (2008, p. 146) explica ainda que

> Tipicamente, uma proposição envolve referências aos objetos, evidência envolverá a intuição destes objetos, porém eles fazem parte dos constituintes de estádio de acontecimentos que são intuitivamente presentes, pelos menos no caso ideal. (tradução nossa)

Parsons analisa também a perspectiva de Kurt Gödel (1906-1978), para quem deve existir algo semelhante à percepção na teoria dos conjuntos. Ele recorda-se de que, em virtude da clareza de determinadas proposições e declarações na Teoria dos Conjuntos, pode-se contar neste caso com a *intuition that*.

---

[15] Bunge (1996, p. 17) lembra que *para* “Descartes a intuição consiste na concepção do espírito atento, tão clara e distinta que não deixa incerteza alguma acerca do que se entende. Explica mais adiante que a intuição cartesiana é, portanto, uma operação racional por meio da qual, certas verdades são apresentadas de um modo total e imediato.”.

Certamente que esta possui um estrito vínculo com a "*intuition of*" e, neste sentido, vale observar que a "*intuition that"* permanece de algum modo vinculada a "*intuition of*".

E "*intuition of*" é algo que se pode esperar quando a "*intuition that"* é análoga a percepção, desde que um dos elementos centrais da percepção é a própria presença do objeto percebido. Por exemplo, "sabemos por percepção que minha bicicleta é azul ao vê-la. Alguém que nunca viu minha bicicleta nunca saberá algo sobre a mesma por meio da percepção num sentido mais direto." (PARSONS, 2008, p. 147).

As palavras de Parsons são alvissareiras no âmbito do ensino de CVV. De fato, quando comparamos os estudantes submetidos ao ensino tradicional desta matéria, que privilegia a formalização e o estabelecimento da verdade de enunciados a respeito da *derivada parcial* com os estudantes que são levados a conhecer o referido objeto por intermédio de *crenças perceptuais* adequadas, depreendemos, com a diferença estabelecida por Parsons, que os primeiros conhecem o objeto *derivada* por intermédio da *intuition that* e nunca construirão nenhuma crença por meio da percepção. No segundo caso, os estudantes contam com a própria presença (na tela do computador) do objeto que chamamos de *derivada parcial*.

Retomando nossa discussão filosófica, sublinhamos o fato da debilidade da intuição sensível que, segundo Bunge (1996, p. 21), "é a fonte de nossos juízos de percepção." Deste modo, sempre corremos algum risco ao desenvolver raciocínios rápidos e tácitos; alicerçados por *crenças perceptuais* e, neste patamar, não se pode contar com o alcance da *verdade matemática*.

De fato, Bunge (1996, p. 60) comenta que hoje se compreende que nem todas as entidades, relações e operações se originam na intuição sensível e se reconhece que "a evidência não serve de critério de verdade e que as provas não podem se apresentar somente por figuras, pois os raciocínios são invisíveis." (BUNGE, 1996).

Deste modo, com o fracasso das intuições sensíveis e espaciais (ou geométricas) como guia para a construção dos fundamentos da Matemática, observamos o surgimento de concepções matemático-filosóficas que caracterizariam a *intuição pura*.

Neste âmbito, uma corrente de pensamento matemático denominada de *intuicionismo* matemático se caracteriza: a) *como uma reação contra os exageros do logicismo e do formalismo*; b) *como tentativa de resgatar a Matemática do naufrágio que parecia ameaçar no início do século, como o resultado do descobrimento dos* *paradoxos na teoria dos conjuntos*; c) *como um produto menor da filosofia kantiana*. (BUNGE, 1996, p. 61).

"Muitas das tentativas produzidas por matemáticos e filósofos fracassaram no sentido de fundamentar a Matemática." (RUFIEUX, 2005). Além disso, suas explicações carecem ainda de argumentos, deste modo, no próximo segmento, introduzimos algumas perspectivas oriundas de outros ramos do saber.

2.2 Intuição e Percepção numa Perspectiva das Ciências Cognitivas

> Os mecanismos das intuições estão naturalmente escondidos em nosso subconsciente e nas atividades mentais. Pela sua própria natureza, intuições aparecem de modo súbito, global, reações sinérgicas, em oposição às cognições baseadas na lógica, que são, por definição, discursivas e analíticas. (FISCHBEIN, 1999, p. 15; tradução nossa).

> Percepção é mais simples de se estudar do que imagens mentais, e num sentido amplo, o motivo é que tal fenômeno é mais facilmente caracterizado. [...] Entretanto, nas recentes descobertas da neuropsicologia, tem mostrado que percepções visuais são também empregadas no visual mental imaginário. Isto é muito promissor, uma vez que, desenvolvendo uma elevada teoria da visão perceptual, ganhamos uma considerável alavanca para a compreensão da imagem. (KOSSLYN, 1994, p. 63; tradução nossa).

Ennes (1992) evidencia a discussão de alguns aspectos polêmicos da investigação realizada em Psicologia. Ele lembra um fato inquestionável relativo aos quais os sistemas perceptuais e biológicos possuem uma fonte limitada, ao relatar que o "cérebro é um órgão consistindo de um largo, porém finito número de neurônios. Cada sistema perceptual possui duplamente limites temporais e espaciais e um tipo de informação pode ser processada." (ENNES, 1992, p. 43).

Além disso, a *seletividade visual* pode ocorrer por meio de modo espacial (informações podem dizer respeito a regiões espaciais), considerações temporais (algum simples esquema que possui parâmetros temporais) e alguma propriedade geométrica. Por que o sistema visual do ser humano pode selecionar este ou determinado modo? Por que não é possível simplesmente considerar e avaliar toda informação pela observação?

Parte deste questionamento é respondida por Klix (1980, p. 11), quando observa que "frequentemente, a memória guia a percepção na recepção de informação, determinação local e tema de indagação perceptiva. Porém a memória também guia o sistema motor de ações". Deste modo, parte da informação relacionada de algum modo, consciente ou inconscientemente, é divisada e avaliada, na medida em que se relaciona com a *memória*; assim, podemos receber muitas informações, todavia, nosso processo de seletividade visual e avaliação dependerão dos dados que retemos em nossa memória em relação aos fatos passados.

Na sequência, Klix (1980, p. 12) explica que

> Por meio da natural integração e comunicação entre o organismo e o ambiente, decorrem a condução das decisões, das operações e algoritmos, isto é, de procedimentos de comparação ou transformação da informação. A mais geral e mais importante operação da memória parece ser a comparação ou combinação. A identificação de um significado é um processo da cognição. E é a respeito da comparação entre duas informações - uma (usualmente) sensóricamente oferecida, e uma arquivada. Se o processo de comparação conduz a uma equivalência, re-cognição toma lugar. Justamente nesta compreensão de sentido, indiferentemente da re-cognição de um objeto ou da re-cognição de um símbolo o qual representa o objeto. (tradução nossa)

É interessante o mecanismo de análise cognitiva seletiva/comparativa descrito por Klix. Note-se que ele faz referência ao 'sentido' da informação, a partir da comparação entre os dados novos fornecidos sensorialmente, e os dados que o indivíduo já possui na memória. Certamente que o grau maior ou menor de interação destes dados possibilitará a obtenção de maior ou menor quantidade de informação reconstruída de modo idiossincrásico pelo indivíduo.

Uma vez arquivada em nossa memória, passamos a considerar outro problema clássico da pesquisa em Neuropsicologia, a saber, o grau de acessibilidade desta informação. Com uma preocupação semelhante, Klix (1980, p. 13) destaca que

> Na literatura pertinente, busca-se testar a hipótese de que existem dois diferentes tipos fundamentais de armazenamento de memória humana: um figurativo, e o outro discreto, lógico-conceptual... A diferença essencial é que eventos singulares percebidos por meio da observação só podem ser reproduzidos com referência a um grau pelo qual eles permanecem explicitamente arquivados. (tradução nossa)

Deste modo, os investigadores desta área apontam o papel essencial desempenhado pela *memória*. E, em grande parte, o conhecimento de que dispomos de modo arquivado pode apresentar um grau maior o menor de acessibilidade; consequentemente, desde o início de todo o processo, a *percepção* desempenha papel determinante.

Quando da interação visual com um objeto, Kimchi e Goldsmith (1992, p. 86) esclarecem a hipótese de que "aspectos globais de um objeto visual são processados inicialmente, seguidos de análises locais dos aspectos.”. Eles destacam a hipótese com apoio de um substrato experimental, que envolveu o estudo da *percepção* e a identificação de padrões hierarquicamente construídos. Kimchi e Goldsmith (1992) adotam o seguinte exemplo que exibimos na figura 34-I. Nela eles apresentam um conjunto grande de letras construídas a partir do mesmo conjunto de letras pequenas.

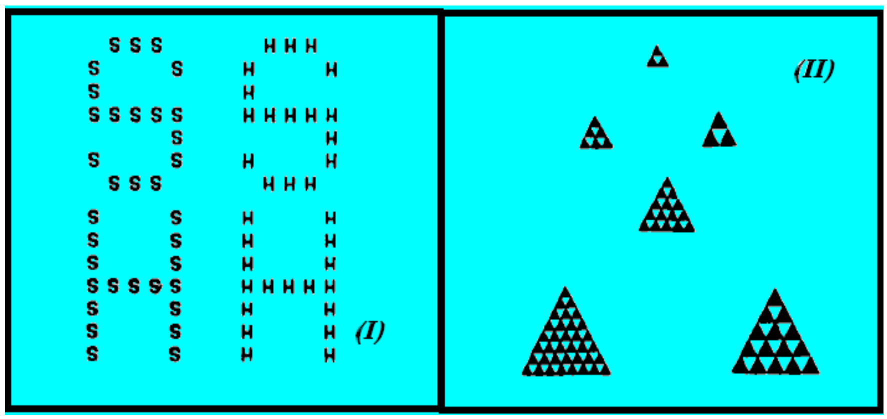


Figura 34. Exemplo I discutido por Kimchi e Goldsmith (1992, p. 87). Exemplo II da análise da variação do tamanho da representação.

Kimchi e Goldsmith (1992, p. 90) discutem, em outro estudo, a análise da apreensão de padrões perceptuais por meio da comparação de uma amostra em reduzidas proporções e a mesma amostra com tamanhos ampliados (figura 34-II). As evidências convergem no sentido de que “a separação/não separação em níveis de percepção global e local depende do número de elementos da disposição padrão.” (KIMCHI e GOLDSMITH, 1992, p. 90).

Os pesquisadores discutem os dados obtidos em outro estudo que explorou configurações que alteravam a quantidade de objetos constituintes das figuras de análise, aumentando e diminuindo a quantidade de objetos. Na figura 35, observamos disposições que alteravam a quantidade elementos na formação da mesma figura geométrica. Nestes experimentos, com o estímulo perceptual, os especialistas analisaram a velocidade de resposta do sujeito.

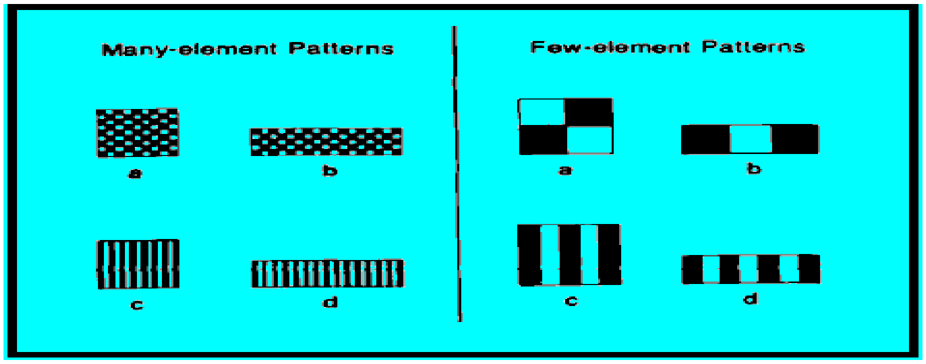


Figura 35. Estudo comentado por Kimchi e Goldsmith (1992, p. 93).

Outro resultado interessante destacado por Kimchi e Goldsmith (1992, p. 95) diz respeito ao fato de que "as relações lógicas presentes num estímulo perceptual não pré-determinam o processamento de hipóteses, por que uma estrutura lógica de estímulos não necessariamente prediz as conseqüências do processamento de informações.".

Deste modo, pelo fato de que as figuras observadas apresentarem, por exemplo, simetria, não se pode esperar e/ou garantir, que as atividades cognitivas estimuladas apresentem uma hierarquização ou estruturação lógica no que diz respeito ao armazenamento da informação.

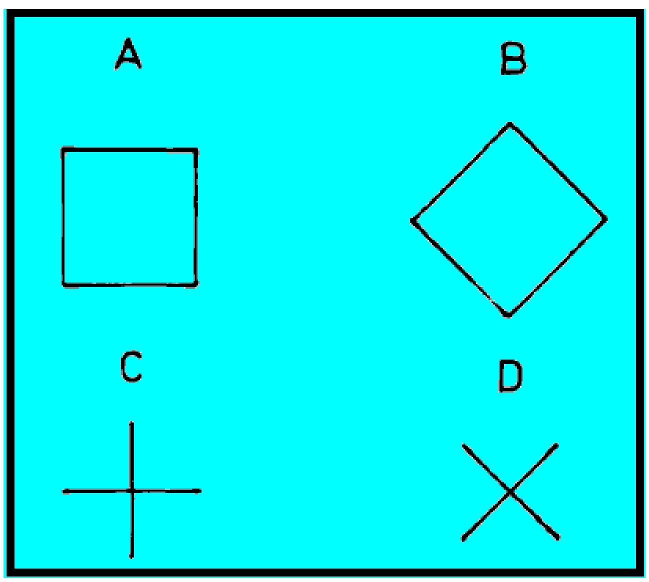


Figura 36. Significados que emergem da relação estabelecida pelas figuras.

Outra situação interessante discutida por Kimchi e Goldsmith (1992, p. 97) diz respeito ao surgimento de significados que "emergem a partir das relações percebidas entre as figuras exibidas.". Na figura 36, podemos nos deter em uma análise apenas da figura A. Nela percebemos a regularidade dos lados, quatro 'bicos', etc. Quando, porém, direcionamos nossa atenção apenas ao quadrado A, a ideia de rotação não se manifesta, entretanto, quando comparamos as figuras A e B, além das propriedades intrínsecas do quadrado, percebemos uma ideia de movimento (rotação) relativa à figura.

Enns (1992, p. 40) explica que “a seleção visual pode ser baseada em considerações espaciais, considerações temporais ou propriedades geométricas.”. Alerta, no entanto, a seletividade do sistema visual humano. Assim, nem tudo que olhamos, de fato percebemos. Levanta então a seguinte questão: por que não é possível simplesmente considerar todas as informações avaliáveis pela visão?

Duas respostas são propostas em sua área de investigação. A primeira exprime que o estímulo deve ser interpretado pelo sistema. Enns (1992, p. 41) descreve que

> A informação potencial avaliável pelo sistema visual é limitada. Segundo, o organismo visual usa a informação como base para a ação. Entretanto, para ser útil ao organismo quando se comporta em tempo real, o sistema visual deve escolher e processar o que é relevante para o comportamento e descartar demais informações. (tradução nossa).

Enns explica outra característica para a *seletividade visual*, ao dizer que ela depende de determinadas funções. Ele exemplifica com uma situação em que necessitamos identificar relações de dentro-fora de uma região fechada no plano. Este tipo de habilidade é requerido em tarefas perceptuais diárias. Para o problema da figura 37-A, de modo imediato, nossa percepção deve proporcionar a distinção na relação que se estabelece entre o ponto e a região, entretanto, no caso B, notamos que a solução, a resposta perceptiva, não nos informa com o mesmo caráter imediato.

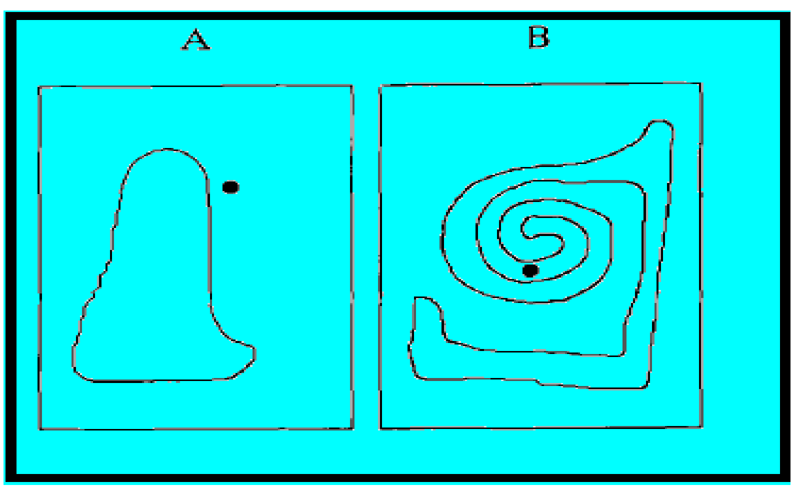


Figura 37. Relações identificadas de dentro-fora por meio da *percepção*.

Em casos como este, “podemos ter informações ilimitadas de estímulos visuais, embora tenhamos uma capacidade limitada para o processamento desta informação em várias tarefas visuais.” (ENNS, 1992, p. 46). Notamos que as configurações geométricas podem ser determinantes em certas tarefas. Assim, Enns questiona: quais os possíveis entraves em problemas nos quais as cenas para a formação da imagem se encontram no espaço?

Enns (1992, p. 46) desenvolve o seguinte comentário

> Em geral, se um conjunto opaco de objetos iluminados por um ponto distante de luz, de duas dimensões, sua imagem é completamente determinada por quatro fatores: (i) a direção da luz; (ii) a orientação, a forma, a posição da superfície; (iii) a propriedade de reflexão da superfície, e (iv) a direção em relação a qual a cena é vista. Entretanto, um completo reconhecimento de todas as quantidades de uma única imagem é impossível em princípio, desde que existem um largo conjunto de cenas que poderia fornecer uma imagem particular. (tradução nossa)

Na figura 38, exibimos um objeto gerado pelo computador. Notamos que o emprego de cores, em determinados lados e no fundo, pode produzir percepções visuais distintas e significativas. Reparemos, na vista de cima do objeto, a perda da sensação das três dimensões e a identificação topológica de pontos exteriores e interiores à figura quando mudamos o ângulo de observação, por meio de uma rotação e translação.

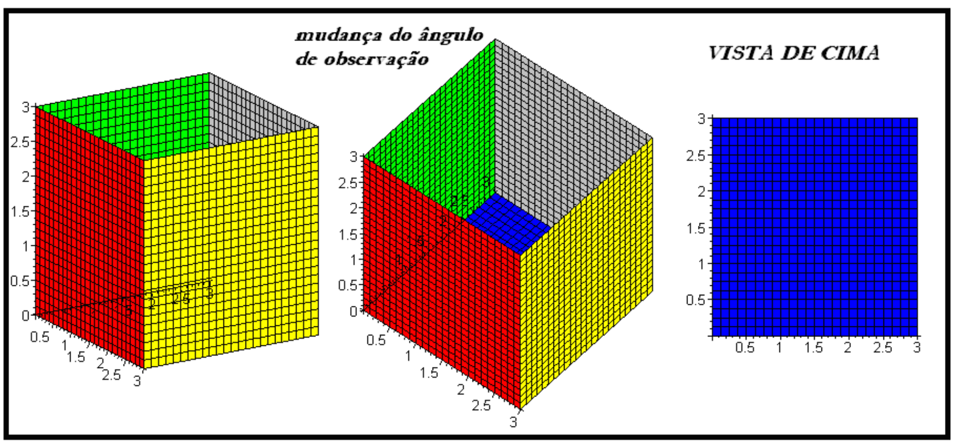


Figura 38. Identificação perceptiva das propriedades geométricas geradas pelo computador.

Aparentemente, em qualquer estádio de maturação, a discriminação e a interpretação do que é visto preservam uma dependência do nosso conjunto de crenças pessoais. É o que percebemos nas colocações de Trick (1992, p. 268) quando explica que

> Descrições estruturais criadas nos estágios iniciais de análise são equiparadas em representações na memória para objetos particulares e classes de objetos. Se uma combinação é encontrada, a mesma pode ser nomeada e categorizada. [...] Podemos ver e discriminar itens de outros, mesmo sem reconheça-los e nomear. Podemos tocar objetos e movê-los sem serem familiares. O estágio final da análise visual é pesadamente dependente de nossas crenças. (tradução nossa)

As colocações de Trick, no campo da Psicologia Cognitiva, são concordes com a perspectiva de vários autores na mesma área. De fato, Ehrlich esclarece que

> O sistema experiencial intuitivo é um sistema de aprendizagem que opera automaticamente, pré-conscientemente, não-verbalmente, rapidamente, associativo e concreto. Ele é um todo associado com efeitos, e opera baseado em esquemas adquiridos pelas experiências de vida. (EHRLICH, 1980, p. 11; tradução nossa).

Notamos que a *percepção* depende em grande parte deste sistema experiencial intuitivo. De fato, tanto nossas habilidades intuitivas como nossa *percepção* formam elementos constituintes que atuam de modo particular em cada modelo mental. Tal modelo mental, uma vez construído, é relacionado “com os processos perceptivos e estruturas de conhecimento.” (THAU, 2002, p. 68).

Para este autor, determinados modelos mentais são estimulados, na dependência em parte de nosso sistema perceptivo, e são responsáveis por processo e fenômenos mentais particulares. Na visão, por exemplo, a construção de um modelo tridimensional de relações espaciais com entidades do mundo real se torna crucial para a percepção humana.

Thau (2002) comenta os trabalhos de linguistas cognitivistas que atuam numa área de interface da Linguística, Inteligência Artificial e Psicologia. Neste ramo de investigação, modelos mentais

> São invocados tanto pela produção de linguagem como pela própria compreensão. Na produção da linguagem, o locutor ou escritor deve verbalizar seu modelo mental atual, isto é, transformar uma estrutura não linear em uma sequência de expressões verbais em ordem de convir um significado ao ouvinte. (1999, p. 23, tradução nossa).

Thau (2002, p. 24) comenta a fluxograma que exibimos na figura 39, ao explicarem que

> No processo de processamento, um modelo de texto, que é uma representação proposicional de uma questão verbal em destaque, e um modelo de mundo que representa um conjunto individual de esquemas num domínio de conhecimento em foco, e são condensados e integrados para produzir um modelo corrente de discurso, isto é, um estado de acontecimentos comunicados pelo discurso. (tradução nossa).

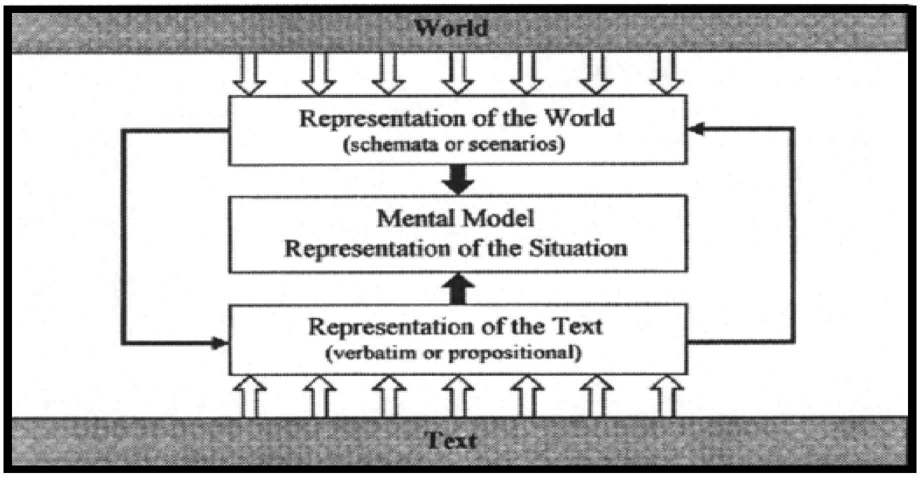


Figura 39. Thau (2002, p. 24).

Notamos no trecho ora reproduzido as explicações fornecidas pelos autores no que diz respeito aos elementos necessários para a constituição de determinados *modelos mentais* com base na compreensão de uma representação proposicional. Tais elementos englobam fatores que do próprio meio em que se encontra o indivíduo e, de modo mais específico, elementos de uma representação textual.

Encontramos outros investigadores que desenvolvem considerações semelhantes, como Kukla (1980, p. 169) quando adverte que “o reconhecimento das relações semânticas entre conceitos é uma condição essencial para vários processos cognitivos. Isto é parte, por exemplo, do processo de compreensão da linguagem, classificação e diferenciação conceitual.”.

Mais adiante Kukla (1980, p. 169) lembra que

> As formas de representação dos conceitos na memória são uma importante condição para procedimentos de obtenção de relações semânticas entre conceitos. Nós procedemos a partir da suposição que conceitos são representados na memória na base de aspectos que tornam possível reconhecer os objetos específicos numa diversidade de situações que requerem tal reconhecimento. (tradução nossa).

Retomando ainda a discussão e os estudos discutidos em Thau (2002, p. 27) no seu artigo, encontramos uma indicação de funções específicas desempenhadas por ilustrações (gráficos) presentes numa representação textual, tais como:

- função de memorização - eles podem tornar a informação apresentada mais atrativa ao leitor, e assim aumentar o leque de probabilidades de um processamento compreensivo;

- como visualização[16] - eles podem facilitar ou possibilitar uma representação quase-pictórica de conceitos particulares pelo fornecimento de exemplos;
- como ênfase - eles podem focalizar em aspectos particulares de objetos ou relações figurais;
- como interpretação - podem auxiliar na escolha de interpretações particulares pela especificidade.

Observamos, ainda, que a compreensão e o reconhecimento das relações semânticas assumem papel importante na aprendizagem e são elementos que constituem a *memória semântica* do indivíduo. A *memória semântica* é descrita por Paivio (1999, p. 123) do seguinte modo

> Primeiro, a eficácia de representações verbais e imagináveis é essencialmente parte da memória semântica, e a ativação de tais representações constituem o primeiro nível de significado efetivo. Este fornece a base de recognição de um estímulo e para julgamentos de familiaridade ou de freqüência. (tradução nossa).

Para concluir esta seção, recordamos nossa intenção de reaver uma caracterização e a opinião de investigadores na área da Psicologia Cognitiva e Inteligência Artificial com respeito a ideia de *percepção*.

Compreendendo suas principais características e alguns modos de ativá-la, despertamos, consequentemente, uma atividade cognitiva intuitiva. Por outro lado, desde uma posição assumida neste trabalho para a compreensão inicial do papel da intuição, necessitamos compreender sua utilização num ambiente da sala de aula ou fora dela, mais precisamente falando, no local de investigação do matemático profissional que, em certos casos, se resume aos labirintos recônditos de sua mente.

Na seção seguinte inciaremos uma discussão no contexto da resolução de problemas.

---

[16] Vários autores concordam na importância da visualização, no que diz respeito à produção de imagens mentais. Tais imagens "nos são úteis quando tentamos resolver problemas que requerem informação espacial: distribuir espaços, localizar objetos concretos em lugares precisos, eleger itinerários, etc." (ALMARAZ, 1997, p. 6).

2.3 O papel da intuição na atividade do matemático.

> Semelhantemente a vida da maioria dos sábios, a vida do matemático é dominada por uma curiosidade insaciável, uma vontade de resolver os problemas estudados que confirmam sua paixão e que conduzem a realização de uma abstração quase total da realidade do ambiente; as distrações ou excentricidades matemáticas célebres não possuem outra origem. É que a descoberta de uma demonstração não se obtém em geral sem o auxílio de períodos de concentração intenso que se renovam possivelmente por meses ou anos até que o resultado pretendido seja alcançado. (DIEUDONNÉ, 1987, p. 19; tradução nossa).

A intuição matemática sempre despertou o interesse de muitos filósofos. Parte destes interesses se caracterizava pela compreensão do tipo de ligação que a intuição permite, especialmente, com a verdade ou, pelo menos, com a ausência do erro. Observamos uma reflexão particular do filósofo inglês John Locke (1632-1704), sobre o conhecimento geométrico presente na Matemática. Stewart (1821, p. 23) destaca este episódio envolvendo Locke, ao lembrar que

> Há muito tempo Locke destacou, à respeito dos axiomas da Geometria, estabelecidos por Euclides, que embora a proposição seja inicialmente enunciada em termos gerais, e posteriormente fazendo recurso na particularidade de suas aplicações, como o princípio previamente examinado e admitido, todavia a verdade não é menos evidente neste último caso do que no padrão inicial. Ele observou mais adiante que em algumas de suas aplicações que a verdade de cada axioma é percebida pela mente e, todavia, a proposição geral, distante do local onde foi assentada e da verdade que encerra, é apenas uma generalização verbal do que, em instâncias particulares, foi aceito como verdade. (tradução nossa).

Stewart aponta a preocupação manifesta por Locke a respeito da origem ou a fonte da *verdade matemática*. A *verdade* deste tipo de saber é originada nos enunciados mais gerais e distanciados das aplicações ou nos casos particulares em que vemos suas aplicações? Em situações mais perceptíveis e menos abstratas, a *verdade matemática* está mais próxima do nosso entendimento?

Um elemento que merece atenção ante a situação pouco complexa observada por Locke que é exemplificada por Mill (1869, 26) diz respeito à possibilidade de que, "enquanto tal verdade não se estabelece, enquanto a incerteza sobre o que conhecemos da Geometria e como conhecemos for reduzida a zero, a intuição desempenhará um papel importante".

É possível reduzir a zero, porém, nossas incertezas com a intenção de atingir a *verdade* durante a investigação? Qual ou quais *verdades* podemos identificar no saber matemático? E na condição de se atingi-la, de onde partimos e como saber a alcançamos? Alguns destes questionamentos não constituem simples tarefas para se responder em poucos parágrafos, entretanto, destacamos os que se aproximam da nossa temática. Por exemplo, existe uma verdade única na Matemática?

Guerrier (2005, p. 12), por exemplo, destaca que

> A questão de saber se a verdade vincula-se ao domínio da Matemática ou ao domínio da Lógica é uma questão bem antiga. Aristóteles que distinguia as verdades de fato (*vérités de facto*) e as verdades necessárias (*vérités nécessaires*). Estas obtidas como conclusão de um silogismo concluído a partir de premissas verdadeiras; e as últimas são os objetos da Lógica. (tradução nossa).

E enquanto buscamos e ainda não alcançamos uma *verdade necessária*, como chamava Aristóteles, raciocinamos intuitivamente? E nesta condição, ou seja, por meio da intuição, obteremos tal verdade?

Vale lembrar que "Frege considera que não se pode sempre confiar-se na intuição" (GUERRIER, 2005, p. 13); todavia, para que haja a compreensão e a certeza de estarmos fazendo uso da intuição[17], mesmo no caso em que buscamos uma *verdade necessária*, como na prática comum do matemático, necessitamos definir o vocábulo "intuição matemática".

Aí nos deparamos, pois, com outro entrave histórico e filosófico. De fato, Boutroux (1920, p. 224) lembra que

> Pascal, melhor do que Descartes caracterizou a intuição. E o mesmo escreveu uma vez: Nós conhecemos a verdade, não somente pela razão, mais, sobretudo pelo coração; e é por esta última sorte que nós conhecemos os princípios primeiros, e é neste terreno que raciocinamos, e não existe outro ponto de partida, outra sorte de combater... E é sobre este conhecimento do coração e do instinto que a razão se apóia e fundamenta todo o seu discurso. (tradução nossa).

Mais adiante, Boutroux acentua ainda

> Os intelectuais modernos, contudo, não buscam eles mesmos explicar, eles não pretendem compreender completamente em que consiste e em que condições podem agir por intuição. As definições que eles fornecem permanecem na maioria das vezes negativas. As verdades matemática, dizem eles, não são nem conseqüência de fatos experimentais e nem resultado de construções ou deduções lógicas. Portanto, eles supõem um modo de percepção que não se confunde, nem com a experiência dos sentidos, nem com o raciocínio. Temos consciência deste modo de percepção por alguns instantes de pratica

[17] A História da Ciência evidencia o recurso ao apelo intuitivo para a edificação posterior de várias teorias. Na Física, Almaraz (1997, p. 11) recorda que "Einstein obteve, por meio de imagens mentais, indícios intuitivos que serviram para elaborar a Teoria da Relatividade.".

> (no trabalho de descoberta), e nos parece que ele não se assemelha a nenhum conhecimento demonstrativo. (BOUTROUX, 1920, p. 225; tradução nossa).

Ficam patentes nas colocações de Bourtroux duas dimensões a considerar: a primeira relaciona o *caráter afetivo/motivacional*, enquanto o segundo diz respeito ao *campo epistêmico*. Sublinhamos os termos afetivo/motivacional, uma vez que, na atividade do matemático, apesar de nem sempre ser clara para o próprio investigador, a busca pela *estética* se relaciona de modo íntimo com a ação de descoberta e invenção.

Burton (2004, p. 66) desenvolveu um interessante estudo que fornece certos indícios alvissareiros. Ele caracterizou três características da *estética*: a *função generativa*, a *função avaliativa* e a *função motivacional*. Com referência às três características mencionadas, ele explica

> A *função generativa* foca no papel da estética na invenção e descoberta matemática; a avaliativa tipicamente se manifesta nos próprios julgamentos de um produto matemático, tal como um teorema; a *função motivacional* relaciona-se com o papel da estética na medida em que induz ou inspira a atividade matemática. Outra igualmente importante dimensão que se deve considerar é a epistemológica baseada na estética que deve apresentar uma função de: Como opera ou funciona a estética como um modo de conhecer? (BURTON, 2004, p. 66; tradução nossa).

No fragmento, observamos a relação entre a *função generativa* da *estética* com a invenção e descoberta. Note-se que, nestes momentos, o matemático, sob um ponto de vista psicológico, habita em um mundo de incertezas, inseguranças e dúvidas. Situação bem diferente da execução de uma prova matemática, que requer exatidão, generalidade, conexões lógicas e o conhecimento da estrutura matemática com a qual esta lidando.

Burton ressalva que, no âmbito de obtenção de um caminho para a aquisição de conhecimento, a *função generativa da estética* adquire, na opinião dos matemáticos participantes do seu estudo, um caráter de acessibilidade, interesse, satisfação, simetria, transparência e surpresa. Burton relata em seu estudo empírico, que envolveu a participação de cerca de 80 participantes, que "os matemáticos não falaram a respeito do papel da imaginação." (BURTON, 2004, p. 71).

A *estética*, para a maioria dos entrevistados em seu estudo, era concebida como um produto da cultura dos matemáticos, dentro desta, a comunidade a constitui como: estrutura, compacidade, conexão ou qualquer outra categoria funcional para a obtenção de conhecimento, particularmente, na relação com o produto matemático, provas e teoremas. Por outro lado, é importante distinguir o cognitivo do afetivo. E no caso destes dois modelos componentes, “a estética e a intuição parecem ser inexplicavelmente interconectadas.”. (BURTON, 2004, p. 72)

Burton acrescenta ainda que “a intuição fornece, para muitos, a energia convincente que motiva e justifica o trabalho necessário na produção da estética a qual um número de matemáticos chama de “euphoria” que acompanha a resolução de problema.” (BURTON, 2004, p. 72). Embora para muitos, mas nem todos destes matemáticos consultados no seu estudo, a *estética* e a *intuição* pareçam preencher diferentes funções psicológicas, evidenciamos uma exaltação no reconhecimento da ligação da estética mais conectada com a prova.

Hadamard (1945, p. 41) nos fornece uma interessante explicação a respeito da noção de estética e prova, ao mencionar que

> Pode ser surpreendente ver a sensibilidade emocional evocada nas demonstrações matemáticas que, aparentemente, interessam apenas ao intelecto. [...] Esta é a verdadeira estética do sentimento que todos os matemáticos conhecem, e certamente pertence à sensibilidade emocional. (tradução nossa).

Assim como outros pensadores, Hadamard comenta o papel do elemento afetivo, tanto na *descoberta* como na *invenção matemática*[18], que o mesmo faz questão de diferenciar. Hadamard discute também outros elementos nem sempre explícitos na atividade do matemático que se relacionam de algum modo a faculdade intuitiva. Com esta perspectiva, Hadamard discute os momentos em que o matemático trabalha de modo consciente na atividade solucionadora de problemas e outras ocasiões em que ocorrem determinados fenômenos mentais sem o controle intencional e um pensamento sistemático.

Hadarmard discute alguns pontos de vista fornecidos por Henri Poincaré. Recorda que Poincaré salientava a importância da intervenção de uma atividade consciente, após uma atividade mental inconsciente, não apenas para o emprego de uma linguagem conveniente, mas também para *verificar* e *precisar* os resultados finais, uma vez que, “é flagrante a insistência de Poincaré na atribuição de uma significação geométrica antes mesmo de possuir uma demonstração.” (ROBADEY, 2006, p. 1999)

[18] Hadamard (1945, p. 132) recorda que “Claparède considerava a existência de dois tipos de invenção; um deles consiste, diante de objetivo dado, encontrar um meio de alcançá-lo. Assim a mente evolui com a intenção de alcançar tal objetivo, da questão até a solução.”.

E no que diz respeito à *verificação* dos resultados, ele esclarece que "o sentimento de certeza absoluta que acompanha a inspiração geralmente corresponde à verdade; porém, este pode nos enganar." (ROBADEY, 1945, p. 64)

Em todo caso, seja num momento de esforço mental consciente ou estádio mental inconsciente em que se encontre o matemático, as *imagens mentais* e representações que alicerçam uma ideia particular proporcionam o terreno para a atividade intuitiva[19]. Neste sentido, Souriau (1881, p. 12) explica

> As imagens que concebemos a cada momento não surgem do caos, mas de um pensamento anterior. Antes que nossas ideias se combinem numa ordem presente, elas possuíam já certa ordem, ou nosso espírito já apresentava determinada organização. Na medida em que concebemos um pensamento novo, consideramos certo tipo de inteligência adquirida, e tal inteligência determinará, pelo menos em parte, o tipo de pensamento que conceberemos. (tradução nossa).

Hadamard (1945) discute em seu livro algumas das ideias de Paul Souriau, como a que destacamos no trecho acima. A expressão "pensar de lado" teve origem com Paul Souriau (1852 – 1926), com seu livro "*Théorie de L'Invention*", de 1881. Tal atividade mental requer o emprego da intuição, na medida em que o indivíduo percebe a necessidade de relacionar as ideias objetivadas quando 'pensava de lado', e as ideias principais que buscava compreender.

Notamos que, em todo caso, as ideias[20] se combinam na dependência das imagens que formamos. Por outro lado, quando falamos do aluno ou do indivíduo que tenta compreender um raciocínio empregado por um matemático profissional, identificamos dificuldades consideráveis, uma vez que

> Na procura de se abstrair ao máximo, o matemático profissional se priva de uma determinada sorte de intuição e priva de modo similar o leitor que não compreende mais o porquê das definições matemáticas formais. (QUENNEAU, 1978, p. 23; tradução nossa).

Quenneau aponta um hábito peculiar na frente investigativa que em muitos casos se manifesta na sala de aula do *locus* acadêmico. Paradoxalmente, observamos uma mudança do *modus operandi* do matemático. De fato, enquanto em sua pesquisa as

---

[19] Sauriau (1881, p. 121) diz que "quando mencionamos, por exemplo, a palavra 'triângulo', ou se a vemos escrita, imaginamos imediatamente a figura geométrica que aprendemos associar a este som ou letras. E de modo similar, se pronuncio ou escrevo esta palavra, sabemos que a mesma não faltará em me sugerir uma concepção semelhante. Assim, as palavras possuem a propriedade de despertar em nossos espíritos certas imagens, que são o que denomino de significação".

[20] Sauriau (1881, p. 128) explica que "a linguagem é capaz de subsituir o pensamento, uma vez que as palavras podem substituir as ideas, ao menos provisoriamente, e ver de que modo pode ser feito o emprego de signos no trabalho da invenção".

imagens mentais e representações provisórias auxiliavam seu raciocínio, na sala de aula, figuras ou representações que fornecem ideias particulares podem ser evitadas, em detrimento do alcançe das ideias mais gerais que explicam os teoremas formais que devem ser discutidos.

Além disso, no âmbito de sua pesquisa, os problemas são atacados, em muitos casos, de modo indireto e de jeito sistemático; entretanto, no seu ensino, apresenta argumentações diretas para a resolução definitiva de situações-problema.

Acrescentamos que, em muitos casos, o tempo didático não permite o exercício da '*incubação*' das ideias que, para Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), possibilitava a combinação e recombinação das ideias, de modo consciente ou não, com a expectativa do alcance, de modo individual, de uma solução. Com isto temos a oportunidade de proporcionar que o estudante vivencie situações de euforia e contentamento em virtude do alcance de um objetivo.

Como consequência, o estudante não alcança o prazer de uma descoberta matemática, como resultado do exercício de sua imaginação; e assim, não compreende o que significa fazer Ciência. Hadamard (1945, p. 86) comenta de modo pitoresco o papel de *imaginação* nesta atividade de busca, quando considera que

> Imaginação, por si só, não possibilita fazer Ciência, entretanto, em certos casos, devemos explorá-la. Primeiramente, focando o objeto que desejamos considerar, prevenimos os desvios de percurso [...] Imaginação pode ser essencial na solução de problemas por meio de várias deduções, e os resultados precisam ser coordenados após uma completa enumeração. (tradução nossa).

Num sentido contrário, não fazemos Ciência e, de modo particular, não fazemos Matemática, quando não desenvolvemos em nossos estudantes de modo satisfatório o hábito de exploração de sua capacidade imaginativa.

Resulta na eliminação paulatina do espírito inventivo do estudante, que, segundo a opinião de Souriau (1881, p. 106), deve ser *curioso e original*. Com isto, o estudante permanece indiferente à descoberta de uma *verdade matemática* e "não fará nenhum esforço para pensar. Mas para pensar energicamente, é necessário o estabelecimento de um objetivo e o desejo de alcançá-lo, é necessário, em uma única palavra, ser curioso." (SAURIAU, 1881, p. 106)

Nesta seção, analisamos alguns aspectos e elementos que explicam e se relacionam com a intuição. Na sequencia, discutiremos e diferenciaremos as relações entre percepção, insight e intuição na resolução de problemas.

2.4 As relações entre percepção, *insight* e intuição na resolução de problemas

> Não percebemos o que não estamos preparados para descobrir. Não há como crer para ver. (BUNGE, 1996, p. 121, tradução nossa)

Nas áreas mais antigas da Matemática (Geometria, Aritmética e Álgebra) observamos o adquirimos o conhecimento sobre os seus objetos de modo distinto. Ou, melhor dizendo, necessitamos de intuições distintas para apreender um significado a partir de cada ramo do saber matemático.

Bunge (1996, p. 161) sugere algumas pistas neste sentido que explicam que

> [...] frequentemente a Álgebra presta um auxílio bastante útil ou mesmo necessário à Aritmética ao se conduzir pelo labirinto de certas combinações abstratas, por que o cálculo numérico não deixa vestígios do caminho por onde passamos. Necessitamos em várias ocasiões, de retraçar os princípios gerais e poder seguir o fio. (tradução nossa).

Em suas palavras observamos a referência especial à Álgebra, afinal, historicamente falando, a evolução deste ramo da Matemática representou e possibilitou a generalização e a potencialização das propriedades da Aritmética, todavia, encobre sua evolução.

"A demonstração, a formalização e o rigor foram elementos essenciais na atividade matemática dos helenos." (RIBENBOIM, 2000). De fato, isto caracteriza uma nova perspectiva inaugurada pelos gregos, entretanto, quando nos atemos ao caráter cognitivo de construção deste saber, que etapas são necessárias e intervêm decisivamente até que realmente possamos alcançar uma demonstração ou alguma propriedade axiomática? A partir de um ponto de vista cognitivo, como compreender o processo de elaboração grego que, paulatinamente, superava a crença ao se atingir a verdade matemática?

Voltamos agora a nossa atenção justamente para compreender os mecanismos cognitivos que possibilitam conhecer e se relacionar com o conhecimento matemático, os mecanismos que estabelecem a relação entre o homem o objeto matemático. Assim, quando recorremos à Psicologia Cognitiva, com referência à abordagem cognitivista, observamos que, no estádio inicial, percebemos os objetos que nos circundam e compreendemos o cenário de uma estrutura espacial.

Assim, um dos elementos iniciais necessários para esta interação é a *percepção* da existência de objetos que residem neste cenário. Kotchoubey (1998, p. 209) esclarece a existência de pelo "menos duas classes de investigações que tomam como objeto a *percepção* e a *ação*.". Muitas das teorias, mas nem todas, teorias behavioristas e cognitivistas da *percepção* assumem que a informação é ativamente selecionada e filtrada pelo cérebro. Neste sentido, Indow (2004, p. 1) esclarece que "a percepção é devido a uma série de processos que têm início a parir da estimulação sensorial e termina com uma estimulação cerebral.".

Ainda no âmbito da abordagem cognitiva, Kotchoubey, de modo semelhante, explica que, um *ato de percepção* se inicia "com um órgão sensório (retina) que é afetado por um apropriado agente sensório (luz) que é chamado de estímulo. Posteriormente a informação contida no estímulo passa por vários processos e estágios no qual o seu destino pode ser influenciado pela atenção, emoção." (KOTCHOUBEY, 1998, p. 210).

De acordo ainda com a *abordagem cognitiva*, podem existir (ou mesmo há de existir) mecanismos que processam a informação. E estes mecanismos são necessários para definir o que é e do que não é relevante. Kotchoubey explica ainda que a abordagem cognitiva considera de modo especial o tempo de reação para tarefas.

Assim, segundo tais teorias, a *percepção*[21] é a capacidade cognitiva responsável pela identificação de um objeto ou evento que mantém e desperta, por algumas frações de segundo, nossa atenção. Por outro lado, vale diferenciar o que é fruto de uma interação casual e não é percebido do que de fato é percebido e, por um mecanismo pouco explicado na literatura, desperta nosso interesse.

Maddy (2003, p. 50) se interessa também pela distinção do que é percebido e o que faz parte de uma mera interação casual, sem a extração de alguma informação significativa. Aliás, Maddy lembra que "os "psicólogos da percepção" pertencem à corrente filosófica denominada, segundo a autora, de *realismo imediato* (*direct realism*)." (MADDY, 2003, p. 51)

A autora descreve alguns episódios que evidenciam a necessidade de se adquirir ou não adquirir crenças a partir do que é percebido. Isto sugere como consequência, seguindo sua linha de raciocínio que, aquilo que não é percebido ou foi fruto de uma interação casual não possibilita a elaboração/aquisição de *crenças perceptuais*.

---

[21] Parsons (2008, p. 149) explica que em casos corriqueiros da percepção, "existe uma ação física de um objeto percebido em nossos órgãos sensórios. Nossa percepção, de algum modo, é fundada nesta ação, e existem sérias razões para assegurar que tais relações casuais caracterizam uma condição necessária para percebermos os objetos.".

Note-se que Maddy (2003) diferencia o vocábulo *crenças* (*beliefs*) e *crenças perceptuais* (*perceptual beliefs*). De fato, não necessitamos adquirir *crenças* para perceber algo, mas simplesmente percebemos. Por exemplo, quando observamos um espaço visual geométrico, notamos padrões geométricos, percebemos curvas, linhas retas, intersecções, distâncias e ângulos.

Todos estes elementos podem ser divisados por um observador, quer detenha ou não algum conhecimento mais aprofundado de geometria. Mas na condição em que o mesmo não possua nenhuma familiaridade com o estudo formal e axiomático da Geometria, ele adquiriu as primeiras *crenças perceptuais* dos objetos percebidos.

Deste modo, depreendemos que nossas *crenças* são elaboradas a partir da aquisição de *crenças perceptuais* e, para uma percepção adequada, necessitamos da condição de que quem "percebe necessita adquirir crenças perceptuais apropriadas" (MADDY, 2003, p. 51).

Neste sentido, Maddy recorda que podemos adquirir falsas *crenças* a partir de *crenças perceptuais inadequadas*. Ela recorda um episódio envolvendo um truque de um ilusionista que conduz um participante a admitir como verdadeira uma *crença perceptual* elaborada a partir de um truque envolvendo espelhos.

O participante é levado a crer em uma *crença perceptual* imediata, mas que, de fato, é consequência de uma ilusão intencional vinculada ao truque de mágica. Da mesma natureza, Indow (2004, p. 109) recorda "que todo mundo já teve a experiência de enxergar ou ter a impressão de que a lua parece ser mais larga quando esta no horizonte do que quando se encontra no zênite (ou apogeu).".

A lua aparentemente mais larga no horizonte do que no zênite é geralmente chamado de ilusão da lua (*moon illusion*) no sentido de que ambos os cenários são gerados de imagens na retina do mesmo tamanho, mas que fornecem *crenças peceptuais* distintas. Alias, segundo Indow (2004, p. 110), "o problema já tinha sido observado desde 600 ou 300 antes de Cristo.". Vejamos isto na figura 40.

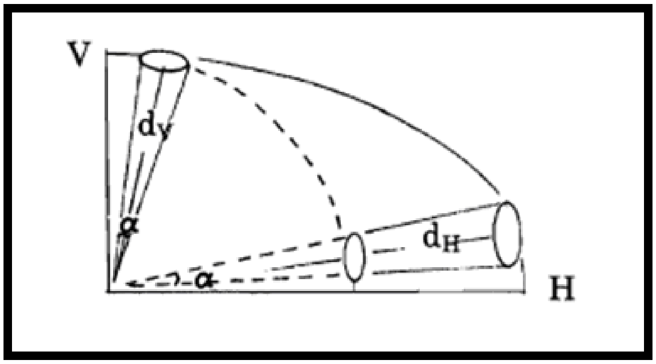


Figura 40. Ilusão da lua (*moon ilusion*) descrito por Indow (2004).

No episódio da lua (*moon ilustion*), sabemos que os amantes costumam ficar mais inspirados com o tamanho da lua e, a partir de uma *falsa crença perceptual*, conjecturamos que no horizonte e um tamanho maior, podemos prever um maior número de declarações de amor e declamação de poemas. De qualquer modo, é importante notar, no âmbito da Matemática ou fora dela, que "o conteúdo de uma crença perceptual caracteriza um estádio mental rico e diversificado." (MADDY, 2003, p. 51).

Outra característica marcante apontada por Maddy diz respeito ao caráter não inferencial, não consciente ou linguístico de uma *crença*. Por exemplo, Indow discute os resultados de um estudo mostrou que os sujeitos participantes manifestaram a tendência em descrever a parte não percebida ou destacada na figura de modo predominantemente condicionado pela *simetria* do objeto ou quadrado ABCD (figura 41-I) observado numa direção obliqua; o que necessariamente pode não ocorrer.

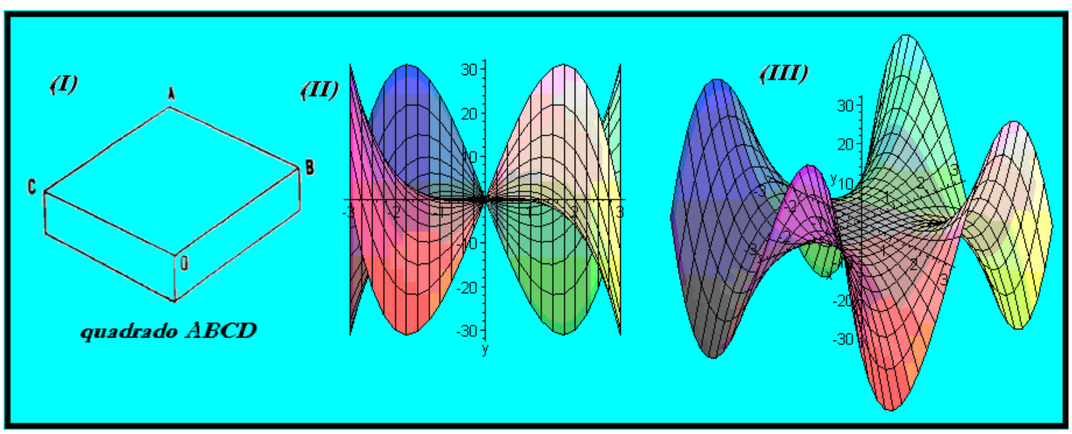


Figura 41. Figura discutida por Indow (2004, p. 179) e uma *superfície* no espaço euclidiano.

Por outro lado, dependendo do ângulo de observação, quando consideramos na figura 41-II, é impossível prever, desde uma *crença perceptual*, o comportamento *simétrico* da *superfície* no $\mathbb{R}^3$.

Por outro lado, a propriedade de simetria pode ser detectada quando alteramos o ângulo de observação e, assim, podemos evitar a aquisição de crenças inadequadas. Note-se que os indivíduos descrevem no caso do quadrado ABCD a partir de crenças a respeito sobre a sua forma e não conteúdo ou ainda seu comprimento. Apesar de *crenças perceptuais* como estas que descrevemos há pouco influenciam umas as outras.

Assim, o percebido na figura 41-II influencia o que é detectado na figura 41-III, e vice-versa. Maddy explica que possuir um *conceito* a respeito de algo significa possuir a capacidade de crenças de um determinado tipo ou categoria.

Assim, todas as inferências e afirmações produzidas sobre o quadrado se relacionam ao referido conceito e caracterizam o *sistema de crenças* que uma pessoa possua sobre ele. De modo semelhante, ocorre em relação à *superfície*; no entanto, quando consideramos a sua descrição analítica $f(x,y) = x^3y - xy^3$ da referida *superfície*, em que ocasião poderemos adquirir um maior número de *crenças perceptuais*? A partir de que objeto apreendemos um maior número de informações de modo tácito e não inferencial?

Maddy (2003) desenvolve um questionamento semelhante, entretanto, num contexto geral. A autora questiona como adquirimos um conceito de um objeto físico? Em sua análise, parte do pressuposto de que vemos o objeto, entretanto, que *imagem mental* mobilizamos ou imaginamos quando voltamos nossa atenção à descrição $f(x,y) = x^3y - xy^3$?

Outro aspecto sublinhado por Maddy aponta no sentido de explicar que a aquisição de *crenças perceptuais* adequadas depende de experiências particulares vivencias, apesar de que todo ser humano apresenta a capacidade de adquiri-las. Neste sentido, quando nos referimos a experiências particulares com os conceitos da Geometria, Maddy (2003) lembra que os psicólogos mencionam o fenômeno da *identidade perceptiva* (*perception identity*).

Ele pode ser caracterizado quando temos "uma figura considerada com identidade quando esta parece similar a umas figuras e não a determinadas outras, ou quando ela é próxima a algumas categorias e não a outras, ou mesmo quando pode ser facilmente reconhecida, recordada ou nomeada." (MADDY, 2003, p. 53)

Quando eu vejo a figura ou imagem[22] de um triângulo, por exemplo, percebo que este é mais parecido com outros triângulos do que quadrados. Podemos recordá-lo, reconhecê-lo e chamá-lo, assim como outras figuras similares, de triângulos. Deste modo, explica Maddy, adquirimos uma *crença perceptual* que nos informa que existe um triângulo diante de nós.

Maddy sublinha experiências interessantes que indicam que mesmo os chipanzés adquirem a habilidade de ver um triângulo mais semelhante a outro do que semelhante a um quadrado, o que foi obtido por meio de experiências sensórias. Aliás, observamos preocupações semelhantes nos estudos de Jean Piaget no que concerne à aquisição de *crenças perceptuais* sobre objetos físicos descritas do seguinte modo por Maddy (2003, p. 55)

> A habilidade de distinguir um objeto por meio de seus aspectos como tamanho, forma, cor, em adição a sua localização ou trajetória, caracteriza um maior desenvolvimento, seguindo-se pela habilidade para distinguir objetos por meio de aspectos comuns partilhados e gradualmente aperfeiçoados através da busca de comportamentos. Mas no final deste período, a criança que possui um conceito familiar independentemente da existência do objeto físico é completamente capaz de adquirir crenças perceptuais sobre o mesmo. (tradução nossa).

A característica destacada pela autora, que caracteriza a possibilidade da aquisição de *crenças perceptuais* relacionadas a um conceito que produz um significado para um objeto, estando este presente ou não, adquire uma importância capital na aprendizagem no ambiente acadêmico. Vale observar, porém, a condição identificada por Maddy (2003) que diz respeito à condição do sujeito já possuir, compreender ou divisar as crenças vinculadas a determinado conceito.

Vejamos um exemplo interessante discutido por Maddy. Ela recorda que para o conceito de triângulo ou um objeto físico, a habilidade de adquirir crenças, incluindo as de natureza perceptiva, sobre tais coisas, é efetivada ao longo de um período de tempo, mas o que podemos dizer sobre como se dá tal processo de efetivação e evolução?

Maddy (2003, p. 55) nos fornece uma resposta no âmbito da Neuropsicologia quando explica que

> Presumivelmente algumas mudanças devem tomar lugar no cérebro, alguma alteração da estrutura neural, que nos capacita de enxergar

[22] Paivio (1971 apud ALMARAZ, 1997, p. 19) explica a "relação de imagens com outros processos cognitivos. Ademais, a imagem, como forma de representação simbólica, está intimamente ligada às experiências do entorno, bem como com a natureza do estímulo e da ação desencadeada e do uso específico que fazemos da linguagem.".

> coisas com identidade, que preenche a lacuna entre os padrões de luz em nossas retinas e as crenças perceptuais que adquirimos. [...] A parte do cérebro que envolve a capacidade perceptiva, a região do cortex, pode ser dividida em quatro regiões, e os padrões de estimulação retinal é topologicamente equivalente a atividade da primeira destas regiões. (tradução nossa).

Mais adiante, Maddy (2003, p. 56) conclui que "qualquer estímulo visual cria uma verdadeira cadeia de atividade por meio do cortex visual, e a atividade correspondente a diferentes estímulos retinais são globalmente semelhantes.". A questão é compreender como tal atividade é organizada. Certamente a compreensão do próprio mecanismo de *apreensão perceptiva* pode nos levar ao entendimento para a escolha do modo mais adequado de estimulação para determinado tipo de *crenças perceptuais* vinculadas a um conceito matemático.

No que diz respeito à aquisição de crenças perceptivas da identidade de um triângulo, Maddy descreve o experimento realizado por neuropsicológos que envolveu a atenção dispensada por alguém sem familiariadade com triângulos. Assim, o indivíduo fixa seu olhar no topo de uma figura triangular. "Isto gera determinado padrão de estimulação que ocorre recorrentemente toda vez que ocorre a fixação do olhar para o canto ou (ângulo)." (MADDY, 2003, p. 56)

Como resultado da exposição repetida, grupos de células de variados níveis corticais são repetidamente acionadas e acionam outras (como uma convergência de várias formas). Resulta que se torna mais fácil a interconexão de células que excitam outras, e se tornam mais independentes, eventualmente formando o que Maddy chama de "cell-assembly". Isto responde pela reação referente ao vértice de qualquer outro triângulo similar.

Maddy continua sua explicação, esclarecendo que um processo semelhante fornece um conjunto de células encarregado para os ângulos da base do triângulo, entretanto, isto deixa em aberto a questão de como o triângulo como um todo, como unidade, é percebido com identidade. Mais adiante destaca

> Experimentos comportamentais sugerem que a aquisição da habilidade para o reconhecimento de triângulos depende essencialmente de sucessivos movimentos dos olhos e a fixação em várias partes da figura. O olho é especialmente inclinado a traçar linhas todos os movimentos que induzem estimulações periféricas são impulsionados em uma direção. Os ângulos ou vértices são pontos freqüentes de fixação, conduzindo a intersecção das linhas retas, e quando um olho é fixado em um vértice, ele passa a ser estimulado ao outro vértice. (MADDY, 2003, p. 56; tradução nossa).

Em outras palavras, conclui a autora, fazendo referência aos estudos de Neuropsicologia que, o conjunto especializado de células (*cell-assembly*) é o que permite o sujeito enxergar um triângulo com identidade, e "adquirir crenças perceptuais sobre o mesmo." (MADDY, 2003, p. 57)

Certamente que a repetição do processo proporciona alterações e o consumo de memória a longo prazo envolvendo o conhecimento adquirido relativo ao conceito de triângulo. Mais adiante, a autora sublinha um comentário essencial para o nosso contexto de discussão do CVV. De fato, ela esclarece que

> A habilidade de perceber objetos físicos não é semelhante a habilidade de perceber figuras triangulares. O pensamento é mais complexo. O truque é perceber uma série de padrões como pontos de vista constituintes de uma única coisa. Justamente que a habilidade de ver triângulos se desenvolve ao decorrer do tempo, por meio de um meticuloso processo de atenção aos vértices e comparação de um triângulo com outro, a habilidade de ver objetos físicos contínuos se desenvolve na condição de um período de experiência de manipulação e observação dos mesmos. (MADDY, 2003, p. 57; tradução nossa).

Assim, diante de suas colocações referendadas em estudos científicos experimentais, podemos esperar que a aquisição de *crenças perceptuais* a respeito de uma bola de futebol seja mais simples do que uma circunferência e, nesse raciocínio, a aquisição de *crenças perceptuais* sobre uma esfera envolve maiores dificuldades do que os demais casos.

Podemos pensar em casos mais específicos na Matemática, quando Dieudonnée (1987, p. 122) lembra que "a ideia de função de uma variável real, à valores reais, alcançada no fim do século XVII, poderia, por meio do seu gráfico, ser considerada como deduzida por abstração de uma noção de geometria plana "grosseira" acessível aos sentidos.".

Por outro lado, no início do século XVIII, se torna necessário considerar funções do tipo $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, como exemplifica Dieudonné (1987, p. 122). Ele adverte para o fato de que

> No caso de duas variáveis, podemos ainda falar de gráfico que neste caso é uma superfície; por exemplo, como a função $f(x,y) = xy$ possui por gráfico a superfície de equação $z - xy = 0$, uma quádrica chamada de paraboloide hiperbólico. Mas na medida em que o número de variáveis ultrapassa a duas, deve-se desistir de analisar qualquer imagem. (tradução nossa).

Na figura 42, observamos os gráficos das *superfícies*, para alguns casos particulares das *curvas de nível* $(k = 3,6,9)$ da função $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, que possui seu gráfico no $\mathbb{R}^4$.

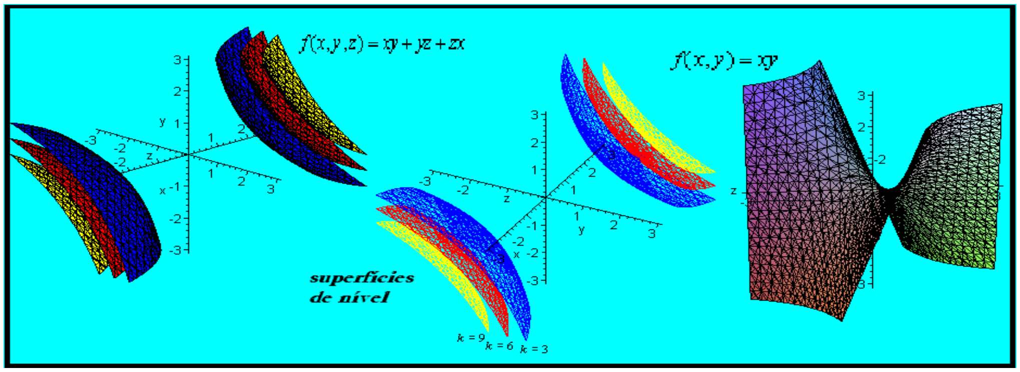


Figura 42. *Superfícies* comentadas por Dieudonné (1987).

De qualquer modo, quando um objeto estimula uma sequência de fases nos conjuntos de células responsáveis pela recepção de informações do córtex cerebral, ocorre uma atividade cerebral que participa diretamente na geração de certas de crenças perceptuais, e de um modo particular. Deste modo, "minha perícia participa da geração de minhas crenças que me informam que existe algo diante de mim que observo com uma boa iluminação." (MADDY, 2003, p. 58)

De um modo incipiente, os seres humanos desenvolvem detectores de objetos neurais que nos conduzem a perceber coisas de modo independente, objetos físicos contínuos. "E existe um conjunto complexo de células que ligam e preenchem a lacuna entre o que é fruto de uma interação e o que é percebido." (MADDY, 2003, p. 58)

Neste sentido, Parsons (2008, p. 156) sublinha que todos nós percebemos cores, "e de modo natural de descrição destas experiências é ver esta ou aquela cor, digamos vermelho ou azul. Ver o vermelho não é a mesma coisa que ver algum objeto vermelho, embora, é claro que tudo esteja relacionado.".

Em todo caso, a estimulação que recebemos de um objeto, seja ele de natureza física ou conceitual, é condicionada pela sua natureza conceitual. Neste sentido, Fischbein (1993, p. 141) diz que "as propriedades geométricas de uma figura nos são impostas ou derivadas das definições num campo e determinado sistema axiomático.". Um pouco mais adiante, acrescenta que "uma figura pode ser descrita como possuidora de propriedades intrínsecas. Entretanto, uma figura geométrica não é apenas um conceito. Esta é uma imagem, uma imagem visual." (FISHBEIN, 1993, p. 141)

Deste modo, Efrain Fichbein aponta então dois elementos que desempenham papéis fundamentais no processo do *raciocínio matemático*, a saber, os elementos conceituais, intrínsecos do objeto e os sensorialmente percebidos. De fato, "é muito difícil aceitar e construir o que necessita, simultaneamente, de qualidades conceituais e espaciais imaginativas." (FISCHBEIN, 1993, p. 143)

Referendando-se em nossa investigação e a tentativa de compreensão das ideias e pontos de vista de renomados autores, concluímos que uma atividade mental relacionada ao movimento perceptivo não necessariamente ocorre de maneira completamente justificada. Além disso, observamos que algo desperta nosso interesse e o nosso foco de observação.

Com base no que já discutimos, podemos afirmar que a compreensão e o significado que atribuímos ao evento depende num largo sentido de nossas *crenças perceptuais*. Na medida, no entanto, em que desenvolvemos um raciocínio tácito, instigado por nossa *percepção*, e o mesmo não apresenta uma estrutura lógico-inferencial, mobilizamos, assim, um *raciocínio intuitivo*.

Em nosso contexto de delate, é flagrante nosso interesse da exploração do raciocínio intuitivo no campo da resolução de problemas de Matemática. Quando falamos de *raciocínio intuitivo*, partimos do pressuposto de determinado "esforço mental" que mobiliza o indivíduo do "conhecido" ao "desconhecido", como diria Étienne Bonnot de Condillac (1715-1780).

O mencionado 'esforço mental', consequentemente, apresenta um ápice de atividade e posterior fadiga. Esse pico maior de esforço e interesse, na atividade intuitiva, que de algum modo funciona como um divisor de águas entre o "conhecido" ao "desconhecido", alguns estudiosos chamam de "*insight"* ou "iluminação".

Num contexto específico para a resolução de problemas em Matemática, o significado da palavra *insight* transformou-se em objeto de atenção e uso frequente para vários estudiosos, tais como: Hadamard (1945), Poincaré (1899, 1905, 1908), Polya (1945, 1962, 1982), Hilbert e Cohn-Vossenn (1952) e Norman (2003).

Mais recentemente, nas investigações desenvolvidas na área de Psicologia Cognitiva, o referido termo é utilizado para nomear "o processo pelo qual um solucionador de problemas subitamente move-se de um estado em que não sabe para um estado mental em que sabe como proceder para resolver o problema." (MAYER, 1992 *apud* DAVIDSON e STERNBERG, 1992 p. 4).

Mayer relaciona o processo de *insight* à compreensão e ao entendimento. Dallob e Dominowki (1992 apud DAVIDSON e STERNBERG, 1992, p. 37), ao referirem-se à manifestação do *insight* relatam de modo semelhante à possibilidade de uma *plena compreensão.* Essa compreensão "é baseada num movimento cognitivo de uma confusão mental, para um estado psicológico de clareza.".

Seifert et al. (1992, p. 66) explicam o *insight* como a possibilidade de enxergar e compreender a natureza interna das coisas claramente, em especial por *intuição*. Neste âmbito, ele sublinha que "intuição significa o conhecimento imediato a respeito de algo, sem a consciência do uso do raciocínio.". Neste caso, observamos que os autores conduzem no campo da investigação psicológica, o acréscimo do termo *intuição* à significação da palavra *insight*. Entretanto, a relação entre *insight* e *intuição* nem sempre é esclarecida.

Neste sentido, Smith (1992, p. 232) define a expressão *insight problem*, para destacar num contexto em que temos um problema *não singular*, em que a solução pode ser obtida por meio de uma experiência e a atividade solucionadora envolve um *insight*. Mas o que é mesmo um problema? No processo investigativo de um problema, em que momento temos a possibilidade de identificar o surgimento do *insight*? Quais as características predominantes do *insight*? Que espécies raciocínios permitem explorá-lo? Qual a importância didática do *insight* no ensino do CUV ou do CVV?

Para responder à primeira pergunta, recorremos a Dallob e Dominowski (1992, p. 33) que consideram um problema "quando temos uma situação difícil ou perplexa, como um jogo.". Os autores afirmam que "um problema existe quando percebemos um objetivo para ser atingido não muito claro ou uma tentativa inicial que falha em alcançar tal objetivo." (DALLOB e DOMINOWSKI, 1992, p. 122). O ingrediente chave de um problema é a necessidade da descoberta de uma resposta apropriada para a situação apresentada.

Buscando responder ao questionamento sobre o significado do termo *insight*, concluiremos nossa discussão destacando quatro características, descritas por Seifert et al (1992 *apud* DAVIDSON e STERNNER, 1992, p. 67) frequentemente atribuídas ao *insight*, e que podem ser observadas ao longo de uma sessão didática, a saber: (1) *subitaneidade*, em que o temor *insight* parece acontecer abruptamente, mediante uma espécie de salto ou mudança de estádio da compreensão, por meio de um processo incremental; (2) *espontaneidade*, em que o *insight* parece ocorrer internamente, sem uma consciência ou controle total do solucionador de problemas; (3) *imprevisibilidade*, em que o *insight* se manifesta de forma surpreendente e sem aviso; e (4) *satisfação*, em que o *insight* graciosamente preenche as condições de solubilidade de uma situação previamente não resolvida, culminando com um triunfante "Aha!", de experiência.

Deste modo, divisamos, por meio da caracterização fornecida por Seifert et al. (1992), quatro características observadas e/ou observáveis numa situação-problema que possibilita algum *insight* de um solucionador. Por outro lado, algumas características não são observáveis do mesmo processo.

De fato, o raciocínio humano ocorre em vários níveis diversificados. Muitos cientistas distinguem processos de raciocínio intencionais e *processos tácitos*. Processos tácitos que "facilitam o raciocínio ocorrem sem uma consciência de intervenção e esta fora do campo da atenção. Tais processos tipicamente não requerem atenção. Tal forma de pensamento é comumente associativa porque depende de uma rede de ideias e associações na memória." (LOHMAN, 2005, p. 229).

Além disso, *processos tácitos* ocorrem quando se toma uma decisão de um modo rápido e intuitivo porque nos traz uma sensação de verdade, antes mesmo de podermos articular de modo claro as razões para tal escolha. Nos processos de *raciocínio tácitos*, estamos atentos aos resultados desejados ou buscados, mas não aos próprios processos necessários na tarefa.

"Processos tácitos são particularmente importantes para ajustar a atenção na construção de um modelo mental para o problema." (LOHMAN, 2005, p. 230). Neste contexto de ação mental, vale comparar os solucionadores de problemas que obtêm mais êxito.

Tais solucionadores se atêm a diferentes aspectos do problema quando comparados a solucionadores menos eficientes. Os primeiros sabem o que deve ser observado e o que há de ser desconsiderado. Em parte, "isto é devido a sua grande experiência adquirida no passado." (LOHMAN, 2005, p. 230).

Por outro lado, temos também os processos de *raciocínios intencionais*, que ocorrem numa esfera de consciência. Indivíduos em atividades amparadas nestes tipos de raciocínio são conscientes não apenas dos objetivos do seu raciocínio, como ocorre nos *processos tácitos*, mas também aos próprios processos empregados. Este é um tipo de raciocínio mais distintivo do ser humano.

Tal pensamento é frequentemente descrito como estratégico ou baseado em regras (*based rules*). Esta forma de raciocínio basicamente requer esforço. "Ele proporciona a passagem ao plano secundário a lenta acumulação de experiências que subjazem ao aprendizado tácito." (LOHMAN, 2005, p. 230).

Hambrick e Engle (2003 *apud* DAVIDSON e STERNNERG, 2003, p. 176) lembram que a capacidade de trabalho de memória "se refere ao suprimento cognitivo que pode ser alocado flexivelmente dependendo da demanda da tarefa".

A função da *memória* é trazer ao foco de atenção do solucionador de problemas as representações mentais estimuladas pelo objeto, e mantê-las de forma altamente associadas e acessíveis. Deste modo, torna-se natural esperarmos, por parte do professor de Matemática, uma perspectiva global da situação de previsão e de antecipação das ações necessárias que conduzem ao êxito e também ao fracasso no caso das intuições equivocadas.

Para o professor, entretanto, deve ficar claro que o momento do *insight* no aluno caracterizará uma forma privada e idiossincrásica, para compreender um problema, esboçar as estratégias e táticas exequíveis e, posteriormente, apresentar sua solução.

As estratégias e táticas que logram êxito ou não constituem a etapa de compreensão. Sublinhamos que estas duas etapas, <u>compreensão</u> e <u>solução</u>, na perspectiva que objetivamos, buscam a utilização metodológica do *insight* e podem apresentar uma considerável distância e requerer tempo.

Na <u>compreensão</u> temos a *representação do problema*. Mayer (1992 apud DAVIDSON e STERNBERG, 1992, p. 4) ratifica nossa afirmação, quando explica que um solucionador "constrói uma representação mental interna de um problema que sugere um plano de solução". A construção da *representação mental* ocorre durante a busca da solução, e requer uma atenção confrontada a partir da própria situação.

Este é o momento característico de ocorrência do *insight*. O *insight* compreende e determina o que deve ser feito na resolução da situação-problema. A *representação mental* constituída no *insight* requer vigilância para atender as especificidades das situações uma vez que estas podem encerrar alguma inconsistência.

Fischbein (1999, p. 34) descreve as etapas do processo solucionador de problemas e aponta o momento mais propício de aparecimento do *insight*, quando comenta

> O processo de solução de problemas, usualmente, passa por três fases. No primeiro, o solucionador investe seu esforço máximo nas tentativas de várias estratégias, hesitações, recuperação de esquemas e modelos previamente adquiridos em outro contexto. Este processo é mais ou menos consciente por que as estratégias usadas são

> relativamente conscientes. [...] Ele nem sempre possui todos os elementos para a solução, isto é, do ponto de vista formal e analítico. O solucionador tem em mente uma ideia global de uma representação e principalmente do tratamento da direção que deve escolher. [...] Esta é também uma intuição, um *intuição antecipatória*, chamada às vezes de momento de 'iluminação'. (tradução nossa).

Notamos no trecho final do seu longo comentário uma referência a um momento de "iluminação". Notamos que Fischbein indica o instante para a sua manifestação na condição de emprego da categoria de *intuição antecipatória*. Na medida em que tenhamos, no entanto, a possibilidade de explorar outras categorias intuitivas, o momento de "iluminação", conforme Fischbein pode ocorre antes ou após e solução do desafio.

Em todos os casos, independentemente da fase ou do tempo de sua ocorrência, precisamos conhecer as características do raciocínio intuitivo para identificar uma manifestação real e contextualizada.

Deste modo, recordamos as várias características da *intuição* sublinhadas em Hanna (2001, p. 171), que se mostram mais significativas, num ambiente que requer a solução de problemas de Matemática: (i) a *intuição* é associada às nossas experiências sensórias[23]; (ii) a *intuição* é clara e distinta, isto é, ela possui um conteúdo representacional e que tal conteúdo é vivenciado nitidamente por um pensador consciente, (iii) a *intuição* é *nãoinferencial*, isto é, mesmo que um sujeito intui o objeto S, sua crença sobre tal objeto não se baseia em alguma razão ou premissa, mas apenas no próprio episódio intuitivo; (iv) é sempre possível que uma *intuição* seja errada ou equivocada; (v) a *intuição* é cognitivamente indispensável, isto é, todo processo cognitivo de raciocínio ou de crença-justificação possui subjacentemente a intuição de algum princípio lógico dedutivo que governa a relação entre premissa e conclusão.

Por exemplo, Bassok (2003 *apud* DAVIDSON e STERNBERG, 2003, p. 344) diferencia problemas que "superficialmente apresentam a mesma aparência, embora as idéias estruturais necessárias para a sua resolução sejam bastante diferentes, e problemas que se apresentam superficialmente distintos", embora necessitem estruturalmente dos mesmos argumentos para a sua solução. A este grupo de problemas, ele atribui a expressão *surface-structure problems*.

[23] Vale ressaltar que podemos diferenciar *experiências sensórias* atuais ou *experiências sensórias* fundadas na *memória*. Almaraz (1997, p. 7) discute a expressão *imagem visual* e *memória visual*. "As imagens visuais, segundo o mesmo, constroem a nossa *memória visual*. Deste modo, podemos falar de um processo intuitivo que teve um estímulo atual ou um processo intuitivo fundado na memória.".

Estes grupos de problemas propiciam o *raciocínio por analogia*, que é uma forma de raciocínio que há muito tempo tem merecido atenção por parte dos matemáticos. Além disso, com as reflexões de Antoine Augustin Cournot (1801-1877), evidenciamos a ligação do *raciocínio por analogia* com outra espécie de raciocínio, frequentemente necessário em Matemática, chamado de *raciocínio indutivo* (*raciocínio por indução*). Cournot relaciona-os quando afirma que

> O julgamento por analogia se aproxima do julgamento por indução. O pensamento por analogia, conclui semelhanças parciais entre duas coisas do mesmo gênero, em direção às suas semelhanças totais. Portanto, temos conclusões do particular ao geral, o que para Kant, caracterizava a indução. (COURNOT, 1851, p. 92; tradução nossa).

Por sua vez, Polya diz que “tanto o raciocínio por analogia como o raciocínio por indução constituem uma base para o raciocínio heurístico.” (POLYA, 1945, p. 113), requerido na resolução de problemas e que requerem o *insight*. Portanto, constatamos duas subclasses de raciocínio pertencentes a uma classe mais ampla, nominado por Polya de *raciocínio heurístico*.

Geoge Polya descreve de forma brilhante e incomparável, alcançado apenas por Poincaré, o processo cognitivo que possibilita o aparecimento do *insight* na investigação matemática. Ele acentuava que

> Após um período de hesitação ou após intenso trabalho sem ao menos apreciar seu progresso, ou ainda após um curta ou longo interrupção do trabalho, nós subtimente, percebemos uma nova face do problema. Toda a nossa concepção a respeito do problema é rearranjada. Sabemos o que fazer e parte do plano surge. E agora temos o sentimento de que agora, estamos no caminho certo. “Ça va marcher!” (POLYA, 1982, p. 30).

Henri Poincaré, conforme Gruber (1991) e Grüber e Bodeker (2005), delineiam esquematicamente o mesmo processo, como vemos na figura 43.

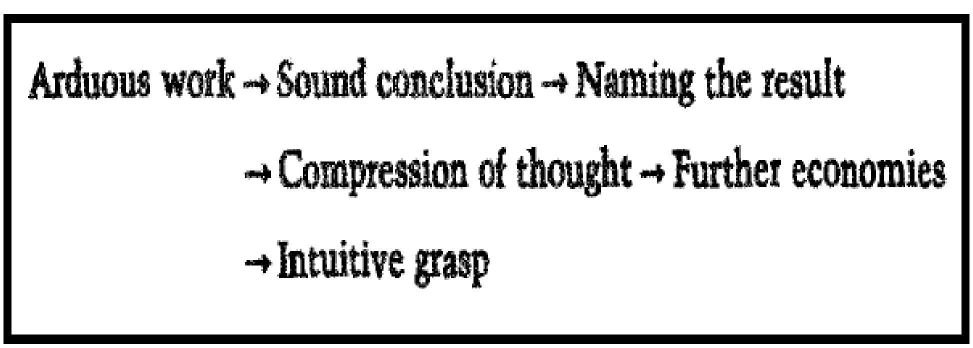


Figura 43. Grüber e Bodeker (2005, p. 414) descreve o surgimento do *insight* ou o momento da “iluminação” no contexto da resolução de problemas.

2.5 A intuição e a natureza das definições matemáticas.

> Etimologicamente definir significa: delimitar o que é do que não é. Este aspecto é frequentemente encontrado em enciclopédias e dicionários. (BUFFET, 2003, p. 17; tradução nossa).

> As definições em matemática são enunciadas como convenções, contudo, a maior parte dos espíritos se revoltará se quisermos impor por meio de convenções arbitrárias. (POINCARÉ, 1904, p. 268; tradução nossa).

Uma das dificuldades que os alunos enfrentam no estudo da Matemática diz respeito à exigência das operações de pensamento realizadas sobre *objetos* conceituais idealizados, as quais, em muitos casos, são regidas por propriedades extraídas das *demonstrações.* Parte destes condicionantes é indicada por Maroger (1898, p. 67), ao declarar que

> Não é suficiente conhecer os primeiros princípios da especulação matemática e a natureza das demonstrações, é necessário também preocupar-se com as noções, os objetos do pensamento que formam a matéria do raciocínio. Estes objetos matemáticos são criados por meio das definições. (tradução nossa).

As *definições matemáticas*, como Maroger explica, assumem um papel essencial para a compreensão dos objetos da Matemática. E não se pode perder de vista a ideia de que a compreensão de tais objetos depende do seu caráter sintático, semântico e das propriedades intrínsecas condicionadas pelas suas regras formais explicitadas a *priori* ou *a posteriori*, com referência ao momento do estabelecimento de suas respectivas definições dentro de uma teoria formal consistente.

Em muitos casos, teoremas, corolários e regras caracterizarão o modo de manipular, calcular, empregar e, de modo essencial, de compreender e raciocinar com determinados objetos conceituais.

Uma *definição matemática* condiciona certa manipulação e/ou operação mental. De fato, Maroger (1898, pg. 67) explica que "a definição tem precisamente por objetivo assegurar uma especificação semelhante, de fornecer uma realidade, subjetiva ao menos, no sentido filosófico da palavra, a um objeto do pensamento.".

Quando definimos axiomaticamente um *objeto matemático* ou realizamos formalmente a sua construção, adquirimos a possibilidade de distinguir/diferenciar este objeto definido do demais. Adquirimos a possibilidade de raciocinar e conjecturar sobre tal objeto, que, agora, passa a ser um objeto de nossa reflexão.

Neste sentido, Buffet (2003, p. 20) recorda que D´Alembert atribuía a importância das definições "pois elas abreviam o discurso e a inexatitude de uma definição pode impedir a obtenção da verdadeira significação da palavra.". Por outro lado, em Matemática, não se pode perder de vista a ideia de que estamos numa espécie de camisa de força, dentro de um sistema teórico formal. Assim, seu uso constante a todo o momento é exigido.

Em virtude deste fato, devemos ficar atentos no sentido de respeitar as propriedades previamente existentes ao objeto definido. Acrescentamos que "uma única condição, mais absoluta, será requerida para a validade de uma definição: que esta não implica numa contradição, em outros termos, que o objeto definido seja possível." (MAROGER, 1898, p. 67).

Maroger adverte agora que a criação/estabelecimento de uma *definição matemática*, por um lado, não pode ser abusiva, e por outro, não pode ser comparada à liberdade de um poeta. Ela esta condicionada e amarrada ao sistema teórico em que determinado *objeto matemático* é definido. Por exemplo, quando nos referimos ao *Cálculo Diferencial e Integral* estamos sujeitos a determinadas regras particulares que se diferenciam das regras peculiares à *Álgebra Abstrata* ou da *Álgebra Não-Comutativa*.

Maroger (1898, p. 68) discute ainda uma questão fundamental expressa do seguinte modo: Todos os *objetos*, todas as noções de especulação matemática, podem ser definidos? Dito de outro modo, não há noções que sabemos caracterizar o mais claro possível e que, portanto podem permanecer indefiníveis, de forma rigorosa? Ele acrescenta que "depois de Pascal, não se pode mais conceber tal idéia." (MAROGER, 1908, p. 68), uma vez que Blaise Pascal (1623-1662) foi um matemático que se destacou, dentre os motivos, pela sua preocupação demasiada com o papel das *definições* em Matemática.

Com o intuito de enriquecer nossa discussão e extrair algumas implicações relacionadas aos objetos do CUV e do CVV, adotamos provisoriamente as distinções assumidas por Maroger. Assim, diremos resumidamente que existem dois tipos de *definições matemáticas*, a saber:

- *Definições matemáticas* que necessitam das propriedades características do *objeto matemático* definido e que podemos demonstrar sua *existência*;
- *Definições matemáticas* que prescindem do *objeto* definido, sem demonstrar sua *existência*.

Maroger assinala que a diferença entre as duas caracterizações remonta episódios sobre a história do pensamento matemático e acrescenta ainda que "as definições do primeiro tipo definem o *objeto*, enquanto a segunda apenas o caracteriza e são chamadas apenas por *caracterizações*." (MAROGER, 1898, p. 45). Resumidamente, as *definições* de fato, são as primeiras e que, em termos filosóficos, são chamadas de *definições reais*, *causais*, por *generação* ou *genéticas*.

Veremos que, no primeiro caso, em que as *definições* requerem a verificação do *objeto* definido, podem ocorrer dificuldades, sobretudo de compreensão, nas situações ordinárias do seu ensino. Por outro lado, um aspecto mencionado pelo autor é que uma *definição* será a melhor possível, "quando podemos legitimá-la de uma forma mais simples possível." (MAROGER, 1898, p. 71)

Neste contexto de debate, vale lembrar que "não existe somente uma única forma de se definir um objeto que lhe é submetido." (*Idem*, 1908, p. 71). Assim, dependendo de nossos objetivos, que no caso do matemático profissional são investigativos, mas, também, podem ser objetivos com vistas ao ensino, temos a possibilidade de escolher a definição que melhor nos apraz e/ou a definição que proporciona melhores condições ao entendimento.

O matemático Jules-Henri Poincaré (1854-1912) manifesta em sua obra profunda preocupação com a compreensão e entendimento dos iniciantes. Dentre os vários aspectos que foram objeto de análise por parte de Poincaré, destacam-se suas preocupações relacionadas à *intuição matemática* e as *definições matemáticas*. Poincaré questiona sobre o papel das *demonstrações* em Matemática.

Interroga se a compreensão de uma *demonstração* de um *teorema* se limita a examinar sucessivamente cada silogismo e constatar que são corretos. Pergunta ainda se "no caso de compreender-mos de uma definição matemática, se seria suficiente constatar que não se obteria uma contradição com o seu emprego." (POINCARÉ, 1904, p. 258)

Mais adiante, ele sublinha que "para cada palavra, é necessário se acrescentar uma imagem sensível; é necessário que a definição matemática evoque tal imagem e que a cada passo da demonstração pode-se observar sua evolução. Somente nesta condição ocorrerá a compreensão." (POINCARÉ, 1904, p. 259).

Poincaré questiona a posição tradicional de seus contemporâneos ao declarar que, para "compreender as propriedades que geraram uma definição, é necessário apelar à experiência ou a intuição, sem o que, os teoremas seriam perfeitamente rigorosos, mas perfeitamente inúteis" (Idem, 1904, p. 263); entretanto, como encontrar um enunciado conciso que satisfaça ao mesmo tempo as regras da lógica e ao nosso desejo de compreender o local novo de uma noção dentro da Ciência Matemática, e a necessidade de pensar por meio de imagens?

Poincaré destaca a importância do *raciocínio intuitivo* na produção das *definições matemáticas* que não podem ser meramente arbitrárias e baseadas puramente em argumentos lógicos. Finaliza dizendo que grande parte das *definições matemáticas*, como demonstrou Louis Liard, "são verdadeiras construções edificadas sobre noções mais simples." (POINCARÉ, 1904, p. 268).

Na tese de doutorado *Des définitions géométriques et des définitions empiriques*, Louis Liard (1846-1917)[24] desenvolve profunda reflexão sobre os elementos essenciais que constituem as *definições matemáticas*. Logo no início do seu trabalho, o referido autor explica que descrevemos as representações e definimos as ideias. Descrever "é determinar a circunscrição de um indivíduo; definir é determinar a circunscrição de uma idéia. A descrição se faz por acidente, e a definição por meio de essência." (LIARD, 1873, p. 7).

Liard discute a origem das noções geométricas que derivam da experiência como podemos observar no seguinte trecho

> Em toda figura existem elementos, os quais se podem encontrar sua origem na experiência, a saber: o conteúdo, o limite e a forma do conteúdo, a exterioridade da figura com respeito ao pensamento. Um teorema enuncia a relação ente uma figura e uma propriedade geométrica; a definição nos faz conhecer a essência de uma forma determinada. Quando dizemos que a definição é uma generalização de nossa experiência, quero dizer generalização entre as noções que compreendem a figura e sua forma. (LIARD, 1873, p. 31; tradução nossa).

Desde que estamos falando de definições que envolvem *notações* matemáticas, talvez o matemático mais famoso pela criação de "boas" *notações* tenha sido segundo Cajori (1901, p. 181), G. W. Leibniz. Num de seus manuscritos, comentados por Couturat (1901, p. 86), Florian Cajori esclarece que os algarismos árabes possuem sobre os algarismos romanos a vantagem de "melhor expressar a "gênese" dos números, e em seguida sua definição, de sorte que sejam mais cômodos, não somente pela forma de escrevê-los, mas também pelo cálculo mental". Cajori recorda que Leibniz mostrou a importância atribuída aos *signos*, e condições de sua utilidade.

[24] Professor da École Normal de Paris e lecionou Filosofia e Letras. Foi diretor do ensino superior em um ministério francês.

A invenção do *Cálculo Infinitesimal* procede da "pesquisa de *símbolos* os mais apropriados." (COUTURAT, 1905, p 87). Couturat confirma a perspectiva de Leibniz sobre a importância capital e a proficuidade vantajosa de um *símbolo* bem escolhido. Veremos agora de que maneira a *notação* relacionada a uma *definição* pode interferir diretamente na aprendizagem e no ensino do *Cálculo* quando no atemos a uma análise pormenorizada de natureza filosófica.

De fato, a vertente filosófica *essencialista* exaltava a dimensão construtiva dos *objetos matemáticos*. Aristóteles, por exemplo, se refere às *definições matemáticas* como uma espécie de discurso, que deve exprimir a *essência* das coisas. Em sua tese, Buffet ilustra seu ponto de vista da seguinte forma

> Para conhecer a essência, é necessário encontrar o gênero ao qual pertence à coisa e seu tratamento particular que diferencia esta coisa das outras. (Aristóteles, citado por BUFFET, 2003, p. 29; tradução nossa).

Observando este último excerto, quando analisamos um objeto cuja natureza é essencialmente algébrica, identificamos aspectos que não se mostram ausentes em relação a outro objeto de natureza essencialmente geométrica. Em relação a esta última categoria de objetos, Bonnel (1870, p. 28) aponta como uma qualidade essencial de uma *definição geométrica* é que a figura, que deve ser definida, seja possível. E acrescenta que "para demonstrar que uma construção é possível, é suficiente explicitar o meio de executá-la.".

A atividade demonstrativa, segundo Devlin (2005), seja ela auxiliada por uma construção geométrica ou não, se estabelece e adquire o caráter de validade dentro de um *sistema simbólico*. Couturat (1901, p. 88), por sua vez, comentou que para Leibniz, "tais sistemas devem ser concisos: eles são destinados em abreviar o trabalho do espírito, condensando qualquer tipo de raciocínio.". A partir daí, vemos a utilidade ou a necessidade em Matemática, na qual os *teoremas* são, segundo a expressão francesa de Couturat, "*abregés de pensée*". (*Idem*, 1901, p. 88)

Leibniz forneceu profunda reflexão que não pode ser esquecida pelo professor quando sublinha num trecho comentado por Fowler (1999, p. 34) que, "considerando a fraca capacidade do espírito, não pode abranger e nem ser exposto ao mesmo tempo além, do que um pequeno número de ideias, nem efetuar de uma vez mais do que uma dedução imediata e simples.".

O Matemático Alemão desenvolveu uma verdadeira teoria da definição, pois os princípios primeiros para Leibniz são as definições. Uma demonstração, para ele, “parece um encadeamento de definições e distingue, na arte de demonstrar, duas outras artes: a arte de definir (l´art de definir) e a arte de combinar definições (l´art de combiner les définitions).” (BUFFET, 2003, p. 31).

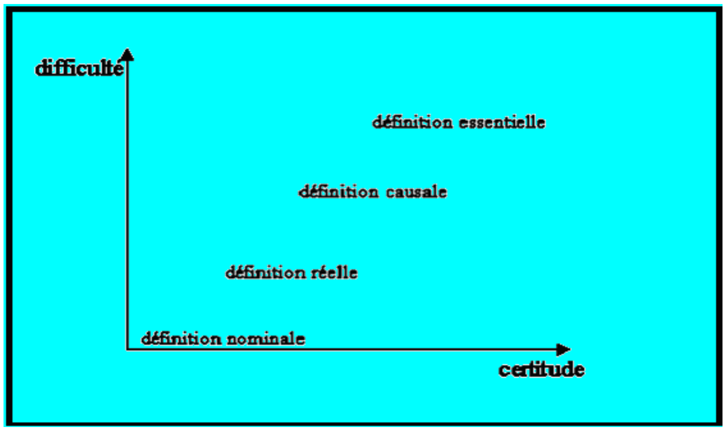


Figura 44. Relações analisadas por Buffet (2003) referente à classificação proposta por Leibniz.

Note-se que nem todo matemático e, consequentemente, professor, manifesta uma visão profunda e ampliada do antigo filósofo e matemático alemão. Neste sentido, Buffet (2006, p. 259) adverte uma conseqüência grave, quando acentua que

> Existe uma grande lacuna entre a situação em que o estudante se esforça para compreender um novo conceito matemático e uma clara definição produzida por um matemático. Para compreender como a formação conceitual funciona, implica a exploração de todo campo no qual as definições matemáticas se assentam. Como conciliar o rigor e a claridade com o universo do julgamento e do erro, conduzindo de maneira inapropriada e em rota de colisão discernimentos tácitos de professor e aluno? (tradução nossa).

Vejamos, no entanto, uma ocasião prática a que o fragmento acima se coaduna. Poincaré (1899, p. 106) comenta um artigo do professor M. H. Laurent, sobre a *notação diferencial, sistema simbólico do Cálculo*. Poincaré adverte Laurent em virtude da seguinte frase

> [...] eu penso que é conveniente de mostrar o quanto a notação diferencial é mais cômoda do que a de derivada. É em relação aos competentes que me refiro e não aos alunos, e eu acredito que ninguém contestará a grande influência da doutrina diferencial. (tradução nossa).

No parágrafo seguinte, Poincaré manifesta a surpresa com estas palavras, pois, para ele, algumas das ideias apontadas estavam há muito tempo abandonadas. Contrariamente, ele contesta fortemente a vantagens da *notação diferencial* e aconselha que tal *notação* deve ser apresentada aos alunos, no momento em que estes já estejam familiarizados com a *notação* das *derivadas.* (POINCARÉ,1899, p. 106)

Este episódio envolvendo dois matemáticos de inconteste magnitude marca o caráter polêmico e filosófico em torno da criação, natureza e emprego de *definições matemáticas*. E, ao longo da história, evidenciamos correntes filosóficas distintas que buscam concretizar uma melhor caracterização e significação. Buffet (2003, p. 24) recorda que uma primeira grande classificação certamente foi a separação entre definições de nome (*définition de non*) e definições de coisas (*définition des choses*).

Em Matemática, explica Buffet (2003, p. 26), os herdeiros dos *nominalistas* são os formalistas e "a linguagem é primordial, a Matemática aparece como linguagem, um discurso bem formado, com termos primitivos, os axiomas, regras de dedução. O que é um pouco da posição atual dos *logicistas*".

Ela esclarece ainda que eles classificam a Matemática em duas categorias: os *enunciados demonstrados* (teoremas) e os *enunciados primitivos estabelecidos sem demonstração*. De modo análogo, destaca Buffet, é possível classificar as noções que intervêm nestes enunciados. Assim, encontramos noções definidas e ideias primeiras estabelecidas sem definição.

Deste modo, para se definir uma ideia, outras ideias são utilizadas. E estas necessitam de outras definidas previamente. "Tal regressão infinita não é desejável, assim, noções primeiras (*notions prémières*) devem ser colocadas como ponto de partida. Estão são conhecidas como indefiníveis ou termos primitivos (*termes primitifs*)." (BUFFET, 2003, p. 26).

"Não apenas os matemáticos identificaram a problemática em torno das definições." (DAVIS e HERSH, 1985). Com efeito, quando nos referimos à aprendizagem, identificamos psicólogos que apresentam um ponto de vista diferenciado. Efraim Fischbein, por exemplo, merece destaque por ter desenvolvido uma teoria que caracteriza um papel importante para as *definições matemáticas*. No início do seu artigo intitulado *The Theory of Figural Concept*, Fischbein (1993), começa explicando que "o que caracteriza um conceito é fato de que o mesmo expressa uma ideia, uma generalidade, uma ideia representacional de classes de objetos, baseada em seus traços comuns." (1993, p. 139).

No que diz respeito ao raciocínio matemático necessário para a compreensão de qualquer conceito, esclarece

> O raciocínio matemático não se refere a objetos materiais ou desenhos. Objetos materiais são apenas materializações de modelos e entidades mentais com os quais o matemático lida. Segundo, no sentido conceitual se podem considerar perfeições absolutas das

> entidades geométricas: linhas retas, quadrados, círculos, etc. (FISCHBEIN, 1993, p. 141; tradução nossa)

Mais adiante o mesmo autor considera três categorias de entidades mentais que se referem a uma figura geométrica: a *definição*, a *imagem* (baseada em experiências sensório-perceptivas) a o *conceito figural*. Fischbein (1993, p. 142) explicita cinco propriedades que caracterizam as figuras geométricas. No que diz respeito à quinta propriedade, ele acentua

> Tal propriedade se relaciona a sua natureza conceitual. As propriedades das figuras geométricas são impostas, ou derivadas a partir das definições num domínio ou certo sistema axiomático. A partir deste ponto de vista, também, uma figura geométrica possui uma natureza conceitual. Um quadrado não é uma imagem desenhada numa folha de papel. É uma forma controlada por meio de sua definição. Um quadrado é um retângulo possuindo lados iguais. Partindo desta propriedade podemos descobrir outras propriedades do quadrado (a igualdade dos ângulos, todos retos, igualdade das diagonais, etc). (FISCHBEIN, 1993, p. 141; tradução nossa).

É nítido o modo pelo qual a definição de um objeto condiciona nossa compreensão acerca deles, inclusive, "no que se refere ao seu comportamento geométrico." (FISCHBEIN, 1977). Em outros escritos de Fischbein e colaboradores, encontramos

> Matemática é um sistema teórico, o qual as definições executam uma função essencial. Por meio das definições, os 'objetos' de uma teoria são introduzidos: definições expressam as propriedades que os caracterizam e relaciona-os dentro de uma rede de relações; novas propriedades de objetos definidos e novas relações entre eles podem ser estabelecidos por dedução. Porém, a sistematização teórica é somente o estágio final de um longo processo no qual as definições são o resultado de ume negociação entre o rigor lógico e a criatividade. (FISCHBEIN & MARIOTTI, 1997, p. 220; tradução nossa).

Para concluir, encontramos em Boutroux (1920, p. 138) algumas colocações acerca da expressão dos determinantes, a qual tinha sido definida por Leibniz, e, por fim, que foi introduzida por Gabriel Cramer (1704-1752) em 1750. Boutroux declara que não existe no determinante outro elemento novo além de um simbolismo particularmente profícuo. "Este simbolismo não deixa apenas os cálculos fáceis e rápidos; mas permite também adivinhar, antes que os cálculos sejam efetuados, certas características interessantes dos resultados." (BOUTROUX, 1920, p. 138).

O matemático e historiador da Ciência Pierre Boutroux (1880-1922) faz uma menção interessante do poder adquirido pela notação e/ou simbologia empregada. Não podemos perder de vista, porém, a noção de que a proficuidade de determinada notação, depende, como afirma Fischbein, quase na maioria dos casos, da genialidade e criatividade do seu criador. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) é um exemplo clássico do que destacamos nos parágrafos anteriores.

Bräting (2009, p. 13) sublinha que

> No século XIX, o matemático Björling tinha a tendência de considerar, algumas vezes, as definições matemáticas como descrições de entidades antes que meras convenções. Neste sentido, Björling definiu uma função como "uma expressão analítica que possui uma variável real x". Björling certamente definiu uma função, entretanto, ele parecia considerar a definição como descrição de algo que realmente existe. E como conseqüência de sua definição, Björling considerava que toda expressão possuindo uma variável poderia ser escrita como uma função. (tradução nossa).

Mais adiante, Bräting descreve em notação moderna um exemplo de três funções investigadas pelo matemático Björling, em 1852. Ele escolhe as seguintes funções $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ e $h(x) = |x|$.

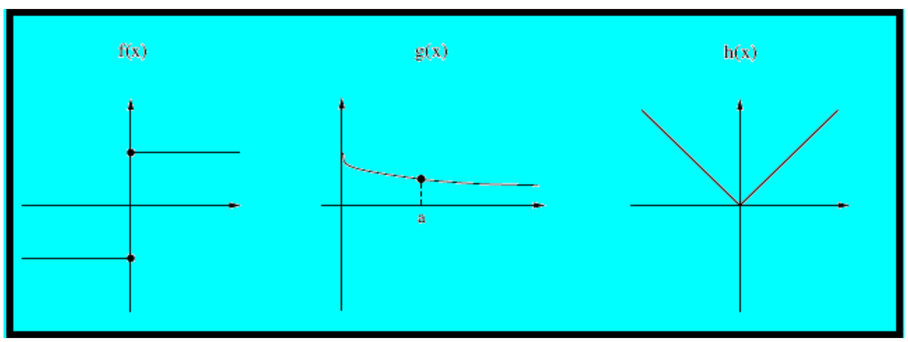


Figura 45. Exemplos investigados por Björling, em 1852.

Bräting (2009, p. 13) explica que

> Björling considerou uma função que assumia dois valores para $x = 0$, entretanto, sem derivada na origem onde ocorre um salto. Já a função $g(x)$ assume o valor $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ no ponto $x = a$, desde que $Lim_{\Delta \to 0} g(a + \Delta) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$; Numa terminologia moderna dizemos que $g(x)$ possui uma descontinuidade removível. Björling não considerou se quer a possibilidade ou não da existência da derivada de $g(x)$ no ponto $x = a$, porém, provavelmente, Björling poderia dizer que a derivada neste ponto era igual a $-\frac{1}{8a\sqrt{a}}$, desde que $Lim_{\Delta \to 0} \frac{g(a + \Delta) - g(a)}{\Delta} = -\frac{1}{8a\sqrt{a}}$. Já a função $h(x)$ assume o

> valor 0 em $x = 0$ e a derivada assume dois valores ± 1. (tradução nossa).

Baseando-se nestes três exemplos, Björling desenvolveu uma abordagem para a investigação do comportamento de objetos matemáticos que levavam em consideração suas "propriedades naturais", como sublinha Bräting. E, no mínimo, "obtemos uma impressão de que para Björling já havia o pressuposto de que a expressão escrita no papel era uma função e a tarefa exata para ele seria descobrir suas verdadeiras propriedades." (BRÄTING, 2009, p. 13). Aparentemente Björling buscava encontrar respostas nos gráficos das funções.

Mais adiante, ele conclui que imagens visuais podem ser suficientes para nos convencer sobre a verdade de um enunciado matemático, desde que possua o conhecimento do que esta sendo representado. "Em sua tese, podemos interpretar o pensamento de Björling que distinguia objetos matemáticos de modo "natural" e convencional." (BRÄTING, 2009, p. 15).

Vale recordar que Björling viveu numa época em que a Matemática foi submetida a mudanças drásticas no que se refere às crenças que mobilizavam os matemáticos com a preocupação focada na evolução deste ramo da Ciência. Numa perspectiva atualizada, Stedall (2008, p. 43) nos informa que

> Boas notações matemáticas servem para mais de um propósito. Primeiro, elas proporcionam um Matemática em uma forma clara e concisa, frequentemente encapsuladas em poucas ideias simbólicas que não podem ser de todo facilmente ou brevemente expressas em palavras; uma vez que conheçamos as regras, a Matemática escrita simbolicamente é de modo mais fácil visualizada, comunicada e compreendida. Isto é, pode auxiliar, por outro lado, para a geração de novas ideias, e em alguns casos porque os próprios símbolos podem ser manipulados e divisar novas conexões, todavia, em um nível aprofundado podem clarear e quase invariavelmente abrem um caminho para um progresso posterior e rápido na mente de ambos escritor e leitor. (tradução nossa).

Encerramos esta discussão sobre as *definições matemáticas*, reconhecendo a existência de outras questões pertinentes, entretanto, na medida em que apresentamos outros elementos que se relacionam de algum modo com a *intuição* e o seu emprego (Stewart, 1826), retomaremos estas questões relacionadas às definições não privilegiadas nesta seção.

Com efeito, sublinhamos que o modo pelo qual um professor desenvolve sua mediação didática em sala de aula pode conferir um caráter *essencialista* ou *nominalista*. A ênfase no primeiro ou segundo aspecto pode depender pelo modo no qual o conhecimento é veiculado e baseado na *crença* ou na *certeza* matemática.

2.6 Um ensino baseado na *crença* ou na *certeza*?

> A maior parte dos homens nas circunstâncias mais importantes da suas vidas se decide baseado em crenças e não em certezas. (BROCHARD, 1884, p. 5; tradução nossa).

Frequentemente, no ensino-aprendizagem de Cálculo, o professor mantém relações com os raciocínios intuitivo e lógico. As primeiras nem sempre conscientes e explícitas, enquanto as últimas caracterizam o modelo *standard* de transmissão do saber matemático. Em qual destes dois elementos, porém, o professor estabelece como prioridade para a aprendizagem inicial dos seus alunos? Algum destes elementos ofereceria maior comodidade metodológica do que o outro numa aula de Matemática? Que espécies de relações podem ser estabelecidas entre estas duas formas de raciocínio e/ou níveis podemos distinguir?

Num ambiente acadêmico, conjecturamos a ideia de que a preferência será concedida ao raciocínio lógico, haja vista a advertência de Otte (1991, p. 281), quando explica que "a intuição parece ser o oposto de rigoroso, ou de lógico, ou de formal. A lógica parece ser compreendida, enquanto que a intuição mostra-se indefinível.". Numa perspectiva histórica, evidenciamos que, entre os matemáticos, o lugar da intuição no pensamento matemático foi outro tema de debate.

Poincaré dava ênfase a esta, enquanto os logicistas queriam evitá-la em seus fundamentos, embora, presumivelmente, eles admitissem a intuição como um elemento na criação matemática; embora "esta desempenhasse um papel na seleção de coisas indefiníveis.". (GRATTAN, 2000, p. 359)

Por outro lado, encontramos em Descartes, segundo as considerações de Marin (2003, p. 18), um privilégio especial atribuído à intuição, como uma representação inacessível à dúvida. Consequentemente, "diante das discussões e o pouco consenso numa perspectiva filosófica de uso do termo intuição." (TOULMIN, 1958, p. 222), quando vislumbramos uma perspectiva didático-metodológica, não teríamos aí uma barreira para o ensino/aprendizagem de Matemática, caso priorizássemos inadvertidamente uma forma de raciocínio em detrimento da outros?

Esta situação pode parecer paradoxal, ou seja, um matemático pode estruturar seu ensino influenciado pelo *formalismo* e priorizar o raciocínio lógico, enquanto sua atividade investigativa pode e, na maioria das vezes, estará assentada na intuição. Um exemplo clássico de estilo de investigação matemática com o auxílio constante da intuição é observado, conforme Robadey (2006), nas pesquisas realizadas por Poincaré. Em relação ainda ao contexto de investigação, Freudenthal (2002, p. ix) "lembra que nenhuma idéia matemática tem sido publicada por meio do caminho pela qual foi descoberta.". Convém observar ainda que

> Aparentemente em Matemática, deixamos cavar um fosso entre descoberta e demonstração. Em épocas favoráveis, o matemático, sem pecar pelo rigor, escreve suas idéias de forma pelas quais foram concebidas. Outras vezes, ele pode ter esperança de fazê-las expressarem-se assim, por meio de uma mudança de linguagem ou notação. Mas frequentemente, ele deve escolher entre a escolha de métodos de exposição incorretos, mas que podem ser fecundos, e de métodos corretos, embora, não expressem suas idéias originais e seu pensamento, sob pena de deformá-lo e ao custo de um esforço fatigante. (BOURBAKI, 1984, p. 210; tradução nossa).

Tal fecundidade relaciona-se à intuição, com já há muito tempo asseveravam Poincaré (1899), Le Roy (1913), Delacroix (1934), Lachelier (1896) e Millaud (1898, 1911). Com efeito, Krömer (2007, p. 30) sublinha que, "segundo a tradição filosófica, "intuição" significa "imediaticidade", isto é, não conceptualmente mediada pela cognição". Na linguagem corrente, este termo é também usado no sentido de uma boa percepção[25]. Ele explica que ideias intuitivas guiam um matemático e sua pesquisa.

Na atividade científica, a intuição torna-se um instrumento poderoso. Hersh (1997, p. 61) lembra que

> Na prática matemática, a intuição está em toda parte. Ele fornece os exemplos de fórmulas de somas infinitas, de frações e produtos, encontrados na carta de Ramannujan à Hardy. Os resultados comprovam a intuição, pois estavam todos corretos, embora não haviam sido provados pelo mesmo. (tradução nossa).

Por outro lado, assumindo a intenção didática da apresentação de um conteúdo ao aluno, o método de abordagem deve ser baseado primeiramente na intuição e depois na lógica ou exatamente o sentido inverso? Que percurso seria o mais adequado e natural, no que diz respeito à aprendizagem peculiar do ser humano?

---

[25] Destacamos que o termo 'percepção' é usado "num âmbito do pensamento científico em que atividades cognitivas de abstração, idealização reflexão, formalização e outras, envolvem atividades conscientes da razão, diretamente com objetos abstratos." (TIESZEN, 2005, p. 184).

Além disso, sendo a compreensão do aluno o grande objetivo para o docente, ao longo do caminho para se atingir tal meta, devemos alimentar a *crença* ou a *certeza* do sujeito naquele objeto de conhecimento, uma vez que encontramos em vários autores (BARCHELARD, BIRAN, 1952; 1928; BOREL, 1952; BRUN, 1996; HADAMARD, 1954; LAKATOS, 1976; 1978; POINCARÉ, 1905; POLYA, 1945,) orientações no sentido da promoção da investigação, da *heurística* e da compreensão do processo de descoberta matemática?

Esses questionamentos deveriam nortear sempre nossas ações, como práticos da Educação, entretanto, questões aparentemente simples, quando observadas em profundidade, podem inspirar as maiores inquietudes e discussões filosóficas. De fato, Otte (1991, p. 281) sublinha que Fischbein "tentou trazer à luz essa dificuldade, caracterizando intuição, ou percepção intuitiva, não descritivamente, mas funcionalmente".

De acordo com a concepção desse autor, a *intuição* tem a função de "criar uma aparência de certeza, de ligar às interpretações ou representações ao atributo de certeza intrínseca, inquestionável. Alias o próprio pesquisador destaca no início de sua obra, que esta temática "foi alvo de diversas disputas filosóficas, enquanto permaneceu na penumbra, no âmbito da psicologia." (FISCHBEIN, 1987, p. 3).

Nestas suas últimas palavras, o termo "*certeza*" nos chama a atenção, pois que, desta forma, um dos atributos que poderíamos buscar no ensino intuitivo deveria ser a promoção do sentimento de *certeza* do aprendiz? "A *verdade matemática* é fundada na intuição, não na lógica, não na prova." (OTTE, 1991, p. 283). Sendo assim, é possível o professor conduzir o aluno ao lugar da *verdade matemática*, alimentando sua intuição?

As indagações expressas deveriam ser mantidas sob vigilância, em razão dos seus efeitos no ensino/aprendizagem de Matemática. Suspeitamos, entretanto, de que algumas delas carecem de um aprofundamento filosófico mais minucioso para que possamos compreender a essência das coisas com que lidamos no dia-a-dia.

Explicitaremos em nossa opinião algumas das questões que se, convenientemente esclarecidas, poderiam ser de grande auxílio ao professor de Matemática. Para tanto, vale a pena destacar a "fenomenologia da intuição", que conforme Otte (1991, p, 293), é atribuída ao escritor W. S. Bibler. De acordo com este sistema, o movimento intuitivo é definido como:

- vendo a *essência* de um objeto como um objeto ou a própria forma;

- pela *auto evidência* do novo conhecimento. O conhecimento e o conhecimento sobre a *verdade* do conhecimento aparecem idênticos e elípticos;

- na intuição, vemos certa espontaneidade e "imediaticidade" da transição do *não conhecido* para o *conhecido*, podendo ser observada: não existe uma cadeia de elos racionais; a intuição não é discursiva; e

- o conhecimento intuitivo é caracterizado por uma não consciência-de: "Eu não sei como esse conhecimento ocorreu".

Para o início de nossa discussão, observamos aqui o emprego do termo *evidência*. Podemos atribuir tal característica ao raciocínio intuitivo, que o sujeito manifesta quando se apresenta diante do objeto de suas reflexões? Suspeitamos que não, mas, antes de formular a argumentação para nossa inquirição, consideramos necessária uma compreensão ampla a respeito das relações e a distinção filosófica entre "*crença*", "*certeza*" e "*evidência*".

Heizmann (1985, p. 3) explica que poderíamos questionar se "a intuição conduz a um conhecimento no sentido de uma crença verdadeira". Heizmann lembra que George Bealer sustenta que não. Intuir em Matemática os objetos abstratos ou as proposições é – semelhante à ilusão – independente da crença: o axioma da compreensão – dizendo que a extensão de toda propriedade forma um conjunto – é e permanece intuitivo, assim como não se sabe nenhuma crença de sua verdade. Por outro lado, o ato de intuir depende dos nossos sentidos, da percepção que, nem sempre, consegue captar a essência de tudo o que nos circunda.

Consultando o pensamento grego, encontramos concepções semelhantes. Heráclito, por exemplo, insistia:

> Sobre a mobilidade extrema, sobre a característica fugidia e inapreensível de todas as coisas; e, na mesma época, Demócrito proclamava a subjetividade das sensações, declarando que não passam de estados do sujeito, "παθη της χισοησεως, dizia ele? Mas onde podemos e onde devemos conduzir logicamente esta forma de encarar os elementos fornecidos aos sentidos, se o espírito limita-se em constatá-los? E justamente Protágoras permanece para provar isso. Que os sentidos são enganadores, dizia ele, e conclui naturalmente a impossibilidade de todo o conhecimento. (MILLAUD, 1898, p. 24; tradução nossa).

Quando buscamos um conhecimento fundamentado na *certeza*, encontramos um exemplo clássico na Geometria, como e exposto por Euclides. Aparentemente uma ciência desinteressada. A forma da redação e a maneira de exposição do livro fornecem a impressão ao leitor do sentimento de perfeição.

Millaud (1898, p. 75) caracteriza bem o estilo matemático jônico, quando diz que

> De um lado a insistência minuciosa da redação, apoiada nos detalhes de uma demonstração, a paciência pela qual o geômetra tentar fechar todas as possibilidades de contradição em busca do rigor. Por outro lado, a ordem simétrica da partes de um teorema, seguindo-se a regras fixas, como as partes de um poema. (tradução nossa).

Observando as palavras de G. Millaud, não parece mais correto atribuir o caráter de *evidência* ao discurso meticuloso, detalhista e regido por ilações peculiares da Geometria Plana? Além disso, a ausência de contradição, característica do rigor mencionado há pouco, fortalece a *evidência* de um conhecimento, pelo acréscimo progressivo da *certeza que nos toca o espírito?* Tal caráter de *evidência* é encontrado no objeto matemático, no sujeito, ou em ambos? Quais as relações entre a *certeza* e a *evidência*?

Para distinguir o caráter de *evidência*[26], se o mesmo trata de uma qualidade da intuição ou do próprio objeto matemático que toca nossos sentidos, convêm observar as colocações de Brochard (1879, p. 40), quando pergunta se não “existem ideias tão evidentes e claras, que impõem uma adesão sem nos permitir alguma liberdade, como as verdades matemáticas.”.

Talvez o exemplo mais clássico que poderíamos pensar do que tratou há pouco Brochard seriam os *axiomas* e *postulados* da Geometria. Estes são evidentes no sentido de encerrarem a verdade? Stewart (1821, p. 23) explica que “o próprio Locke falava sobre os axiomas da Geometria, que embora as proposições fossem enunciadas em termos gerais, eles são subseqüentemente recorrentes em aplicações particulares, como princípios previamente aceitos e admitidos.”. Desta forma, porém, estaríamos admitindo ascender à *verdade* por meio de nossas observações limitadas e particulares?

---

[26] Observamos entre os matemáticos a multiplicidade dos pontos de vista a respeito da noção de *evidência matemática*. Hadamard (1945, pg. 102), por exemplo, destaca o caráter de *evidência* geométrica do Teorema de Jordan, embora, segundo ele, “apresente uma árdua demonstração”. Couturat (1905, pg. 105) atribui o caráter de *evidência* às proposições matemáticas, logicamente admissíveis, e que estruturam uma determinada teoria. Num sentido semelhante, Stewart (1821, pg. 86) lembra que “Locke afirmava que uma demonstração se constitui a cada passo na evidencia intuitiva”.

Destacamos o fato de que a *verdade* não é menos *evidente* neste último caso, do que no caso geral anterior. Sobre isto, Stewart (1821, p. 24) observa ainda que em algumas destas aplicações, “a verdade de cada axioma é percebida pela mente, e, entretanto, a proposição geral, bem longe do terreno onde assentamos as verdades que a compreendem, é apenas uma generalização verbal do que em instâncias particulares, foi aceito como válido.”.

Mais adiante, encontramos nas considerações de Stewart o delate da relação de dependência entre o *raciocínio* e a *intuição*. E, em consonância com W. S. Bibler, Stewart atribui ao primeiro elemento a qualidade discursiva e dotada de uma estrutura silogística. Fornece-nos, também, questionamentos inspiradores sobre o raciocínio, ao indicar sua relação de dependência no que concerne à *intuição* e à *memória*, quando contesta:

> Se não seria verdadeiro que uma demonstração perfeita resulta de uma série de raciocínios, os quais, todos os termos são organizados entre si pela evidencia intuitiva, não é que o raciocínio pressupõe a intuição? E por outro lado, não seria suficiente explicar este trabalho do pensamento, por meio da intuição e da memória, que por uma serie de conseqüências, conduz o espírito das premissas à conclusão? (STEWART, 1826, p. 41; tradução nossa).

Com base nas palavras do antigo membro da Academia Real de Berlim, depreendem-se duas conclusões: a primeira é que a *intuição* intervém mesmo nas etapas intermediárias que separam cada *inferência* numa *demonstração*, das premissas à tese. De fato, todo passo do raciocínio que produz conhecimento possui uma *crença* intuitiva, o qual, quando a mente percebe, não existe nada mais necessário para relembrar, para fazer um acordo ou desacordo com as ideias que investigamos visíveis e evidentes.

> Esta percepção intuitiva de acordo ou desacordo com idéias intermediárias, em cada passo do progresso de uma demonstração, deve ser conduzida exatamente na mente, e um homem deve estar seguro que nenhuma parte foi esquecida, que, em deduções longas, e no uso de várias provas, a memória não retém tudo rapidamente e de forma exata. (STEWART, 1821, p. 57; tradução nossa).

A segunda conclusão se refere à *evidência* limitada com suporte na aplicação de um número finito de casos particulares. Com efeito, Stuart (1889, p. 270) lembra que “a experiência não se compõe além de limitado de observações e, qualquer forma de multiplicá-las, não garante nada em relação aos casos infinitos não observados.”. Podemos pensar, por exemplo, em termos do *espaço intuitivo*, que Husserl caracterizava como “experiências cotidianas ou formas primárias de experienciar o mundo.” (JAGNOW, 2006, p. 69).

De tal modo, por meio das observações de particulares a que nos referimos, captamos objetos espaciais fornecidos à consciência somente por meio de séries contínuas e parciais de intuições. Edmund Husserl (1859-1938) concorda com Stewart, quando se refere a um aspecto geral do *espaço intuitivo*, sobre seus elementos não são inteiramente acessíveis, comprometendo, deste modo, seu caráter de *evidência*.

Portanto, percebemos o caráter limitado da *evidência*, uma vez que ela é estabelecida a partir de uma relação entre o sujeito e um objeto percebido. De fato, quando dizemos tudo que “é composto em partes, é composto de partes destas partes, esta verdade é evidente, para o sentido de todos os casos em que podemos julgá-la” (MILL, 1889, p. 150); e ao julgarmos, estabelecemos a relação restrita entre às *crenças* do sujeito e o objeto matemático.

A dimensão subjetiva desta relação será determinante, uma vez que dependerá da percepção do sujeito, “do seu sistema de crenças que condicionam seu *raciocínio*.” (RUSSELL, 1940, p. 98). O matemático Devlin (2005, p. 74) esclarece parte destas questões, quando indaga

> Por que os matemáticos adotam a lei comutativa, de modo que para a evidência numérica é elegante, como um axioma ou outras afirmações para as quais existe uma enorme quantidade de evidencias numérica? A decisão é essencialmente um apelo ao julgamento. Para um matemático adotar um determinado padrão como axioma, o modelo não deve ser somente útil, mas também, crível, preservando-se suas intuições, tão simples quanto possíveis. (tradução nossa).

Além disso, a *evidência* desempenha um papel na relação entre *memória* e a *intuição*. Vale observar que o caráter de *evidência* pode ser percebido de forma restrita a um objeto matemático, como consequência de uma sensação súbita e imediata ou, apenas, fruto de uma sensação que tocou nosso espírito, e, desta forma, apresenta sua fonte na memória. Por outro lado, “a *crença* garante o seu significado formulado no passado, como base nas relações recordadas por meio da memória e nos hábitos mentais adquiridos por intermédio das percepções passadas”, como diria Bergson (1939).

A este respeito, os filósofos dizem que o que é objeto imediato de minha memória, e de minha imaginação, em uma situação semelhante, não é a sensação passada, mas somente uma ideia da sensação, uma imagem, uma visão, uma espécie de odor que eu já senti; que esta ideia existe presentemente em meu espírito; que, contemplando esta ideia presente, encontramos uma representação do que é passado, do que pode existir. “Nós chamamos de imaginação ou memória. A sensação e a memória são duas operações simples de espírito, originais e perfeitamente distintas. São princípios primitivos da crença.” (BERGSON, 1911, p. 218)

Portanto, com amparo no que foi discutido, assumiremos a ideia de que o caráter de *evidência* deve ser atribuído à relação entre o sujeito e as características ontológicas dos objetos que tocam os sentidos, sejam no presente ou como fragmentos de sensações recordadas através da memória, e não como uma qualidade restrita da intuição.

Outro ponto não menos complexo é a possibilidade de afetivamente alcançá-la, ante a limitação dos nossos sentidos, como adverte Husserl e, portanto, da nossa percepção. A este respeito, Maroger adverte para a noção de *que o* caráter de evidência, por exemplo, “pode conduzir, progressivamente, á verdade das definições matemáticas, embora para o pesquisador não consiga identificar todos seus elementos com clareza.” (MAROGER, 1898, p. 48)

Buscamos compreender outro aspecto fornecido por W. S. Bibler, quando menciona a transição do nãoconhecido para o conhecido. Pensamos que outros caminhos poderiam ser conjecturados e, mesmo assim, preservarmos sem liames com a *intuição*; como, por exemplo, a transição do conhecido ao nãoconhecido. De fato, nesta transição, deparamos os termos *descoberta* e *invenção*, peculiares à investigação matemática, uma vez que, admitindo como verdadeira à possibilidade de ir do nãoconhecido para o conhecido, e, reciprocamente, um destes dois elementos poderá possivelmente ser o preponderante.

> Muitos matemáticos disseram que descobriram certo conceito matemático ou idéia, ou teorema, se eles estavam sob a impressão que tal feito se caracterizava como independente de sua própria personalidade ou criatividade, porem, quando eles inventavam um conceito matemático novo, uma idéia ou teorema, eles tinham a impressão que, de algum modo, dependiam de sua própria personalidade e criatividade. (MAROGER, 1898, p. 50).

O percurso descrito por Maroger mantém estreita sintonia com a *formalização* e assume exatamente a direção referida por Bibler. Entrementes, que o movimento do conhecido ao nãoconhecido exige predominantemente a intuição. No caso do ensino, para a maioria dos alunos, torna-se mais exequível uma atividade de investigação voltada à *descoberta* (ENNS, 1992), e o percurso é justamente semelhante ao descrito por Condillac (1798, p. 64) e Mill (1889, p. 12), que se referiam do conhecido ao nãoconhecido.

Numa atividade desta natureza, os ensinamentos de Polya (1945, p. 122) podem inspirar a mente do professor de Matemática, quando ele escreve:

> Uma idéia decisiva que traz a solução de um problema é geralmente conectada com uma palavra ou sentença bem elaborada. A palavra ou a sentença ilumina a situação, nos trás coisas. Isto pode ser precedido por uma idéia decisiva. A palavra adequada pode recordar uma idéia matemática, talvez menos completa ou menos objetiva do que um diagrama ou notação, porém num caminho análogo. Isto pode contribuir a fixação na mente.

Após esta rápida digressão com o intuito de esclarecer outras possibilidades aparentemente não discutidas por W. S. Bibler, e de fornecer exemplos na atividade de investigação e do ensino, voltaremos às relações entre *crença* e *certeza*.

Brochard (1884) desenvolve uma elegante discussão sobre o papel da *crença* e da *certeza*, nos sistemas filosóficos e na própria compreensão do homem. Dentre algumas das questões discutidas por ele relacionadas ao nosso tema, salientamos as seguintes:

> Mas se não reivindicamos o direito de crer racionalmente, não temos também o dever de examinar a natureza da crença, de se perguntar sobre os motivos pelos quais ela se fundamenta, e buscar como ela se produz? Se como nos parece conveniente, a crença possui, nos sistemas filosóficos, lugar destacado como a certeza, porque reservar nossa atenção à certeza e relegar à crença ao segundo plano, como algo secundário? (BROCHARD, 1884, p. 4).

Percebemos que, tanto na Matemática como noutros sistemas filosóficos, a função da *certeza* aparentemente adquire lugar de destaque, em detrimento da *crença*. A maior parte dos homens, todavia, e mesmo todos os homens, nas circunstâncias mais importantes de sua vida, "se decidem baseados na crença e não sobre a certeza." (BROCHARD, 1884, p. 4)

Após denunciar, no âmbito filosófico, o privilégio destinado à *certeza*, mais adiante, ele explica que; na verdade, "as relações entre a crença e a certeza é uma questão de debate filosófico. Stuart Mill dizia, sem insistir muito e sem tirar conseqüências, que a certeza é uma espécie de crença." (BROCHARD, 1884, p. 6)

Victor Brochard enriquece a nossa discussão, quando sustenta que a *certeza*, diz-se, é fundada sobre a *evidência*, ao tempo em que a *crença* repousa sobre a *probabilidade*. Vemos então a qualidade da *evidência* ser atribuída a *certeza* e não à *crença*. Desta forma, é correto atribuir à intuição a qualidade de *evidência*, uma vez que, ante ao caráter imediato de sua manifestação como um fenômeno psicológico, decidimos, segundo Brochard, baseando-se na *crença* e não na *certeza*?

A *certeza* é um estado do sujeito, e a *evidência* é concebida como propriedade do objeto, mas a *certeza*, estado do sujeito, não pode ser definida como a posse do objeto. Não existe expressão mais imprópria e mais incorreta do que esta da *certeza* subjetiva que vemos algumas vezes em nossos dias: é uma contradição dos termos.

A *certeza* não possui mais a certeza se esta for subjetiva. Do mesmo modo que, se a *evidência* é uma propriedade do objeto, o objeto não possui esta qualidade na condição de se representar ao sujeito. A palavra *evidência* implica "a presença de um objeto que vemos." (BROCHARD, 1879, p. 8)

Brochard realça a relação de dependência entre *certeza*, estado subjetivo restrito ao sujeito e *evidência*, manifesta a partir da relação entre um objeto que se apresenta e o observador. É discutível, contudo, a manifestação da *evidência* na condição da presença do objeto. Já em Aristóteles observamos a relação entre a evidência e o conhecimento obtido e validado pela *Lógica*.

De fato, a lógica aristotélica é uma análise racional das condições as quais devem satisfazer um raciocínio para que a conclusão seja concebida como necessária. "E não se trata de saber como nós raciocinamos na vida cotidiana, mas como deve ser construído um raciocínio para que a necessidade da ligação que ele estabelece apareça imediatamente e evidente." (BOURTROUX, 1908, p. 117)

Portanto, o caráter de *evidência* revelado pela relação entre sujeito e objeto matemático afetará neste, suas *crenças* sobre a *verdade* de um conhecimento sobre o objeto, que ora é submetido às suas intuições (POINCARÉ, 1905; KITCHER, 1984, KLEIN, 1893). Afetando suas *crenças*, consequentemente, afetará seu *raciocínio* (RUSSELL, 1921, p. 231), e, além disso, o maior grau de depuração alcançado pela *crença* realiza-se quando fazemos uma *demonstração*, como uma condição *sine qua non* para atingirmos a *verdade matemática* e, desta forma, adquirirmos a *certeza* sobre determinado conhecimento.

Tal movimento manifesta-se na própria natureza humana como latente e incessante, como um objetivo jamais atingido. Cournot (1851, p. 38) retrata bem esta característica, quando acentua que

> Provamos tal sensação, por exemplo, quando uma demonstração não é encontrada, o espírito não se sente satisfeito, pois não lhe é suficiente, a menos que ele alcance o conhecimento da maior quantidade de fatos possíveis, mas que atesta a necessidade colocando-a em evidência a partir da razão da cada fato particular. (tradução nossa).

Referendando-nos em nossa experiência, temos a convicção da importância em considerarmos estas questões discutidas até aqui. Com efeito, um ensino de Matemática assentado na *certeza matemática* abrevia uma ação investigativa por parte dos aprendizes.

Ademais, proporciona ao saber matemático uma luz intensa, entretanto, fria e desprovida de maiores interesses aos olhos do estudante. Parte de nossa afirmação é referendada por Andre Revuz quando alerta que para a ideia de que

> A apresentação aos estudantes de situações variadas não deve conduzir a uma matemática pequena, nem a renunciar, à ocasião dos estudos de tais situações, a edificação de uma teoria matemática, nem a renunciar o recurso aos conceitos unificadores da matemática contemporânea, a qual se mostra fácil de se colocar em destaque sua eficacidade. Pois se trata de não apresentar aos estudantes uma Ciência feita, é necessário não tropeçar com o extremo inverso e negligenciar todo o saber dos séculos precedentes. É necessário manter o que é mais vivo e o mais eficaz e apresentá-lo em ação. (REVUZ, 1968, p. 33; tradução nossa).

Ante tais colocações e feitas as devidas distinções entre os termos "*evidência*", "*crença*" e "*certeza*", tencionamos restringir nossas considerações menos ao campo filosófico e mais ao lado prático operacional, ou seja, como mediar um *saber matemático*, por meio de uma abordagem intuitiva, com referência na "crença", todavia, em busca do alcance da verdade.

Na literatura especializada, encontramos Zaslavsky (2005), que discute alguns trabalhos empíricos e caracteriza algumas tarefas matemáticas que envolvem a criação de incerteza (*uncertainty*). Ele discute o trabalho de vários autores que se interessaram pela criação de situações de aprendizagem. Nestas situações, "um percurso contrário à incerteza, é a busca pela certeza e, a necessidade pela certeza é comumente expressa no desenvolvimento e persistência de intuições." (ZASLAVSKY, 2005, p. 299)

O primeiro tipo de *incerteza* (*uncertainty*) pode ser caracterizado envolvendo "duas (ou mais) afirmações. Neste contexto, afirmações são vistas num largo sentido, para incluir resultados, definições, crenças, expectativas a priori, suposições, e asserções que proporcionam diferentes pontos de vista do mesmo objeto." (Idem, 2005, p. 299)

Zaslavsky discute um exemplo em definir o símbolo $(-8)^{1/3}$. Neste sentido, a primeira afirmação pode ser descrita por $(-8)^{1/3} = -2$, uma vez que $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{(-8)} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$. A segunda asserção poderia ser que $(-8)^{1/3} = 2$, uma vez que $(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. A terceira possibilidade é que o referido símbolo seja indefinível.

Incerteza proveniente de "declarações que concorrem entre si" podem ocorrer também quando uma das "declarações" é uma falsa-concepção (*misconception*) ou uma crença assumida pelo aprendiz que se mantém em conflito com outra. Zaslavsky comenta uma tarefa descrita na figura 46, ao possibilitar respostas que competem entre si. A tarefa envolvendo a inclinação de uma reta proporciona uma confusão concernente aos aspectos algébricos e geométricos.

Parte das respostas é fornecida pelo estudante e influenciada pela figura, ao passo que outra parte é fundamentada no modelo formal matemático subjacente à situação-problema. Segundo as considerações de Zaslavsky, tal caráter dual potencializa uma sensação psicológica de *incerteza*. Vejamos isto no exemplo da figura 46.

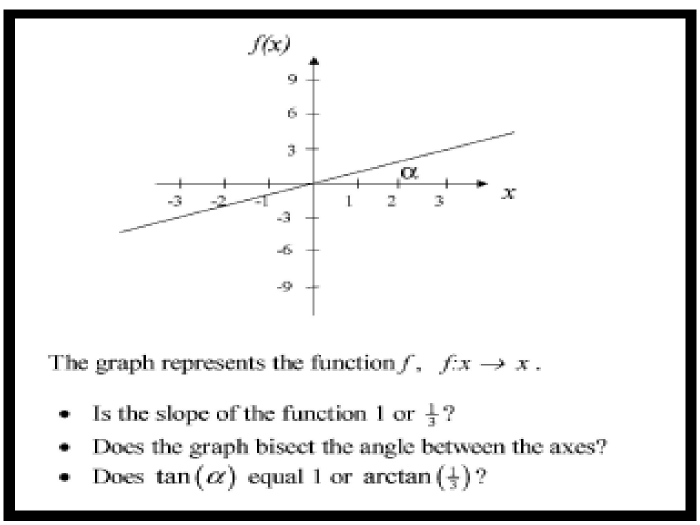


Figura 46. Exemplo de Zaslavsky (2005, p. 302).

A segunda categoria de *incerteza* é associada à investigação, exploração de tarefas envolvendo problemas em aberto. Zaslavsky (2005, p. 302) explica que

> A natureza marcante da exploração é a busca por descobertas (isto é, padrões, modelos, relações) que são desconhecidas pelo aprendiz, em relação aos quais ele ou ela podem possuir ou não um sentimento intuitivo em vista do esperado. Eu me refiro a este caso como um caminho desconhecido ou conclusão questionável como um tipo de incerteza. (tradução nossa).

Segundo o mesmo autor, os caminhos trilhados pelos estudantes são observados ao decorrer da evolução dos seus raciocínios ante as situações-problema. Tais movimentos podem ser na direção de refutar determinada conjectura ou reforçar uma outra. Em todo caso, "o curso entre uma conjectura e outra é resultado de um estádio de *incerteza* à respeito da busca de uma conclusão válida." (ZASLAVSKY, 2005, p. 302)

Zaslavsky (2005, p. 2999) comenta (figura 47) algumas situações-problema que envolvem conflitos cognitivos inerentes ao uso do raciocínio intuitivo. Ele explica que "perplexidade, confusão e dúvida são frequentemente associadas e evocadas com conflitos cognitivos.". Por exemplo, na figura 47, exibimos um triângulo gerado por um *software*. Em seguida é expresso o seguinte problema: para um dado triângulo ΔABC, existe um ponto D no triângulo, de modo que ΔABD, $\Delta\mathrm{ACD}$ e $\Delta\mathrm{BCD}$ todos possuem mesmas áreas?

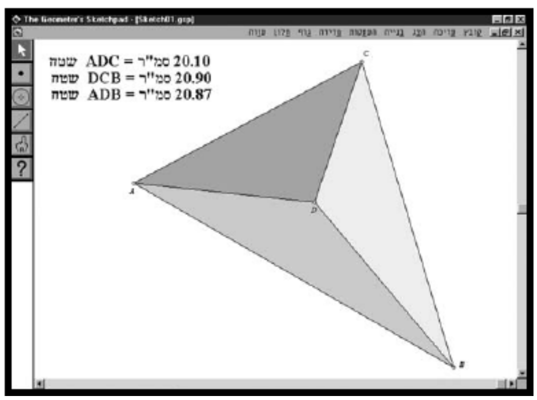


Figura 47: Situação-problema discutida por Zaslavsky (2005, p. 303).

Na análise da figura 47, construída na tela do computador no ambiente de Geometria Dinâmica, o aluno pode manifestar e formular algumas conjecturas. Note-se que estas são produzidas eminentemente a partir da observação/percepção das propriedades que proporcionem a maior atenção ao observador. Neste momento o sujeito formula *intuições*, verbalizando-as ou não. Assim, para que o professor consiga identificar as que apresentam maiores condições de êxito, torna-se premente que o mesmo estimule o aluno a relatar e descrever sua opinião.

Mais adiante Zaslavsky fornece os seguintes valores para as áreas: $S_{\Delta ADC} = 20{,}10$; $S_{\Delta DCB} = 20{,}90$ e $S_{\Delta ADB} = 20{,}87$. Estas medições realizadas pelo computador são formuladas com base nas próprias características do programa empregado que, não está livre de imperfeições. Este tipo de situação é característica em proporcionar um grau de incerteza ao solucionador, na medida em que o mesmo se conscientiza das limitações do *software*.

O terceiro tipo de *incerteza* diz respeito à falta de confiança com respeito à corretude ou validez (isto é, solução de um problema) que requer verificação formal, todavia, nem sempre conhecemos o modo de tal verificação ou, em certos casos, o aluno se depara com situações que não se consegue realizar uma verificação imediata. Zaslavsky (2005) sintetiza todas as possibilidades de situações conflituosas na figura 48. que exibimos abaixo.

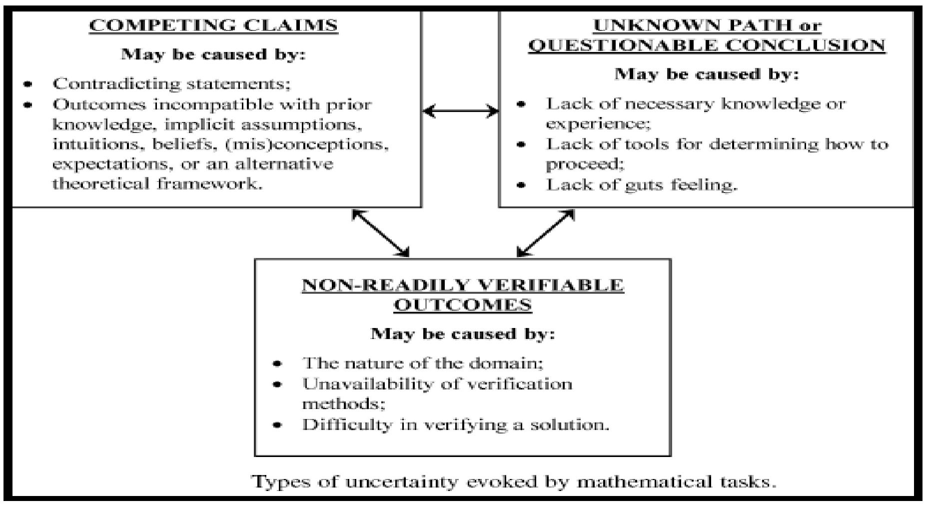


Figura 48: Soluções típicas envolvendo conflitos cognitivos.

Re-elaboramos a descrição acima e, em certos casos apenas traduzimos as terminologias adotadas por este autor para o nosso caso. No caso do CVV, concebemos situações problema que envolve de modo freqüente, pelo menos um dos vários elementos destacados no fluxograma da figura 49.

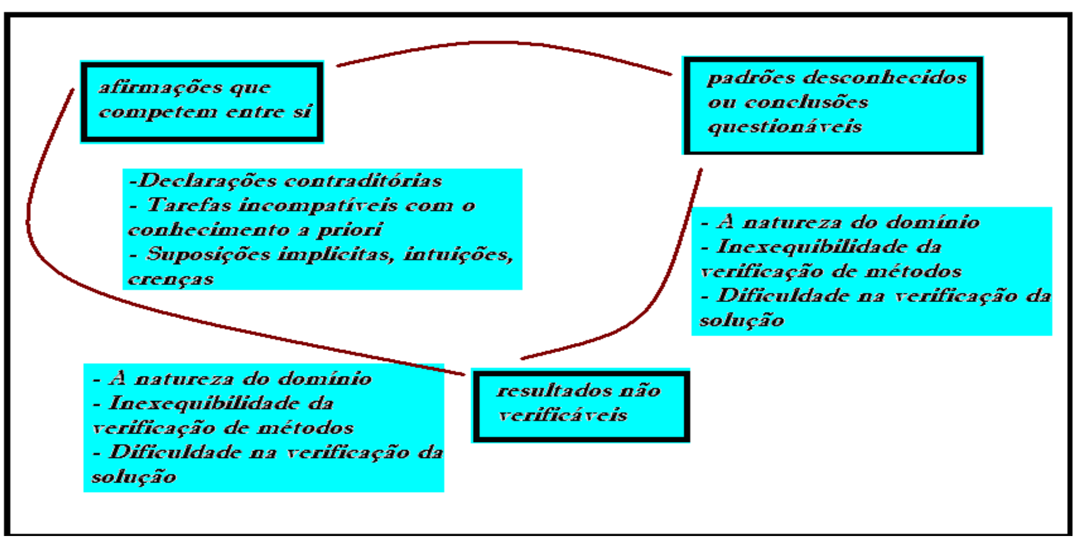


Figura 49. Adaptação do diagrama proposto por Zaslavsky (2005).

Na tabela 1 abaixo exemplificamos algumas situações especificas antevistas ao decorrer da resolução dos problemas e no desenvolvimento das sessões de ensino que tencionamos explorar nas seções seguintes.

Quadro 1: Situações problema que produzem incerteza no ensino do CVV

Situações que produzem incerteza	Descrição	Comentários
Afirmações que competem entre si.	- Se a função possui derivadas contínuas será diferenciável - Se o limite for zero a função será diferenciavel. - Se existe o limite denotado por $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0)$, existe a derivada direcional. - Se podemos calcular $\nabla f(P_0)\cdot\frac{u}{\lVert u\rVert}$ então existe a derivada direcional.	Nas tarefas propostas empregamos a existência de CTC relacionados aos conteúdos no sentido de gerar afirmações que competem entre si. Em algumas situações, prevemos a concorrência entre afirmações baseadas em intuições afirmativas e intuições conjecturais. Ou intuições afirmativas com intuições antecipatórias.
Padrões desconhecidos ou conclusões questionáveis	- Se a função apresenta sempre o mesmo valor para todas as parametrizações o valor do limite será o mesmo.	Os alunos se deparam com situações-problema que envolve apenas condições necessárias para a ocorrência da propriedade investigada.
Resultados não verificáveis no ambiente lápis/papel	- Dado um $\varepsilon > 0$, exibir um delta conveniente que mostre o valor de determinado limite. -A função possui infinitos pontos de máximo e de mínimo. -	Alguns processos de cálculo no CVV podem parecer desinteressantes, como a determinação da continuidade das derivadas de segunda ordem.
Resultados não verificáveis no ambiente computacional	- A curva apresenta um comportamento sempre suave - A função está definida em todo o plano - A função não está definida em apenas um ponto	Várias situações-problema, apesar de serem exibidos todos os seus elementos por meio do suporte computacional, exigem o ambiente lápis e papel para o tratamento da representação.

Fonte: Elaboração própria.

Certamente que a criação de um ensino baseado na *crença* e não na *certeza* dos enunciados matemáticos, estabelecidos de modo inquestionável, depende de modo marcante da mediação promovida pelo professor. Assim, caracterizamos na tabela 2, alguns exemplos de elementos que devem ser empregados no discurso proferido pelo mestre em sala de aula no sentido de enfraquecer a *certeza* que o conhecimento matemático comunica, no âmbito do CVV. Tal atitude por estimular a *transição interna* do CUV para o CVV.

Quadro 2: Elementos presentes no ensino do CVV que relacionam certeza/crença.

Ensino de CVV baseado na certeza	**Ensino de CVV baseado na crença**
Aqui é uma função polinomial, e toda função polinomial é diferenciavel.	Pelo gráfico, possivelmente a função pode ser diferenciavel.
Como a função é polinomial, vale a comutatividade das derivadas mistas.	Aparentemente, pelo gráfico, as derivadas de 1ª e 2ª ordem não são contínuas, assim pode não valer o teorema de Claireaut-Scharwrs.
Quando a função é diferenciavel o plano possuirá apenas um ponto de intersecção.	Como o plano aparentemente é tangente, possivelmente a função será diferenciável.
Se o limite existe, para toda parametrização o seu valor dever ser o mesmo.	Para várias parametrizações o valor do limite pode ser o mesmo, ainda assim não podemos afirmar que o limite existe.
Pela definição $\varepsilon-\delta$ o limite tende a zero.	Por estes caminhos, possivelmente, o limite tende a zero.
Se a função é diferenciavel possuirá as derivadas parciais.	Se as derivadas parciais existem, entretanto, a função pode ou não ser diferenciável.
Como a função é contínua na fronteira, deverá assumir um ponto de máximo ou mínimo (Weierstrass).	Aparentemente pelo comportamento da curva nesta fronteira a função possuirá um ponto de máximo ou mínimo.
Como $B^2 - A\cdot C > 0$ teremos um ponto de sela na superfície.	Como as curvas de nível neste ponto se assemelham a hipérboles, poderá ser um ponto de sela.
O gráfico da função é limitado num ponto por que $\left\|f(x,y)\right\| \leq k$, para todo (x,y) numa vizinhança.	O gráfico é limitado na origem por que podemos colocá-lo dentro de uma bola centrada na origem.
Se a função possui as derivadas	Se a função apresenta apenas uma derivada

parciais contínuas será diferenciavel.	parcial continua, e a outra deriva existe, a função pode ser ou não diferenciavel.
Com o limite tende a zero e $f(0,0)=0$ a função deve ser contínua.	Aparentemente, pelo gráfico, a imagem tende a zero e não existe um buraco na origem.

Fonte: Elaboração própria.

Na próxima seção, levando em consideração ao que discutimos no Capítulo 1 e no Capítulo 2 à respeito do papel e da natureza da intuição, do ponto de vista epistemológico, filosófico e psicológico, fazemos as indicações iniciais de algumas questões que merecerão uma maior atenção ao longo do trabalho.

Reparamos que, na medida em que apresentar-mos as teorias que constituirão nosso quadro teórico, tais questões serão retomas e reformuladas com a intenção de se obter uma maior precisão e delimitação das principais questões do nosso trabalho.

2.7 **Questões de investigação**

Elegemos como *objetivo principal* nesta tese, a promoção e identificação, de modo empírico, da manifestação de determinadas "categorias" do raciocínio intuitivo no contexto da resolução de problemas do CVV, por intermédio de uma metodologia de ensino que possibilite evitar os entraves que pontuamos no capítulo 1. Note-se que a discussão que realizamos neste capítulo nos autoriza afirmamos a existência de categorias intuitivas.

Destarte, tendo em vista o emprego de um sistema notacional complexo e uso recorrente de *representações semióticas* (DUVAL, 1995) no Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real – CUV e do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV. Torna-se uma exigência da pesquisa a consideração das *variáveis didáticas* vinculadas ao uso e produção de registros de representação semiótica, como encontramos, por exemplo, no estudo do Henriques (2006).

Note-se ainda que, diante do que discutimos nos capítulos anteriores, de modo sistemático, no que se refere ao *locus acadêmico*, concluímos:

- A persistências de sérios entraves no ensino/aprendizagem do CUV;
- As dificuldades na *transição* do ensino escolar para o ensino acadêmico (LEE, 2007; MARIANI, 2006; PERJÉSI, 2001; PESCE, 2001);
- O emprego recorrente de metodologias que acentuam apenas o caráter algorítmico-computacional no ambiente universitário (ARSLAN, 2005);

- As abordagens encontradas nos livros didáticos (Capítulo 1) do CUV que exploram apenas o *pensamento algorítmico* (OTTE, 1991; 2008);

- Limitações e inconsistências proporcionadas pelo suporte informático (CTC) no ensino do CUV que comprometem à formação de imagens mentais relacionadas aos conceitos matemáticos.

Por outro lado, uma vez que escolhemos investigar a manifestação de categorias do raciocínio intuitivo ao decorrer do ensino/aprendizagem do CVV, referendando-se nos autores consultados até aqui, assumimos que:

- A *intuição* apresenta um papel essencial para os matemáticos, principalmente na pesquisa e investigação, todavia, quando se trata de formalização e estabelecimento de bases críveis de uma teoria, seu valor é enfraquecido e, em vários casos, negado;

- A importância no contexto do ensino de considerarmos a existência de várias formas ou categorias do raciocínio intuitivo;

- A intervenção da faculdade intuitiva de modo decisivo no âmbito da resolução de problemas em Matemática e, de modo particular, no Cálculo;

- A natureza de uma *definição matemática* pode condicionar o tipo de intuição adequada para a compreensão do conceito ou do objeto ao qual a mesma caracteriza, além de proporcionar determinas barreiras ao seu ensino efetivo;

- Falta de consenso filosófico no que se refere ao papel da *intuição matemática*;

- *Percepção*, *intuição* e *insight* exercem papeis específicos e funcionalmente complementares nas atividades necessárias para a resolução de problemas;

- A *intuição* pode ser relacionada à *crença* ou a *certeza* relativa ao qual a natureza do que conhecemos;

A partir do que descrevemos acima e observando nosso *objetivo geral* descrito pela intenção de descrever e adequar as *categorias intuitivas* (*intuição afirmativa*, *intuição conjectural* e *intuição antecipatória*) que consideramos necessárias tanto para a introdução didático/metodológica, bem como para a aprendizagem dos principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV, por intermédio de uso da abordagem metodologica de ensino nominada *Sequência Fedathi* – SF. Tais *categorias intuitivas* são descritas por Fischbein (1987). Apontamos os seguintes *objetivos específicos*:

➢ Descrever as *concepções* (DUVAL, 1991) dos estudantes a respeito das noções de *limite*, *derivada* e integral, no contexto do período de *transição interna* (ALVES e BORGES NETO, 2011) do CUV para o CVV (Obj_1);

➢ Registrar a manifestação das habilidades intuitivas dos sujeitos por intermédio da *percepção* e *visualização* e evolução de *imagens mentais*[27] proporcionada pelo *software Maple* desconsideradas no ensino tradicional (Obj_2);

➢ Registrar as formas de manifestação do *raciocínio intuitivo* – *intuição afirmativa*, *antecipatória* e *conjectural* (FISCHBEIN, 1987) (Obj_3);

➢ Identificar o *valor epistêmico* das proposições produzidas pelos estudantes ante aos resultados no CVV e não apenas o seu *caráter lógico* (DUVAL, 1991) (Obj_4);

➢ Identificar e analisar as abordagens dos livros didáticos do CVV (Obj_5).

Para concluir, diante dos pontos destacados, levantamos algumas *hipóteses iniciais de trabalho*:

➢ Diante da complexidade das representações do CVV que podem ser interpretados no $\mathbb{R}^3$, não é possível a formação de *imagens mentais* destes objetos sem o recurso computacional e a possibilidades do surgimento de *obstáculos* de natureza *didática* e *psicológica* (Hip_1);

➢ Em virtude das práticas de ensino atual e a natureza das abordagens dos livros didáticos, ocorrem dificuldades com respeito à *transição interna* do CUV para o CVV, principalmente no que se refere às possibilidades de exploração *registros gráficos* do CVV (Hip_2);

➢ O sistema de representação particular do CVV, dada sua complexidade, proporciona entraves à memorização do estudante com respeito às *definições* e *teoremas* (Hip_3);

➢ De modo ao que ocorre no CUV, em geral os alunos resolvem as questões de CVV sem recordar de modo claro e/ou consciente das definições e das condições

[27] Ghedamsi (2008, p. 290) relata as dificuldades manifestadas pelos alunos em associar imagens mentais aos conceitos de Análise Real. De modo semelhante, podemos prever o mesmo para a interação com os objetos do CVV.

lógico-formais que referendam determinadas estratégias e regras lógico-matemáticas, o que caracteriza a mobilização de um conhecimento fundado na intuição (Hip_4);

Com respeito ao objetivo principal desta tese e considerando os vários autores consultados que descrevem categorias do raciocínio intuitivo, elegemos a perspectiva de Efrain Fischbein. Para efetivar nossas atividades de ensino diretamente com os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, apresentaremos no capítulo seguinte a metodologia de ensino que viabilize o alcance dos *objetivos geral* e *objetivos específicos*. Por fim, evidenciando o aumento de complexidade notacional no âmbito do CVV, adotaremos uma teoria de base cognitivista, que proporciona a interpretação/compreensão de inúmeros fenômenos cognitivos mobilizados ao decorrer da utilização deste sistema simbólico-notacional do CVV, na atividade solucionadora de problemas.

Capítulo 3: REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo vamos relatar os principais tópicos das teorias que escolhemos para compor nosso referencial teórico de nossa pesquisa, a saber: *Sequencia Fedathi* (2001), a *Teoria das Representações Semióticas* de Raymond Duval (1995) e no diz respeito às categorias do *raciocínio intuitivo* discutidas no Capítulo 2, optamos pela descrição e caracterização fornecida por Fischbein (1987).

Sublinhamos que a partir das análises desenvolvidas em seguida neste capítulo, identificamos determinados entraves ao ensino, deste modo, procuramos identificar e escolher uma teoria que nos proporcionasse evitar tais entraves e dificuldades na condução do ensino de CVV e na *transição interna* do CUV para o CVV (caracterizada na Capítulo 1).

Nosso estudo apresenta alguma semelhança com respeito aos trabalhos de Arslan (2005), Martinez-Planell e Gaisman (2009, 2010), Henriques (2006) e Souza (2008) que optam pela *Teoria das Representações Semióticas* e por outra teoria na perspectiva de uma análise complementar e abrangente de seu estudo, sobretudo no ambiente de ensino acadêmico.

Assim, assumimos a necessidade da visão de "complementaridade" das fundamentações de Raymond Duval e Efrain Fischbein, com a intenção precípua de oferecer para nosso estudo, nas ocasiões de aplicação das sequências de ensino do CVV e dos protocolos produzidos pelos sujeitos, um olhar apurado e uma interpretação consistente e fundamentada.

Nossa primeira discussão diz respeito à metodologia de ensino escolhida, chamada de *Sequencia Fedathi* que vem sendo discutida (BARRETO, 2001) e utilizada em vários trabalhos (BARROSO, 2009; SOUSA, 2011) realizados no Ceará.

Em seguida, desde que estamos trabalhando com a teoria do CVV que envolve uma grande diversidade de simbologias matemáticas "carregadas" (LIMA, 2010), apresentamos alguns aspectos da *Teoria das Representações Semióticas* e apontamos algumas implicações para sua utilização ao decorrer de nossa mediação e exemplicamos sua aplicação no ensino do CVV.

Seu uso tem sido registrado em vários trabalhos no Brasil (IMAFUKU, 2008, MARIANI, 2006; MARQUES, 2009) e no Exterior (ARSLAN, 2005; GARCIA, 2005; HENRIQUES, 2006) envolvendo investigações no contexto acadêmico e no contexto de *transição* da escola para a universidade.

Por fim, descrevemos as categorias relacionadas ao raciocínio intuitivo, na visão de Fischbein (1987) o qual se mostrou um elemento que assumimos deter a possibilidade de evitar os problemas apontados no Capítulo 1 e atenuar os malefícios do *pensamento algorítmico* (OTTE, 1991).

3.1 A Sequência Fedathi

"A proposta teórico-metodológica apresentada por um grupo de Educadores Matemáticos do Estado do Ceará." (BORGES NETO, 1999; BORGES NETO *et al*, 2001) denominada *Sequência Fedathi* reclama um movimento de transformação do *savoir savante au savoir enseigné*, descrito por Chevallard (1991, p. 20).

Tal movimento é chamado no meio científico de *transposição didática interna* (DORIER, 2003, p. 3), que se inicia com o contato inicial do professor com o *saber matemático* apresentado de forma científica e isento de preocupações didáticas, passando para adaptação do conteúdo que envolve os objetos matemáticos visados, na direção do ensino, finalizando-se com o saber ensinado (*savoir enseigné*), "que contempla o saber realmente abordado em classe." (DORIER, 2003, p. 5)

Além disso, quando analisamos o uso de tal proposta como metodologia de ensino, no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Matemática, ou, mais especificamente, de acordo com nosso interesse de investigação, ou seja, como instrumento de mediação didática para a promoção do *raciocínio intuitivo*, assumimos a importância de levar-mos em consideração duas questões: a primeira diz respeito ao tipo, nível ou a natureza do *raciocínio* que será promovido pelo professor durante uma sessão didática e, posteriormente, na estruturação das atividades e situações-problema.

Uma vez definido, na etapa inicial do momento didático, o tipo de *raciocínio* (intuitivo ou lógico) que se deseja ser promover com vistas à abordagem e aquisição dos conceitos, a segunda questão, não menos complexa, relaciona-se à prática comum de exprimir a situação-problema no início da *Sequência Fedathi*, o que será discutido pelos alunos e pelo professor na aplicação da sequência de ensino.

Note-se que buscamos introduzir na concepção das situações-problema, elementos diferenciados e que estimulem, antes de empregar o tratamento *standart* do ensino ordinário (descrito no Capítulo 1), a *percepção*, o estímulo visual e a identificação de relações necessárias das simbologias do CUV e do CVV que facilitam a *transição interna* no Cálculo (ALVES e BORGES NETO, 2009b; 2011a; 2011b).

Deste modo, caracterizamos as seguintes fases de ensino:

- **Fase 1** Tomada de posição – apresentação do problema. Nesta fase de ensino, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema descrita para um grupo de alunos ou de modo individual, que devem possuir meios de solucionar/enfrentar o problema envolvido mediante a aplicação do conhecimento. Nesta fase inicial, a mediação didática deve provocar um conjunto de conjecturas que podem ou não apresentarem à condição de êxito nas tarefas.

Comentário: No que diz respeito à ação docente, empregamos de modo acentuado um discurso baseado na língua materna e evitamos o emprego precipitado de simbologias, nomeadamente, às simbologias ordinárias do CVV. Outra fonte de registros ou símbolos constantemente explorados é a de natureza gráfica, com o apoio computacional, que permite explorar *registros gráficos* em 2D e 3D, o que viabiliza a *percepção* e a *visualização* por parte dos aprendentes. Ademais, o raciocínio priorizado nesta fase é o *raciocínio argumentativo* (DUVAL, 1991, p. 236) que não possui um *estatuto operatório* entre as proposições empregadas nas situações-problema envolvendo o CVV.

Deste modo, criamos um ambiente para a exploração das categorias intuitivas nos estudantes a partir da relação visual (percepção de propriedades e características dos objetos *curvas parametrizadas*, *limite*, *derivada* e *integral*) com os objetos determinados em cada uma das cinco situações problema (p. 220) apresentadas nas atividades propostas e durante os encontros nas aulas de "tira dúvidas".

- **Fase 2** Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. (Destinado à discussão e debate sobre o saber, professor e alunos). Esta etapa envolve a identificação de conjecturas elaboradas pelos alunos e aperfeiçoadas pelo professor e que detém maior relevância para cada tarefa.

Comentário: Nesta fase de ensino, proporcionamos uma abordagem das situações-problema de modo que as ideias, simbologias e raciocínios apreendidos do CUV continuem adquirindo importância e utilidade pelos alunos, com o intuito de estimular a *transição interna* (ALVES e BORGES NETO, 2008; 2009c; 2011a; 2011b). Neste nível destacamos, sempre que necessário, a adaptação das ideias do CUV ao novo ambiente conceitual do CVV. Esta preocupação é conseqüência dos entraves à aprendizagem discutidos no Capítulo 1, relacionados ao ensino do CUV.

Além disso, por meio das imagens fornecidas pelo computador, conduzimos os estudantes em perceber alguns objetos familiares e pertencentes ao CUV presentes em novas representações usuais do CVV, como combinação uma combinação geométrica e, em alguns casos, algébrica. Os CTC´s são empregados no sentido de provocar situações de conflito cognitivo e proporcionar a produção de sentenças proposicionais elaboradas a partir da exploração da *percepção* e da *intuição*, a partir do que foi discutido no capítulo 2.

➢ **Fase 3** Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema. Aqui, os alunos organizados em grupos ou de modo individual, devem apresentar soluções que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer com suas *argumentações* ao professor ou aos outros grupos de alunos. As atividades podem ser desenvolvidas também de modo individual ao decorrer de testes e avaliações.

Comentário: Empregamos de modo decisivo o sistema de representação semiótica do CVV, realçando, sempre que necessário, as relações, interpretações e detalhamentos do próprio sistema de representação. Nesta fase de ensino, o professor atua de modo decisivo no sentido de explicitar o modelo matemático empregado (definição formal, teorema, etc.). Ocorre ainda o emprego de fato, da estratégia que possibilita uma maior chance de êxito e a "tecnologia pode ser usada no sentido de estimular a revisão das estratégias empregadas." (ALVES e BORGES NETO, 2007).

➢ **Fase 4** Prova – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado. Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo *saber*. Além disso, todas as argumentações devem ser revistas e testadas e identificados os elementos que podem causar maior incompreensão.

Reconhecidamente, numa aula de Cálculo, este momento é o mais esperado por um professor que desenvolve uma práxis eminentemente *formalista*. Em nosso caso, desde que assumimos uma posição de valorização e promoção da faculdade intuitiva dos estudantes, realizamos as seguintes ações:

- Detalhar para os estudantes, quando necessário, as argumentações e inferências empregadas nos teoremas;

- Fornecer uma interpretação geométrica dos teoremas ou construções das *definições formais* com apoio computacional (abordagem *essencialista* baseada na construção das definições) necessárias para a caracterização dos objetos matemáticos em cada situação problema;

- Identificar e localizar nos teoremas e nos enunciados os elementos que se caracterizam como uma fonte de incompreensão;

- Confrontar os resultados formais com os exibidos pelo computador no sentido de compreender o motivo dos CTC´s correspondente a cada conteúdo;

- Explorar teoremas que se apóiam em ideias do CUV no sentido de fortalecer a *transição interna* do CUV para o CVV (ALVES e BORGES NETO, 2011a: 2011b).

Duval (1991) distingue o *raciocínio argumentativo* do *raciocínio dedutivo*. Este último recorre a regras explícitas e um sistema de representação adequado. Num passo de dedução, as proposições não intervêm em termos de *conteúdo* e sim em função do *valor operatório* e, portanto, lógico.

Observamos preocupações semelhantes no trabalho de Brousseau & Gibel (2005), quando discutem determinadas noções que assumem papel de relevo em sua teoria e indicam um sentido de aperfeiçoamento de sua fundamentação vinculada à TSD. Neste sentido, destacamos o artigo devido a Brousseau e Gibel (2005), onde discutem a natureza de um *raciocínio matemático*.

Neste trabalho, os autores caracterizam os elementos constituintes de um '*raciocínio matemático*', segundo os momentos didáticos previsto pela TSD, nominados por Brousseau de *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. De fato, Brousseau e Gibel (2005, p. 18) explicam que a função de um *raciocínio* varia de acordo com o tipo de situação didática.

De modo semelhante, buscaremos ao longo deste estudo, caracterizar e delinear o tipo particular das características e das formas intuitivas de *raciocínio intuitivo* (*intuição afirmativa*, *intuição conjectural* e *intuição antecipatória*) em adequação às fases de *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*, previstos na *Sequência Fedathi* por Borges Neto et at. (2001).

Para concluir, considerando as teorias discutidas nos capítulos anteriores e alguns novos pontos de vista acrescentados a partir da utilização da SF, levantamos as seguintes *hipóteses de investigação*:

- Semelhantemente ao que identificamos na literatura pertinente ao CUV (Capítulo 1), devem ocorrer o surgimento de *obstáculos cognitivos* no ambiente de ensino do CVV ($Hipótese_1$);

- A exploração das faculdades baseadas na *percepção* e na *visualização* proporcionam o desenvolvimento da *atividade argumentativa* dos estudantes ($Hipótese_2$);

- De modo semelhante ao relato dos estudos do CUV, no contexto de ensino de CVV, os estudantes manifestam a tendência em resolver tarefas sem recordar e/ou recorrer ao uso de *definições matemáticas formais* e teoremas ($Hipótese_3$);

- A *visualização* e consequentemente o entendimento da natureza dos objetos do CVV fica comprometida quando restrita ao ambiente lápis/papel (2D) ($Hipótese_4$);

- Os livros didáticos não promovem de modo satisfatório a *transição interna* do CUV para o CVV($Hipótese_5$);

Após a colocação destas *hipóteses de trabalho* e tendo em vista os objetivos específicos, diante da escolha da *Sequência Fedathi*, torna-se necessário uma re-estruturação dos nossos *objetivos específicos*. Deste modo, tendo em vista nosso *objetivo principal* que envolve *a descrição e identificação das categorias do raciocínio intuitivo nas fases previstas pela SF*, apontamos os seguintes *objetivos específicos*:

- Descrever as *concepções* (DUVAL, 1991) dos estudantes a respeito das noções de *limite*, *derivada* e *integral*, no contexto do período de *transição interna* (ALVES e BORGES NETO, 2011) do CUV para o CVV ao longo da *Sequência Fedathi* (Obj_1);

- Registrar a manifestação das habilidades intuitivas dos sujeitos por intermédio da *percepção* e *visualização* e evolução de *imagens mentais*[28] proporcionada pelo *software Maple 10* e *Maple 12* desconsideradas no ensino tradicional (Obj_2);

- Registrar as formas de manifestação do *raciocínio intuitivo* – *intuição afirmativa*, *antecipatória* e *conjectural* (FISCHBEIN, 1987) nas fases previstas na *Sequência Fedathi* (Obj_3);

[28] Ghedamsi (2008, p. 290) relata as dificuldades manifestadas pelos alunos em associar imagens mentais aos conceitos de Análise Real. De modo semelhante, podemos prever o mesmo para a interação com os objetos do CVV.

- Identificar no discurso dos estudantes o *valor epistêmico* das proposições ordinárias dos resultados no CVV e não apenas o seu *caráter lógico* (DUVAL, 1991) nos níveis da *Sequência Fedathi* (Obj_4);

- Analisar os elementos pertencentes à *transição interna* do CUV para o CVV proporcionadas pelos livros didáticos (Obj_5);

Para concluir, assumimos uma perspectiva de Duval (1995) a qual podemos inferir que um bom ensino de Matemática pressupõe a promoção e, consequentemente, a evolução de *representações mentais*, entretanto, como discutimos no Capítulo 2, as *representações mentais* estão subordinadas ao grau de evolução da capacidade abstrativa do indivíduo.

A atividade visível, no que diz respeito ao professor que acompanha a ação e estratégias do sujeito, privilegia os registros de simbologias e atividade sobre os mesmos.

Deste modo, tendo em vista o complexo sistema notacional que tencionamos analisar do Cálculo, discutiremos no que segue a *Teoria das Representações Semióticas*. Esta teoria possibilita a consideração de *variáveis didáticas* importantes que consideraremos ao decorrer das fases de ensino da *Sequência Fedathi*. No próximo segmento destacaremos os elementos desta teoria empregados em nosso estudo.

3.1.1 A intuição e as Representações Semióticas

> O discurso matemático sucede através da mistura de linguagens gramaticais, simbolismo matemático e imagens visuais, o que significa que a mudança pode ser feita sem a emenda entre estas três fontes. Todavia, cada fonte semiótica possui uma contribuição particular e função no interior do discurso matemático. (O´HALLOREN, 2005, p. 94, tradução nossa)

No início de sua obra mais representativa, intitulada *Sémiosis et Pensée Humaine*, Raymond Duval indica as principais atividades cognitivas relacionadas à aprendizagem em Matemática, que são: conceitualização, raciocínio e resolução de problemas. Sublinha ainda uma particularidade desta aprendizagem que se caracteriza pela necessidade do uso de sistemas de expressão e de representação diferentes da própria língua natural.

O autor explica que "sistemas variados da escrita de números, notações simbólicas para objetos, escritas algébricas e lógicas adquirem um estatuto paralelo ao da língua natural para explicar relações e operações, etc." (DUVAL, 1995a, p. 1), entretanto, a utilização de uma diversidade de sistemas de representação semiótica é essencial ou apenas cômoda para o exercício do desenvolvimento das atividades cognitivas vinculadas à Matemática?

A resposta desta questão "ultrapassa o domínio das Matemáticas e do seu ensino", como destaca Duval (1995a, p. 1), uma vez que necessitamos compreender o próprio funcionamento do sistema cognitivo humano. Por outro lado, torna-se premente algumas questões subjacentes que dizem respeito à Matemática e sua aprendizagem escolar. Neste sentido, Duval estabelece que não existe compreensão em Matemática se "não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial não confundir os objetos matemáticos, isto é, números, funções, retas, etc., com suas representações." (DUVAL, 1995a, p. 1-2).

Por outro lado, podemos compreender algumas questões pertinentes á própria Matemática, nos atendo ao âmbito histórico. Para tanto, um marco inicial em Matemática é inaugurado com os gregos. Euclides, por exemplo, no livro I, *define as noções de ponto, linha, superfície, ângulo, círculo*, etc.. E no livro V, por exemplo, *define o conceito de razão entre magnitudes*. Segundo Stendall (2008, p. 12). "Estes conceitos são importantes porque determinam a linguagem e o estilo geométrico do discurso por séculos." (STENDALL, 2008, p. 13). Porém, quando definimos um ponto ou uma reta, procuramos estabelecer a existência de determinado objeto matemático.

Por meio de sua *definição formal*, caracterizamos suas características essenciais que o distingue de outras entidades dentro de um sistema formal, todavia, nos momentos iniciais de estabelecimento de uma teoria matemática, principalmente de alguns pressupostos relacionados a *axiomas* e *postulados*, destacamos o papel da *intuição* matemática no que diz respeito à aceitação de determinadas propriedades pela comunidade de matemáticos.

O próximo passo é o estabelecimento ou testagem[29] de seu registro ou simbologia conveniente e produtivo, tanto na perspectiva individual do matemático

---

[29] A História da Matemática explica que Leibniz, reconhecidamente um construtor de definições e simbologias, elaborava, socializava e testava determinada simbologia com o intuito de averiguar seu grau de aceitação entre seus contemporâneos. As menos exitosas eram paulatinamente descartadas.

como para a comunidade científica contemporânea. Em Matemática, usualmente, este momento se caracteriza pelo estabelecimento da notação ou simbologia adequada. Assim, cada representação, notação ou simbologia nos remete a um conceito caracterizado por uma *definição formal*. Note-se ainda que "as simbologias em Matemática evoluem, morrem ou são substituídas." (CAJORI, 1929, p. 110).

No contexto do ensino, Duval destaca a diversidade de *representações* de um mesmo objeto. E, além disso, ele discute a existência de "representações mentais, isto é, o conjunto de imagens e concepções que um indivíduo pode ter de um objeto, sobre uma situação, e sobre o que o mesmo associa." (DUVAL, 1995a, p. 2).

Por outro lado, a História da Matemática (CAJORI, 1896; DIEUDONÉ, 1989; FAINETEAU, 2004; FAUVEL e MAANEN, 2000) indica que a escolha desta ou daquela representação intervém um processo de natureza pessoal do matemático conhecido por abstração e, neste caso, os fatores de tal escolha tanto podem ser de natureza lógico-formal, como "atores de ordem psicológica." (ATIYAH e MACDONALD, 1969, p. 13). Neste âmbito, a *intuição* serviu como guia condutor para a atividade de muitos matemáticos, como discutimos nos capítulos anteriores.

A partir desta preocupação então, o matemático passa a caracterizar uma *representação semiótica* como as produções constituídas pelo emprego de signos (enunciados na língua natural, fórmulas algébricas, gráficos, figuras geométricas…). E explica o seu caráter essencial no sentido de proporcionar ao indivíduo exteriorizar suas *representações mentais*, como observa Duval (1995a).

Por exemplo, recordamos que "Euclides, quando escrevia sobre números, sua abordagem era primariamente geométrica." (STEDALL, 2008, p. 19). Neste sentido, Tabak (2004, p. 26) lembra que "os gregos aprenderam a usar a linguagem geométrica para expressar ideias que nós aprendemos expressar algebricamente". Deste modo podemos hoje compreender os tipos de raciocínio empregados (inclusive os intuitivos) pelos gregos, analisando suas representações mentais e o seu discurso desenvolvido há séculos antes de Cristo e observar a evolução das simbologias que adotavam.

As *representações semióticas* discutidas por Duval, entretanto, são indispensáveis ainda aos objetivos de comunicação na Matemática e esta, na maioria das situações, evolui de modo informal, não linear. Além disso, "os tratamentos matemáticos não podem ser efetuados independentemente de um sistema de representação." (DUVAL, 1995a, p. 3).

Deste modo, a atividade cognitiva e as *representações mentais* evocadas por um sujeito na resolução de problemas, por exemplo, são condicionadas pelas representações empregadas e estas podem ser mais ou menos eficientes e/ou operatórias dentro de uma teoria formal e necessariamente a *intuição* apresenta-se como um elemento cognitivo determinante uma vez que a mesma é exigida a partir do acionamento dos modelos e *imagens mentais privadas* (AZCARATE, 2006), idiossincrásicas que o indivíduo possui de *abstração matemática*.

É essencial também perceber que a dimensão evolutiva das próprias *representações semióticas* acompanham a formação do pensamento científico. Na história evolutiva dos conceitos matemáticos identificamos com facilidades exemplos emblemáticos que nos ensinam que a evolução das *representações mentais* utilizadas pelos matemáticos acompanha a evolução das representações semióticas de cada sistema formal, e vice-versa. De fato, Stedall (2008, p. 43) lembra que

> Boas notações servem bem mais do que apenas ao seu propósito. Primeiramente, elas preenchem uma função de clareza e concisão e frequetemente encapsuladas em alguns símbolos que envolvem ideias que não podem ser facilmente expressos em palavras. Uma vez conhecidas as regras, a matemática simbólica é mais facilmente visualizada, comunicada e compreendida. (tradução nossa)

Na frente investigativa, Duval destaca que o método empregado para o estudo das *representações* é essencialmente baseado em entrevistas e recorda os estudos inovadores de Jean Piaget nesta área. Numa perspectiva cognitiva, Duval concorda com Stedall quando menciona que a noção de *representação* é essencial no que diz respeito à forma pela qual uma informação é descrita e codificada. Aliás, uma prática comum dos matemáticos é a codificação cifrada dos conceitos.

Desta forma, a compressão de enormes significados em algumas simbologias pode se mostrar altamente auspicioso para o matemático profissional, entretanto, o que esperar para o aluno? Na maioria dos casos, diante da falta de entendimento do significado de conceitos e simbologias ou notações carregadas, o aluno simplesmente repete de modo mecanizado e irrefletido, as "regras" introduzidas pelo professor, consequentemente, o sujeito emprega *representações* de modo inconsciente.

Duval (1995a, p. 25) opõe duas categorias que caracterizam a passagem de uma ação inconsciente à uma ação consciente realizada pelo sujeito. Ele explica que "a passagem do não consciente ao consciente corresponde ao processo de objetivação por um sujeito que adquire consciência.". Por exemplo, é comum nas atividades do Cálculo os alunos efetuarem inúmeras regras operatórias estabelecidas *ad hoc* com *limites* e não saber responder o que é um *limite*?

Ou explicar seu sentido, o seu propósito e sentido dinâmico. Por exemplo, no caso da noção de *limites*, os estudantes se deparam com *limites interados* $Lim_{x\to 0}[Lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}]$ e o *limite ordinário* $Lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Eles percebem que o *tratamento* e as regras[30] empregadas nesses dois casos se diferenciam, todavia, não compreendem que apesar de que a simbologia diz respeito ao conceito de limite, elas implicam processos matemáticos distintos. Basta notar que no caso do limite interado acima, temos o comportamento dos pares ordenados $(x,y)\overset{x=cte}{\to}(x,0)\to(0,0)$. Enquanto que no segundo caso temos $(x,y)\to(0,0)$, embora na prática, escolhemos por meio de parametrizações a variável que se aproxima mais rápido da origem.

Certamente que não se trata de uma simples tarefa, basta identificar na Historia da Matemática os percalços enfrentados pelos matemáticos na sistematização da noção de limite e o processo evolutivo de simbologias particulares para este conceito. Por outro lado, na perspectiva do aluno, "é através da significação que se produz a apreensão perceptiva ou apreensão conceitual de um objeto." (DUVAL, 1995a, p. 25). E tal preocupação pode efetivamente potencializar aprendizagens diversificadas por meio da promoção de atividades cognitivas significativas.

E em se tratando de atividades cognitivas, Duval caracteriza três atividades cognitivas inerentes à *sémiosis* que constitui a formação de *representações* num registro semiótico particular. "Tal formação implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e de determinações constituintes do que desejamos representar." (DUVAL,

[30] Encontramos trabalhos interessantes de Duval e seus colaboradores, desde a década de 70, com uma preocupação intensa no que diz respeito às dificuldades geradas por determinadas sintaxe próprias do saber matemático. Neste âmbito, Duval (1998, p. 57) declara que "o valor sintático desempenha um papel nas dificuldades de utilização por parte dos estudantes". No caso dos limites, evidenciamos inúmeras dificuldades.

1995a, p. 36). Duval descreve o *tratamento* como a transformação que produz outra representação no mesmo registro. E finalmente a *conversão* de *representações semióticas* que se caracterizam pela transformação que produz outro *registro* diferente da representação inicial.

Duval esclarece que os atos elementares de formação são, segundo os registros, a designação nominal dos objetos, a produção de seus contornos percebidos, a codificação de relações e certas propriedades, etc. Mas vejamos um exemplo particular em que podemos divisar cada uma das habilidades destacadas por Duval, tomadas por ele como essenciais para a cognição.

Por exemplo, se desejamos compreender o comportamento da seguinte *curva parametrizada* $\alpha(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t, 0)$, necessitaremos construir o gráfico da mesma. No ambiente lápis e papel, identificamos as funções coordenadas, derivamos e analisamos o comportamento de crescimento e decrescimento das mesmas. Em seguida, podemos investigar o comportamento do quociente $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ (*).

Resumidamente temos a descrição do *tratamento* dos *registros algébricos*:

$$\Rightarrow x(t) = t^3 - 3t^2 \;\; y(t) = t^3 - 3t \Rightarrow x'(t) = 3t^2 - 6t \;\; y'(t) = 3t^2 - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 - 6t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t} = \frac{(t-1)(t+1)}{t(t-2)}$$

Agora, conservando o mesmo objeto, ou seja, uma *curva parametrizada* mudamos o registro analítico para o registro geométrico como exibimos na ilustração abaixo. Advertimos que em alguns casos é impraticável a construção do gráfico sem o recurso computacional.

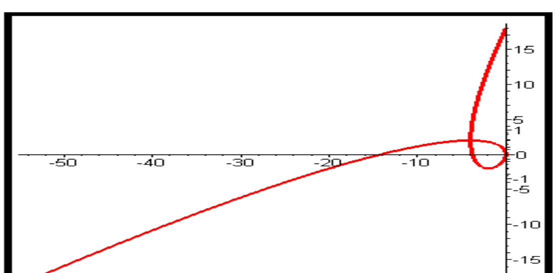


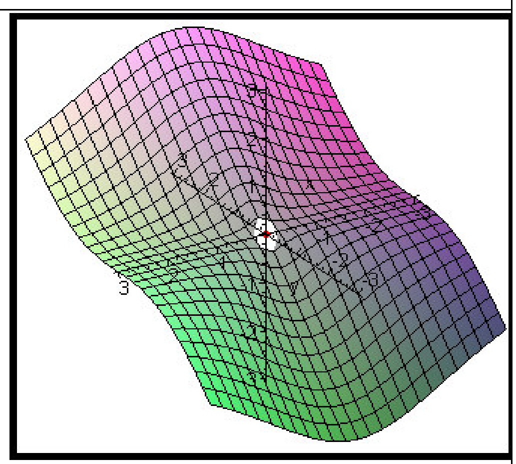
Figura 50. Gráfico da parametrização $\alpha(t)$.

Note-se que, no ensino tradicional (restrito ao ambiente lápis e papel), o aluno é apresentado de imediato à respectiva *parametrização*. O aluno desconhece sua origem, assim, não compreenderá o processo da *formação* desta representação semiótica.

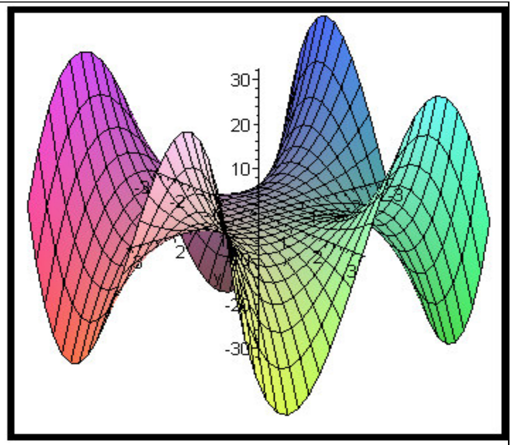
Por outro lado, todas as informações extraídas do quociente requerem o *tratamento* da representação, por exemplo, o emprego do processo de derivação e imposição do cálculo das raízes das derivadas de $x(t)=t^3-3t^2$ e y(y)=t^3-3t, só então podemos ter dados suficientes para prever o comportamento do gráfico e esboçá-lo no ambiente restrito de lápis e papel para apenas este caso particular.

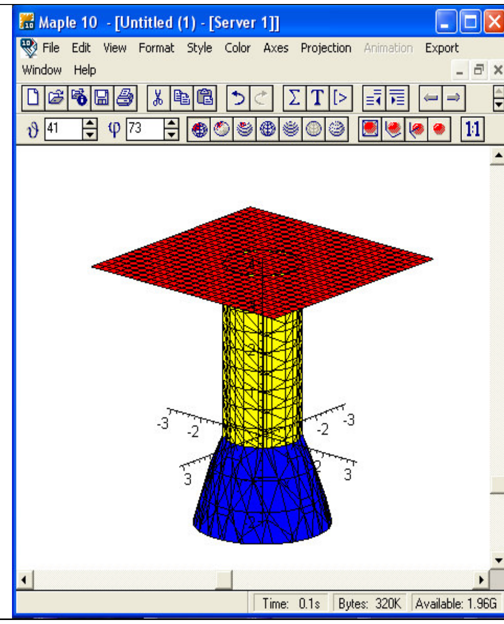
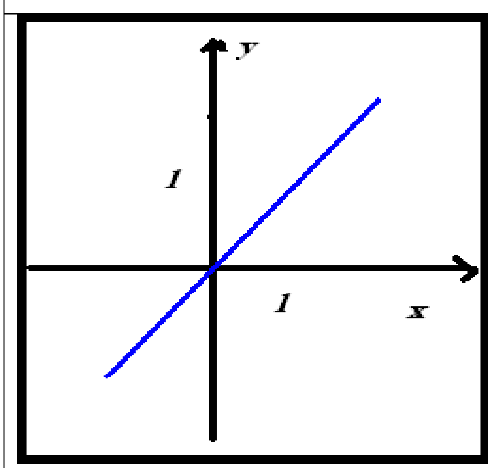
No quadro 3, apresentamos alguns casos de *conversão de registros* empregados constantemente em nosso estudo e que deverão ser explorados na mediação dos conteúdos mediados com arrimo nos pressupostos da *Sequência Fedathi*. Destacamos os casos em que, sem o recurso tecnológico, o aluno não consegue divisar a mudança/coordenação dos registros pertinentes em cada situação-problema estruturada a partir dos pressupostos da *Sequência Fedathi*.

Quadro 3. Relação e *conversão* de registros no CVV explorados nas fases da *Sequência Fedathi*.

Registro de partida – sistema de representação algébrica (LA)	**Registro de chegada – sistema de representação geométrica (RG)**
$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Comentário: Na figura ao lado identicamos um CTC relativo à noção de continuidade removível de funções. Notamos no registro algébrico que a descontinuidade foi retirada na origem, entretanto, o *software* não apresenta um ponto na origem que preencha todo o "buraco" dando a entender que ainda existe a descontinuidade. A exploração da visualização e apreensão imediata do registro gráfico é explorada na *fase de maturação*.	

<table>
<tr>
<td>Determinar o gráfico de $g(x,y) = x^3y - xy^3$ em $[-3,3]\times[-3,3]$.

Comentário: De modo geral, é impraticável para o estudante desenhar ou construir o gráfico de objetos descritos em três dimensões, apesar de que a superfície ao lado apresenta bastante regularidade e simetria em relação ao eixo Oz.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Calcular o volume limitado pelos objetos descritos no conjunto $A = \{z = 1 - x^2 - y^2 \ ; \ 1 = x^2 + y^2 \text{ e } z = 4\}$.

Comentário: No ensino tradicional, restrito às simbologias do CVV em 2D, de modo tradicional o aluno recorre às simbologias e determina de modo pouco refletido os limites de integração múltipla definida. Nas fases de tomada de posição e da maturação da SF, exploramos a visualização diretamente a partir dos registros gráficos do limites de integração.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>O gráfico de $y = x$ (DUVAL, 2006, p. 113). Neste tipo de conversão de registros, ante à natureza não tão complexa como nos casos anteriores, é possível a coordenação de registros por parte do solucionador de problemas.</td>
</tr>
</table>

Acima destacamos um percurso da esquerda (registros 2D) para direita (registros gráficos em 3D). Observamos que no caso do CVV, dificilmente o aluno ou o professor consegue efetivar o caminho no sentido contrário, uma vez que, a *percepção imediata* (DUVAL, 2011) de muitas das propriedades envolvidas é impraticável. Neste sentido, observamos que tarefas como esta se diferenciam radicalmente como as tarefas elementares discutidas por Duval (2006, p. 113).

Neste artigo, Duval explica que para a construção de um gráfico é suficiente seguir a regra: *para cada par ordenado de números podemos associar um ponto de uma coordenada no plano com um dado incremento nos dois eixos. E a construção do gráfico corresponde ao aparecimento de funções lineares que não fornecem maiores dificuldades aos estudantes.*

Todavia, "basta reverter à direção da mudança de registro para que esta regra cesse de ser operacional e suficiente." (DUVAL, 2006, p. 113). Duval discute os dados de uma pesquisa evidenciando que a tarefa de partir do registro $y = x$ e construir o gráfico no plano cartesiano é realizada com menos eficacidade pelos participantes. Duval relata que

> No ensino padrão, as tarefas propostas não são nunca reconhecidas, porém simplesmente tarefas de leitura que requerem apenas o processo de substituição de pontos orientados por uma compreensão local e não um processo global de interpretação guiado por uma compreensão qualitativa visual das variáveis. (DUVAL, 2006, p. 113; tradução nossa)

Com o recurso tecnológico, conseguimos explorar e proporcionar aos estudantes um terreno propício ao surgimento da atividade argumentativa e, consequentemente, o *raciocínio argumentativo*[31] quando este depara, por exemplo, as ilustrações da tabela anterior. Ademais o percurso no sentido contrário, ou seja, registros 3D para os registros 2D, pode ser impulsionado por meio da exploração de um recurso tecnológico. Neste sentido, apresentamos o seguinte esquema:

[31] Duval (1991) aponta e diferencia várias características e diferenças entre o *raciocínio argumentativo* e o raciocínio dedutivo. Assumimos em nossa tese a importância do *raciocínio argumentativo*, no que diz respeito à análise dos dados.

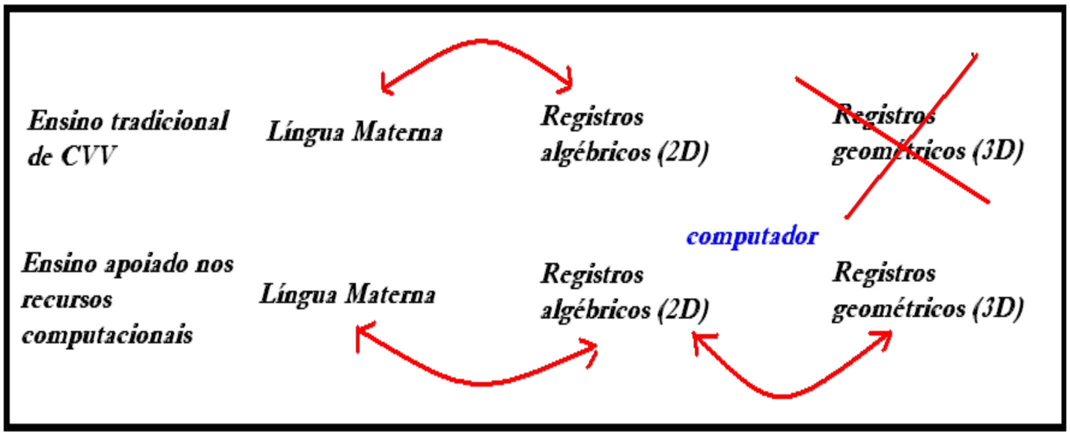
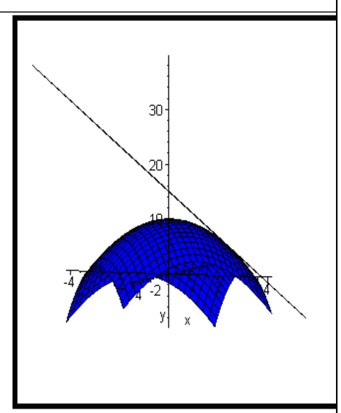
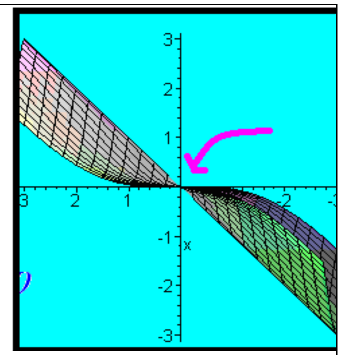
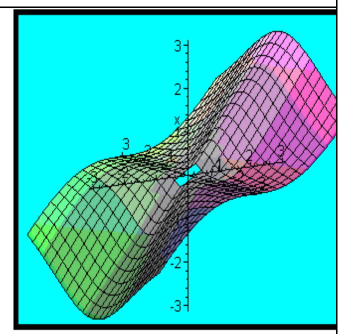
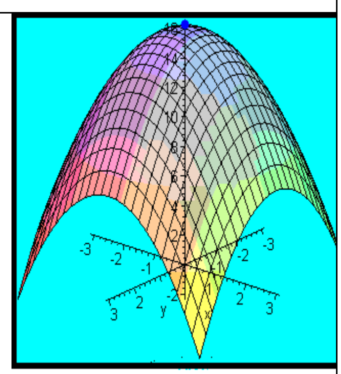
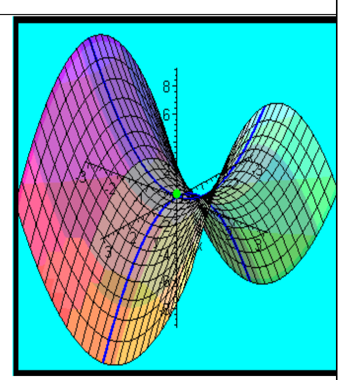


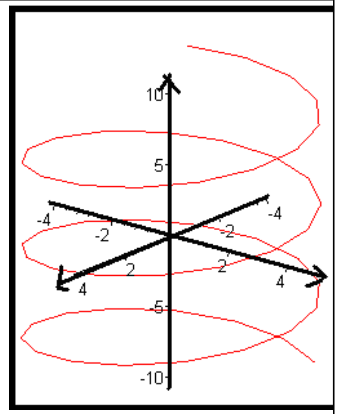
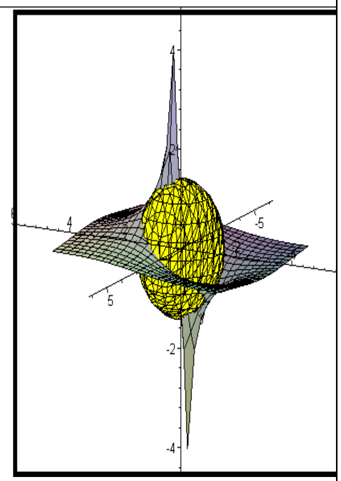
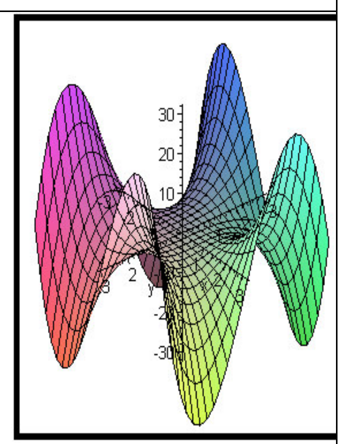
Figura 51. Relações entre a natureza dos registros em língua materna, registros algébricos (2D) e registros gráficos (3D). (elaboração própria)

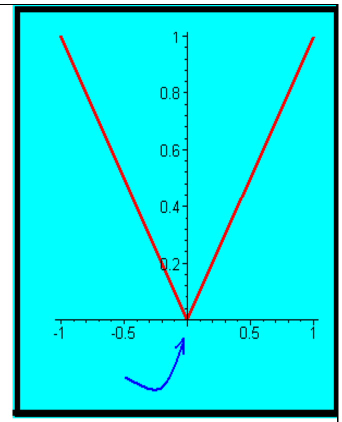
Nas situações-problema que apresentaremos mais adiante, propiciamos o terreno propício para a atividade argumentativa que envolve o *raciocínio argumentativo* que para Duval (1991, p. 241*),* “apresenta argumentos que se unem no sentido de se reforçarem mutuamente ou se oporem.”. No quadro 4, trazemos alguns exemplos de *registros* e as *conversões* possíveis entre registros no CVV que utilizaremos na aplicação da *Sequência Fedathi.*

Quadro 4: Descrição de conversões no sistema de representação do CVV.

Exemplo	**Registro na língua natural**	**Registro do sistema de escrita**	**Registro gráfico cartesiano**
1	Se a função é diferenciável na origem, poderá ser localmente confundida com um plano.	$Lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(0+\Delta x,0+\Delta y)}{\lVert(\Delta x,\Delta y)\rVert}=0$	

2	Se a função possui limite na origem então deverá possui imagem limitada na origem.	$\exists Lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ $\Rightarrow \lvert f(x,y) \rvert \le L+\varepsilon$	
3	Se a função não está definida na origem possuirá um buraco no gráfico	$\sim \exists f(0,0) \Rightarrow$ $(0,0,0) \notin Graf(f(x,y))$	
4	A função possui um ponto máximo global	$\exists (x_0, y_0) \in Graf(f(x,y))$, $f(x_0, y_0) \ge f(x,y)$, $\forall$(x,y)	
5	A função possui um ponto de sela; - A função não possui nem máximo e nem mínimo;	$B^2 - A \cdot C > 0$	

6	A curva é suave e sem bicos, portanto, diferenciavel	$\alpha(t)=(x(t),y(t),0)$ e $\exists\alpha'(t)=(x(t),y(t),z(t))$; $\alpha'(\mathrm{t})\neq 0$	
7	A função é ilimitada numa vizinhança da origem	$\lvert f(x,y)\rvert > k$; $\forall \mathrm{k}\in\mathbb{R}$	
	A função possui seu gráfico no espaço	Considere o gráfico da função $f(x,y)=x^3y-xy^3$	

	A curva não é lisa ou apresenta um bico.	Considere $\alpha(t)=(t,\lvert t\rvert)$ ou $\beta(t)=(t^3,\lvert t\rvert\cdot t^2)$, em que existe t_0 onde $\alpha'(t_0)=(0,0,0)$	

Optamos por não discutir com um maior aprofundamento a *Teoria das Representações Semióticas* e explorar, do ponto de vista da mediação requerida em nossa metodologia de ensino, as noções de *formação*, *tratamento* e *conversão* de registros do CUV e do CVV que constituem *variáveis didáticas* ao longo da aplicação.

Nossa intenção é destacar, aplicar e descrever, na perspectiva da mediação do professor, necessária na *Sequência Fedathi*, seu uso, a necessidade e as vantagens da exploração das noções de *formação*, *tratamento* e *conversão* de registros do Cálculo.

Note-se que se baseando nos elementos destacados no capítulo 2, assumimos o posicionamento epistemológico e filosófico que nos permite afirmar a diversidade de manifestações da intuição matemática, a função da *percepção* e da *visualização*, assim, na próxima seção discutiremos e caracterizaremos as categorias de *raciocínio intuitivo* que desejamos estimular de acordo com as fases da *Sequência Fedathi*.

A adoção destas teorias visa proporcionar uma visão de complementarida e sistematização para as fases de ensino previstas na *Sequência Fedathi*.

3.1.2 A teoria de Efrain Fischbein

> Uma intuição não é redutível a uma percepção pura. Uma intuição é sempre uma interpretação. (FISCHBEIN, TIROSH e MELAMED, 1981, p. 492; tradução nossa).

Fischbein (1999) aponta a dissonância de significações atribuídas ao termo ‘conhecimento intuitivo’. Neste sentido, o autor desenvolve uma argumentação que se referencia em elementos filosóficos e epistemológicos, inclusive, elementos da própria matemática. De fato, o autor declara que

> A tendência em tempos modernos tem sido de 'purificar' nossa objetividade da subjetividade, interpretações diretas e crenças cedem de acordo com 'objetivo' e dados rigorosamente obtidos. Isto permite uma crescente contradição entre o que parece ser óbvio e o que obtemos como resultado de um rigor analítico de dados cientificamente obtidos. (FISCHBEIN, 1999, p. 12; tradução nossa).

O problema do emprego de cognições intuitivas pode ser observado nas Ciências de um modo geral. De fato, "o cientista necessita de intuição em suas tentativas de descoberta de novas estratégias, novas teorias e modelos experimentais." (FISCHBEIN, 1999, p. 13). Entretanto, necessita de uma vigilância constante no sentido de discernir as informações que podem ser testada e comprovadas de outras informações simplesmente impostas subjetivamente e que não suportam a uma análise mais aprofundada.

Fischbein destaca as dificuldades em percebermos e fazermos tais distinções, uma vez que

> Fatos objetivos e interpretações intuitivas não são absolutamente distinguíveis. Nós estamos testemunhando um provável processo infinito desta tendência em direção ao absoluto rigor e consistência. Isto é, em nossa opinião, um processo fortemente enfatizado pela comunidade científica. (FISCHBEIN, 1999, p. 14; tradução nossa).

Mais adiante, o autor destaca o dilema da importância e a relevância científica do problema das cognições em oposição à interação lógica e objetiva de um conhecimento justificado. Conclui que infelizmente a psicologia cognitiva permanece quase impermeável a tais fascinantes desafios.

Em outra parte de seu artigo, Fischbein explica que outra fonte de renovado interesse pelo conhecimento intuitivo surge a partir de pesquisas (BROUSSEAU, 1996, 2002; DUPIN e JOSHUA, 1989) das didáticas do ensino de ciências e matemáticas. Neste sentido, explica que

> Quando temos que ensinar um capítulo de Física ou Matemática, descobrimos usualmente o que de fato se tornou claro – após longos anos de estudos universitários – que ainda encontramos obstáculos básicos cognitivos na compreensão dos estudantes. Você, como professor, sente que o estudante – geralmente se prepara para memorizar o que foi ensinado – mas não, de fato, compreende e memoriza genuinamente o respectivo conhecimento. Seu alcance intuitivo de um fenômeno é muito frequentemente, diferente de uma interpretação científica. (1999, p. 14; tradução nossa).

Além de mencionar uma situação recorrente que caracteriza a ação do estudante, Fischbein discute alguns exemplos no campo Física e da Matemática. Nesta última área do saber destaca que

> A ideia de que um quadrado é um paralelogramo é intuitivamente não menos estranho para muitas crianças. A ideia de que pela multiplicação de dois números, podemos obter um resultado que é menor do que um ou ambos os números multiplicados, é também difícil de aceitar. A noção de que um conjunto vazio parece completamente sem sentido. A afirmação de que um conjunto de pontos de um quadrado ou num cubo é o mesmo, pertence ao mesmo conjunto de noções contra-intuitivas. (FISCHBEIN, 1999, p. 14; tradução nossa).

Deste modo, no ensino ordinário, tanto em nível escolar como acadêmico, percebemos que o conhecimento que os alunos manifestam como conseqüência de uma transmissão, por vezes apresenta contradições, uma vez que as crenças e concepções dos estudantes podem ser resistentes e conflitantes com as noções científicas. Por outro lado, "quando comparamos o papel do desenvolvimento intuitivo das crenças na história das ciências e na mente do aprendiz, descobrimos profundas analogias" (FISCHBEIN, 1999, p. 15), as quais podem ser amplamente explicativas para fatos específicos no contexto do ensino/aprendizagem.

O pesquisador israelense extrai profícuas implicações para o processo didático de transmissão do conhecimento matemático. Neste sentido, ele destaca que "decodificar os mecanismos implícitos das intuições é uma tarefa difícil. A introspecção pode ser proveitosa, porém não é sempre confiável." (FISCHBEIN, 1999, p. 15).

Mais adiante ressalva que existe em Matemática (e nas ciências em geral), "afirmações que parecem diretamente aceitáveis, como auto-evidentes, enquanto outras afirmações necessitam de uma prova necessária em ordem de ser aceita como verdade." (Idem, 1999, p. 16). A partir destas considerações Fischbein generaliza e formula duas formas de cognições intelectuais:

a) Uma *categoria de cognições* que parecem diretamente aceitáveis como auto-evidentes. Estas são *cognições intuitivas*.

b) Uma *categoria de cognições* que são aceitáveis indiretamente por meio de uma prova explicita e lógica. Estas são cognições lógicas.

Na sequência destacamos a seguinte advertência fornecida pelo mestre

> Nem toda cognição é uma intuição. Percepções são diretamente alcançadas pelos sentidos, porém elas não são intuições. Intuições são cognições intelectivas – expressam uma concepção geral (uma noção, um princípio, uma interpretação, uma predição, uma solução) enquanto que percepções são cognições sensoriais. (FISHCBEIN, 1999, p. 18; tradução nossa).

Para concluir esta seção, aproveitamos a declaração de Fischbein para explicitar alguns questionamentos. O primeiro diz respeito que assumimos a ocorrência de intuições a partir de cognições fundadas em princípios particulares, e não apenas gerais, como ele menciona.

Por outro lado, desde que nos atemos ao primeiro contato com os estudantes com o CVV e, consequentemente, a primeira interação visual que pode ser proporcionada pelo computador com os objetos conceituais principais do Cálculo, como se relacionam e em que ordem dispomos as percepções ou cognições sensoriais e as cognições intuitivas ou intuições?

Extraímos algumas conclusões interessantes a partir do estudo de Fischbein e alguns dos seus colaboradores. De fato, Fischbein, Tirosh e Melamed (1981, p. 492) fornecem os seguintes exemplos que ilustramos abaixo. Na figura 52-I, por meio de um conhecimento imediato, expresso pela obviedade, BC é mais longo do que AC. Argumentam ainda que

> Sabemos por outro lado que isto não pode ocorrer, porque, tomamos cuidado em desenhar as linhas do segmento igualmente compridas. Podemos ter alguma dúvida acerca da corretude do nosso desenho, entretanto, não ficamos completamente convencidos de que BC é realmente maior do que AC. Estamos diante de uma situação da qual o que parece perceptívelmente óbvio, contradiz o que podemos aceitar realmente como verdade. Em relação à natureza do fato, (aparência) a obviedade é contradita aqui pela convicção oposta. (FISCHBEIN; TIRISH e MULAMED, 1981, p. 492; tradução nossa).

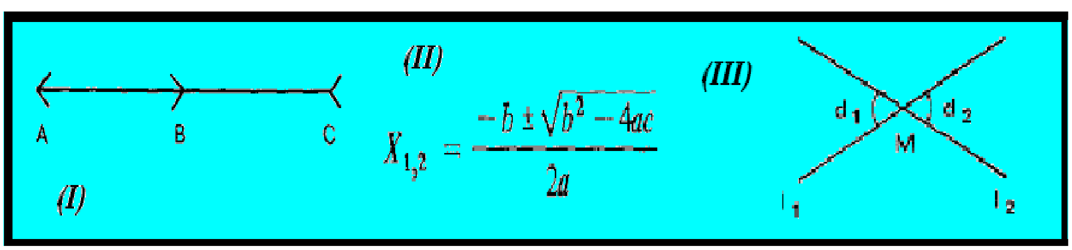


Figura 52: Exemplos discutidos por Fischbein, Tirosh e Melamed (1981, p. 492).

Por outro lado, na figura 52-II, percebemos a fórmula que produz as raízes de uma equação polinomial de grau dois. Fischbein, Tirosh e Melamed (1981, p. 492) explicam que “aqueles que usaram cálculos algébricos não possuem dúvidas quanto à validade da fórmula.”.

Além disso, “eles ficam completamente convencidos de que a fórmula está correta.”. Todavia, não temos de imediato o *feeling* de que a fórmula é intuitivamente evidente. Eles concluem que “podemos permanecer altamente convencidos da validade de uma afirmação sem estar intuitivamente satisfeitos com ela.” (FISCHBEIN, TIROSH e MELAMED, 1981, p. 493)

Por fim, na figura 52-III, temos duas retas l_1 e l_2 que se intersectam no ponto M. o fato de que os ângulos opostos $\widehat{d_1}$ e $\widehat{d_2}$ são iguais, parecem para nós, geralmente, auto-evidente. Por outro lado, não temos dúvida de que os ângulos são iguais. Como assunto para o fato de que “a igualdade dos ângulos parecem intuitivamente aceitáveis. Nenhuma prova ulterior é necessária, nenhuma evidencia perceptiva é requisitada em ordem de tornar verdade de que os ângulos devem ser os mesmos.” (FISCHBEIN, TIROSH e MELAMED, 1981, p. 493)

Deste modo, notamos a distinção ressaltada por Fischbein entre o momento de manifestação de uma *percepção* e o uso de uma *intuição*. Esta última, o mesmo a descreve que sempre envolve algum processo de interpretação. Desde que em nossa investigação buscamos desenvolver uma mediação dos conteúdos do CVV por meio de uma abordagem intuitiva, tornar-se essencial, assim como notamos nos trabalhos de Efraim Fischbein, distinguir e caracterizar os estádios mentais peculiares da *percepção* e da *intuição*.

Uma vez caracterizados os tipos e os aspectos mais proeminentes em situações-problema que apresentam o potencial de provocar desequilíbrios, nos resta caracterizar as formas de manifestação do *raciocínio intuitivo* e as respectivas fases ou momento de ocasião da aplicação da *Sequência Fedathi*. Para tanto, recorremos mais uma vez a Fischbein (1987).

E de acordo com sua classificação (FISCHBEIN, 1987), podemos ter: *intuições afirmativas*, *intuições conjecturais*, *intuições antecipatórias.* As primeiras nomeadas por *intuições afirmativas* são “*representações ou interpretações de vários fatos aceitos como corretos, auto-evidentes e auto-consistentes*” (FISCHBEIN, 1987, p. 58). Por exemplo, quando dizemos que “dois pontos determinam um linha reta” ou que “o todo é maior do que as suas partes constituintes”, manifestamos um conhecimento baseado em *intuições afirmativas*.

Reparamos que na primeira sentença declaramos algo à respeito de um objeto que possui um significado e uma definição formal dentro de uma teoria axiomática que conhecemos com Geometria Plana. Por outro lado, na segunda sentença, apesar de descrever, conforme Fischbein, uma *intuição afirmativa*, empregamo-lá num contexto não determinado e/ou preciso.

Outro exemplo pode ser mencionado quando afirmamos que o "objeto mais pesado deverá tocar o chão, em queda livre, mais rápido do que outro objeto mais leve". Para formular tal afirmação não necessitamos precisamos ir à escola, e muito menos estudar formalmente nenhum conceito de Física Clássica, entretanto, quando Fischbein descreve as categorias intuitivas, delimita algumas delas em determinados campos do conhecimento.

De fato, quando afirmamos que "por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma reta paralela a primeira", tal declaração, historicamente, é conhecida como um dos postulados euclidianos. Fischbein declara que a compreensão desta propriedade axiomática envolve algum tipo de *intuição afirmativa*, todavia, para um sujeito compreendê-la, necessita divisar alguns dos condicionantes intrínsecos da Geometria Plana.

Explica ainda que uma intuição do tipo afirmativa pode ser descrita, para efeito de distinção, por meio de um modelo inferencial. Por exemplo, a partir de $A = B$ e B = C concluímos que $A = C$. Um exemplo deste tipo de *intuição inferencial* é fornecido por Poincaré (1952, p. 19) quando diz que "se numa reta o ponto C reside entre os pontos A e B, e o ponto D se encontra entre A e C, consequentemente, o ponto D estará também entre A e B". Vemos a descrição da situação na figura 53.

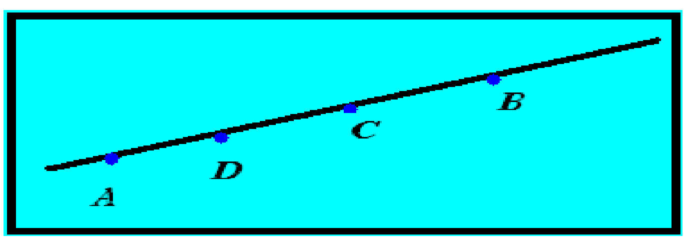


Figura 53. Situação discutida por Poincaré.

Note-se que no caso de *intuição afirmativas*, o sujeito afirma/declara algo a respeito de um fato aceito como evidente. Por outro lado, *"intuições conjecturais* expressam uma presunção sobre eventos futuros, a respeito do curso de certo fenômeno." (FISCHBEIN, 1987, p. 60). Este tipo de intuição desempenha uma importância fundamental em todo tipo de atividade profissional.

Uma classe de intuição que assume um significado importante em nossa discussão é nomeada por ele de *intuições conjecturais*. Esta categoria representa "uma visão preliminar, global que antecede uma solução analítica e completamente desenvolvida de um problema." (Idem, 1987, p. 61).

Sua importância didática reside no pressuposto de que iniciamos uma boa aula de matemática pior meio da colocação de um bom problema. As barreiras nem sempre explícitas aqui se manifestam quando sentimos a dificuldade em conhecer e diferenciar um bom problema de outro menos interessante.

Fischbein (1987, p. 61) distingue uma *intuição afirmativa* de uma *intuição antecipatória* quando declara que

> Por meio de uma *intuição afirmativa* aceitamos a auto-evidência de determinada noção [...] Uma *intuição antecipatória* não estabelece simplesmente um determinado fato. Esta aparece como uma descoberta, como uma solução de um problema e subitamente como resultado de um esforço da busca pela solução. (tradução nossa).

O autor sublinha ainda que quando falamos de uma "*intuição antecipatória*", nos referimos a uma fase no processo sistemático de resolução de problemas. Enquanto que a *intuição conjectural* se relaciona a um momento não necessariamente relacionado à atividade de busca para a solução intrínseca de um problema. Note-se que, tendo em vista que falamos sobre processos cognitivos mentais, as três formas de intuição descrita há pouco não ocorrem de modo isolado.

Na figura 54 identificamos o percurso de uma *intuição afirmativa* que, devido ao sentimento de *evidência* experimentado por um solucionador de problemas, não entende que determinada propriedade necessite de uma demonstração ou verificação lógico formal. Na figura 54, notamos a direção em que ela se manifesta.

Já no caso da *intuição conjectural*, uma vez manifesta, o solucionador identifica uma situação que envolve um problema e exige uma argumentação mais detalhada, apesar de que, o solucionador não necessariamente se encontra mergulhado num esforço para a sua resolução de fato.

Mas no caso da *intuição antecipatória*, o solucionador se encontra na fase de aplicação concreta de estratégias, emprego de fórmulas, elaboração de desenhos que auxiliam de modo efetivo a identificação de uma solução.

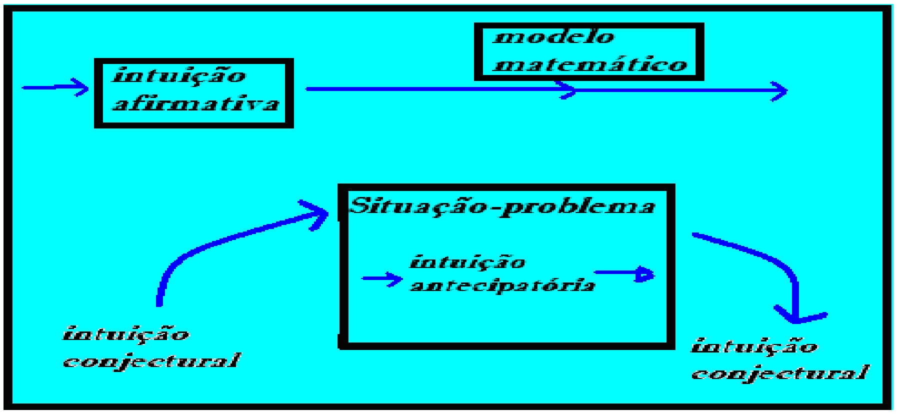


Figura 54. Formas de manifestação do raciocínio intuitivo ante a resolução de situações problema que encerram o potencial de gerar conflitos cognitivos (elaboração própria).

A *intuição conjectural* é marcante na figura do professor, uma vez que, o mesmo deve ter a capacidade de prever e antecipar as possibilidades de êxito ou fracasso de qualquer argumentação apresentada pelos estudantes. Por outro lado, no que diz respeito ao estudante, não é muito imediato a identificação tácita de uma manifestação intuitiva, pois elas não ocorrem de modo isolado, uma vez que estamos falando sobre processos mentais.

Em todo caso, a partir das argumentações de Fischbein (1987), podemos descrever a possibilidade de manifestação de uma *intuição conjectural* numa fase eminentemente anterior à resolução do problema e, em outra fase, destacadamente num momento *a posteriori* (figura 54). Note-se, porém, que a *intuição conjectural* numa fase após a resolução efetiva do problema proporciona ao estudante a identificação de conseqüências futuras daquele resultado particular obtido.

Em nosso estudo, por intermédio do emprego da noção de CTC, podemos evitar a evolução de uma *intuição afirmativa* ou transformá-la numa *intuição conjectural* ou numa *intuição antecipatória*. De fato, quando apresentamos ao estudante a seguinte função $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ para } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ para } (x,y)=(0,0)\end{cases}$, na ocasião em que já conheça as condições de *continuidade*, o mesmo pode afirmar baseado no tratamento analítico, simplesmente que a função é contínua.

Por outro lado, se requisitarmos para que o sujeito analise o comportamento do gráfico nas vizinhanças de ponto $(0,0,0)$, poderá ficar confuso, diante do CTC provocado pelo programa que não exibe gráfico algum na origem, dando a entender que lá a mesma não está definida, e assim, não poderia ser contínua.

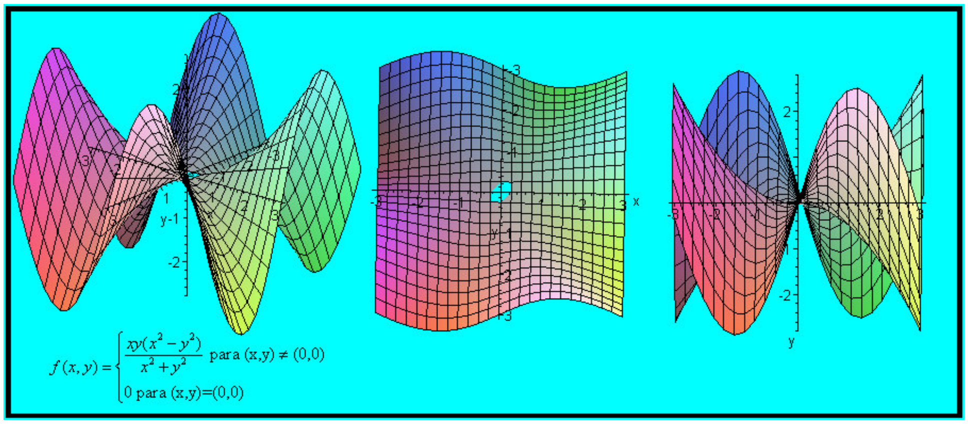


Figura 55. CTC sobre continuidade de funções (elaboração própria).

Assim, experimentalmente poderemos provocar o seguinte percurso.

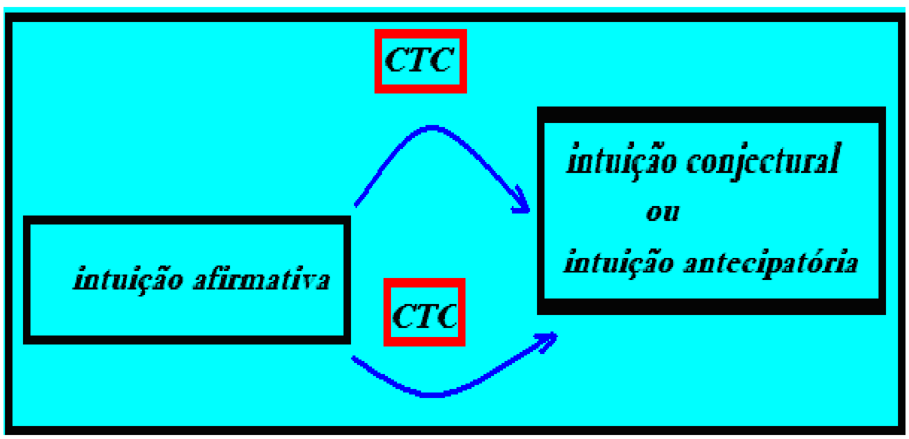


Figura 56. Transformação de uma *intuição afirmativa* em uma *intuição conjectural* ou *antecipatória* (elaboração própria).

Note-se que a linha divisória entre estas categorias intuitivas é bastante tênue e um professor “*expert*” tem maiores chances de realizar as identificações necessárias. Em relação a tal fato, Fischbein esclarece que “devemos considerar um continuum a partir de uma intuição afirmativa para uma intuição antecipatória que passa através de uma intuição conjectural.” (1987, p. 61). Em todos os casos em que registramos a ocorrência de alguma delas, a situação contextual é decisiva no sentido de condicionar/determinar a preponderância de uma em relação à outra.

Além disso, quando o estudante vivencia as possibilidades de situações conflituosas descritas anteriormente, tencionamos gerar um terreno fértil na produção de *raciocínios argumentativos* envolvendo propriedades formais do CVV e não, de modo precipitado, *raciocínios demonstrativos*. Duval (1991, p. 235) diferencia-os do seguinte modo

> Quando se faz uma passagem deste tipo em função de uma regra explícita de uma teoria local, o passo do raciocínio possui uma organização ternária. Um passo de dedução é deste tipo. Isto introduz uma primeira diferença entre *raciocínio dedutivo* e *raciocínio argumentativo*. Este último recorre a regras implícitas que revelam em parte a estrutura da língua, e em parte das representações dos interlocutores: o conteúdo semântico das proposições é primordial. Do contrário, no *raciocínio dedutivo*, as proposições não intervêm diretamente em função do seu conteúdo, mas sim em função do seu estatuto operatório, isto é, o lugar que é assegurado no funcionamento do passo. (tradução nossa).

O trecho destacado acima requer alguns comentários. Notamos que Duval busca caracterizar e diferenciar um '*passo de raciocínio*' e a '*transição*' de um passo de raciocínio para o passo seguinte. No primeiro caso temos a ocorrência necessária de uma '*inferência*', enquanto que no segundo caso temos um '*encadeamento*'.

Observamos que Duval faz referência a uma '*estrutura ternária'*. Uma estrutura deste tipo é observada quando desenvolvemos um *passo dedutivo* e executamos uma inferência, de uma *premissa* em direção a uma *proposição* ou *tese*, por meio da aplicação de uma 'regra', e tal regra é referendada numa teoria formal local ou mesmo num teorema particular do tipo $p \underset{propriedade}{\overset{regra}{\rightarrow}} q$.

No 'passo dedutivo'[32], o *caráter operatório* de uma proposição, em detrimento do seu *conteúdo* é essencial. Esta é uma das razões que provocam o desconcerto dos estudantes que, mais frequentemente, "identificam nas proposições o seu conteúdo." (DUVAL, 1991, p. 236).

Por outro lado, no *raciocínio argumentativo*, que em nossa tese assume uma função de destaque, as proposições não possuem um estatuto operatório. A *inferência* repousa sobre o *conteúdo* das proposições. Mais adiante, Duval (1991, p. 239) apresenta um interessante esclarecimento

> Na maioria das vezes, o raciocínio não se limita a um passo de uma única inferência ou um único argumento, mas deve articular vários. O encadeamento é a passagem que estabelece a ligação entre dois passos de raciocínio. E esta ligação não possui a mesma natureza segundo que se trate do raciocínio dedutivo ou raciocínio argumentativo. (tradução nossa).

[32] Duval (1991, p. 236) recorda que *as expressões chamadas de atitudes proposicionais podem igualmente preencher este papel:* "sabemos que" (proposição de entrada), estou certo que... (conclusão), graças ao teorema". Estas expressões são empregadas pelos alunos quando compreendem o raciocínio dedutivo.

Desde que nossa discussão se relaciona de modo direto com a intuição, podemos questionar como se diferencia seu papel, no que diz respeito ao *raciocínio argumentativo* e *raciocínio dedutivo*?

Note-se que no primeiro identificamos com mais facilidade o papel assumido pela intuição, uma vez que, "no raciocínio próprio da argumentação, os argumentos se agrupam uns aos outros, sejam para reforçarem-se mutuamente, seja para se oporem." (DUVAL, 1991, p. 241). Deste modo, quando estimulamos uma *atividade argumentativa*, por conseqüência, criamos um terreno fértil para o surgimento das intuições do estudante.

Entretanto, num passo de *raciocínio dedutivo*, apesar de não termos a intenção de explorar a compreensão, por parte do estudante, das demonstrações do CVV, permite, no caso dos mais habilidosos, a exploração do raciocínio intuitivo.

Com efeito, a expressão cunhada por Souriau (1881), chamada de "pensar de lado" ou "pensamento lateral", ocorre quando, ao decorrer de uma *dedução*, tendo em vista a maior importância do *caráter operatório* e não do *conteúdo*, o estudante desenvolve tais passos, e concomitantemente pode antever um possível erro ou resultado indesejado rumo à tese. Pode ainda antever uma solução diferenciada, manifestar um *insight* sobre o resultado.

Por fim, encerramos esta seção destacando a importância das características necessárias de cada situação-problema envolvendo *incerteza* (ZASLAVSKY, 2005) e os aspectos marcantes de manifestação do *raciocínio intuitivo* na medida em que buscamos a promoção de um ensino baseado na *crença*, e não apenas na *certeza*, o que torna imprescindível a *atividade argumentativa* (DUVAL, 1991) do estudante.

Na próxima seção discutiremos outras dimensões do raciocínio intuitivo no âmbito da mobilização de representações, simbologias e notações matemáticas. As situações que devem ser trabalhadas com os estudantes procuram explorar sua argumentação antes, durante e depois da apresentação das estratégias que os mesmos acharem convenientes. Isto proporciona o surgimento das *intuições conjecturais* e *intuições antecipatórias* (FISCHBEIN,1987).

Por outro lado, no ensino tradicional, com a exploração apenas do quadro branco, a *conversão de registros* do CVV permanece seriamente comprometida, assim, observamos a prevalência do tratamento dos *registros algébricos*, o que reforça a produção de *intuições afirmativas* (FISCHBEIN,1987).

Este quadro que descrevemos caracteriza um ensino baseado na certeza dos conhecimentos matemáticos do CVV, com ênfase apenas no *valor lógico* e enfraquecimento do *valor epistêmico* das proposições produzidas pelo professor e admitidas, sem muita resistência por parte dos aprendizes. A mesma resulta de uma visão de complementaridade entre a *Sequência Fedathi* e a Teoria das Representações Semióticas e a teorização de Fischbein (1987).

Baseado em toda a teoria discutida nos capítulos anteriores, formulamos a tabela 5. Destacamos que com arrimo na *Sequência Fedathi* e a exploração adequada das teorias apontadas, tencionamos caracterizar/diferenciar as *categorias intuitivas* adequadas ausentes na linha 3, da tabela 5.

Tabela 5: Descrição das categorias de Duval (1995) e Fischbein (1987) nas fases da SF.

Sequência Fedathi	**Fase 1 – *tomada de posição***	**Fase 2 - *maturação***	**Fase 3 - *solução***	**Fase 4 - *prova***
Categorias de Duval (1995)	**Formação e coordenação no CUV e/ou CVV**	**Coordenação e Tratamento do CUV, tratamento do CVV**	**Tratamento no CVV**	**Tratamento e Coordenação no CVV**
Tipo de intuição	**?**	**?**	**?**	**?**
Manifestação do *insight*	**Menos provável**	**Mais provável**	**Mais provável**	**Menos provável**
Argumentação do professor	**Baseada na crença – valor epistêmico das proposições**	**Baseada na crença– valor epistêmico das proposições**	**Baseada na crença– valor epistêmico das proposições**	**Baseada na certeza– valor epistêmico das proposições e lógico**
Tipo de discurso Duval (1991)	**Argumentação**	**Argumentação**	**Argumentação**	**Argumentação e dedução**
Comentários	**Ação de promover a transição das representações semióticas do CUV para o CVV**	**Aplicação de representações do CUV na resolução de atividades do CVV**	**Adoção do sistema próprio do CVV para a resolução de problemas**	**Estabelecimento de formas mais eficazes e adequadas de representações para a atividade formal**

Fonte: Elaboração própria.

Discutimos nas seções anteriores a caracterização da *Sequencia Fedathi*, em seguida abordamos e aplicamos alguns elementos da *Teoria das Representações Semióticas* no contexto do CVV e, por fim, damos ênfase nas *categorias do raciocínio* intuitivo descritas por Fischbein (1987).

Enfatizamos mais uma vez o caráter de complementaridade que tencionamos assumir, daqui em diante, com respeito ao uso destas teorias. Assim, nos amparamos nestas duas perspectivas com relação às escolhas didáticas, que envolvem uma mediação e um posicionamento particular nas fases de ensino da *Sequência Fedathi* e, consequentemente, a análise das conseqüências desta mediação que esperamos observar a partir dos dados empíricos produzidos pelos dos estudantes.

No capítulo seguinte, detalharemos o desenvolvimento e estruturação da pesquisa.

Capítulo 4 A PESQUISA

Neste capítulo descrevemos o *modus* organizacional e estruturante da pesquisa. Assim, concluiremos que, tanto as etapas descritas nos capítulos passados como os subseqüentes se enquadram em algumas etapas previstas na *Engenharia Didática*. E acrescentamos e detalhamos as informações pertinentes as etapas de deverão ser objeto de análise nos capítulos subseqüentes.

4.1 Desenvolvimento e organização

Para discutir a primeira teoria mencionada há pouco, lembramos que Artigue (1996, p. 243) relata que

> A noção de Engenharia Didática emergiu em Didática da Matemática no início dos anos 1980. E trata-se de classificar por este termo uma forma de trabalho didático; comparável ao do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre um conjunto de conhecimentos científicos do seu domínio, aceita se submeter a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos mais complexos do que os objetos depurados pela ciência e, assim se debruça praticamente, com todos os meios pelos quais ele dispõe mesmo os problemas ainda não considerados pela ciência. (tradução nossa).

Nosso estudo se caracteriza por um esquema experimental baseado em *realizações didáticas* em classe, e apresenta algumas etapas que se assemelham à estruturação da *Engenharia Didática*, semelhante ao descrito por Artigue (1996, p. 247), como um esquema "baseado em concepção, realização, observação e análises de sequencias de ensino.". De modo semelhante, nos apoiaremos nos pressupostos da *Sequência Fedathi* e nas perspectivas teóricas de Raymond Duval e Efrain Fishcbein.

Os elementos apontados podem ser considerados numa perspectiva local, mas também numa perspectiva globalizante no sistema de ensino. Neste sentido, Artigue distingue as varáveis relacionadas à *micro-engenharia* e as variáveis relacionadas à *macro-engenharia.*

As pesquisas (CARNEIRO, 2005) baseadas em *micro-engenharia* permitem de levar em consideração, de modo local, as complexidades dos fenômenos em classe. Já as pesquisas baseadas na *macro-engenharia* levam em consideração todas as dificuldades metodológicas e institucionais que se apresentam com entraves.

Nosso estudo apresenta aspectos predominantes de uma *micro-engenharia*, deste modo, nosso interesse se direciona particularmente às experimentações e sequências de ensino em sala de aula, relacionadas com os objetos do CVV.

Além disso, de modo semelhante ao que comenta Martins (2010, p. 92), tencionamos promover uma aprendizagem baseada em processos de adaptação que dependem das situações vivenciadas pelos sujeitos participantes. Sem deixar de levar em consideração que "a aprendizagem deve evoluir pela vivência da própria situação e não pela condução do professor." (MARTINS, 2010, p. 92)

De modo resumido, *Engenharia Didática* se divide em quatro fases distintas que detalhamos a seguir.

Fase 1 – Análises preliminares.

Artigue (1996, p. 249) explica que "em uma pesquisa de Engenharia Didática a fase de concepção se efetua ao se apoiar sobre um quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos adquiridos em certo domínio de estudo.". Contudo, acrescentamos a necessidade de se apoiar também sobre:

➢ Uma análise epistemológica dos conteúdos (Cálculo a Várias Variáveis- CVV) visados ao ensino (*epistemologia do saber em foco*) desenvolvida no Capítulo 1;

➢ Análise do ensino usual do CUV e do CVV e dos seus efeitos (*estado das práticas e realizações didáticas no ensino*) desenvolvida no Capítulo 1;

➢ A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos epistemológicos, didáticos, cognitivos que marcam sua evolução do CUV para o CVV (*traços cognitivos dos sujeitos*) que desenvolveremos no próximo capítulo;

➢ Análise do conjunto de entraves aonde vai se efetivar a realização didática (análise institucional) desenvolvida no Capítulo 3;

➢ E a consideração dos objetivos da pesquisa (ver pagina 147).

Fase 2 – Concepção e Análise *a priori*.

Nesta segunda fase, Artigue (1996, p. 255) orienta que "o pesquisador toma a decisão de agir sobre um certo número de variáveis do sistema ou variáveis de comando". As *variáveis de comando* são as pertinentes ao problema objetivado. Com uma preocupação operacional, ela distingue: *variáveis micro-didáticas* e *variáveis macro-didáticas*.

As primeiras concernem à organização global da engenharia, enquanto que as variáveis *micro-didáticas* ou locais concernem a organização local da engenharia, isto é, a organização de uma *sequência didática* (séance) ou de uma fase.

Artigue (1996, p. 258) explica que

> O objetivo da análise a priori é de determinar de que modo as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seu sentido. Para tanto, ela se fundamentará sobre as hipóteses e são as hipóteses em relação as quais a validação, será em princípio, confrontará entre a análise a priori e a posteriori. (tradução nossa).

Esta etapa pode ser desenvolvida independentemente da situação didática que deverá ser efetivamente desenvolvida. Na etapa de *análise a priori* nos apoiamos sobre alguns elementos divisados e destacados na etapa de *análise preliminar* (Capítulo 1) e no Capítulo 2 e nos dados indicados na próxima seção deste capítulo, a partir da análise de livros didáticos de CVV.

Fase 3 – *Experimentação*.

Nesta fase realizaremos a observação dos alunos ao longo das sequências de ensino estruturadas ao longo das fases de ensino da *Sequência Fedathi*, ancoradas em uma perspectiva de complementaridade dos pressupostos da *Teoria das Representações Semióticas* e da teoria de Fishbein (1987). Deste modo, para a realização sistemática da observação, utilizamos três momentos distintos de uso das *entrevistas semi-estruturadas*: ao decorrer das sessões de ensino dos conteúdos pela mediação da SF, ao decorrer das "aulas de duvidas" e ao longo da aplicação das avaliações.

Cada sequência de ensino (aplicada à SF) se relacionou com os seguintes conteúdos: *curvas parametrizadas*, *continuidade*, *derivação*, *extremos de função* e *integrais múltiplas*. Cada conceito foi apresentado observando-se as seguintes fases (*seance*): (i) introdução do conceito com a exploração de registros em 2D e 3D; (ii) formulação da construção da definição do conceito e da interpretação de suas propriedades; (iii) formalização das propriedades dos conceitos; (iv) discussão dos limites de validade dos teoremas relacionados com cada conceito.

Fase 4 – Análise *a posteriori* e validação.

Esta fase se fundamentará sobre o conjunto de dados (*produção escrita*, *registro de imagens*, *verbalização dos sujeitos*) produzidos pelos alunos, recolhidos ao decorrer da *experimentação*. Os dados foram obtidos a partir da aplicação das *tarefas estruturadas* na perspectiva das fundamentações teóricas apresentadas no capítulo anterior, em *entrevistas semi-estruturadas*, aplicadas de modo individual no momento de três instrumentos avaliativos e nas aulas de "tira dúvidas".

No que segue apresentamos as análises dos livros do CVV que constituem dados da análise preliminar.

4.2 Análise dos livros didáticos

Nesta etapa apresentamos a análise de livros didáticos do CVV. Destacamos que, para compor os dados principais de nossa análise foram constituídos a partir dos seguintes livros: Guidorizzi (2010), Leithold (1999) e Stewart (2004). Por outro lado, destacamos ainda, em uma perpectiva complementar de investigação, alguns elementos importantes presentes no livro de Buck (1965), na perspectiva de uma análise comparativa de um dos conteúdos que será objeto de estudo em um dos tópicos específicos do CVV. Esta etapa de análise apresenta características semelhantes ao estudo desenvolvido por Karrer (2006). Acentuamos que em virtude da constituição das teorias adotadas e discutidas nas seções passadas, as categorias de análise foram:

(I) Noções de *formação*, *conversão* e *tratamento* de registros de representação semiótica;

(II) Os elementos constituintes da *transição interna* do CUV para o CVV (ver p. 61).

Para efeito de nossas análises, indicamos os seguintes elementos pertencentes á *transição interna* do CUV para o CVV:

(a) Livros que exploram situações-problema do CVV com o uso e a significação dos *registros* de representação do CUV;
(b) Livros que exploram conceitos do CUV no espaço $\mathbb{R}^3$, o que proporcionam a evolução das habilidades de *percepção* e a *visualização*;
(c) Livros de CVV que abordam *demonstrações formais* com o uso de argumentações peculiares ao CUV;
(d) Livros que relacionam os registros algébricos do CUV com o CVV;
(e) Livros que não realizam a compressão ou simplificação de notações formais dos objetos do CVV;
(f) Livros que permitem a readaptação das estratégias apreendidas no CUV no contexto do CVV;

(g) Desconsideramos os autores (AYRES e MENDELSON, 1990; ENGEL, 1997; GRATTAN, 1970; MATTUCK, 1990; TAYLOR e MANN, 1983; WADE, 2004; WIDER, 1947; WREDE e SPIEGEL, 2010) em que constatamos uma abordagem típica do bacharelado em Matemática.

4.2.1 O livro de Stewart (2004)

O livro de Stewart (2004) pode ser encontrado na biblioteca do IFCE e foi indicado como referência para o estudo na disciplina de Cálculo III. No caso de Stewart (2004, p. 838) identificamos exemplos interessantes ao explicar que o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço para os quais $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$ (*), onde t varia em I, é chamada *curva especial*. As equações (*) são chamadas *equações paramétricas* de C e t é o *parâmetro*.

Stewart (2004, p. 840) lembra que "as curvas espaciais são mais difíceis de desenhar do que as curvas planas. Para uma representação mais acurada precisamos utilizar a tecnologia.". O autor destaca a seguinte curva $\alpha(t) = (4 + sen(20t) \cdot \cos(t)\ ,\ (4 + sen(20t) \cdot sen(t)\ , \cos(20t))$, chamada de *toróide espiral* e o *nó do trevo*, descrito parametricamente por $\beta(t) = (2 + \cos(1{,}5t)\cos(t)\ ,\ 2 + \cos(1{,}5t)sen(t)\ ,\ \text{sen}(1{,}5t))$ a qual apresentamos abaixo.

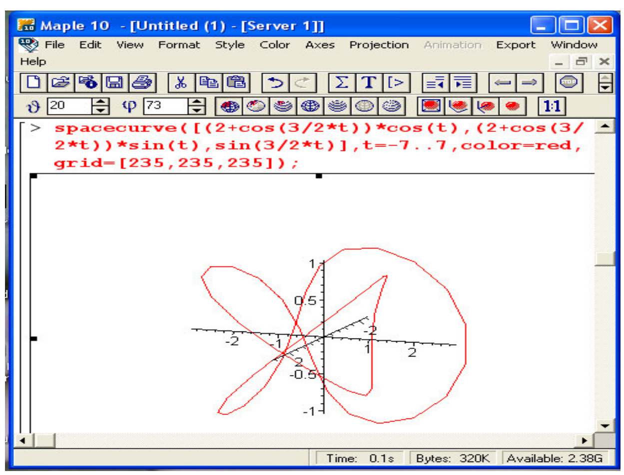


Figura 57. Descrição do gráfico da curva *nó do trevo* no espaço.

Stewart (2004, p. 840) destaca que "seria muito difícil traçar qualquer dessas curvas a mão. Acrescenta que mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, a ilusão ótica torna difícil entender à forma real da curva.". O autor apresenta então o seguinte exemplo $\alpha(t) = (t, t^2.t^3)$ chamada de *cúbica retorcida*. Comenta que quando plotamos tal curva no computador, existem alguns modos distintos de enxergá-la. Lembra ainda que:

> A maioria dos programas possibilita algumas formas de visualização e afirma que quando visualizamos na mesma curva na caixa, conseguimos uma melhor visualização. Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se á medida que sobe. (STEWART, 2004, p. 841)

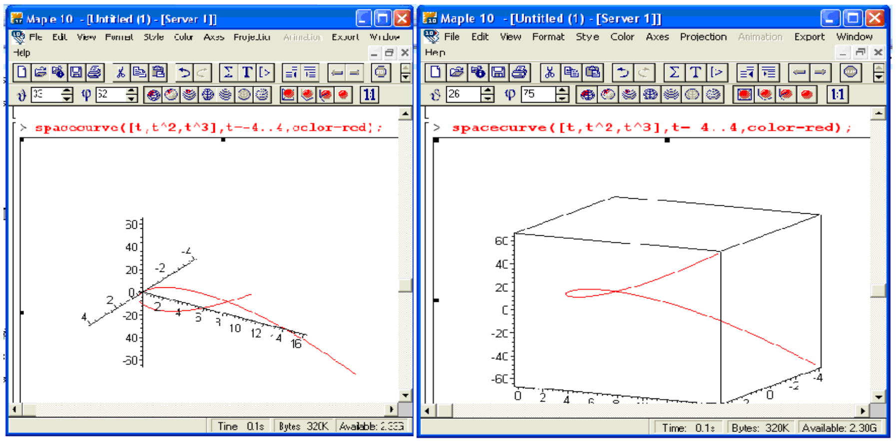


Figura 58. Representação no espaço da *cúbica retorcida*.

Stewart (2004, p. 841) destaca ainda "um terceiro modo de visualizar uma curva espacial ao desenhá-la numa superfície ou constatar que a curva está contida numa superfície cilíndrica $z = x^3$ que pode ser vista agora como a interseção de duas superfícies cilíndricas $y = x^2$ e $z = x^3$.".

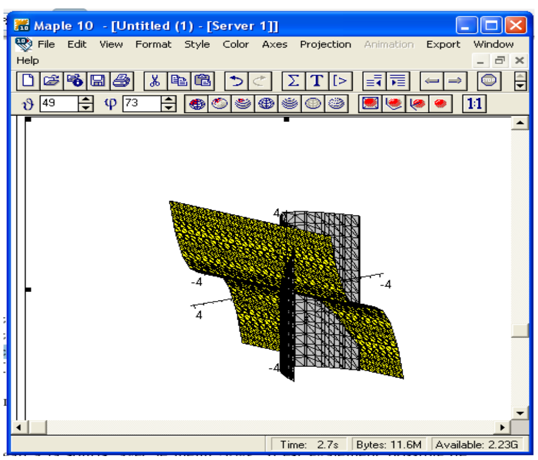


Figura 59. Situação proposta por Stewart (2004, p. 345).

Stewart (2004) explora *registros gráficos* a *língua natural* e *registros algébricos* de modo aquilibrado, além disso, omite algumas demonstrações formais com relação ao conceito de *curvas parametrizadas*. Assim, o autor da uma clara indicação de que a *formação* de registros gráficos é inexeqüível sem o auxílio computacional.

Ademais, observamos exemplos resolvidos nesta obra que facilita a *conversão de registros* e a atividade discursiva do leitor. Na seção de exercício, apesar de observamos uma pequena quantidade de *registros gráficos* em 3D, o autor manifesta a preocupação com a visualização do leitor.

Em Stewart (2004) a noção de limite é bem explorada por meiu de *registros numéricos*, *registros algébricos* e *registros gráficos* em 2D e 3D. O livro inicia com a apresentação de dois exemplos de funções $f(x,y)=\dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ e $g(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ e desenvolve uma análise do comportamento numérico de sua imagem, à medida que $(x,y)\to(0,0)$, explorada por poucos livros do gênero.

Mais adiante o autor descreve geometricamente as condições necessárias para a existência de um limite por meio da noção de caminhos ou *curvas parametrizas*. Stewart (2004, p. 889) descreve a contra-positiva de um teorema formal sobre limites, fazendo um destaque no texto, mais com a aparência de uma dica ao leitor do que o corolário ou conseqüência deste teorema.

Stewart explora a visualização de *registros gráficos* em 3D fornecidos pelo computador, quando discute o comportamento do gráfico de $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, salienta a existência de uma "cumeeira" que ocorre na reta $y=x$ que corresponde ao fato de que $f(x,x)=\dfrac{1}{2}$. Vemos abaixo a situação representada e a metáfora designada por "cumeeira" empregada pelo autor.

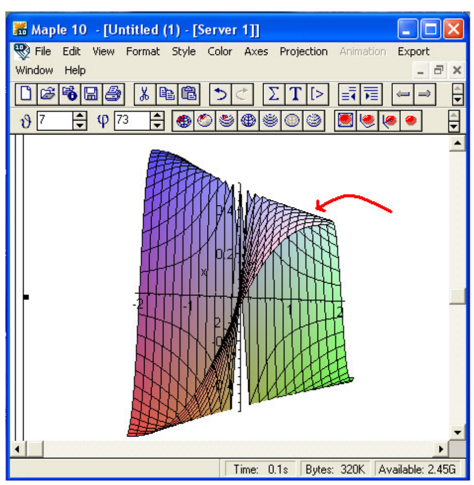


Figura 60. Linguagem metafórica explorada por Stewart (2004).

Abordagens desta natureza impulsionam a formação e imagens mentais e, consequentemente, a formação de *registros algébricos* adequados. Ao apresentar a definição formal por *épsilon* e *delta*, apresenta a seguinte *definição formal* que caracteriza a condição lógica e formal do conceito como exibimos na figura 62.

1 Definição Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$|f(x, y) - L| < \varepsilon$ sempre que $(x, y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

Figura 62. A definição formal por *épsilon* e *delta* fornecida por Stewart (2004, p. 888).

Por outro lado, Stewart (2004) fornece o significado geométrico quando explora as figuras em 2D, que exibimos na figura 63. Observamos que a compreensão da *conversão* dos *registros* fica a cargo do leitor.

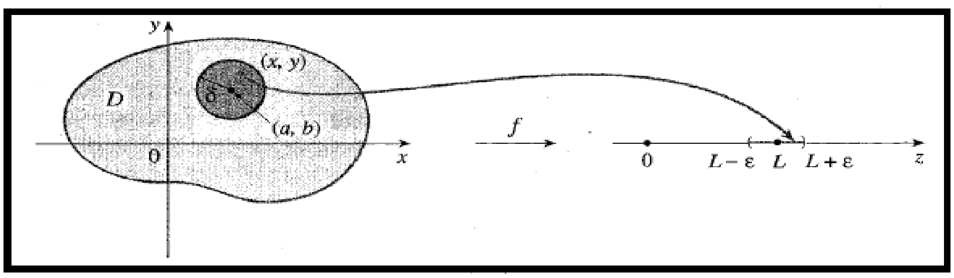


Figura 63. A descrição da noção de *limite* por meio de figuras em 2D.

Por fim, o autor fornece uma figura complexa, que proporciona ao leitor a sensação de profundidade, significando o comportamento do conceito de *limite* no $\mathbb{R}^3$. Percebemos isto na figura 64, o que significa que o autor explora de modo constante a *conversão* de registros.

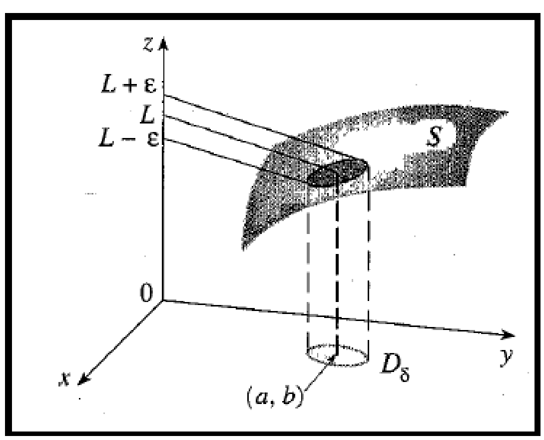


Figura 64. Stewart (2004, p. 340) descreve a noçao de *limite* e estimula a percepção do comportamento geométrico no $\mathbb{R}^3$.

Com respeito à noção de *derivada parcial*, Stewart (2004, p. 895) inicia com a discussão de um problema aplicado no campo da Física e que a tabela abaixo indica o comportamento da temperatura que varia de acordo com a derivada parcial da função temperatura. Tal situação problema de estimula a *formação* de um *registro algébrico* com maior significado e não de modo arbitrário e pouco discutido com o leitor. Na figura 65 vemos a tabela explicativa do comportamento da função.

TABELA 1 Índice de calor *I* como função da temperatura e umidade

		Umidade relativa (%)								
	T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Temperatura real (°F)	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Figura 65. A interpretação contextualizada fornecida por Stewart (2004,p. 352).

Após esta discussão no contexto de uma aplicação e colocar em evidência as duas variações ou taxas de variações possíveis, o autor fornece o registro algébrico que nomina de derivadas parciais da função em um ponto.

$\boxed{4}$ Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Figura 66. A definição formal de derivadas parciais apresentada em Stewart (2004, 354).

Entretanto, adverte o leitor quanto à possibilidade a variação notacional dos *registros algébricos* que podem ser empregados para designar o mesmo objeto.

Notação para Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Figura 67. Stewart (2004, p. 356) adverte a mudança notacional no CVV com respeito à noção de derivada parcial.

Colocamos em evidência aqui o seguinte problema que diz respeito ao modo pelo qual o leitor efetuará a ligação entre os *registros algébricos* do tipo $f_x(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Apesar de iniciar a seção com uma interpretação física da *derivada parcial*, o que estimula a evolução do *valor epistêmico* (DUVAL, 1991) do conceito, Stewart (2004, p. 896), os registros algébricos indicados pelo autor são peremptoriamente apresentados e seus significados definidos de modo arbitrário.

Reparamos que com respeito aos *registros algébricos* $f_x(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, qual deles se assemelham aos *registros algébricos* estudados no CUV? Quais dos registros possibilitam uma melhor compreensão geométrica e, portanto, facilita a *conversão de registros*?

Observamos que no *registro algébrico* $f_x(0,0)$ comparecem unidades de significado que não se observa no *registro algébrico* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e, reciprocamente. Assim, o *tratamento* deste conceito é condicionado de modo particular a partir do *registro algébrico* escolhido pelo autor como o principal na resolução de situações-problema. Por outro lado, Stewart (2004, p. 898) fornece o signicado geométrico quando fornece a figura abaixo (figura 68) que proporciona a percepção de três dimensões.

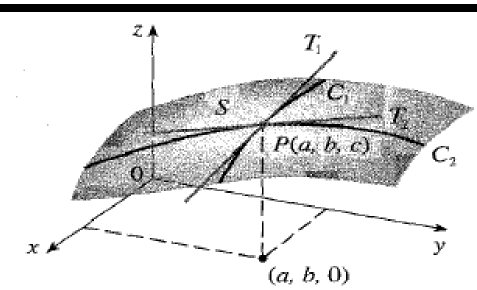


FIGURA 1
As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes C_1 e C_2.

Figura 68. Stewart (2004, p. 360) fornece o significado geométrico da noção de *derivada parcial*.

No caso do conceito de *derivadas mistas*, Stewart (2004, p. 901) proporciona indicações do problema relacionado com a escolha definitiva dos *registros algébricos* empregados no *tratamento* do mesmo. Mais uma vez, observamos na figura 69, a variação de mudança notacional no sistema semiótico particular do CVV, o que não se observa no CUV.

Mais uma vez comparamos dois dos *registros algébricos* apontados pelo autor abaixo designados por f_{xx} e $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Note-se que os mesmos representam as derivadas de segunda ordem da função inicial f. Reparamos que com respeito aos *registros algébricos* f_{xx} e $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, qual deles se assemelham aos *registros algébricos* estudados no CUV? Quais dos *registros algébricos* possibilitam uma melhor compreensão geométrica e, portanto, facilita a *conversão de registros*?

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Figura 69. Stewart (2004, p. 365) fornece variações notacionais para o conceito de *derivada mista*.

Assim, reparamos mais uma vez que os registros do tipo f_{xx} e $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ não apresentam uma correspondência entre unidades de significado, o que compromete a *conversão* de registros. Ademais, registramos que Stewart (2004), ao longo desta seção, escolhe e aplica nas situações-problema o *registro algébrico* f_{xx}, sem explicitar de modo aparente para o leitor dos motivos de sua escolha.

Reparamos a supressão de unidades de significados no registro f_{xx}, o que pode comprometer o significado e o *valor epistêmico* (DUVAL, 1991) atribuído pelo leitor. No que segue, exibimo na figura 70, uma *registro gráfico* em 3D, fornecido por computador, o que proporciona e *percepção* e a *visualização* das propriedades importantes de *máximo local*, *mínimo local* e *pontos de sela* de uma função.

Vemos que por intermédio da *percepção* e da *visualização*, a compreensão da existência e localização dos pontos indicados na figura 70 é imediata.

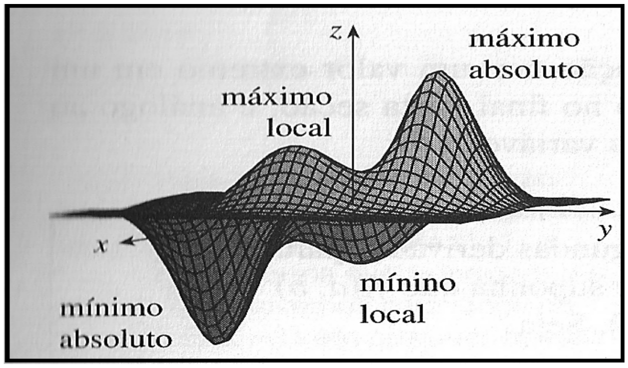


Figura 70. Stewart (2004) explora *registros gráficos* em 3D para a noção de extremos de funções.

Stewart (2004, p. 239) explora o significado intuitivo destes conceitos e, só então, descreve sua *definição formal* a partir do significado geométrico exibido na figura 70. Neste caso, a formação de *registros* em 3D foi garantida pelo computador e a *formação* dos *registros algébricos* que caracterizam a *definição formal* também pode ser extraída a partir da mesma figura.

O autor apresenta um diferencial ao explorar situações-problema que envolvem a perpcepção e a visualização de *registros gráficos* em 2D, *registos gráficos* em 3D e registros algébricos, o que evidencia a *conversão de registros* no CVV. Na figura 71 vemos a *superfície* e suas *curvas de nível*. Stewart (2004) explora suas relações conceituais.

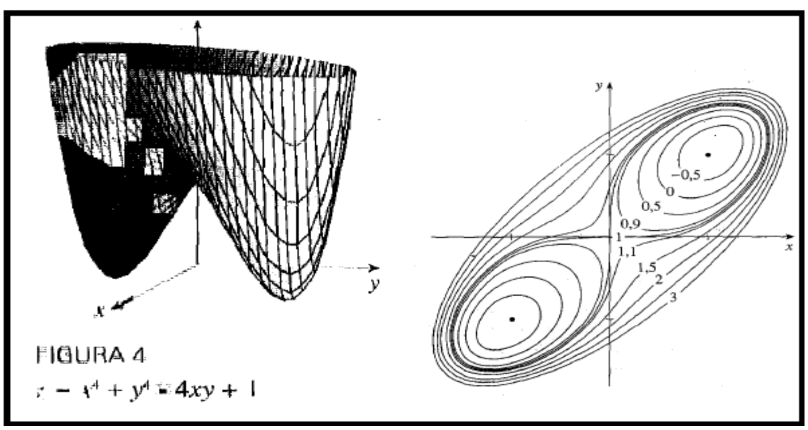


Figura 71(a). Stewart (2004, p. 941) explora a *conversão* de registros.

Stewart (2004) emprega *registros algébricos* do CUV no contexto do ensino do CVV, na medida em que discute a identificação do comportamento da borda da superfície, apesar de que, em seus *registros gráficos* em 3D, o autor não coloca em evidência a *curva parametrizada* na qual efetua sua análise.

Tal abordagem fortalece a *transição interna* do CUV para o CVV, na medida em que o leitor identifica, percebe o uso de *registros algébricos* em um novo contexto de análise, entretanto, sua análise concomitante das *curvas de nível* é bastante restrita e não engloba todos os casos.

Com respeito à noção de *integrais múltiplas*, Stewart (2004, p. 467) compara o significado das *somas de Riemann* no espaço $\mathbb{R}^2$ como as *somas de Riemann* no espaço $\mathbb{R}^3$. Sua introdução proporciona o leitor ao entendimento que a ideia intuitiva de área associada à referida soma no CUV a qual é interpretada como a noção de volume no contexto do CVV. Observamos o trecho referente ao conceito na figura 71.

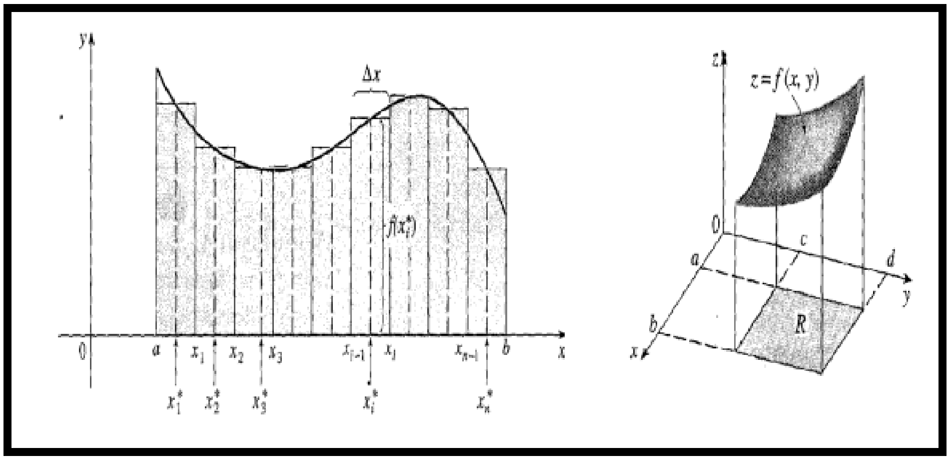
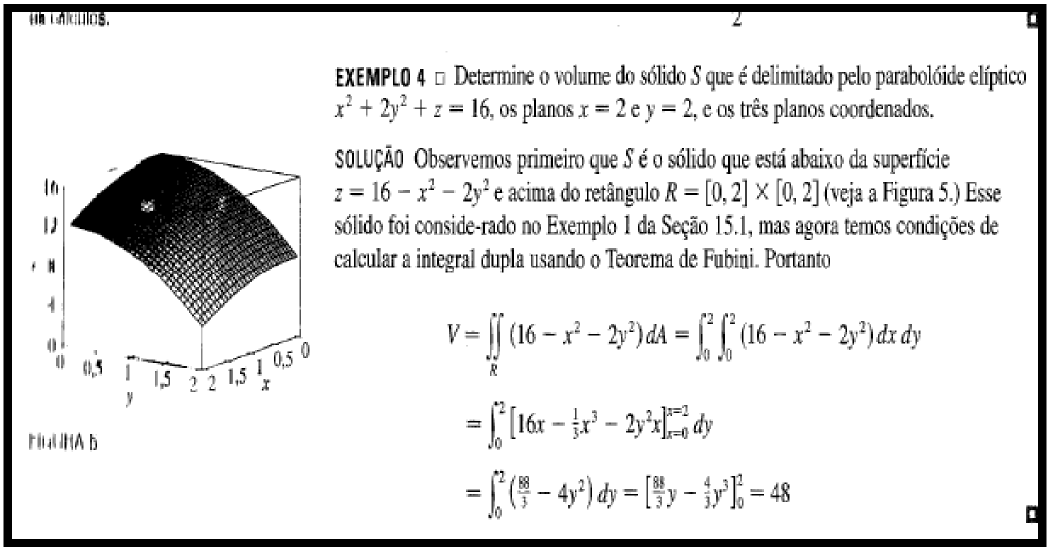


Figura 71(b). Stewart (2004) compara o processo de obtenção das somas de riemann correspondentes ao CUV e ao CVV.

Na figura 72, abaixo, exibimos um exemplo resolvido em Stewart (2004, p. 979). Apesar da quantidade de exemplos no livro ser pequena, os que identificamos possui aspectos positivos como, por exemplo, exploram registros em lingua natural, exploram *registros algébricos* e a *conversão* para *registros gráficos* em 3D fornecidos pelo computador.

Observamos, entretanto, que o *registro algébrico* em 3D, do lado esquerdo, não explicita e permite, por intermédio da *percepção* e *visualização*, para a identificação dos limites de integração da *integral múltipla* que fornece a região no $\mathbb{R}^3$. Observamos ainda que a qualidade do *registro gráfico* em 3D fornecido ao leitor pode ser aperfeiçoado.



EXEMPLO 4 □ Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, os planos $x = 2$ e $y = 2$, e os três planos coordenados.

SOLUÇÃO Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do retângulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ (veja a Figura 5.) Esse sólido foi conside-rado no Exemplo 1 da Seção 15.1, mas agora temos condições de calcular a integral dupla usando o Teorema de Fubini. Portanto

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy$$

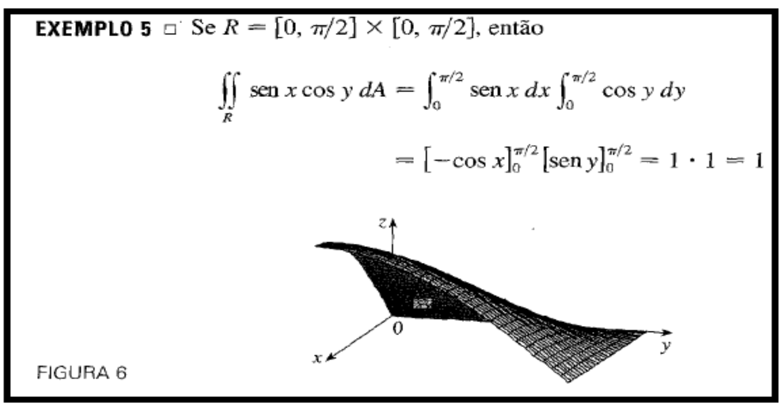
$$= \int_0^2 \left[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$

FIGURA 5

Figura 72. Stewart (2004) explora a *formação* e a *conversão* de registros envolvendo a *integral*.

Na figura 73 trazemos outra situação problema resolvida em que Stewart (2004, p. 980) explora a *formação* e a *conversão* de *registros* envolvendo a integral múltipla. Sublinhamos, entretanto, que os registros gráficos poderiam ser aperfeiçoados no sentido de proporcionar que o leitor identifique por intermédio da *percepção* e *visualização* todos os limites de integração na *integral múltipla*.



EXEMPLO 5 □ Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então

$$\iint_R \operatorname{sen} x \cos y\,dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\operatorname{sen} y]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

FIGURA 6

Figura 73. Stewart (2004) explora a *formação* e a *conversão* de *registros* envolvendo a *integral*.

Por fim, Stewart (2004) não apresenta uma grande quantidade de *demonstrações formais*. Pode-se dizer que o autor não evidencia a formalização como o principal objetivo de alguns dos tópicos que apontamos acima. Ademais, algumas *definições formais* são construídas por intermédio do auxílio computacional.

De fato, na figura 74 exibimos o enunciado do teorema de Clairaut-Shwarz descrito por Stewart (2004, p. 901). Repare que o autor fornece a indicação de que a demonstração formal se encontra no apêndice F.

6

Note que $f_{xy} = f_{yx}$ no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. A prova é feita no Apêndice F.

Suponha que f seja definida numa bola D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Figura 74. O enunciado do teorema de Clairaut-Schawrz descrito em Stewart (2004).

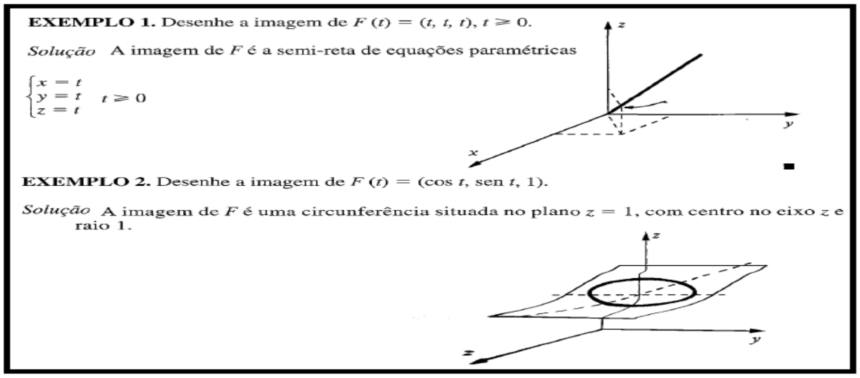
Para concluir esta análise didática do livro de Stewart (2004) com respeito às noções de *formação*, *conversão* e *tratamento*, resumimos que:

- O autor não introduz os conceitos a partir de suas *definições formais* e explora a *conversão de registros* no sentido de fornecer os significados dos novos objetos que surgem no decorrer da teoria do CVV;
- O autor não apresenta em excesso muitas demonstrações formais, algumas são deixadas para estudo posterior, ficando no apêndice;
- O autor dá a indicação da variedade de *registros algébricos* que representam o mesmo conceito matemático do CVV;
- O autor explora a *formação* de *registros* a partir do apoio computacional com qualidade boa o que permite a percepção dos dados relevantes das situações-problema;
- O autor explora a *conversão* de registros;
- O autor explora nos casos de alguns conceitos a *transição interna* do CUV para o CVV;
- O autor emprega de modo pontual o recurso de metáforas para comunicar ideias intuitivas ao leitor.

4.2.2 O livro de Guidorizzi (2010)

O livro de Guidorizzi (2010) constitui outra obra acessível aos alunos do IFCE. O mesmo foi recomendado como referência para o estudo do CVV. Com relação, por exemplo, à noção de *curvas parametrizadas*, apesar de se tratar de uma edição nova, Guidorizzi (2010) não exibe nenhum *registro gráfico* em 3D formado a partir do computador.

Na figura 75, divisamos duas figuras que apoiam o raciocínio de um exemplo explorado por Guidorizzi (2010, p. 119). Observamos que o autor não acrescenta nenhum comentário explicativo da figura. Coloca ainda uma seta indicando algum elemento importante da figura, todavia, deixa para o leitor a compreensão da natureza do que se trata.


EXEMPLO 1. Desenhe a imagem de $F(t) = (t, t, t), t \geq 0$.

Solução A imagem de F é a semi-reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \geq 0$$

EXEMPLO 2. Desenhe a imagem de $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$.

Solução A imagem de F é uma circunferência situada no plano $z = 1$, com centro no eixo z e raio 1.

Figura 75. A noção de *curvas parametrizadas* exploradas em Guidorizzi (2010, p. 120).

Na figura 75, ainda, Guidorizzi (2010, p. 119) explora figuras precárias sem o auxílio computacinal. Reparamos na figura 76, a *definição formal* por meio de *épsilon* e *delta* para a interpretação do comportamento de *limites* envolvendo uma função que assume valores no $\mathbb{R}^n$. Reparamos a inversão do autor que, a titulo de observação, considera o valor dimensional do espaço $n = 2$ e descreve a "visão geométrica" do significado de $\lim_{t \to t_0} F(t) = L$. O autor explora apenas registros algébricos, a língua natural e figuras.

Definição 1. Seja F uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$ e seja t_0 um ponto do domínio de F ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de F. Dizemos que $F(t)$ *tende a L*, $L \in \mathbb{R}^n$, *quando t tende a* t_0, e escrevemos $\lim_{t \to t_0} F(t) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in D_F$,

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \| F(t) - L \| < \epsilon.$$

Observação

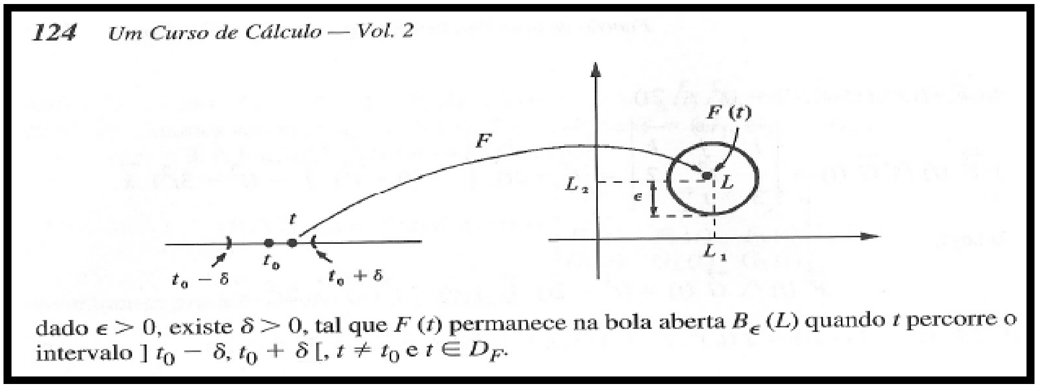
$$\| F(t) - L \| < \epsilon \Leftrightarrow F(t) \in B_\epsilon(L)$$

onde $B_\epsilon(L)$ é a bola aberta de centro L e raio ϵ : $B_\epsilon(L) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \| Y - L \| < \epsilon\}$.

A figura seguinte nos dá uma visão geométrica do significado de $\lim_{t \to t_0} F(t) = L$, no caso $n = 2$:

Figura 76. Guidorizzi (2010, p. 123) descreve logo no início da seção da definição formal por *épsilon* e *delta*.

Observamos na página anterior que o mesmo descreve a interpretação topológica do conceito como vemos na figura 77. Identificamos o termo "bola aberta" na figura 77 o que é omitido ou não mencionado no contexto do CUV.

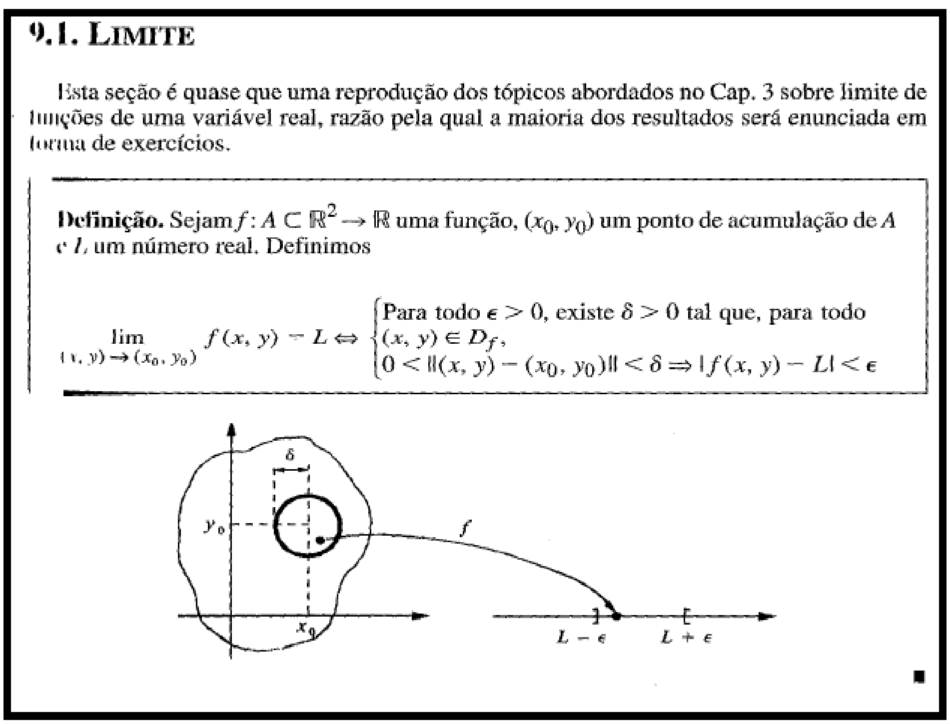

124 *Um Curso de Cálculo — Vol. 2*

dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $F(t)$ permanece na bola aberta $B_\epsilon(L)$ quando t percorre o intervalo $]\,t_0 - \delta, t_0 + \delta\,[$, $t \neq t_0$ e $t \in D_F$.

Figura 77. Depois fornece a interpretação topológica da mesma noção no $\mathbb{R}^2$.

Registramos que a prática de iniciar seções de capítulos por meio de definições formais gerais é recorrente nesta obra. De fato, na figura 78, Guidorizzi (2010, p. 163), inicia a discussão a partir da definição formal e sublinha a curiosa frase: "Esta seção é quase uma reprodução dos tópicos abordados no Cap. 3 sobre limite...razão pela qual a maioria dos resultados será enunciada em forma de exercícios.".

Tal opção retira a importância das propriedades que devem ser caracterizadas pelos teoremas e, sobretudo, as propriedades que permanecem preservadas no contexto do CVV ou as propriedades e teoremas que precisam ser re-adaptados ao novo contexto de aplicação. Tal atitude compromete a *transição interna* do CUV para o CVV.


9.1. LIMITE

Esta seção é quase que uma reprodução dos tópicos abordados no Cap. 3 sobre limite de funções de uma variável real, razão pela qual a maioria dos resultados será enunciada em forma de exercícios.

Definição. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Definimos

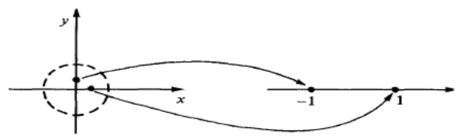
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que, para todo} \\ (x,y) \in D_f, \\ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \end{cases}$$

Figura 78. Guidorizzi (2010) inicia o capítulo por meio de uma definição formal de limite e depois exmplifica o caso particular com a interpretação geométrica.

Na figura 78, o autor inicia a seção com a definição formal e de modo peremptório exibe a descrição topológica com a exploração de noções topológicas que preservam um caráter inédito, com respeitos às preocupações anteriores no contexto do CUV. Tal atitude pode dificultar a *transição interna* do CUV para o CVV.

EXEMPLO 3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tem limite em (0, 0)? Justifique.

Solução Inicialmente, vejamos como se comportam os valores $f(x, y)$ para (x, y) próximo de $(0, 0)$. Sobre o eixo x temos: $f(x, 0) = 1$, $x \neq 0$. Sobre o eixo y, $f(0, y) = -1$, $y \neq 0$.



EMPLO 6. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

lução

Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ e tomemos $\gamma_1(t) = (0, t)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$.

168 *Um Curso de Cálculo — Vol. 2*

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{0^2}{0^2 + t^2} = 0$$

e

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

CUIDADO: $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ não é limitada!

Figura 79. Guidorizzi (2010, p. 169) apresenta exercícios que exploram condições necessárias para a verificação de propriedades de *limites*.

Na figura 79, exibimos dois exemplos de questões resolvidas com o auxílio da língua natural e *registros algébricos* e figuras. O problema diz respeito à brevidade das explicações fornecidas pelo autor. Observamos a advertência colocada na figura 79, do lado direito, na qual Guidorizzi (2010, p. 168) indica com o termo "cuidado" e simplesmente afirma que $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ não é limitada.

Aqui o mesmo poderia aproveitar as ideias e estratégias estudadas no CUV, comparando a função acima, por exemplo, com o comportamento da função $\dfrac{1}{x}$ que também possui comportamento ilimitado e pode auxiliar o entendimento do leitor. Ademais, o mesmo não explora nenhum *registro gráfico* para leitor compreender sua afirmação. Por fim, observamos a preferência por *registros algébricos* na seção de exercícios. Reparamos que a *visualização* e a *percepção* são negligenciadas.

Exercícios 9.1

1. Calcule, caso exista.

a) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

f) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

g) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy}{y-x^3}$

h) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy^2}{x^2-y^2}$

2. Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ (veja Exemplo 9 — Seção 8.2).

a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2 + b^2 > 0$; mostre que, quaisquer que sejam a e b,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

Tente visualizar este resultado através das curvas de nível de f.

b) Calcule $\lim\limits_{t\to 0} f(\delta(t))$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$.

(Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de f.)

c) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ existe? Por quê?

3. Sejam γ_1 e γ_2 curvas satisfazendo as condições do Exemplo 4. A afirmação:

"$\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma_2(t)) = L \Rightarrow \lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x,y) = L$"

é falsa ou verdadeira? Justifique.

Figura 80. O estilo de exercício de Guidorizzi (2010, p. 168) explora apenas registros algébricos e a língua natural.

Na introdução das *derivadas parciais*, registramos o emprego de *registros algébricos* do CUV, com a intenção relacionar a noção de derivada de funções em uma variável real com a noção de derivada para funções em duas variáveis reais, como vemos na figura 81. Nesta figura divizamos registros algébricos do tipo $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ que se assemelha aos registros usuais empregados no contexto de resolução de problemas envolvendo a noção de *taxa de variação* no contexto do CUV.

10.1. Derivadas Parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0, podemos considerar a função g de uma variável dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se *derivada parcial de f, em relação a x, no ponto* (x_0, y_0) e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. De acordo com a definição de derivada temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Portanto, f é diferenciável em todo (x, y) de $\mathbb{R}^2$, ou seja, f é uma função diferenciável. ■

Figura 81. Guidorizzi (2010, p. 170) introduz as notações de *derivadas parciais*.

O autor adverte a equivalência entre a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e o outro símbolo denotado por $\frac{\partial z}{\partial x}|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$. Reparamos a diferença entre os dois *registros algébricos*. Na figura 82 destacamos o estilo de exercícios resolvidos sem o apelo visual.

EXEMPLO 2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável em (0, 0)? Justifique.

Solução

f não é contínua em (0, 0); logo, *f não é diferenciável* em (0, 0). Para a não-continuidade de f em (0, 0), veja Exercício 2, Seção 9.1. Observe que f admite derivadas parciais em (0, 0). ■

EXEMPLO 3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Figura 82. *Registros algébricos* e a língua natural nos exercícios resolvidos.

Na figura 83, Guidorizzi (2010, p. 186) observamos a profusão de simbologias ou notações possíveis e que encerram o mesmo objeto representado.

14.1. Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Seja a função $z = f(x, y)$; na Seção 10.1 vimos como construir as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Da mesma forma, podemos, agora, construir as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) \text{ etc.}$$

Figura 83. O autor introduz as notações para as *derivadas mistas*.

Reparamos que a diversidade de notações acima é conseqüência do tratamento e a simplificação ou a expansão de *registos algébricos* que obedecem à regras particulares e específicas do CVV. Na figura 84 observamos o *tratamento* prioritamente algébrico aos registros.

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 4x^5y^4 - 6x^2y + 3$. Calcule todas as derivadas parciais de 2.ª ordem.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 20x^4y^4 - 12xy \ e \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 16x^5y^3 - 6x^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^3y^4 - 12y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^4y^3 - 12x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(16x^5y^3 - 6x^2) = 48x^5y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(16x^5y^3 - 6x^2) = 80x^4y^3 - 12x. \quad \blacksquare$$

Figura 84. Guidorizzi (2010) explora apenas o *tratamento* dos *registros algébricos* sobre *derivadas parciais mistas*.

Na figura 84 observamos o tratamento prioritamente algébrico aos registros. Guidorizzi (2010) fornece um teorema importante do CVV que apresenta o enunciado de um teorema que proporciona dificuldades na identificação das hipóteses. A exploração ulterior deste teorema não envolve qualquer recurso computacional e o emprego de *registros gráficos* 3D.

Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, é dita de *classe* C^n em A se f admitir todas as derivadas parciais de ordem n contínuas em A.

O teorema que enunciaremos a seguir conta-nos que se f for de classe C^2 em A, A aberto, então as derivadas parciais *mistas* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ serão iguais em A.

Teorema (*de Schwarz*). Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A, então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in A$.

Figura 85. O enunciado do teorema envolvendo a comutatividade das *derivadas mistas*.

Na figura 86, Guidorizzi (2010, p. 307) inicia a seção com a definição formal dos pontos extremantes e não usa como recurso nenhum *regitro gráfico* em 2D ou 3D.

16.1. Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e seja $(x_0, y_0) \in A$, com $A \subset D_f$. Dizemos que (x_0, y_0) é *ponto de máximo de* f em A se, para todo (x, y) em A,

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Sendo (x_0, y_0) ponto de máximo de f em A, o número $f(x_0, y_0)$ será denominado *valor máximo* de f em A.

Dizemos que $(x_0, y_0) \in D_f$ é *ponto de máximo global ou absoluto* de f se, para todo $(x, y) \in D_f$,

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Diremos, neste caso, que $f(x_0, y_0)$ é o *valor máximo* de f.

Finalmente, diremos que $(x_0, y_0) \in D_f$ é *ponto de máximo local* de f se existir uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tal que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo $(x, y) \in B \cap D_f$.

Deixamos a seu cargo definir ponto de mínimo de f em $A \subset D_f$, ponto de mínimo global e ponto de mínimo local.

Os pontos de máximo e de mínimo de uma função f denominam-se *extremantes* de f.

Figura 86. Guidorizzi (2010, p. 310) inicia a seção com a *definição formal*.

Seu estilo se preserva na seção de exercícios resolvidos ao utilizar apenas a *lingua natural* e *registros algébricos* como vemos na figura 87. Uma pequena exceção, ao empregar uma figura em 2D para efetuar a análise na borda em que tem a oportunidde de re-empregar os *registros algébricos* do CUV no contexto do CVV.

EXEMPLO 1. Determine os extremantes de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \text{ em } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}.$$

Solução Como f é contínua e A compacto, vamos proceder como dissemos anteriormente.

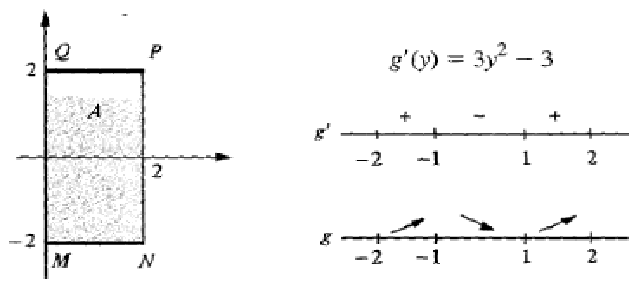
Pontos críticos de f no interior de A $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$.

As soluções do sistema $\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$

são: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. Segue que $(1, 1)$ e $(1, -1)$ são os únicos pontos críticos no interior de A. Temos

$$f(1, 1) = -4 \quad \text{e} \quad f(1, -1) = 0.$$

Análise dos pontos de fronteira $g(y) = f(2, y) = y^3 - 3y + 2, -2 \leq y \leq 2,$



fornece-nos os valores que f assume no segmento NP. $g(-2) = 0$, $g(-1) = 4$, $g(1) = 0$ e $g(2) = 4$.

Assim, o valor máximo de f no segmento NP é 4 e o valor mínimo é 0. O valor máximo é atingido nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 2)$: $f(2, -1) = 4$ e $f(2, 2) = 4$.

Figura 87. O autor não explora a *percepção* e a *visualização* de *registros* em 3D.

No que diz respeito ao teorema que permite identificar os pontos extremantes de uma função, como evidenciamos na figura 87, o autor explora apenas uma figura no plano, na medida em que analisa a borda da superfície. Pela sua abordagem, apenas com o emprego imediato do *tratamento* dos *registros algébricos* é que consegue obter e indicar algumas propriedades da superfície no $\mathbb{R}^3$ analisada.

Com respeito ao conceito de *integral múltipla*, sua abordagem não explora a visualização e o estilo dos capítulos anteriores é preservado, com destaque apenas para figuras, em alguns casos apenas, de figuras no plano. Para concluir nossas análises do livro de Guidorizzi (2010), salientamos:

- O autor efetua várias demonstrações no contexto do CVV, todavia, no contexto de SUS aplicações, evidenciamos que apenas o *tratamento* de *registros algébicos* é deixado à cargo do leitor;
- O livro explora, em raras exceções, registros gráficos fornecidos por computador;
- Em várias seções, o autor inicia pela descrição de *definições formais*;
- A *conversão* de registros é pouco explorada pelo autor;

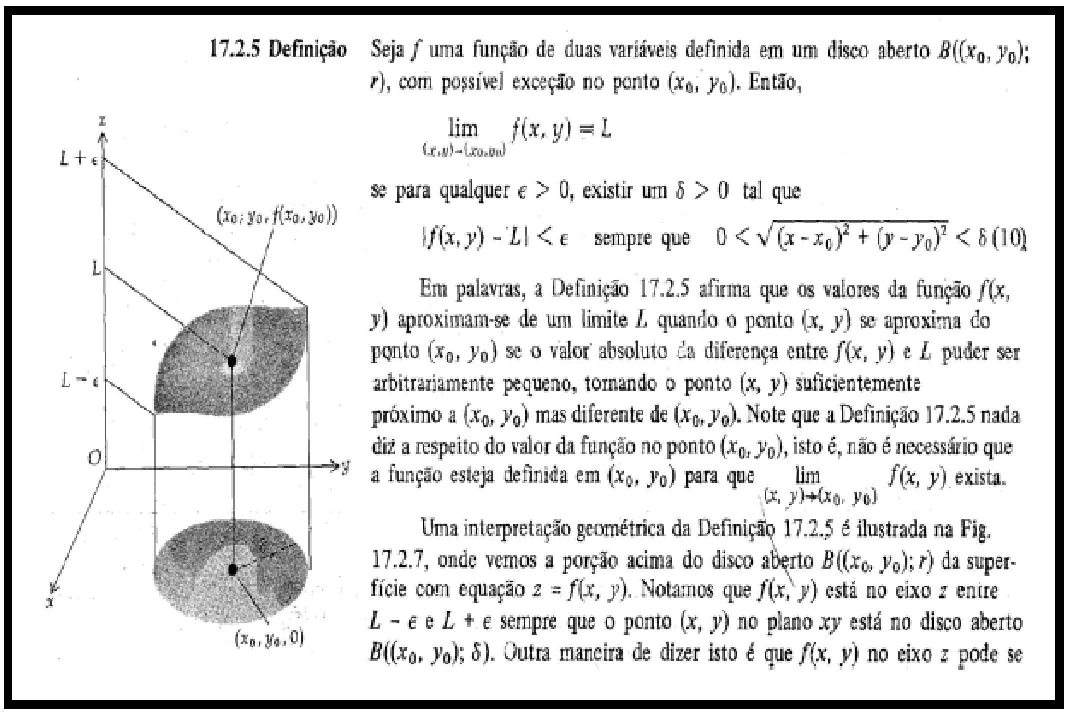
- O autor não explora ou promove a *transição interna* do CUV para o CVV;

- O autor não aborda o teste da 2ª derivada com o estudo das curvas de nível.

- Não se observa uma ênfase mais representativa no sentido de estimular as relações entre os conceitos do CUV com o CVV, o que compromete a *transição interna*.

4.2.3 O livro de Leithold (1999)

O livro de Leithold(1999) é a outra obra didática que os alunos de Cálculo III, têem acesso livre ao decorrrer da disciplina. Na figura 88 observamos a condição lógica da definição e limite. O autor explora a *conversão de registros* ao exibir a figura, do lado esquerdo, uma figura em 3D como auxílio ao entendimento das propriedades geométricas envolvidas.



17.2.5 Definição Seja f uma função de duas variáveis definida em um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, com possível exceção no ponto (x_0, y_0). Então,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

se para qualquer $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad (10)$$

Em palavras, a Definição 17.2.5 afirma que os valores da função $f(x, y)$ aproximam-se de um limite L quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto (x_0, y_0) se o valor absoluto da diferença entre $f(x, y)$ e L puder ser arbitrariamente pequeno, tomando o ponto (x, y) suficientemente próximo a (x_0, y_0) mas diferente de (x_0, y_0). Note que a Definição 17.2.5 nada diz a respeito do valor da função no ponto (x_0, y_0), isto é, não é necessário que a função esteja definida em (x_0, y_0) para que $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ exista.

Uma interpretação geométrica da Definição 17.2.5 é ilustrada na Fig. 17.2.7, onde vemos a porção acima do disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ da superfície com equação $z = f(x, y)$. Notamos que $f(x, y)$ está no eixo z entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$ sempre que o ponto (x, y) no plano xy está no disco aberto $B((x_0, y_0); \delta)$. Outra maneira de dizer isto é que $f(x, y)$ no eixo z pode se

Figura 88. A definição de *limite* é introduzida com arrimo na interpretação geométrica.

Por outro lado, na seção de exercícios resolvidos, como evidenciamos abaixo, Leithold (1999, p. 711), explora apenas o *tratamento de registros algébricos*. Reparamos no exercício resolvido usando a definição por épsilon e delta, a verificação apenas das condições lógica e nenhuma declaração qualitativa à respeito da função na qual a definição é aplicada.

A interpretação geométrica é explorada apenas na ocasião isolada em que apresenta a *definição formal*, como vemos nas figuras 88 e 89.

EXEMPLO 1: Demonstre que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$ aplicando a Definição 17.2.5.	*SOLUÇÃO*: Queremos demonstrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\lvert(2x+3y) - 11\rvert < \epsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$

SOLUÇÃO: Queremos demonstrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta >$
> 0 tal que

$$|(2x+3y) - 11| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

Aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|2x+3y-11| = |2x-2+3y-9| \le 2|x-1| + 3|y-3|$$

Como

$$|x-1| \le \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} \quad \text{e} \quad |y-3| \le \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

podemos concluir que

$$2|x-1| + 3|y-3| < 2\delta + 3\delta$$

sempre que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} < \delta$$

Assim, se tomamos $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$, temos

$$|2x+3y-11| \le 2|x-1| + 3|y-3| < 5\delta = \epsilon$$

sempre que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} < \delta$$

Isto prova que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$.

Figura 89. Leithold (1999, p. 711) explora apenas o *tratamento* dos *registros* e a interpretação geométrica é abordada de modo isolado.

Na figura 90, Leithold (1999, p. 754) aponta a diversidade de *registros algébricos* que podem designar o objeto que chamamos de *derivada parcial*, como vemos na figura 90.

17.9 DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Se f é uma função de duas variáveis, então, em geral, D_1f e D_2f também são funções de duas variáveis. E se as derivadas parciais destas funções existem, elas são chamadas derivadas parciais segundas de f, enquanto que D_1f e D_2f são chamadas derivadas parciais primeiras de f. Existem quatro derivadas parciais segundas de uma função de duas variáveis. Se f é uma função de duas variáveis x e y, as notações

$$D_2(D_1f) \qquad D_{12}f \qquad f_{12} \qquad f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

indicam a derivada parcial segunda de f, que é obtida primeiro; derivando f parcialmente em relação a x e depois, derivando parcialmente o resultado com relação a y. Esta derivada parcial segunda é definida por

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(x, y+\Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \qquad (1)$$

se este limite existir. As notações

$$D_1(D_1f) \qquad D_{11}f \qquad f_{11} \qquad f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

denotam a derivada parcial segunda de f, que é obtida derivando parcialmente duas vezes em relação a x. Temos a definição

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \qquad (2)$$

se este limite existir. Definimos as outras duas derivadas parciais segundas de modo análogo e obtemos

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x+\Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Figura 90. Leithold (1999, p. 754) adota os *registros algébricos* que deseignam a *derivada parcial*.

Sublinhamos que Leithold (1999, p. 754) adota a identificação dos registros algébricos f_{12} e f_{xy}. Tal atitude pode confundir o leitor na medida em que o primeiro registro encobre ou esconde as relações que designam as variáveis 'x' e 'y'. O autor explora, apenas na ocasião da apresentação da *definição formal*, a interpretação geométrica, entretanto, a exploração dos exercícios resolvidos e propostos prioriza o *tratamento* e a *conversão* é pouco explorada.

Por outro lado, identificamos a não preserva as notações adotadas e, ao descrever a propriedade da comutavidade das *derivadas mistas*, volta a designar as derivadas em termos das variáveis 'x' e 'y', como vemos na figura 91. Tal atitude pode confundir o leitor.

17.9.1 Teorema Suponhamos que f seja uma função de duas variáveis x e y definida sobre um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e que f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} também são definidas em B. Além disso, suponhamos que f_{xy} e f_{yx} sejam contínuas em B. Então,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Figura 91(a). Leithold (1999, p. 756) apresenta o teorema de Clairaut-Shawrz.

Na seção relativa à determinação de *pontos extremos*, na figura 91, o autor explora registros em língua natural, *registros algébricos* e um *registro gráfico* em 3D.

EXEMPLO 1: Dada a função f definida por

$$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

determine se f tem algum extremo relativo.

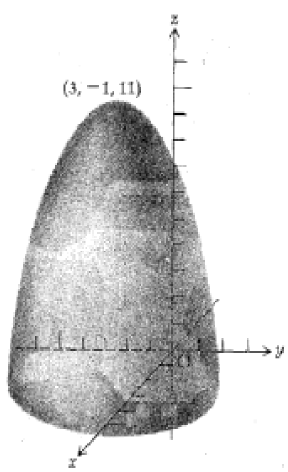


Figura 17.10.2

SOLUÇÃO: Como f e suas derivadas parciais primeiras existem em todo (x, y) em R_2, o Teorema 17.10.6 é aplicável. Derivando, temos

$$f_x(x, y) = 6 - 2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = -4 - 4y$$

Tomando $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ iguais a zero, obtemos $x = 3$ e $y = -1$. O gráfico (veja Fig. 17.10.2 para um esboço) da equação $z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ é um parabolóide tendo um eixo vertical, com vértice em $(3, -1, 11)$ e concavidade para baixo. Podemos concluir que $f(x, y) < f(3, -1)$ para todo $(x, y) \neq (3, -1)$; logo, pela Definição 17.10.4, $f(3, -1) = 11$ é um valor máximo relativo da função. Segue da Definição 17.10.1 que 11 é o valor máximo absoluto de f em R_2.

Figura 91(b). Na seção de derivadas parciais o autor explora um *registro gráfico* em 3D.

A *conversão de registros* pode promover a comunicação das ideias qualitativas dos conceitos do CVV, todavia, divisamos situações em que as condições lógicas e formais as encobrem. Um exemplo disso diz respeito á noção de *ponto de sela*. Na figura 92, a *definição formal* é significada a partir da *conversão de registros*. Do lado esquerdo, a figura 92, evidenciamos a *conversão* de *registros* apresentada ao leitor.

762 CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

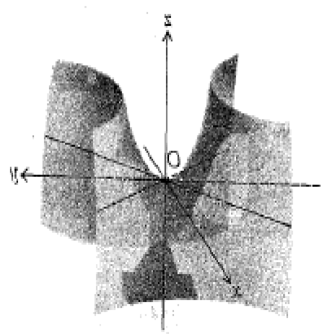


Figura 17.10.1

Para esta função vemos que $f_x(x, y) = -2x$ e $f_y(x, y) = 2y \cdot f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ são iguais a zero. Um esboço do gráfico da função é mostrado na Fig. 17.10.1, e vemos que ela tem forma de sela em pontos próximos à origem. É claro que esta função f não satisfaz a Definição 17.10.4 nem 17.10.5, quando $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Temos um teste da derivada segunda que dá condições que garantem se uma função tem um extremo relativo no ponto onde as derivadas parciais primeiras se anulam. Contudo, muitas vezes é possível determinar extremos relativos de uma função pelas Definições 17.10.4 e 17.10.5. Isto é ilustrado no próximo exemplo.

Figura 92. Leithold (1999, p. 762) apresenta um único *regitros gráfico* que ilustra a noção de *ponto de sela* com arrimo em um *registro gráfico* em 3D.

Na figura 93, o autor relaciona a definição formal com a ideia de volume.

18.2 CÁLCULO DAS INTEGRAIS DUPLAS E INTEGRAIS ITERADAS

Para funções de uma variável, o teorema fundamental do cálculo propor na um método para calcular uma integral definida encontrando uma ant rivada (ou integral indefinida) do integrando. Temos um método corresp dente para calcular uma integral dupla que envolve execução sucessiva d tegrais simples. O desenvolvimento rigoroso deste método pertence a um so de cálculo avançado. Nossa discussão é intuitiva, e usamos a interpret geométrica da integral dupla como a medida de um volume. Primeiro d volveremos o método para a integral dupla numa região retangular.

Seja f uma função dada, que é integrável numa região retangular fec R no plano xy limitada pelas retas $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$ e $y = b_2$. Co deremos $f(x, y) \geqslant 0$ para todo (x, y) em R. Veja a Figura 18.2.1, que mostra um esboço do gráfico da equação $z = f(x, y)$ quando (x, y) est em R. O número que representa o valor da integral dupla

$$\iint_R f(x, y)\,dA$$

é a medida do volume do sólido entre a superfície e a região R. Encontra este número pelo método das secções planas paralelas, que foi discutido Sec. 7.4.

Seja y um número em $[a_2, b_2]$. Consideremos o plano paralelo ao no xy que passa pelo ponto $(0, y, 0)$. Seja $A(y)$ a medida da área da plana de intersecção deste plano com o sólido. Pelo método das secções

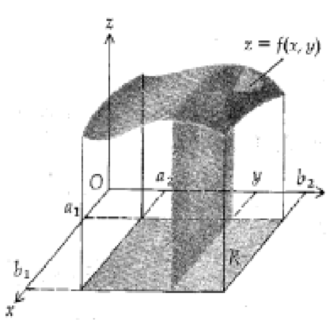


Figura 18.2.1

Figura 93. Leithold (1999) introduz a noção de *integral múltipla*.

EXEMPLO 3: Expresse como uma integral dupla e uma integral iterada, a medida do volume do sólido que está acima do plano xy, limitado pelo parabolóide elíptico $z^2 = x^2 + 4y^2$ e o cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Calcule a integral iterada para encontrar o volume do sólido.

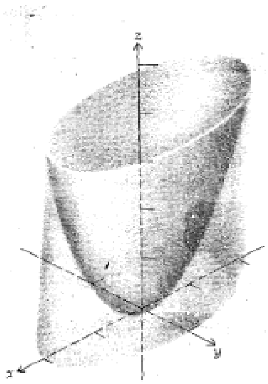


Figura 18.2.6

SOLUÇÃO: O sólido é mostrado na Fig. 18.2.6. Usando propriedades de simetria, encontramos o volume da porção do sólido no primeiro octante que é um quarto do volume pedido. Então, a região R no plano xy é a limitada pelos eixos x e y e a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Essa região é mostrada na Fig. 18.2.7, que também mostra a i-ésima sub-região de uma partição retangular de R, onde (ξ_i, γ_i) é um ponto qualquer nesta i-ésima sub-região. Se V unidades cúbicas é o volume do sólido dado, então, pelo Teorema 18.1.4, temos

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + 4\gamma_i^2)\, \Delta_i A = 4 \iint_R (x^2 + 4y^2)\, dA$$

Para expressarmos a medida do volume como uma integral iterada, dividimos a região R em n faixas verticais. A Figura 18.2.8 mostra a região R e a i-ésima faixa vertical com largura de $\Delta_i x$ unidades e comprimento de $\frac{1}{2}\sqrt{4 - \xi_i^2}$ unidades, onde $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Usando a fórmula (5) temos

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{\sqrt{4-\xi_i^2}/2} (\xi_i^2 + 4y^2)\, dy \right] \Delta_i x$$

$$= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx$$

Calculando a integral iterada, temos

$$V = 4 \int_0^2 \left[x^2 y + \tfrac{4}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}/2} dx$$

$$= 4 \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 \sqrt{4 - x^2} + \tfrac{1}{6}(4 - x^2)^{3/2} \right] dx$$

$$= \tfrac{4}{3} \int_0^2 (x^2 + 2)\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{3} x (4 - x^2)^{3/2} + 2x\sqrt{4 - x^2} + 2 \text{ arc sen } \tfrac{1}{2} x \Big]_0^2$$

$$= 4\pi$$

Portanto, o volume é 4π unidades cúbicas.

Figura 94. A *conversão* de *registros*.

Para concluir esta seção de análise da obra de Leithold (1999), indicamos que:

- O autor varia as notações empregadas nos conceitos do CVV, o que pode confundir o leitor;

- O autor apresenta em raríssimos casos, o auxilio de *registros gráficos* em 3D obtidos por computador o que compromete a *conversão de registrios*;

- O autor inicia capítulos e seções com *definições formais* e negligencia o caráter intuitivo dos conceitos;

- O autor não evidencia as ideias do CUV na demonstração dos resultados do CVV;

- O autor privilegia o *tratamento* de *registros* em detrimento da *formação* e *conversão* de registros.

- O autor não explora o teste da 2ª derivada com o estudo das curvas de nível;

- O autor não explora ou reforça a *transição interna* do CUV para o CVV.

Na próxima seção discutiremos o livro de Kaplan (1962). Os motivos para tal discussão são apoiados no fato de que sua análise do teste da 2ª derivada envolve o estudo das *curvas de nível* da função, o que é negligenciado pelos Guidorizzi (2010), Leithold (1999) e Stewart (2004).

4.2.4 Um critério visual para a sua identificação de pontos extremantes

No rol das noções matemáticas que foram escolhidas como análise, o conteúdo relacionado à identificação de *pontos extremantes* apresenta características geométricas pouco exploradas pelos livros didáticos consultados nesta tese. Em geral no seu estudo, dada à complexidade intrínseca da demonstração propriamente dita do teorema chamado de *teste da hessiana* ou *teste da 2ª derivada*, a atividade dos estudantes se restringe à verificação das condições descritas nos item que apresentamos encontrado em Kaplan (1962).

Teorema: (teste da Hessiana) Consideremos $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 numa bola aberta $B = B_r(x_0, y_0)$ e vamos supor que (x_0, y_0) é um ponto crítico de $z = f(x, y)$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ e denotando por $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ e $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, temos as seguintes possibilidades:

(I) $B^2 - A.C < 0$ e A<0, então f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0);
(II) $B^2 - A.C < 0$ e A>0, então f tem um valor mínimo relativo em (x_0, y_0);
(III) $B^2 - A.C > 0$, então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0).
(IV) $B^2 - A.C = 0$ o teste é inconclusivo.

Como mencionamos e apresentamos um exemplo proposto pela avaliação do exame ENADE/2005, a abordagem ordinária dos livros que consultamos fornecem os critérios analíticos descritos acima. Para este tipo de abordagem, o aluno pode aplicar o critério, identificar e formular sentenças proposicionais à respeito da resposta, sem necessariamente possui um significado ou uma imagem mental sobre o que o mesmo declara.

Por outro lado, de todos os livros analisados, destacaremos a seguir as considerações feitas por Kaplan (1962, p. 149) que, ao decorrer de sua exposição, adota uma linguagem que permite uma discussão intuitiva e não apenas formal do teorema. Além disso, o referido autor foi o único que encontramos que sugere uma classificação visual para pontos extremantes de uma função.

Mas antes de nos determos a sua demonstração, gostaríamos de desenvolver alguns comentários sobre as possíveis formas de interpretar e fornecer uma resposta em situações problema envolvendo esse teste, no caso dos itens onde a Hessiana indica *pontos de sela* e onde o teste é inconclusivo. Para tanto, observamos na figura 95, alguns exemplos interessantes fornecidos por Kaplan (1962) e que sugerem um “critério visual” para a identificação de *pontos extremantes* e *pontos de sela*.

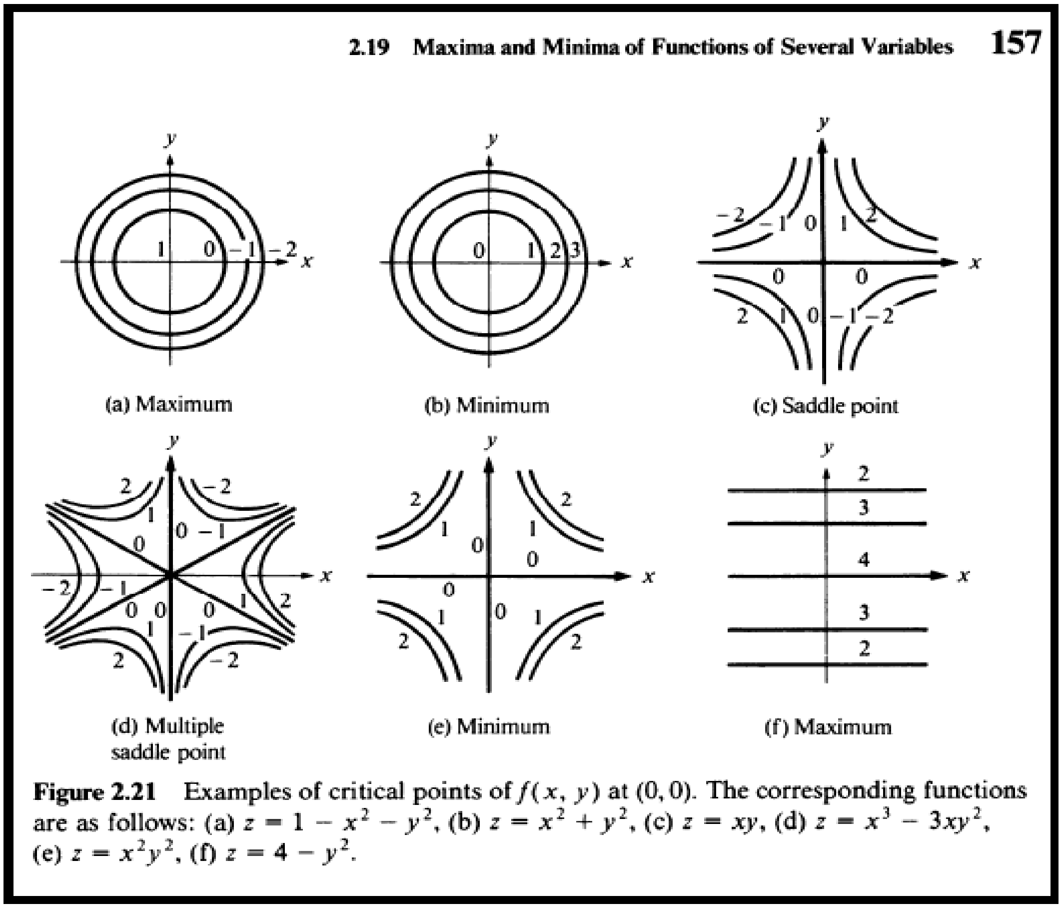


Figure 2.21 Examples of critical points of $f(x, y)$ at $(0, 0)$. The corresponding functions are as follows: (a) $z = 1 - x^2 - y^2$, (b) $z = x^2 + y^2$, (c) $z = xy$, (d) $z = x^3 - 3xy^2$, (e) $z = x^2y^2$, (f) $z = 4 - y^2$.

Figura 95. Caracterização segundo o comportamento geométrico das *curvas de nível* proposto por Kaplan (1962, p. 157).

Nos chama atenção o fato de que, a maioria dos livros consultados, com exceção deste, interpreta e declara o comportamento das *curvas de nível* de uma superfície, nas vizinhanças de um ponto crítico candidato à máximo ou mínimo, aonde o teste é aplicado, se assemelhem à elipses ou circunferências (itens (a) e (b).

Já no caso do item (c), temos $f(x, y) = xy$. Quando aplicamos o teste para esta função, temos $\nabla f(x, y) = (y, x) = (0,0) \Leftrightarrow (x, y) = (0,0)$. Assim, teremos $H(x, y) = (1)^2 - 0 \cdot 0 = 1 > 0$ temos ponto de sela na origem, todavia, em geral os livros consultados exibem o modelo geométrico do lado direito na ilustração abaixo, entretanto, apesar da superfície do lado esquerdo possuir de modo semelhante um ponto de sela na origem, seu comportamento é dessemelhante.

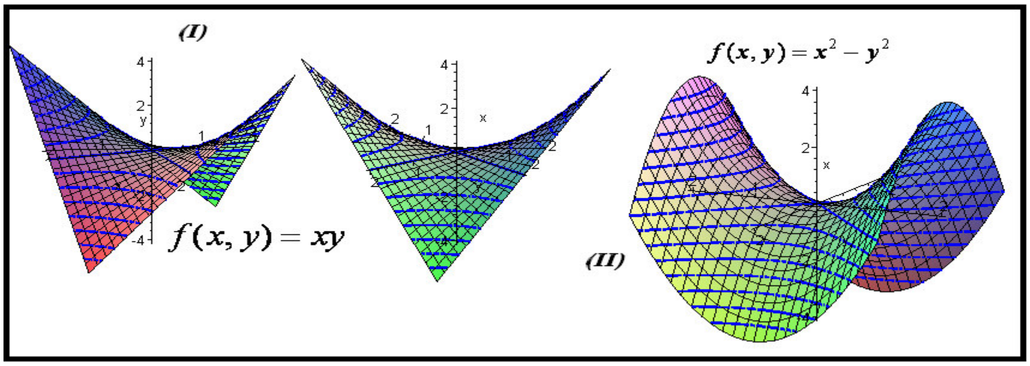


Figura 96. Modelos geométricos em 3D que produzem significado para *pontos de sela*.

Todavia, Kaplan (1962, p. 158) exibe a função (e) $f(x,y) = x^2 y^2$ que apresenta *curvas de nível* nas vizinhanças da origem que se não se comportam deste modo como os livros didáticos sugerem. Note-se que temos, pelo teste da Hessiana, que: $\nabla f(x,y) = (2xy^2, 2x^2 y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Além disso: $H(x,y) = B^2 - A \cdot C = (4xy)^2 - (2y^2)(2x^2) = 12x^2 y^2$. E concluímos que $H(0,0) = 0$, portanto o teste é inconclusivo. Por outro lado, com o auxilio computacional, podemos prosseguir nossa investigação, diferentemente no ambiente lápis e papel, onde toda a atividade do estudante se dá por encerrado após a aplicação do teste. Na figura 97 vemos que existe um ponto de mínimo.

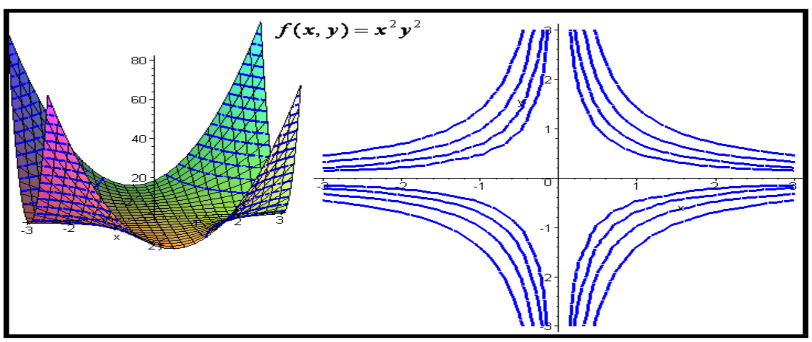


Figura 97. Superfície com ponto de mínimo com *curvas de nível* que se assemelham a hipérboles

No livro de Wade (2004, p. 374) encontramos os seguintes exemplos: $f(x,y) = x^2$ e $g(x,y) = x^3$. Mas quando analisamos a expressão $B^2 - A \cdot C = f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy} = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$ para a primeira função. No segundo caso temos $B^2 - A \cdot C = f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy} = 0^2 - 6x \cdot 0 = 0$. Todavia, o autor não declara que neste caso é inconclusivo, e sim, ao apresentar estes exemplos, menciona que podemos ter um ponto de máximo, podemos ter um ponto de sela ($g(x,y) = x^3$).

No caso da função $f(x,y)=x^2y^2$, intuimos pela figura que o ponto é de mínimo, mas suas curvas de nível não se encaixam na descrição dada inicialmente. Outro caso interessante acontece com a função $f(x,y)=x^3-3xy^2$ que, conforme Kaplan (1962) teremos vários pontos de sela nas vizinhanças de $(0,0)$, todavia, pelo teste da Hessiana, escrevemos: $\nabla f(x,y)=(3x^2-3y^2,-6xy)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$.

Deste modo, podemos aplicar o teste apenas em um ponto. Continuando o raciocínio, escrevemos $H(x,y)=B^2-A\cdot C=(-6y)^2-(6x)(-6x)=36y^2+36x^2$. Observamos que na origem teremos $H(0,0)=0$, portanto, o teste é inconclusivo. Mas assim, de acordo com as observações de Wade (2004), podem existir algum ponto de máximo, algum ponto de mínimo, entretanto, pela figura 98, e o comportamento das *curvas de nível*, devemos ter pontos de sela. Mas estranhamos a afirmação de Kaplan (1962) quando menciona que existem múltiplos ponto de sela.

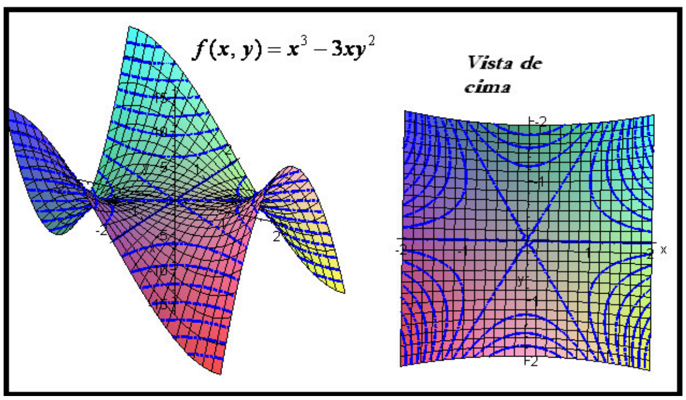


Figura 98. Superfície que apresenta múltiplos *pontos de sela*.

Nossa última função apontada por Kaplan (1962) é descrita por $z=4-y^2$. Seu gráfico exibido abaixo se assemelha a uma cabana. Notamos que seguindo a orientação de alguns livros didáticos, observando suas *curvas de nível* que são retas, não poderíamos afirmar que existe um ponto de máximo ou mínimo. Neste caso, temos $\nabla f(x,y)=(0,-2y)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$. Quando aplicamos o teste temos: $H(x,y)=B^2-A\cdot C=(0)^2-(0)(-2)=0\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Na figura 99 observamos a interpretação intuitiva, baseada na atribuição de qualidades metafóricas ao objeto em questão. Atitudes como esta é aconselhada por autores como Butchart (2001), D´Amore (2007), Dias (2007) e Duval (1995b).

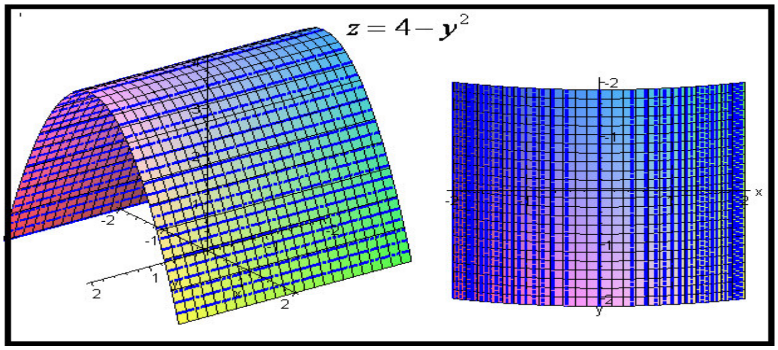


Figura 99. Superfície com a aparência de uma "cabana".

Kaplan (1962) utiliza a derivada *direcional*, aplicada duas vezes, para encontrar os *extremantes* da função $z = f(x, y)$.

Seu estudo se reduz à análise do comportamento da função $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(x, y) = A \cdot Cos^2(\theta) + 2 \cdot B \cdot Cos(\theta) \cdot Sen(\theta) + C \cdot Sen^2(\theta)$ (*), que obtem-se derivando a expressão $\frac{\partial f}{\partial u}(x, y)$. Passamos então a considerar a vetor: $\vec{u} = (x, y) = (Cos(\theta), Sen(\theta))$, e θ é o ângulo que este forma com a parte positiva do eixo Ox.

No próximo passo, observamos que para $Cos(\frac{\pi}{2}) = Cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$, tomaremos $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ e $\theta \neq \frac{3\pi}{2} \to Cos(\theta) \neq 0$ e então colocamos em (*), o termo $Cos^2(\theta)$ em evidência, observe:

$$P(\theta) = A.Cos^2(\theta) + 2.B.Sen(\theta).Cos(\theta) + C.Sen^2(\theta) = Cos^2(\theta) \cdot (A + 2.B.\frac{Sen(\theta).Cos(\theta)}{Cos^2(\theta)} + C.\frac{Sen^2(\theta)}{Cos^2(\theta)})$$

$$= Cos^2(\theta) \cdot (A + 2.B.\frac{Sen(\theta)}{Cos(\theta)} + C.Tg^2(\theta)) \therefore P(\theta) = Cos^2(\theta) \cdot (A + 2.B.Tg(\theta) + C.Tg^2(\theta))$$

Agora a comparar a expressão de $P(\theta) = Cos^2(\theta) \cdot (A + 2.B.Tg(\theta) + C.Tg^2(\theta))$ com o polinômio $Q(Tg(\theta)) = (A + 2.B.Tg(\theta) + C.Tg^2(\theta))$, substituindo $Tg(\theta) = \beta$, segue que:

$Q(\beta) = (A + 2.B.\beta + C.\beta^2)$, onde A, B e $C \in R$. Repare que temos as seguintes possibilidades para a expressão: $(A + 2.B.\beta + C.\beta^2)$

(a) pode ser negativa (b) pode ser positiva (c) pode ser nula

Vamos analisar cada uma das hipóteses contidas no enunciado do teorema. Na primeira hipótese (I), temos: $B^2 - A.C < 0$ e A<0 e quando olhando para expressão

$(C.\beta^2 + 2.B.\beta + A)$, comparamo-na com a equação quadrática $g(x) = C.x^2 + 2.B.x + A$ e seu gráfico. Sabemos que se $\Delta = B^2 - A.C < 0$ e $A<0$, não se tem raízes reais e como o sinal de A que é negativo, seu gráfico será do tipo mostrado nos gráficos abaixo em (1) (figura 100). Portanto, a função $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(x, y)$ será negativa em todas as direções.

No caso (II), temos as hipóteses de que $\Delta = B^2 - A.C < 0$ e $A>0$, e o raciocínio é análogo, mudando-se apenas sua interpretação geométrica para o gráfico (2). Repare que no primeiro caso, temos um ponto de *máximo local*, enquanto que no segundo, identificamos um ponto de *mínimo local*, na condição que $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(x, y)$ é positivo em todas as direções.

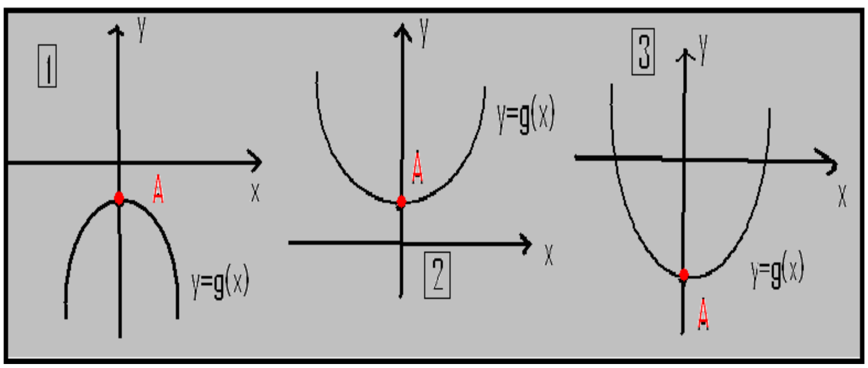


Figura 100. Interpretação gráfica da equação quadrática obtida por Kaplan (1962, 170).

Nas condições descritas em (a), devemos ter o seguinte sinal para o coeficiente C, $C < 0$. Além disso, repare que:

$$P(\frac{\pi}{2}) = A.Cos^2(\frac{\pi}{2}) + 2.B.Sen\left(\frac{\pi}{2}\right).Cos(\frac{\pi}{2}) + C.Sen^2(\frac{\pi}{2}) = A.0 + 2.B.1.0 + C.1 = C \therefore P(\frac{\pi}{2}) = C < 0$$

, e do mesmo modo, substituindo os valores, concluímos $P(\frac{3\pi}{2}) = C < 0$.

Em (III), se ocorre $B^2 - A.C > 0$, ou seja, $g(x) = C.x^2 + 2.B.x + A$ apresentará duas raízes distintas, digamos x_1 e x_2 representadas como no gráfico em (3). Portanto, o polinômio $g(x) = C.x^2 + 2.B.x + A$, é positivo para alguns valores de x, e negativo para outros valores de x, que vemos pelo gráfico representado em (3), na figura 100.

Portanto, concluímos a partir da expressão $P(\theta) = Cos^2(\theta) \cdot (A + 2.B.Tg(\theta) + C.Tg^2(\theta))$, o mesmo comportamento e, assim, a expressão $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(x, y)$ será positiva em algumas direções e negativa em outras direções. Finalmente, no último caso, se ocorre $B^2 - A.C = 0$, o ponto crítico pode ser *máximo local* de f $(C < 0)$ ou *mínimo local* de f, no caso em que $(C > 0)$. Portanto, o teste é inconclusivo, uma vez que dependemos do sinal da constante C (ver figura 101).

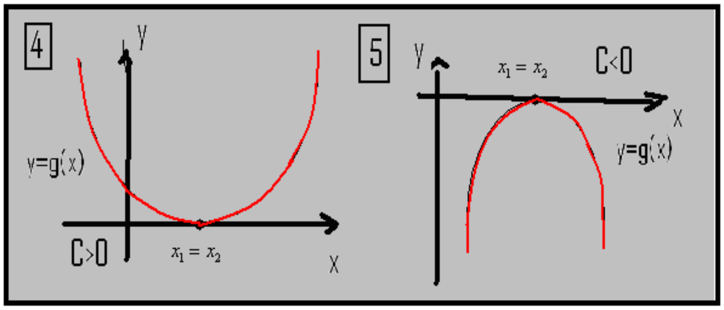


Figura 101. Argumentação de demonstração apoiada no comportamento da parábola.

Mas vamos ilustrar nossa análise considerando a seguinte função $f(x, y) = x^3 + (x - y)^2$, e, neste caos, podemos obter que $Q(\beta) = (A + 2.B.\beta + C.\beta^2) = (6x) + 2.(0).\beta + 2.\beta^2)$ e analisando o ponto crítico $(0,0)$, escrevemos: $Q(\beta) = 2.\beta^2$. Se plotarmos a função anterior no *MAPLE*, obtemos a seguinte *superfície*, seguida de suas *curvas de nível*. Podemos observar que na representação de suas curvas de nível, para a parte negativa do eixo y, vemos uma aparência de *hipérboles*. Enquanto que na parte positiva, temos curvas abertas que se assemelham a *elípses*. Assim, empregando a análise da função $Q(\beta) = (A + 2.B.\beta + C.\beta^2)$, podemos desenvolver uma análise minuciosa local em cada ponto da *superfície*.

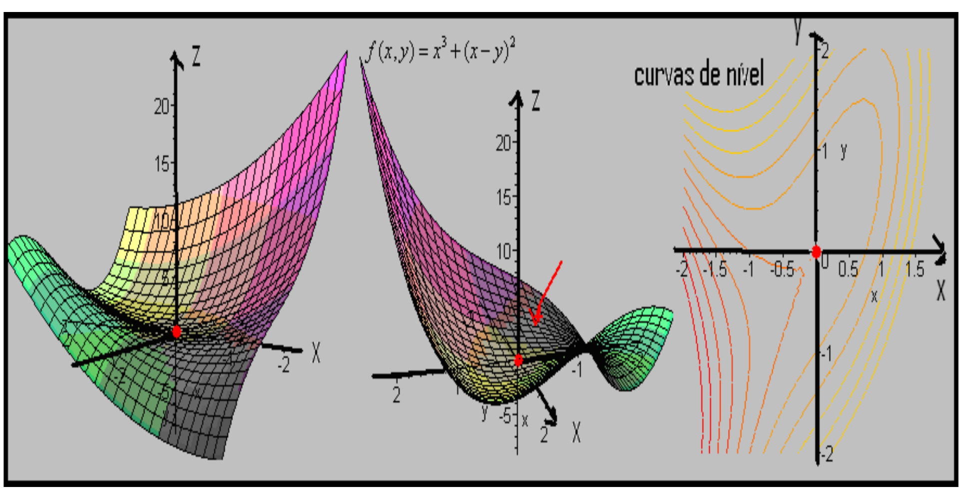


Figura 102. Análise geométrica do comportamento da superfície num ponto.

Concluímos esta seção destacando a tabela abaixo que sintetiza as conclusões à respeito das obras didáticas as quais os alunos do IFCE têm acesso durante a disciplina Cálculo III. Destacamos mais uma vez a discussão sobre a obra de Kaplan (1962), dada às limitações registradas nos livros do Stewart (2004), Guidorizzi (2010) e Leithold (1999), no que diz respeito à aplicação do teste da Hessiana, com a análise das curvas de nível.

Observamos que os dados são analisados no contexto de aplicação das noções de *formação*, *tratamento* e *conversão* de registros. Por fim, observando as categorias pertinentes à *transição interna* do CUV para o CVV (p. 61), apontamos a ultima linha no quadro como o resultado das análises que dizem respeito ao *objetivo específico* (Cap. 3, p. 156).

Quadro 6: Resultado das análises dos livros utilizados pelos alunos no estudo.

Elementos analisados	**STEWART (2004) 4ª edição**	**GUIDORIZZI (2010) 5ª edição**	**LEITHOLD (1999) 2ª edição**
***Formação* de registros**	Explora apenas em alguns exemplos resolvidos	Explora apenas em alguns exemplos resolvidos	Explora apenas em alguns exemplos resolvidos
***Conversão* de registros**	Explora de modo satisfatório	Com deficiência	Com deficiência
***Tratamento* de registros**	Satisfatório e sempre presente	Satisfatório e sempre presente	Satisfatório e sempre presente
Quanto às demonstrações	Não colocam em evidência as ideias do CUV	Não colocam em evidência as ideias do CUV	Não colocam em evidência as ideias do CUV
Quanto às definições formais	Indica o processo de construção em alguns casos usando computador	Não indica o processo de construção usando computador	Não indica o processo de construção usando computador
Quanto às noções e simbologias	Invariância notacional e detalhamento de simbologias	Invariância notacional e compressão de simbologias	Apresenta variação de notações e compressão de simbologias
Quanto à *visualização* e propriedades geométricas dos conceitos	Explora de modo razoável as propriedades	Explora de modo restrito as propriedades geométricas dos conceitos	Explora de modo restrito as propriedades geométricas dos conceitos
Quanto à *transição interna* do CUV para o CVV	A obra estimula a *transição interna*, com algumas restrições	A obra não estimula a *transição interna*	A obra não estimula a *transição interna*

Fonte: Pesquisa do autor.

Assim, as atividades que apresentamos na próxima seção os elementos norteadores que fundamentarão a estruturação das mesmas. Reparamos que manteremos a vigilância com respeito à cada fase da *Sequência Fedathi*, nas teorias que adotamos neste trabalho, numa perspectiva de complementaridade, e no sentido de sistematizar e caracterizar as categorias didáticas que evoluem a partir de cada mediação.

4.2.5 Análise das atividades e a concepção da sequência didática

As sete tarefas estruturadas que apresentamos na sequência foram concebidas e adaptadas com a intenção de superar e evitar alguns problemas identificados na etapa em que analisamos os livros didáticos. A partir deste estudo, destacamos os seguintes aspectos que mereceram nossa maior atenção no que diz respeitos em se evitar determinados aspectos que consideramos essenciais:

- As atividades propostas apresentam elementos de natureza intuitiva que proporcionavam as ligações entre os conceitos do CUV e do CVV na SF;
- As atividades propostas envolvem os conceitos principais desta investigação e exigem, do ponto de vista do professor e do aluno, a *formação*, *tratamento* e *conversão* de registros semióticos do CUV e do CVV;
- As atividades propostas visam explorar elementos desconsiderados ou pouco considerados pelos autores (STEWART (2004); GUIDORIZZI (2010); LEITHOLD (1999)) em termos de *registros gráficos* em 3D, como, por exemplo, as noções de *ponto crítico* e *ponto de inflexão* no $\mathbb{R}^3$;
- As atividades propostas proporcionam a *visualização* como uma condição essencial para a operacionalização e a *conversão* efetiva de representações semióticas;
- Evitar o que identificamos na literatura analisada que apresenta figuras que descrevem casos gerais e na sequência de desenvolvimento dos tópicos não são efetivamente usadas e/ou recordadas, caracterizando um papel secundário na explicação e nos exercícios propostos pelo autor;
- As atividades propostas tiveram a intenção de apresentar contra-exemplos para teoremas que restritas ao uso de *registros algébricos* tornam-se inexeqüíveis sem o computado, sobretudo nas fases de *tomada de posição* e *prova* da *Sequência Fedathi*;
- As atividades propostas buscam a produção e a reavaliações de *intuições afirmativas* pertencentes ao CVV na fase 4 de *prova* da SF;

- O papel secundário das figuras e desenhos relacionados aos conceitos do CVV, exibidos nos livros consultados, não explicitavam um caráter realizável (BONNEL, 1881) da construção geométrica em discussão;
- As tarefas propostas buscam registrar as concepções e as *atitudes epistêmicas* (DUVAL, 1991) dos estudantes com respeito aos conceitos do CVV na fase de *prova* da SF;

Note-se que ao decorrer da regência das aulas (total de 17 aulas) envolvendo os conteúdos de *curvas parametrizadas* (duas aulas), *limite* (duas aulas) *continuidade* (duas aulas), *diferenciabilidade* (três aulas), *derivadas de ordem superior* (duas aulas), *extremos de funções* (três aulas) e *integrais múltiplas* (três aulas) necessitamos de um total de dezessete aulas com aproximadamente uma hora e meia até duas horas de duração para cada sessão de ensino dos conteúdos acima.

Mas antes de apresentar as atividades, torna-se oportuno evidenciar algumas características do *software Maple*. Suas potencialidades são apontadas no trecho abaixo, quando notamos que

> A princípio, a discriminação das variáveis visuais de um sólido (no registro gráfico, a partir das técnicas clássicas de representação no ambiente lápis/papel) e as suas correspondências no registro analítico não é uma tarefa fácil. Por quê? Por que em muitos casos, a representação gráfica no espaço tridimensional é difícil de fazer no ambiente lápis/papel, que só tem como base o plano, de duas dimensões (o papel). (HENRIQUES, 2006, p. 68).

Pelo excerto acima, percebemos a possibilidade de superar alguns dos entraves registrados na análise de livros. Deste modo, realizamos um extenso levantamento da literatura (ABEL & BRASELTON, 2005; ANDRADE, 2004; CELAYA-LIZARAGA e SHINGAREVEJA, 2007; FRERY, 2009; GARVAN, 2002; GOMEZ, SALVY e ZIMMERBANN, 1995; PUECH, 2009; PUTZ, 2003) especializada a respeito do *software* Maple, que "é um programa comercial que propõe um ambiente de cálculo formal." (PUECH, 2009, p. 4).

Seu emprego como recurso didático/metodológico tem sido recorrente em pesquisas (ARENAS, 2003; ARSLAN, 2005; NARDI, 2008) em torno do ensino/aprendizagem do Cálculo. Em nossa tese, todas as figuras e elaboração das atividades nas quais fizemos o uso deste *software*, não envolveram longos programas que exigem um grande conhecimento em linguagem computacional. Seu uso ocorreu de modo predominante nas fases de *tomada de posição*, de *maturação* e fase de *prova* da *Sequência Fedathi*.

De modo concreto, empregamos apenas os seguintes comandos de plotagem (**plot2d**, **plot3d**, **spacecurve**, **intersecplot3d**, **implicitplot3d**, **contourplot3d**) e a interseção de objetos como *curvas parametrizadas* e *superfícies* de funções do tipo $z = f(x, y)$ e identificação de curvas de nível no plano e no espaço. Assim, com algum esforço, acreditamos que seu uso como instrumento didático/metodológico seja bastante viável numa aula de CVV, principalmente no caso do CVV, que envolve longas rotinas que podem ser antecipadas pelo programa.

Como por exemplo, podemos verificar por meio da análise da continuidade de todas as derivadas de primeira, de segunda ordem e mistas da função $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, a possibilidade de ocorrências das *derivadas mistas* desta função e exibir suas derivadas usando os seguintes comandos:

```
> with(plots);
> f:=x*y*(x^2-y^2)/(x^2+y^2);
> Diff(f,x)=diff(f,x);
> Diff(f,y)=diff(f,y);
> Diff(f,x,x)=diff(f,x,x);
> Diff(f,y,y)=diff(f,y,y);
> Diff(f,x,y)=diff(f,x,y);
> Diff(f,y,x)=diff(f,y,x);
```

Note-se que a determinação das mesmas usando apenas lápis e papel pode se transformar num exercício massacrante para o estudante, bastando observar as *derivadas mistas* obtidas abaixo:

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2\,x^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,x^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8\,x^2\,y^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2\,x^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,x^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8\,x^2\,y^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

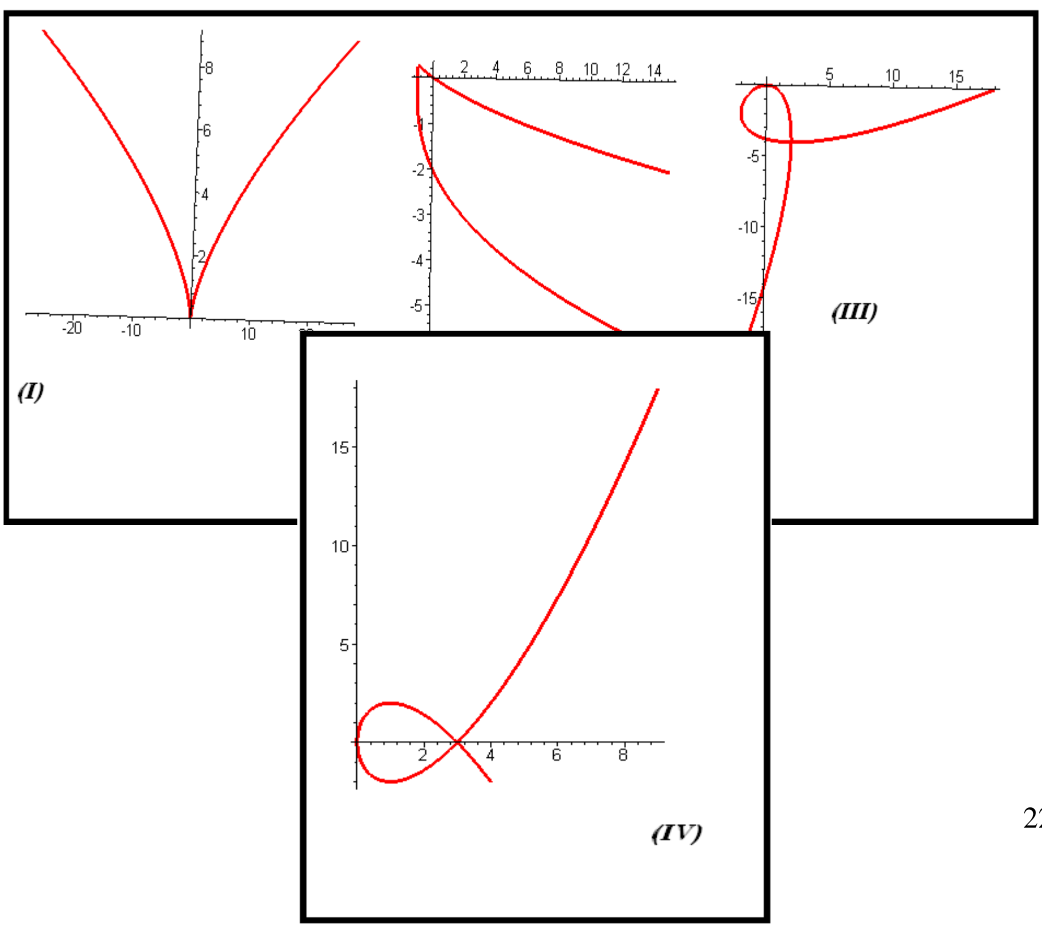
Por outro lado, a listagem das frações fornecida pelo computador permite a realização de algumas inferências semelhantes ao CUV, na medida em que o aluno necessita analisar a existência cada uma dos limites em separado, facilitando assim a *transição interna* do CUV para o CVV que investigamos neste trabalho. Por fim, as qualidades do Maple podem nos auxiliar no desenvolvimento de uma mediação que estimule a *formação, tratamento* e *formação de registros* e, deste modo, verificar a ocorrência das *categorias intuitivas* que tencionamos registras nas fases da SF.

No que segue apresentamos as atividades exploradas em três documentos escritos de avaliação e outras atividades que surgiram no momento de tira-dúvidas com os estudantes.

Note-se que as tarefas que chamamos de tira-dúvidas se constituíram de encontros de atendimento individual dos estudantes que manifestarem maiores dificuldades com os conteúdos discutidos ao decorrer da disciplina Cálculo III. E nestes encontros mantivemos a sistemática de discussão das fases previstas pela *Sequência Fedathi*.

Atividade 1

Tarefa 1: Observando os gráficos das parametrizações abaixo, indicar os pontos onde ocorrem retas tangentes horizontais e verticais. Todas as curvas são lisas? Explique e identifique. Pode rabiscar no desenho indicando as posições das tangentes.



Objetivos: Analisar a atividade argumentativa dos estudantes provocando a produção de intuições afirmativas, intuições conjecturais e antecipatórias
Ações esperadas: O aluno deverá apenas, com auxílio de uma reta, identificar e marcar os pontos onde acredita existir a possibilidade de retas tangentes horizontais e verticais.
Caracterização da ação do professor na SF: Nesta tarefa, na fase de *tomada de posição*, de aplicação da SF, o aluno deve analisar os registros em 2D exibidos na avaliação. No nível II - maturação da SF, proporcionamos e conduzimos o estudante na comparação dos registros em 2D com o *registros gráficos* fornecidos pelo computador. Na fase *solução* da SF o aluno deve empregar e explorar o *tratamento* para a obtenção de alguma resposta. Na prova, da SF, estimulamos a comparação dos resultados obtidos a partir dos registros algébricos com os registros geométricos (conversão) pouco explorados pelos livros didáticos.

Tarefa 2: Considerando as parametrizações $\alpha(t)=(t^2,t^3,0)$, $\beta(t)=(t^4-1,t-t^2,0)$, $\delta(t)=(t^3-3t^2,t^3-3t,0)$ e $\eta(t)=(t^2,t^3-3t,0)$. Analisar a ocorrência de retas tangentes e verificar se todas são lisas ou não.

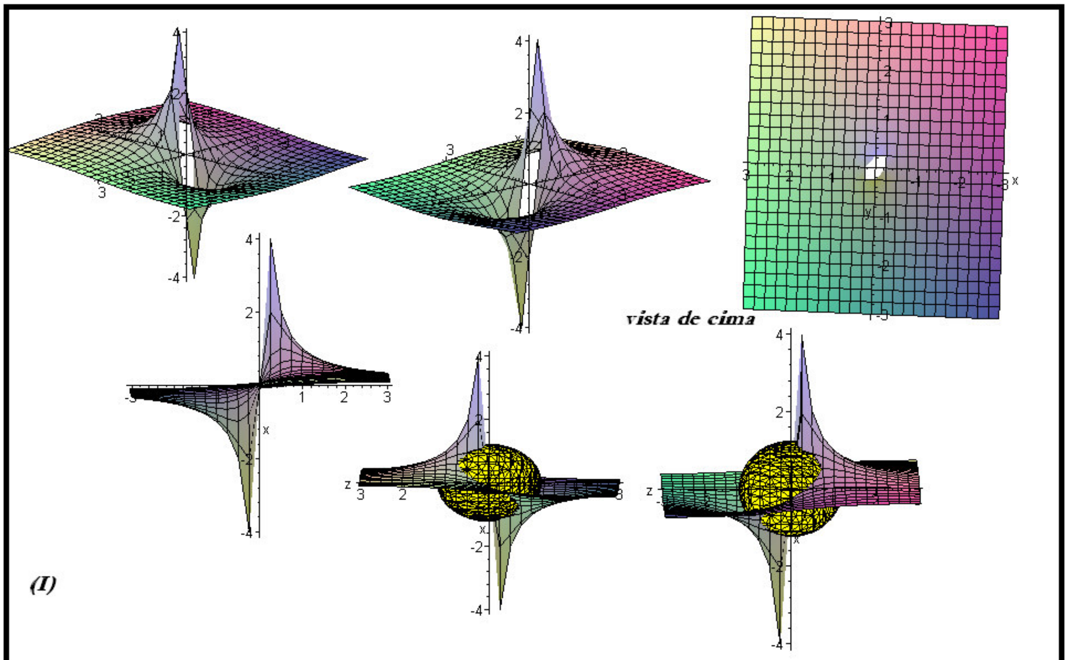
Objetivos: Empregando o tratamento das representações identificar os pontos de retas tangentes horizontais e verticais e comparar os dados obtidos com a tarefa 1.
Ações esperadas: O aluno pode simplesmente obter dados analíticos a partir da formulação discutida em sala de aula $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$.
Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição* da SF exploramos registros em 2D. Nas fases de solução e prova da SF, estimulamos os estudantes a comparação dos dados percebidos em termos dos registros da avaliação e no computador, assim, exploramos a conversão dos registros. Na fase de prova, estimulamos a produção de intuições conjecturais e afirmativas por meio da comparação dos dados obtidos.

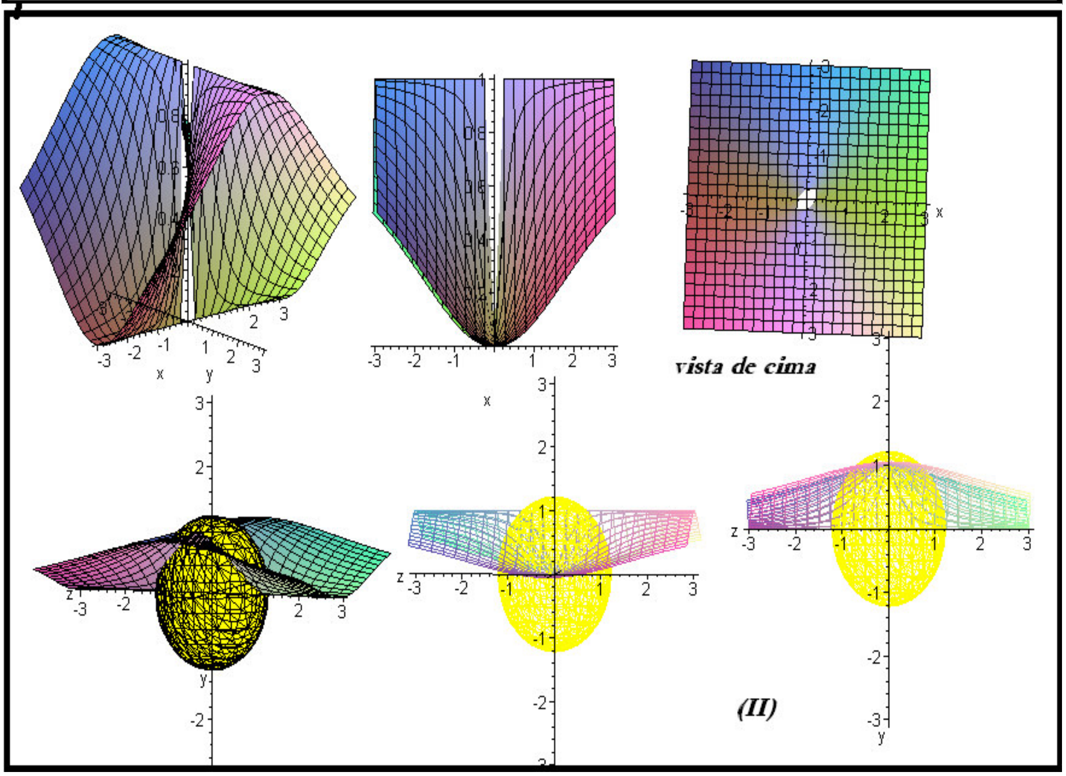
Tarefa 3 (aula de tira dúvidas): Construir os gráficos das parametrizações $\alpha(t)=(t^2,t^3,0)$, $\beta(t)=(t^4-1,t-t^2,0)$, $\delta(t)=(t^3-3t^2,t^3-3t,0)$ e $\eta(t)=(t^2,t^3-3t,0)$.

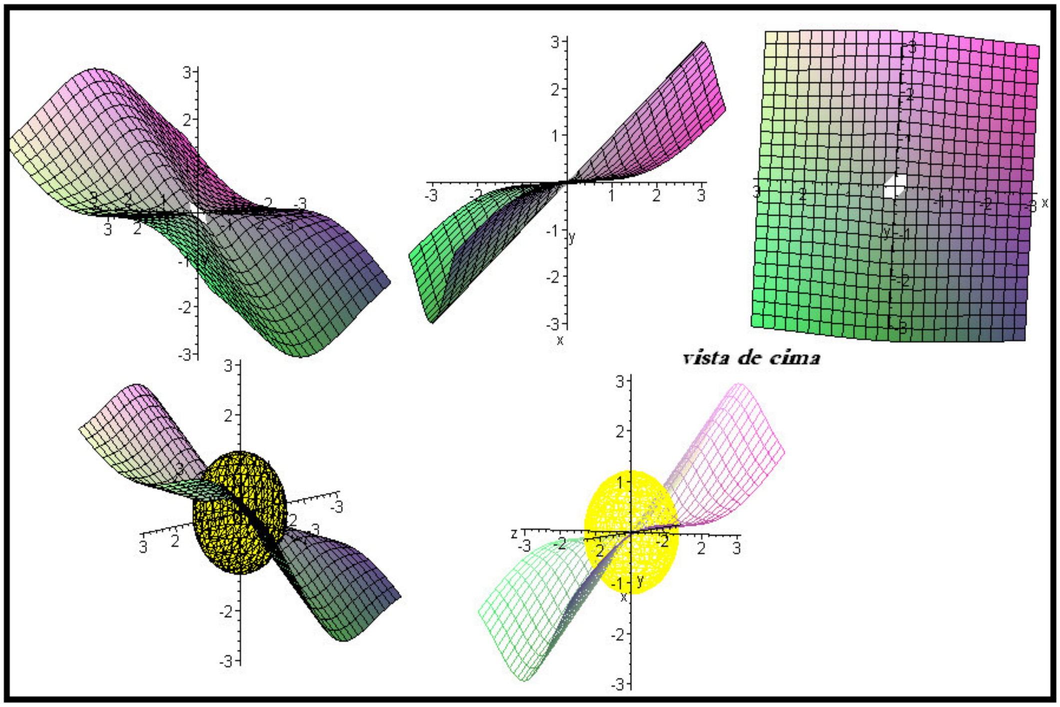
Objetivos: Recorrendo ao tratamento das parametrizações o aluno deverá construir os gráficos das parametrizações indicadas e, os gráficos obtidos analiticamente devem ser confrontados com os dados da tarefa anterior.
Ações esperadas: O aluno emprega argumentos analíticos para identificar o comportamento da parametrização, quantidade de retas tangentes e se cada curva é lisa.
Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição* da SF estimulamos a formação de registros geométricos em 2D. Na fase de maturação, conduzimos a conversão de registros em 3D. Nas fases de solução e de prova da SF, exploramos a comparação dos resultados e a revisão das estratégias.

Atividade 2

Tarefa 1: Observando os gráficos abaixo, discuta/comente em cada caso, o seu comportamento na origem, se o **gráfico** é limitado, comportamento da **imagem**, definida ou não na origem, **existência de limites** na origem e, por fim, sua continuidade na origem.


vista de cima
(I)


vista de cima
(II)



Objetivos: Proporcionar a produção de conjecturas a partir da percepção e visualização de *registros gráficos*. Evitar o *tratamento* dos *registros algébricos* como identificamos na análise de livros de CVV.
Ações esperadas: O aluno realiza uma interpretação visual dos gráficos e compara com as definições formais e propriedades que se recorda no momento, sem executar nenhum tratamento das representações.
Caracterização da ação do professor na SF: Na fase de *tomada de posição* da SF, exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na fase de *maturação*, estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na fase de *solução* da SF, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na fase de *prova*, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Tarefa 2: Considerando as funções $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$; $g(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ e $h(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Indicar o seu respectivo gráfico usando a 1ª questão. Todas são funções contínuas? Escolher e analisar a função que você acha que possui derivadas parciais contínuas.

Objetivos: Identificação por meio da visualização das propriedades desejadas.
Ações esperadas: No que diz respeito ao emprego de teoremas formais, os alunos devem

realizar a verificação pelo modelo (ε,δ) apenas no caso de $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ e nos outros casos podem exibir contra-exemplos na fase de prova.
Caracterização da ação do professor na SF: Na fase de *tomada de posição* exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na fase de *maturação* estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na fase de solução, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na fase de prova, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Tarefa 3: Considerando as funções $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$; $g(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ e $h(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Analisar a continuidade de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem. Identificar seu comportamento geométrico.

Objetivos: Identificação do caráter de continuidade no quadro analítico e geométrico.
Ações esperadas: O aluno necessita diferenciar visualmente a natureza da continuidade/descontinuidade na origem.
Caracterização da ação do professor na SF: No *tomada de posição* da SF, exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na fase *maturação* da SF, estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na fase de *solução*, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na fase de prova da SF, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Atividade 3

Tarefa 1: Verificar se as funções nos itens abaixo são de classe C^2 e analisar as condições do teorema de Clairaiut-Scharws.

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se (x,y)} \neq (0,0)\\ 0 \text{ se (x,y)=(0,0)}\end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se (x,y)} \neq (0,0)\\ 0 \text{ se (x,y)=(0,0)}\end{cases}$

Notamos que na sequencia, com o auxílio de um *software* fornecemos as suas respectivas derivadas de primeira e de segunda ordem.

a) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right)=-\dfrac{2\,x^3\,y}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{3\,x^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2\,x^4}{(x^2+y^2)^2}$

; $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{6\,x}{x^2+y^2}-\dfrac{14x^3}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{8\,x^5}{(x^2+y^2)^3}$; $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right)=-\dfrac{2\,x^3}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{8\,x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^3}$

b) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)=\frac{y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\frac{2\,x^2\,y}{x^2+y^2}-\frac{2\,x^2\,y\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)=\frac{x\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-\frac{2\,x\,y^2}{x^2+y^2}-\frac{2\,x\,y^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

.

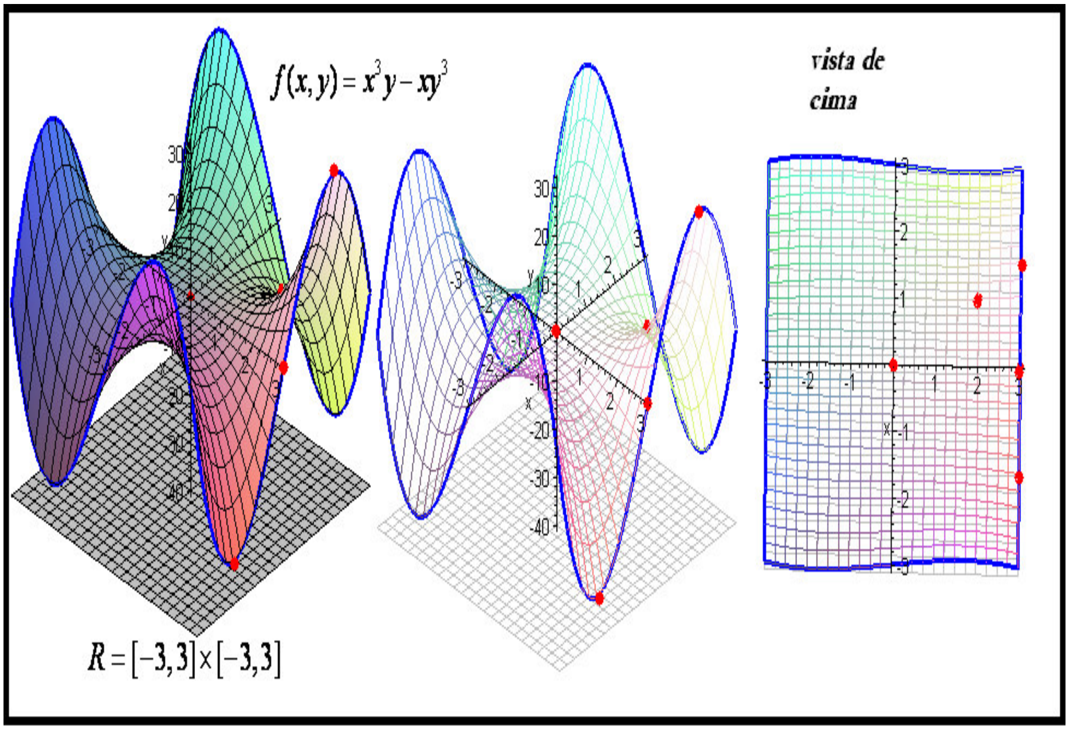
; $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)=\frac{6\,y\,x}{x^2+y^2}-\frac{6\,y\,(x^2-y^2)\,x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{8\,x^3\,y}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8\,x^3\,y\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$;

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)=-\frac{6\,y\,x}{x^2+y^2}-\frac{6\,y\,(x^2-y^2)\,x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8\,x\,y^3}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8\,x\,y^3\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Objetivos: Diante da complexidade e tempo demandado para efetuar as contas no quadro analítico, os alunos devem inicialmente produzir conjeturas relacionadas às intuições afirmativas e conjecturais a respeito do gráfico de suas derivadas de primeira e segunda ordem.
Ações esperadas: O aluno deve identificar visualmente a natureza continuidade/descontinuidade das derivadas de 1ª e 2ª ordem.
Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição* da SF, exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na *maturação* da SF, estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na fase de *solução*, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na *prov*a, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Atividade 4

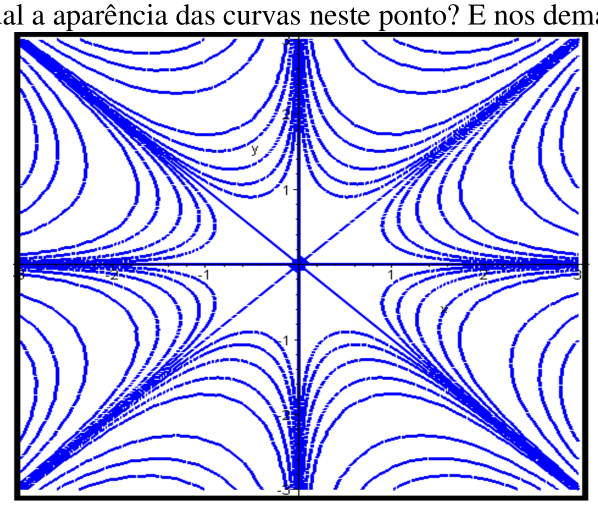
Tarefa 1: Observe a figura abaixo e responda justificando cada item na sequencia. Consideramos a região no plano $R=[-3,3]\times[-3,3]$ e a função $f(x,y)=x^3y-xy^3$



a) Dentre os pontos indicados, qual deles é um ponto de inflexão? Justificar baseando-se na figura e nas contas.

b) Dentre os pontos indicados, qual deles é um ponto de máximo/mínimo? Justificar.

c) Identificar na superfície aonde o teste da Hessiana é inconclusivo. Observe suas curvas de nível. Qual a aparência das curvas neste ponto? E nos demais pontos?



d) Quantos pontos de sela, de máximo local e mínimo local a superfície apresenta? Comentar e Justificar.

Objetivos: Identificação visual de pontos de máximo, mínimo, inflexão na superfície. Aquisição de *crenças perceptuais* a partir da análise visual e interação com o objeto.
Ações esperadas: O aluno deve identificar visualmente as propriedades dos pontos desejados na situação e, em seguida, verificar analiticamente, comprovando ou não suas impressões

visuais.
Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição*, da SF, exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na fase de *maturação* da SF, estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na solução, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na prova, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Atividade 5

Tarefa 1 (avaliação): Calcular o volume limitado pelos objetos descritos no conjunto $A=\{y^2=x\ ;\ x^2=y \text{ e } z=x^2+4y^2\}$

Objetivos: Identificar por meio da *visualização* os limites de integração. Identificar por meio do *tratamento* das representações os limites de integração.
Ações esperadas: Esperamos que a partir de um hábito que deve ser estimulado ao decorrer da disciplina, o estudante requer a análise visual da situação com o apoio do *software*. A produção de *intuições afirmativas* é esperada.
Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição* da SF, exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na *maturação* da SF, estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na *solução*, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na *prova*, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Tarefa 2 (avaliação): Calcular o volume limitado pelos objetos descritos no conjunto $A=\{z=1-x^2-y^2\ ;\ 1=x^2+y^2 \text{ e } z=4\}$

Objetivos: Identificar por meio da *visualização* os limites de integração. Identificar por meio do *tratamento* das representações os limites de integração.
Ações esperadas:
Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição*, o aluno é estimulado a analisar o registro em 2D que exibimos na 3ª avaliação. Na fase de *maturação*, buscamos estimular a produção de *intuições conjecturais* a partir da exploração de registros gráficos em 3D fornecidos pelo computador. Na *solução*, estimulamos o *tratamento* dos registros e a resolução efetiva da tarefa. Na *prova* da SF, estimulamos a revisão das estratégias e das possíveis *intuições afirmativas* produzidas nas etapas anteriores.

Tarefa 3: Calcular o volume limitado pelos objetos descritos no conjunto $A = \{ z = x + y \ ; 0 \leq y \leq 1 \text{ e } y=x^2 \}$

Objetivos: Identificar por meio da *visualização* os limites de integração. Identificar por meio do *tratamento* das representações os limites de integração.

Ações esperadas: O aluno pode efetuar apenas o tratamento de registros em 2D e, neste caso, esperamos a produção de *intuições afirmativas*. Por meio da mediação

Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição*, o aluno é estimulado a analisar o registro em 2D que exibimos na 3ª avaliação. Na *maturação*, buscamos estimular a produção de *intuições conjecturais* a partir da exploração de registros em 3D fornecidos pelo computador. Na *solução*, estimulamos o tratamento dos registros e a resolução efetiva da tarefa. Na *prova*, da SF, estimulamos a revisão das estratégias e das possíveis *intuições afirmativas* produzidas nas etapas anteriores.

Atividade 6

Tarefa 1: Argumentar detalhadamente os resultados e teoremas necessários para verificar a noção de diferenciabilidade de uma função no CVV.

Objetivos: Inferir o conhecimento e a capacidade de memorização e significação destes objetos. Identificar a manifestação de imagens mentais sobre os objetos do CVV.

Ações esperadas: Em virtude da natureza complexa dos registros de representação semióticos do CVV, os alunos devem se apoiar, pelo menos em parte, nas representações do CVV (quadros aritmético, geométrico e algébrico).

Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição*, da SF, exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na *maturação* da SF, estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na fase de *solução*, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na fase de *prova*, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Tarefa 2: Forneça uma interpretação e/ou significado para os objetos: limite, derivada e integral. Você consegue interpretá-los geometricamente?

Objetivos: Inferir o conhecimento e a capacidade de memorização e significação destes objetos. Identificar a manifestação de imagens mentais sobre os objetos do CVV.
Ações esperadas: Em virtude da natureza complexa dos registros de representação semióticos do CVV, os alunos devem se apoiar, pelo menos em parte, nas representações do CVV (quadros aritmético, geométrico e algébrico).
Caracterização da ação do professor na SF: Na *tomada de posição* da SF, exploramos registros de natureza algébrica e geométrica em 2D. Na *maturação* da SF, estimulamos a comparação de registros no plano com os registros em 3D fornecidos pelo computador. Na fase de *solução*, orientamos a aplicação das estratégias efetivas de resolução e na fase de prova, desenvolvemos a reflexão e verificação das *intuições afirmativas* produzidas.

Atividade 7

Tarefa 1 (avaliação): Identifique suas dificuldades e diferenças que você sentiu do Cálculo I para o Cálculo III? Compare-os!

Objetivos: Identificar entraves à compreensão, o significado, o estatuto de confiança atribuído pelo estudante aos conceitos estudados no CVV.
Considerações para análise: Os dados são analisados na perspectiva de Duval (1991, p 254) com relação à noção de *atitude epistêmica* que se caracteriza pela produção de determinada propriedade, mediante a elaboração de uma sentença proposicional relacionada às noções principais do CVV.

4. 2.6 Perfil dos participantes e análise institucional

No que diz respeito ao *perfil do público alvo*, inicialmente contamos com a participação inicial de aproximadamente 80 estudantes regularmente matriculados na disciplina Cálculo III (do 4º semestre), nos períodos letivos 2009.1; 2009.2; 2010.1 e 2010.2, entretanto, num momento posterior, escolhemos alguns dos sujeitos foram selecionados com vistas a um acompanhamento mais prolongado ao decorrer de cada semestre e a evidencia de fornecimento de um número maior de dados durante as entrevistas *semi-estruturadas* e ao decorrer da aplicação das fases de ensino previstas na SF.

Exibimos os sujeitos escolhidos na tabela abaixo.

Quadro 7: Lista dos alunos que forneceram dados ao decorrer de todas as fases da *Sequência Fedathi*.

Lista dos alunos escolhidos na amostra total de 80 alunos				
Alunos escolhidos	Aluno 29	Aluno 24	Aluno 7	Aluno 21
Lista dos alunos escolhidos na amostra total de 80 alunos (apêndice I)				
Alunos escolhidos	Aluno 8	Aluno 15	Aluno 17	Aluno 23

Fonte: Elaboração própria.

Os sujeitos participantes do estudo foram informados e convidados para participar de modo voluntário na investigação. O estudo foi desenvolvido sempre em sala de aula e as entrevistas *semi estruturadas* foram aplicadas sempre de modo individual ao decorrer das sessões didáticas em sala de aula, durantes as 'aulas de dúvidas' previamente estabelecidas com os sujeitos e ao decorrer da aplicação de duas avaliações cujas tarefas foram descritas na seção passada.

No decorrer da disciplina de Cálculo III (100h/a) passamos a escolher alguns dos alunos. Os critérios de escolha foram: (i) os sujeitos que nos forneceram e participaram de uma quantidade maior de atividades e momentos de diálogo entre professor/aluno; (ii) os sujeitos que proporcionaram uma quantidade maior de dados empíricos em observância aos conteúdos em foco; (iii) os alunos que forneceram dados durante todas as fases da *Sequência Fedathi*; (iv) alunos que manifestaram suas concepções relativas à *transição interna* do CUV para o CVV.

Com respeito ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFCE observamos que, de modo geral, as disciplinas de Cálculo oferecidas para a licenciatura se restringem ao modelo de apresentação tradicional, com a exploração exclusiva das mídias lápis/papel, sobretudo as disciplinas que antecedem o Cálculo III.

Realizamos uma consulta junto à coordenação dos cursos de Licenciatura e, verificamos que o único laboratório do curso (LIADE) é utilizado apenas para a exploração de outras disciplinas da Licenciatura em Matemática, como no caso do Cálculo Numérico.

Capítulo 5: EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo iniciamos a apresentação, discussão e indicação dos dados mais relevantes colhidos junto aos alunos (alunos 7, 21, 24 e 29) no decorrer do estudo. Para o leitor, indicamos que os trechos destacados em **fonte vermelha** indicam e registram as *categorias intuitivas* que nos propomos à analisar/registrar ao longo das fases da SF.

Acrescentamos ainda que nas **seções 5.1**, **5.2**, **5.3** e **5.4**, discutimos os dados colhidos ante à resolução das **atividades 1**, **2**, **3**, **4** e **5** (p. 220-227). Por fim, na seção 5.5, discutimos os dados referentes às **atividades 6** e **7** (p. 228-229).

5.1 Fase de *Tomada de posição*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

Neste capítulo, apresentamos as análises dos resultados das entrevistas. Esta seção foi reservada para examinar-mos os resultados individuais de alguns dos participantes (**alunos 7, 21**, **24** e **29**) do estudo, no período 2009/2010. A escolha destes sujeitos, em uma amostra total de 80 alunos, durante quatro semestres letivos, derivou das condições em que eles forneceram quantidade relevante de dados, em todas as fases da *Sequência Fedathi*.

No que segue, descrevemos os dados com base na indicação da respectiva fase da metodologia *Sequência Fedathi*. Destacamos nesta parte inicial, os relatos dizem respeito aos dados colhidos da produção dos estudantes ante as cinco atividades apresentadas e estruturadas como resultado do estudo da análise de livros didáticos de CVV.

Na *tomada de posição*, os estudantes foram postos em contato, inicialmente, com cinco atividades. Nesta etapa, com arrimo nas perspectivas teóricas (cap. 3) pelas quais optamos nesta pesquisa e, com base nos objetivos almejados, estimulamos a análise apoiada na *percepção* e na *visualização*, bem como a identificação global dos dados relevantes dos problemas do CVV ao decorrer da disciplina Cálculo III.

Assim, nesta fase, o processo investigativo do **aluno 29** foi estimulado com a exploração de *registros de representação semiótica* em 2D, como os que exibimos nos protocolos impressos e fornecidos aos participantes na atividade 1 (Cap. 5, p. 220).

Na figura 103, o **aluno 29** analisou, por intermédio da *percepção* e da *visualização*, os *registros gráficos* no documento escrito.

Ao ser questionado a respeito do comportamento das *curvas parametrizadas*, o aluno 29 expressou-se por intermédio da *língua natural* e, sem o apoio do *tratamento de registros*, explicou que

> O gráfico I possui três retas tangentes, duas retas horizontais e uma reta tangente vertical. O gráfico II possui duas retas tangentes verticais e uma reta tangente horizontal. No gráfico III temos apenas duas retas e no gráfico IV vejo que tem uma reta tangente paralela ao eixo Ox na origem...

Destacamos o fato de que na *tomada de posição* - no decorrer das sessões de ensino dos conteúdos do CVV previstos na disciplina, não estimulamos o emprego precipitado de *registros algébricos* do CVV, o que, de certo modo, antecipa o *tratamento* e, portanto, a algoritmização indesejada. Sublinhamos em sua fala algumas dificuldades e possíveis erros conceituais das afirmações que foram produzidas com a *visualização* dos *registros gráficos* obtidos graças ao apoio computacional. Tais erros e imprecisões colhidos na fase inicial são revistos e sistematizados na *maturação*, com a intenção de compreender as principais variáveis envolvidas nas atividades.

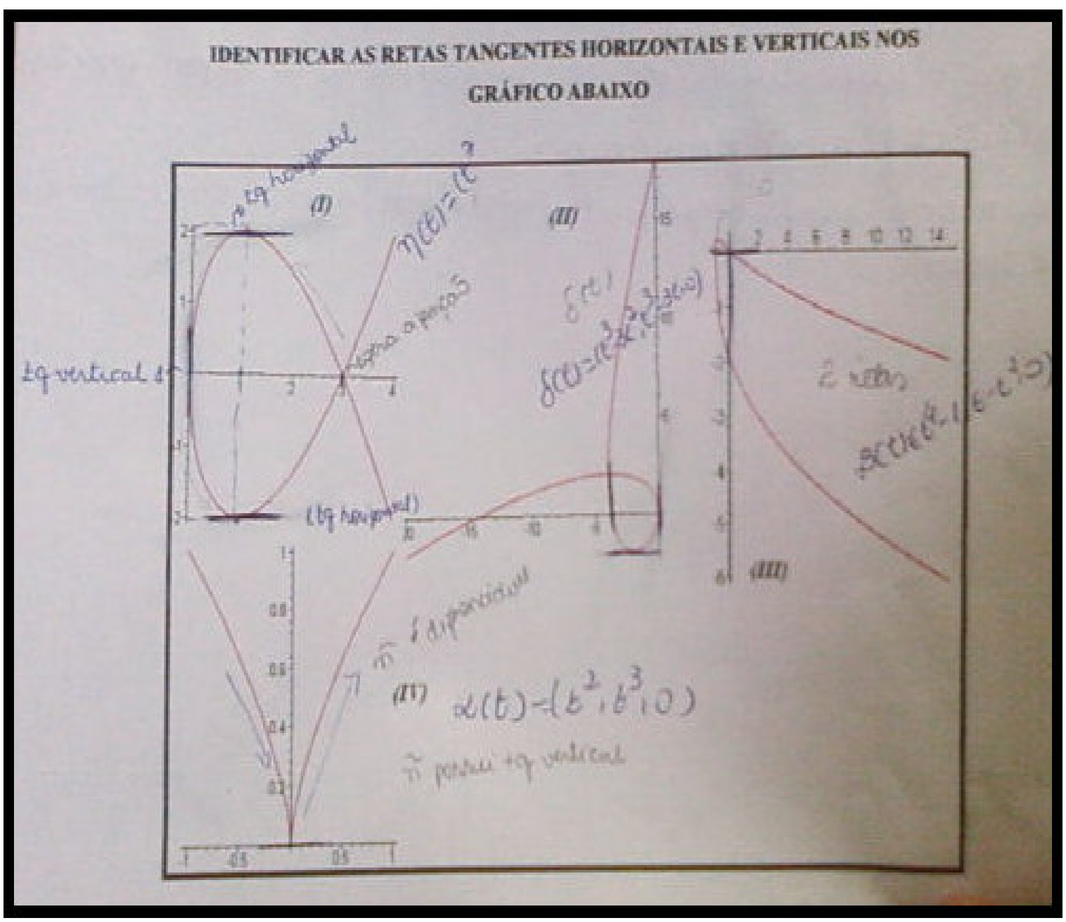
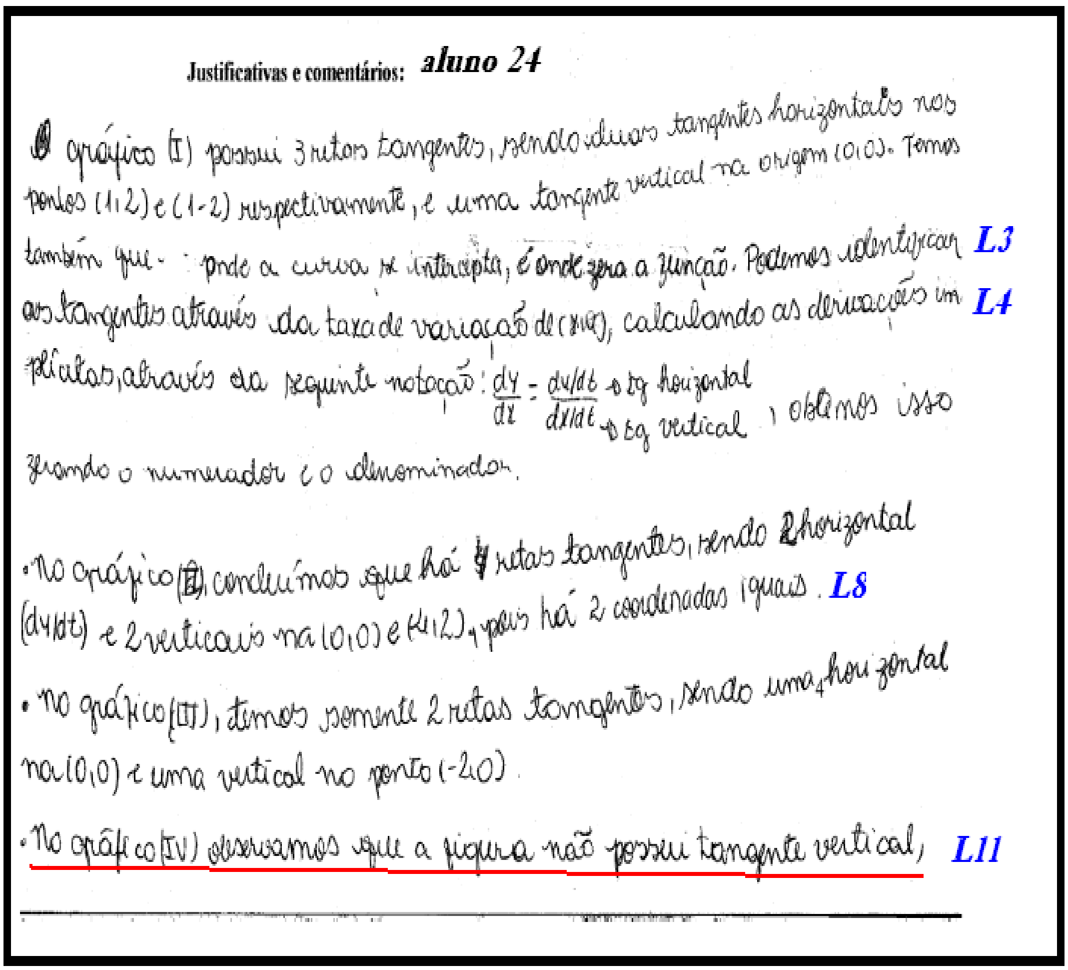


Figura 103. O aluno 29 analisou os *registros gráficos* presentes no documento escrito na fase *tomada de posição* (atividade 1, tarefa 1).

O **aluno 24** comentou e apresentou sua argumentação para a questão da atividade 1 (p. 220). Em alguns aspectos, suas declarações estão concordes com as declarações produzidas anteriormente pelo **aluno 29**, entretanto, no seu discurso, destacamos alguns trechos que confirmam a extração dos dados por intermédio da *percepção* e *visualização* das propriedades dos *registros gráficos*.

De fato, nas linhas 3 e 4, registramos a *intuição afirmativa*, ao declarar que "Podemos identificar as retas tangentes através da taxa de variação de $x(t)$, calculando suas derivações implícitas, através da notação $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{dy}/\text{dt} \text{ horizontal}}{\text{dx}/\text{dt} \text{ vertical}} \frac{tg\ horizontal}{\text{tg vertical}}$". Note-se que as demonstrações que envolvem tal formulação se apresentam complexas e, de modo geral, os livros didáticos analisados se restringem a aplicar o quociente pelo **aluno 24**, dando conta da quantidade de retas tangentes, mas exploram com deficiência suas propriedades por meio de *registros gráficos*. Vejamos isto na figura 104.


Justificativas e comentários: **aluno 24**

O gráfico (I) possui 3 retas tangentes, sendo duas tangentes horizontais nos pontos (1,2) e (1-2) respectivamente, e uma tangente vertical na origem (0,0). Temos também que onde a curva se intercepta, é onde zera a função. Podemos identificar **L3**
as tangentes através da taxa de variação de (x(t)), calculando as derivações im **L4**
plícitas, através da seguinte notação: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt \to tg\ horizontal}{dx/dt \to tg\ vertical}$, obtemos isso zerando o numerador e o denominador.

• No gráfico (II), concluímos que há 4 retas tangentes, sendo 2 horizontal (dy/dt) e 2 verticais na (0,0) e (1,2), pois há 2 coordenadas iguais. **L8**

• No gráfico (III), temos somente 2 retas tangentes, sendo uma horizontal na (0,0) e uma vertical no ponto (-2,0).

• No gráfico (IV) observamos que a figura não possui tangente vertical, **L11**

Figura 104. O aluno 24 produziu *intuições conjecturais* com base na *visualização* dos registros gráficos (atividade 1).

Na *tomada de posição*, com suporte na *percepção* e a *visualização*, os estudantes produziram *intuições conjecturais* que necessitaram ser confirmadas na fase subsequente da SF. Reparamos que os *registros gráficos* proporcionaram a seguinte declaração que destacamos na linha 11 (figura 104), produzida pelo **aluno 24**, ao mencionar que

> No gráfico (IV), observamos que a figura não possui tangente vertical. Observamos que a curva (IV) não é diferenciavel, pois há uma "ruptura" do gráfico na origem. Todos os outros gráficos são diferenciáveis.

Nas declarações do aluno 24, registramos as *intuições conjecturais* quando mencionou, no excerto acima, que "observamos que a curva não é diferenciavel, pois há uma "ruptura" do gráfico na origem".

A confirmação desta *intuição conjectural* que envolveu o emprego de uma metáfora ("ruptura") pode ser confirmada nas etapas seguintes da SF. Registramos, todavia, o emprego de uma metáfora peculiar ao contexto de ensino do CUV no contexto do ensino do CVV, o que facilitou a comunicação das ideias entre alunos e professor, o que propiciando a *transição interna* (ALVES e BORGES NETO, 2011a, 2011b).

Na *tomada de posição*, analisamos as ações e declarações produzidas pelo **aluno 7**, que indicamos na figura 105. Reparamos que as limitações dos *registros gráficos* em 2D impostas pela própria mídia (folha de papel) provocaram determinadas declarações que constituíram *intuições conjecturais*.

Ao ser questionado sobre os objetos de sua análise apoiada na *visualização* dos *registros gráficos* em 2D da atividade 1, o **aluno 7** explicou que

> Eu estou procurando as tangentes...só que não consegui encontrar nenhuma tangente no gráfico...porque eu tentei passar uma reta nesse ponto...no gráfico....eu tentei passar uma reta no 2...(0,2)....

Na figura 105, demarcamos o momento em que o estudante se apoiou em suas habilidades perceptivas, na ocasião em que buscou compreender a *conversão* dos *registros*, o que proporcionamos no documento escrito. Reparamos que o mesmo não desenvolveu o *tratamento* dos *registros* para declarar sentenças proposicionais à respeito das propriedades que divisou nos *registros gráficos* em 2D.

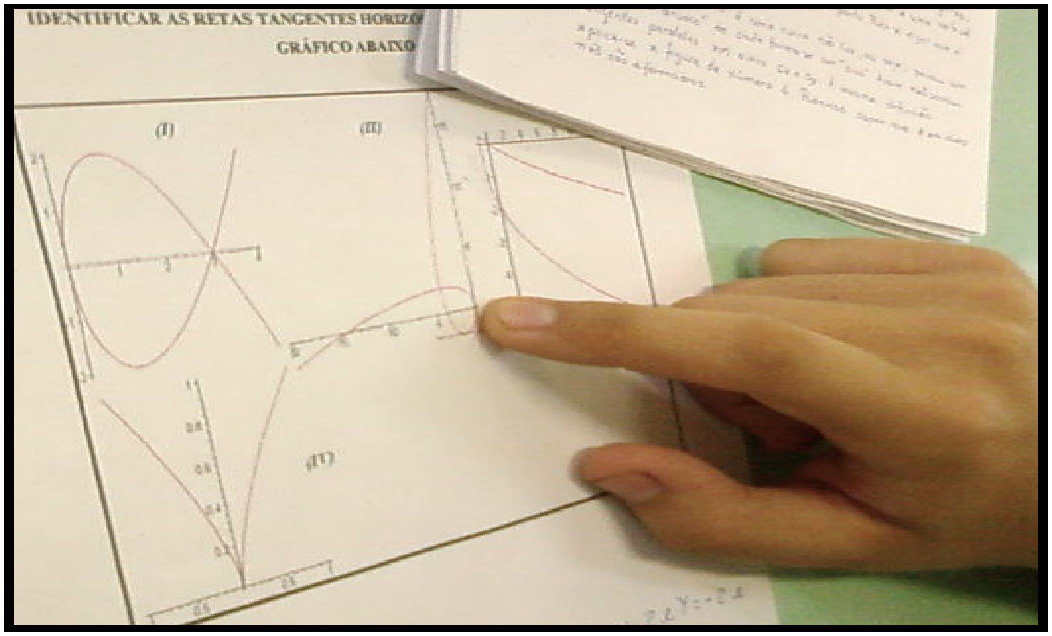


Figura 105. Na *tomada de posição* o aluno 7 produziu *intuições conjeturais* com base na identificação perceptual das propriedades dos *registros gráficos*.

Perguntamos ao **aluno 7** sobre a localização das retas tangentes verticais e horizontais nos *registros gráficos* exibidos na atividade 1, tarefa 1 (p. 220). Observamos sua argumentação do seguinte trecho:

> Reta horizontal tem aqui... Ah tá...tem uma aqui....no ponto (0,0) ...aqui perto do 2....tem duas retas tangentes....uma horizontal e vertical....se encontram neste ponto... Nesse ponto aqui são concorrentes.... Não ta dando para ver bem... mais aqui não.... Pelo que eu estou vendo...(0,0,0)..aqui tem uma...Aqui em baixo....uma..reta..duas...três retas tangentes....agora eu acho que nesse ponto ela não é paralela ao eixo...

Destacamos as limitações dos *registros gráficos* em 2D, exibidos na folha de papel, sem a possibilidade exploração e mobilidade dos mesmos. Por outro lado, ao afirmar que "Não está dando para ver bem... mais aqui não.... Pelo que eu tô vendo...(0,0,0)..aqui tem uma...Aqui em baixo...." Notamos aqui uma *intuição conjectural* produzida na *tomada de posição*, em relação à atividade 1.

Esta declaração que envolveu a mobilização de conhecimento intuitivo, com o apoio inicial da *percepção* e *visualização*, não se manifesta em um contexto de ensino que prioriza a algoritmização e o emprego de regras definidas *a priori* pelo professor.

Na figura 106, vemos as estratégias do **aluno 7** ante a atividade 1, tarefa 1 (p. 220), na *tomada de posição*.

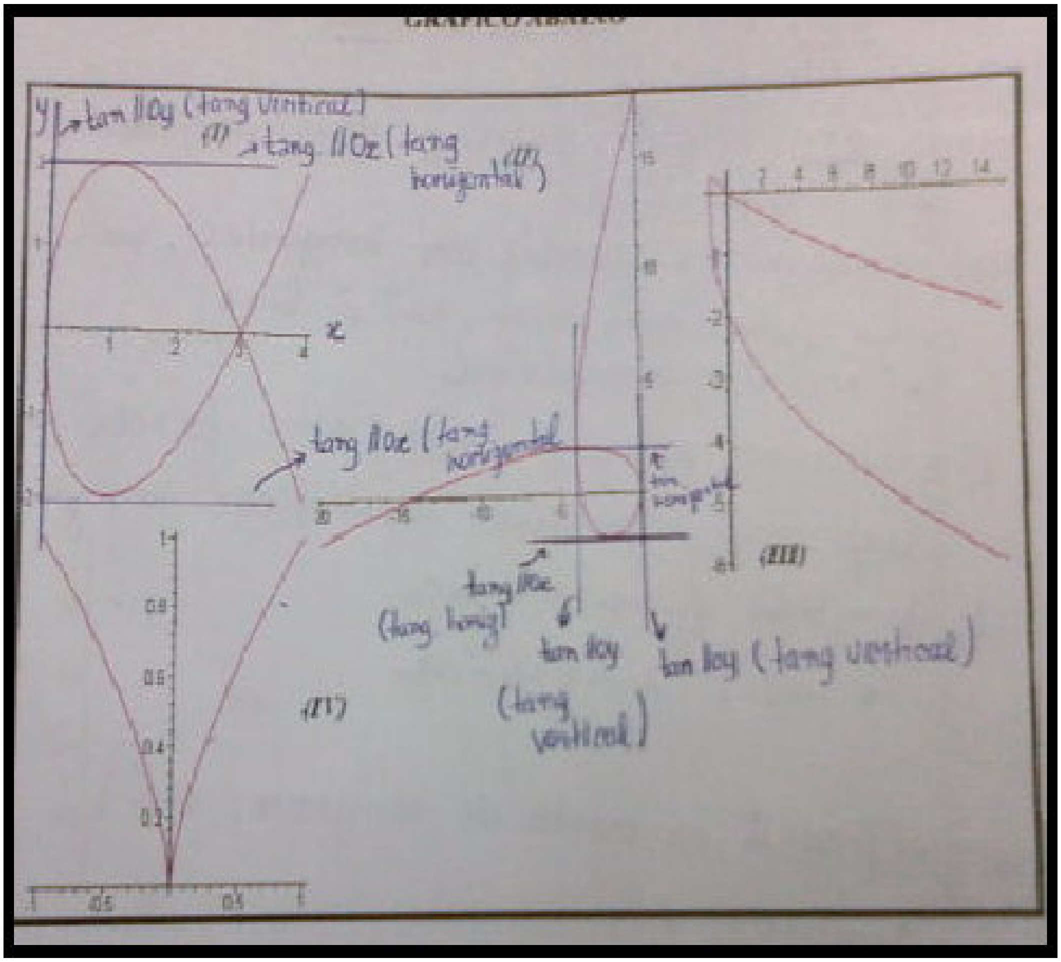


Figura 106. O aluno 7 analisa os *registros gráficos* e desenvolve *intuições conjecturais* na *tomada de posição*.

As limitações do *software Maple* proporcionaram a *formação* de *registros gráficos* que podem funcionar com elementos cognitivos conflitivos entre o modelo matemático formal e o modelo computacional. Foi o que notamos com o **aluno 21** que, ao decorrer da resolução da atividade 1, tarefas 1 e 2 (p. 220), na *tomada de posição*, analisou os *registro gráficos* em 2D e declarou que

> Eu achei estranho essa *parametrização*...é sempre positiva...mas nos gráficos só tem um que fica positivo..que é esse aí...aí pode pois podemos associar a cada uma um gráfico...esse daqui tem parte positiva e negativa....o “x” pode ser positivo ou negativo nesse daqui também....mas a curva alfa aqui...eu sei que esse daqui é esse....pode gerar o gráfico no computador?

Observamos, então, que o próprio estudante identificou as limitações do *registro gráfico* e requereu uma análise minuciosa com base no *registro gráfico* em 3D fornecido pelo computador. Os dados colhidos da ação do **aluno 21** serão discutidos na *maturação* da SF, na próxima seção.

É de se notar, todavia, que, durante as aulas de tira dúvidas, o **aluno 21** nos forneceu a indicação da seguinte *parametrização* $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ e a sua descrição em coordenadas cartesianas indicada pelo *registro algébrico* $y = x^{3/2}$ (atividade 1, tarefa 2).

Toda sua argumentação fornecida para a atividade 1 foi consequência de suas análises das propriedades destes dois *registros algébricos* que designam o mesmo objeto matemático. Além disso, a *conversão* (DUVAL, 1995) destes para uma descrição gráfica foi proporcionada pelo computador, e a nossa mediação, apoiada nos pressupostos da SF e na teoria de Duval (1995), indicou a importância de se estabelecer as relações entre *registros algébricos* distintos.

No que diz respeito à atividade 2 (p. 222), durante a aula de tiradúvidas, o **aluno 29** buscou compreender o significado da ideia de uma função de duas variáveis reais que possui imagem limitada. Reparamos na figura 107 que o aluno procurou compreender o comportamento de uma função $sen\left(\frac{1}{x}\right)$, com imagem limitada, e outra função $\frac{1}{x}$, que possui imagem ilimitada. Sua atitude produziu um significado intuitivo interessante, que foi readaptado ao contexto de ensino do CVV. Sua atitude mostrou-se positiva e facilita a *transição interna* do CUV para o CVV. Podemos observar isto na figura 107. Nela o sujeito comparou o comportamento dos gráficos na atividade 2.

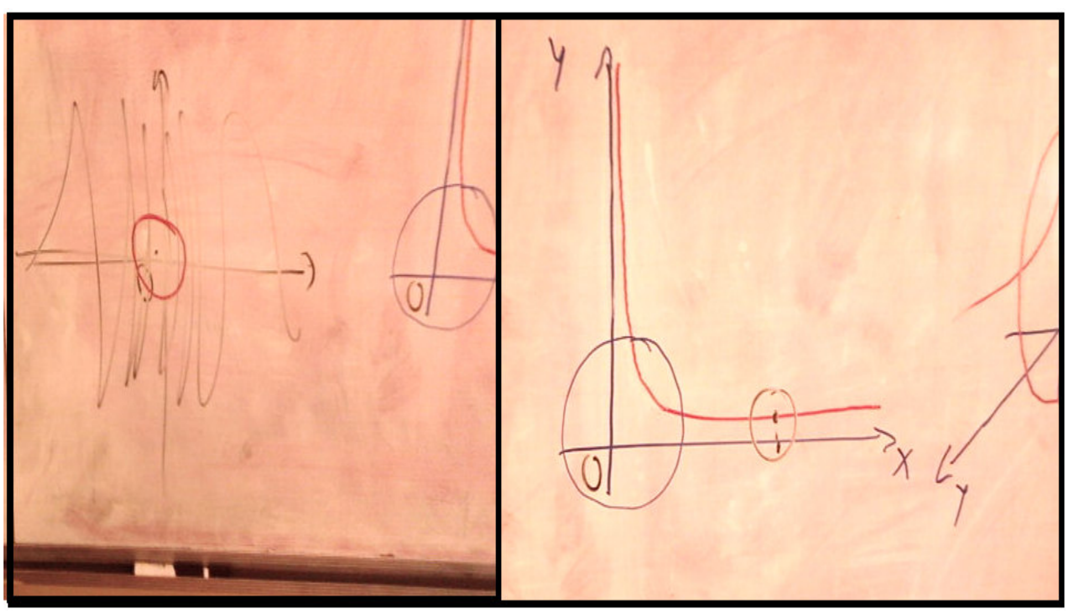


Figura 107. O aluno 29 produziu um significado geométrico de uma definição que foi readaptada ao contexto do CVV.

Durante a aula de tiradúvidas, o aluno requisitou o auxílio computacional, e desde que estávamos lidando com *registros gráficos* em 2D, empregamos o *software Geogebra* com vistas a identificar/caracterizar as propriedades importantes.

Atividades desta natureza funcionaram de modo positivo na ocasião em que, durante a atividade 2 (tarefas 1 e 2, p. 221), o **aluno 29** (ver figura 108) percebeu nos *registros gráficos* a pertinência do emprego das *intuições conjecturais* produzidas para o caso do CUV. Na figura 108, o **aluno 29**, por meio da *percepção* e da *visualização* dos *registros gráficos* em 2D fornecidos pelo computador, buscou compreender a noção de imagem limitada/ilimitada.

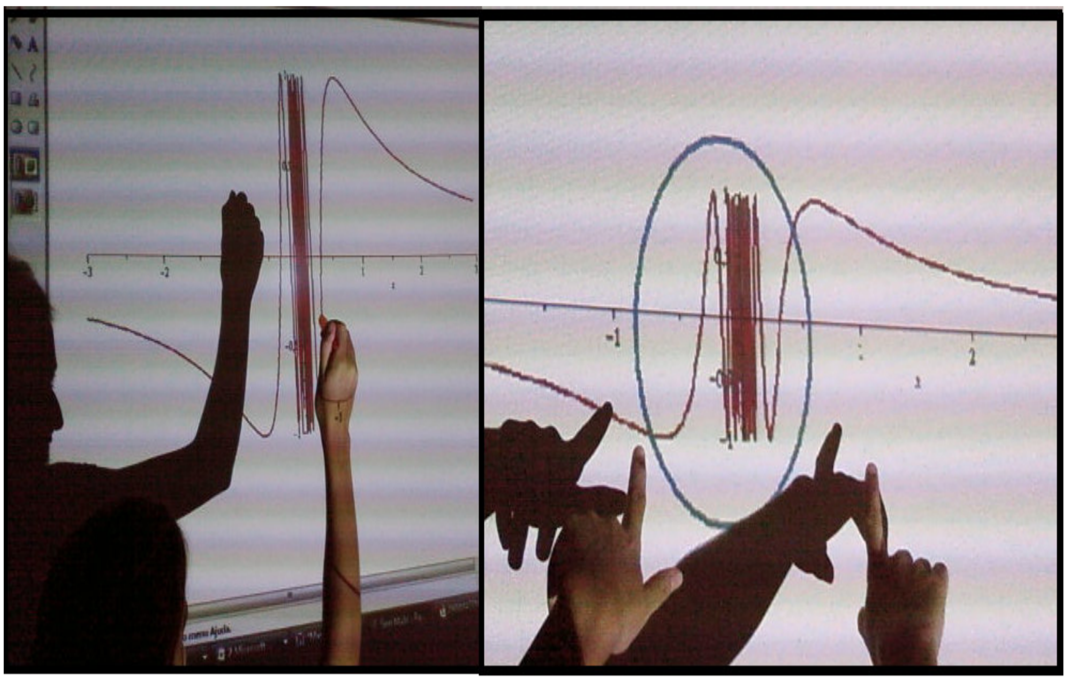


Figura 108. O aluno 29 explorou as propriedades do registro gráfico com arrimo no *software Geogebra*, o que proporcionou a produção de *intuições conjecturais*.

O **aluno 24**, na resolução da atividade 2, na *tomada de posição*, explorou, por intermédio da *visualização* e *percepção*, as propriedades *dos registros gráficos* em 2D, exibido no documento escrito. De modo semelhante ao que ocorreu com o **aluno 29**, consoante mostrado, o aluno 24 produziu *intuições conjecturais* relacionadas com a noção de imagem limitada/ilimitada da função (atividade 2, tarefa 1, p. 221).

> Esse gráfico aqui é diferente desse...aqui está sem o buraco...esse não existe nas proximidades porque não é contínua...na origem...com essa vista de cima aqui tô achando que não...com esse buraco aqui...tô achando que é diferente o gráfico... Não existe continuidade na origem...o limite não existe na origem porque não existe continuidade na origem... No item (I) a função é limitada....no item (II) é ilimitada...

O trecho destacado no discurso imediatamente anterior do **aluno 24**, constitui uma *intuição conjectural* que se manifestou na análise perceptiva de um *registro gráfico* 2D, na *tomada de posição*. Mais uma vez, indicamos o uso de uma "metáfora", visando a significar uma determinada propriedade formal. O uso de metáforas pode substituir, na fase inicial da SF, o emprego de *definições formais* do CVV, o que, na maioria dos casos, se mostrou pouco freqüente nos estudantes que participaram do estudo.

Quando o **aluno 24** declarou que "Esse gráfico aqui é diferente desse...aqui ta sem o buraco", suas ilações envolveram proposições com um *valor epistêmico* (DUVAL, 1999) de caráter não inferencial, propriedade importante de um raciocínio intuitivo. Este tipo sentença proposicional produzida na *tomada de posição* é incongruente com o ensino tradicional sem a exploração de recursos tecnológicos e a *formação* e *conversão* (DUVAL, 1999) de *registros gráficos*. Registramos o momento de suas análises na figura 109, ante à atividade 2 (p. 221).

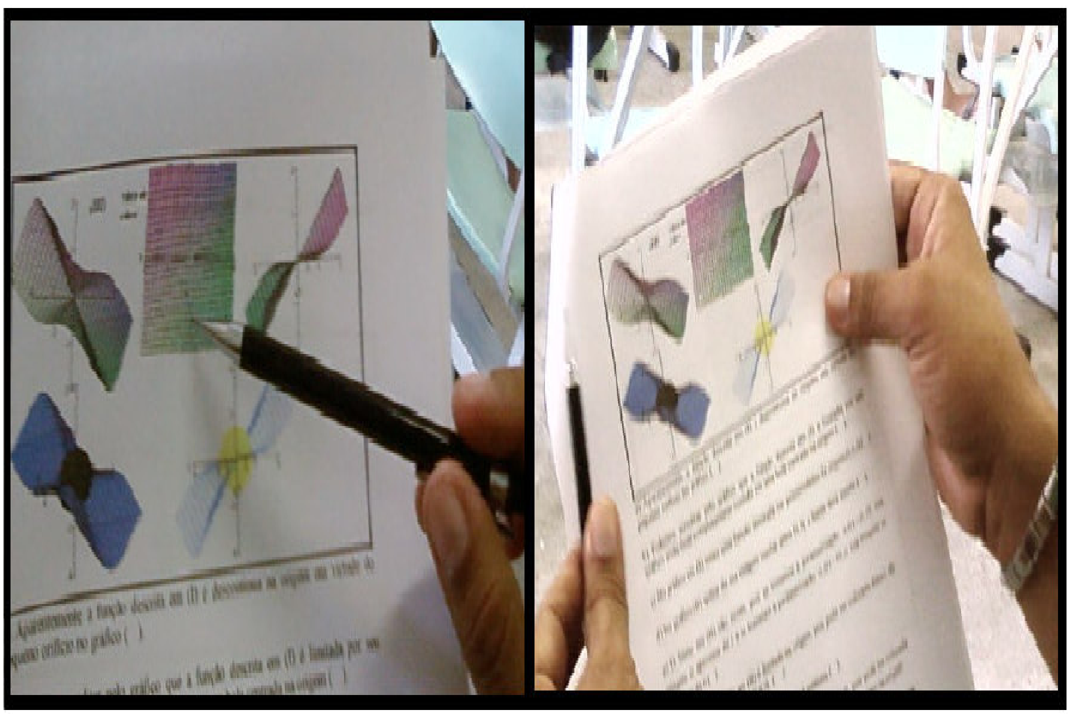


Figura 109. Na *tomada de posição* o aluno 24 se apoiou em sua capacidade de visualização para compreender a condição de imagem limitada.

Notemos que na *tomada de posição*, exploramos condições necessárias, mas não *suficientes*, para a análise da *existência* de limites requeridos na atividade 1. Tal opção decorre do que concluímos nas análises dos livros didáticos na seção anterior (p. 184).

Vejamos que, no ensino restrito às mídias lápis/papel, em decorrência da preponderância do *tratamento* de registros *algébricos*, os estudantes são estimulados na verificação das condições suficientes para a *existência* de limite, neste caso, na origem.

Na resolução da atividade 2 (tarefa 1), na *tomada de posição*, o **aluno 7** forneceu as seguintes sentenças proposicionais (ver figura 110), com o auxílio apenas de *registros na língua natural*. Mais uma vez, divisamos o emprego de termos intuitivos que indicam *intuições conjecturais* necessárias para a resolução da atividade 2.

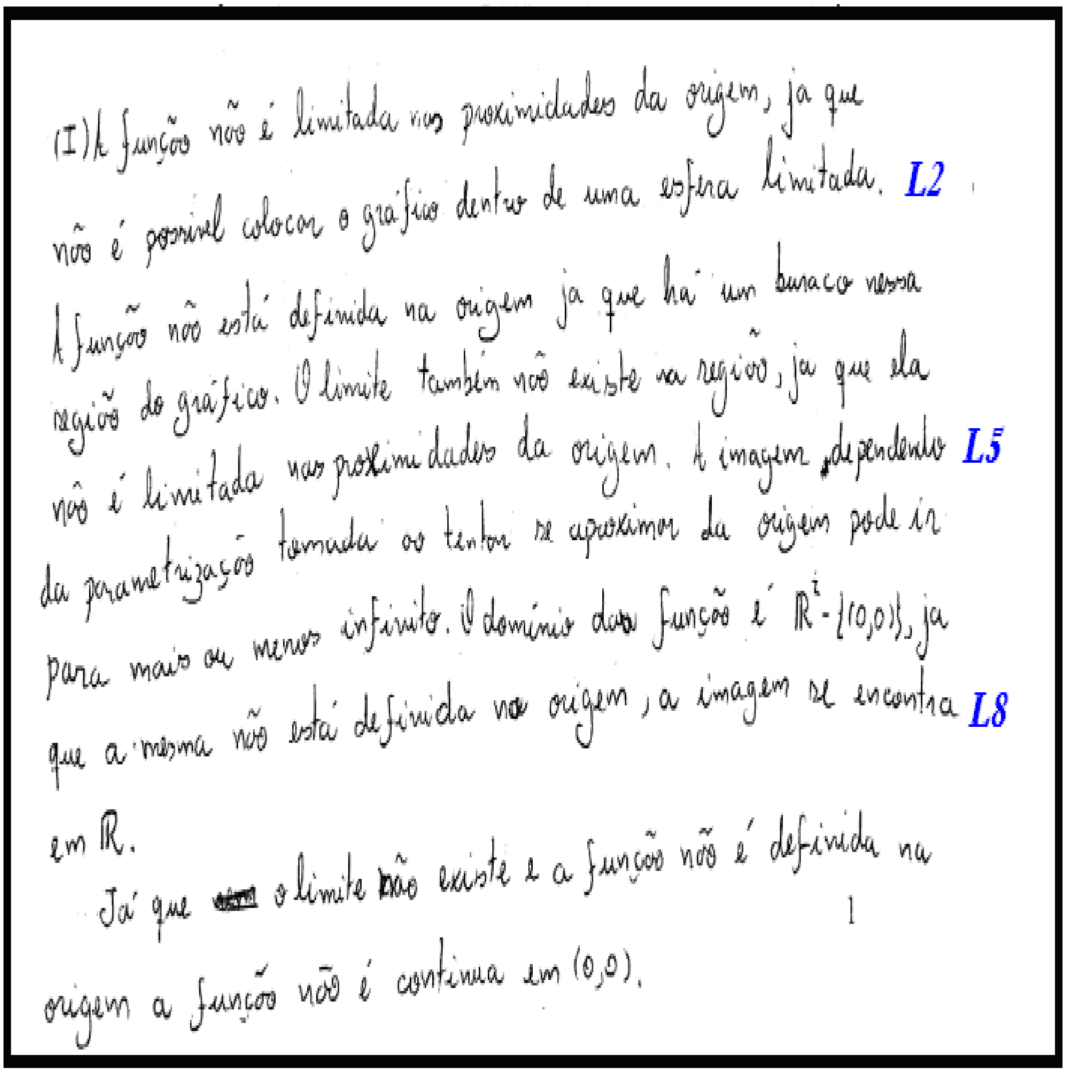
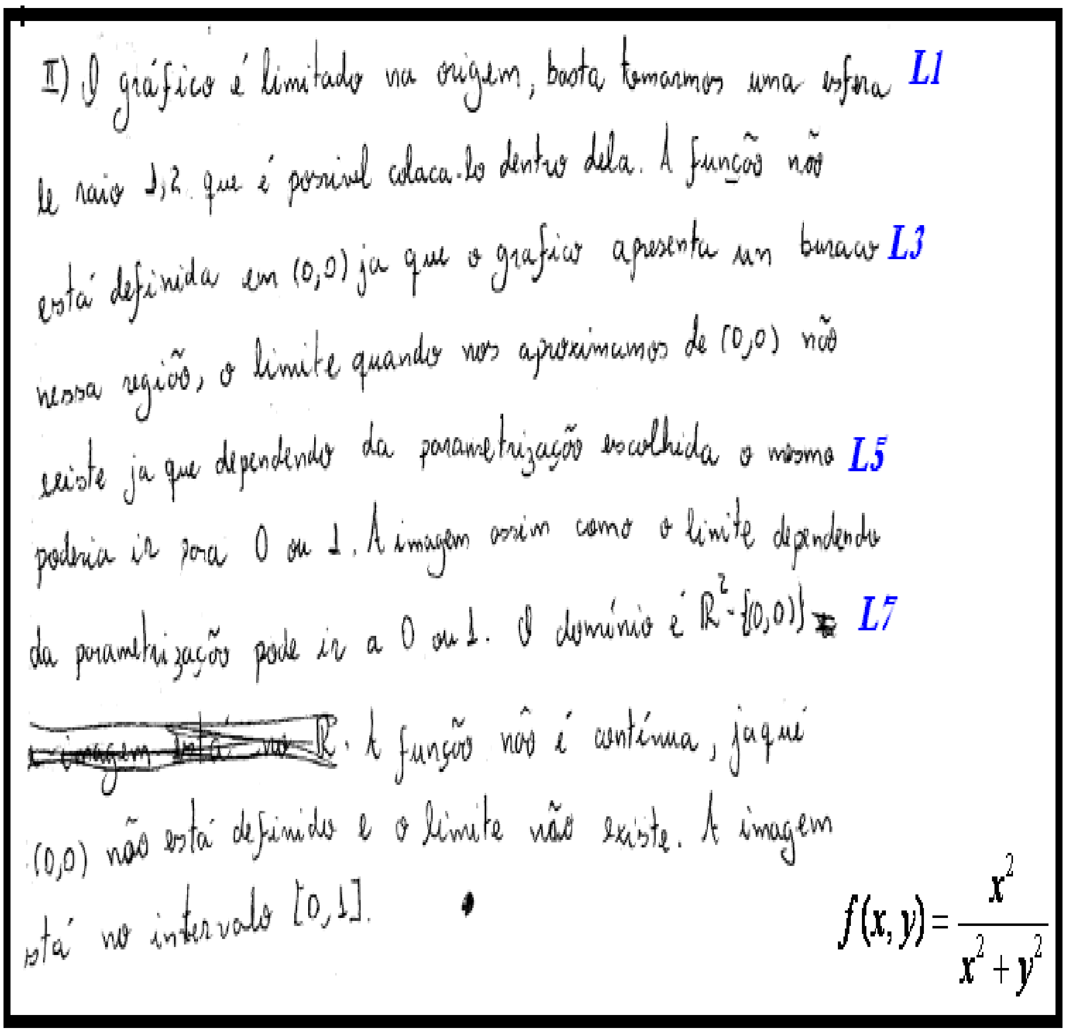

(I) A função não é limitada nas proximidades da origem, já que
não é possível colocar o gráfico dentro de uma esfera limitada. L2
A função não está definida na origem já que há um buraco nessa
região do gráfico. O limite também não existe na região, já que ela
não é limitada nas proximidades da origem. A imagem, dependendo L5
da parametrização tomada ao tentar se aproximar da origem pode ir
para mais ou menos infinito. O domínio da função é $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, já
que a mesma não está definida na origem, a imagem se encontra L8
em $\mathbb{R}$.
Já que o limite não existe e a função não é definida na
origem a função não é contínua em (0,0).

Figura 110. Explicação fornecida pelo aluno 7, com o emprego de registros na língua natural.

Sublinhamos que, explorados a *percepção* e a *visualização* dos *registros gráficos* adequados, proporcionamos, na *tomada de posição,* a mobilização de um conhecimento de caráter descritivo (linhas 2, 5 e 8) dos objetos envolvidos na atividade 2 (tarefas 1 e 2, p. 223). Dificilmente um aluno manifesta um saber desta natureza quando restringimos o ensino do CVV ao ambiente lápis e papel.

Com respeito aos registros exibidos na atividade 2, na identificação por intermédio da *percepção* e da *visualização* do gráfico, a presença do *registro gráfico* em 2D é imediata (linha 2). Observemos, que na linha 5, temos um argumento empregado sem o recurso efetivo de nenhum *tratamento* dos *registros algébricos* do CVV.

Por outro lado, o **aluno 7** reconheceu o modelo formal que condiciona a *existência* do limite. Quando relatou na linha 5 que "...a imagem, dependendo da parametrização tomada ao se aproximar da origem por ir para mais ou menos infinito", e isto caracteriza uma *intuição conjectural* que registramos na *tomada da posição*. Por fim, discutimos os dados produzidos pelo **aluno 21** na *tomada de posição*, quando nos forneceu, por intermédio exclusivo da língua natural, as seguintes explicações descritivas da função expressa pelo *registro algébrico* $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (tarefa 2).


II) O gráfico é limitado na origem, basta tomarmos uma esfera L1
de raio 1,2 que é possível colocá-lo dentro dela. A função não
está definida em (0,0) já que o gráfico apresenta um buraco L3
nessa região, o limite quando nos aproximamos de (0,0) não
existe já que dependendo da parametrização escolhida o mesmo L5
poderia ir para 0 ou 1. A imagem assim como o limite dependendo
da parametrização pode ir a 0 ou 1. O domínio é $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ L7
~~imagem está no~~ $\mathbb{R}$. A função não é contínua, já que
(0,0) não está definido e o limite não existe. A imagem
está no intervalo [0,1].

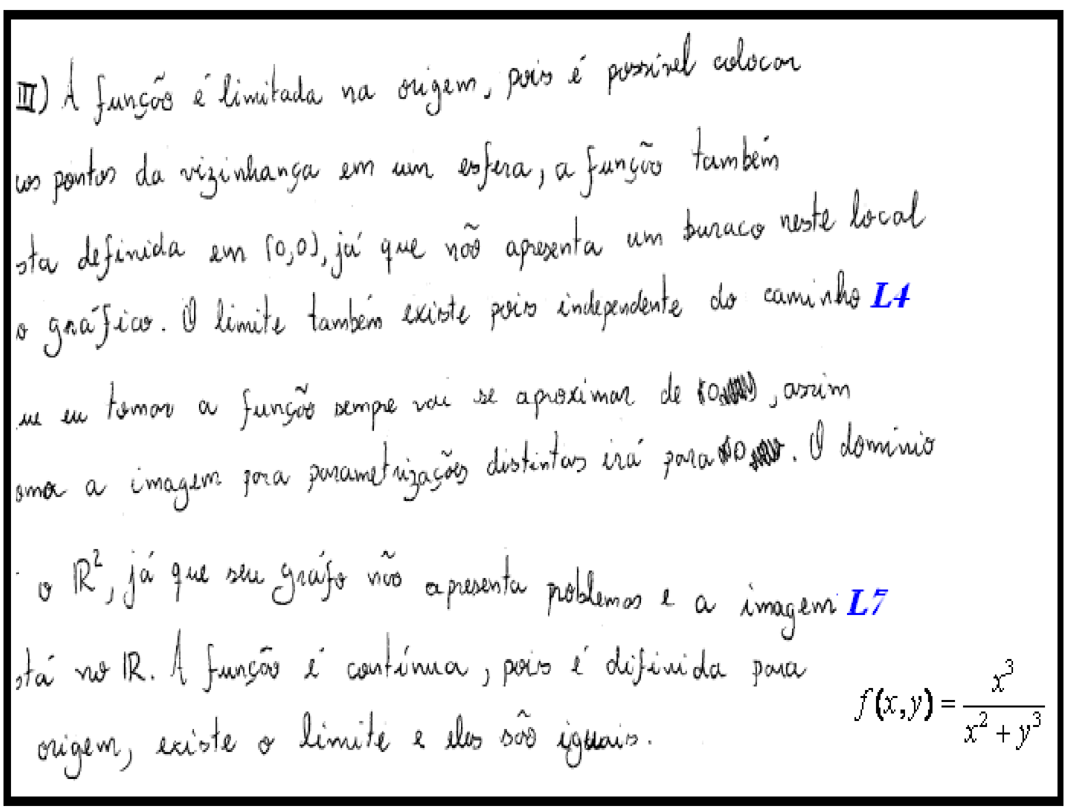
$$f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Figura 111. O aluno 21, na faze *tomada de posição*, forneceu explicações descritivas para a função da atividade 2 (tarefa 2, p. 223).

Na linha 1, por intermédio da *visualização* e *percepção* das propriedades dos *registros gráficos* em 2D, o aluno empregou um argumento intuitivo para verificar o caráter limitado de sua imagem. Com efeito, na linha 3 o **aluno 21** (ver figura 111), manifestou uma *intuição conjectural*, ao declarar que "A função não está definida em $(0,0)$, pois apresenta um buraco nessa região..." que identificamos na *tomada de posição*.

Ainda por intermédio da *visualização*, o **aluno 21**, sem recorrer ao *tratamento* dos *registros algébricos*, indicou que sua imagem se aproxima de 0 e de 1. Na linha 7, o aluno identificou seu domínio e, apenas com o uso da *língua natural*, descreveu o comportamento limitado da imagem da função que apresentamos na atividade 2.

Por fim, destacamos na atividade descritiva do **aluno 21**, na *tomada de posição*, a manifestação de uma *intuição afirmativa* quando declarou na linha 4 que: "O limite também existe, pois independe do caminho...". Tal categoria intuitiva é caracterizada aqui como *afirmativa*, pois é impossível, com auxílio apenas do *registro gráfico*, tomar uma atitude conclusiva sobre a existência dos limites fornecidos na atividade 2 (p. 223). Por outro lado, tais argumentos mais precisos deverão ser empregados apenas nas próximas fases da SF. Observemos as linhas destacadas na figura 112.


III) A função é limitada na origem, pois é possível colocar
os pontos da vizinhança em uma esfera, a função também
sta definida em (0,0), já que não apresenta um buraco neste local
o gráfico. O limite também existe pois independente do caminho **L4**
ue eu tomar a função sempre vai se aproximar de 10, assim
oma a imagem para parametrizações distintas irá para 0. O domínio
o $\mathbb{R}^2$, já que seu gráfico não apresenta problemas e a imagem **L7**
stá no $\mathbb{R}$. A função é contínua, pois é definida para
origem, existe o limite e eles são iguais.

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^3}$$

Figura 112. O aluno 21 manifestou *intuição afirmativa* na *tomada da posição* à respeito da atividade 2.

Na atividade 3, tarefa 2 (p. 223) fornecemos aos estudantes *registros algébricos* que obtivemos por intermédio do computador, relacionados com as funções $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ e $f(x,y)=xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. A escolha destas foi decorrente das análises dos livros realizada na seção imediatamente passada. Ante a atividade 3, **aluno 29** declarou

> As derivadas de segunda ordem tem que ser contínuas para comutarem...as mistas...mas a derivada parcial...a gente analisa aqui...a função tem que existir...se a gente redefinir....a gente pode pegar por partes...estes limites....

Indicamos aqui, de modo destacado, uma sentença proposicional que caracteriza uma *intuição afirmativa*. Sublinhamos a ideia de que o **aluno 29** admitiu não estudar de modo aprofundado às demonstrações formais envolvidas na tarefa 1, proposta nesta atividade (p. 224).

Identificamos, também, o fato de que quando mencionou que "...a gente pode pegar por partes...estes limites...." o aluno empregou um método de resolução tradicional no CUV, entretanto, em virtude da complexidade dos *registros algébricos* do CVV, tal argumento é pouco explorado nos livros didáticos, como apontamos na análise desses compêndios, no capítulo anterior.

De modo semelhante, na atividade 3, indicamos a seguinte declaração proveniente do **aluno 24**, na *tomada de posição*, antes de efetuar *tratamento* algum sobre os *registros algébricos* fornecidos na atividade: "*Sim pega uma fração e depois pega a outra fração....mas eu pego primeiro a fração com sinal de menos...e..depois...*".

Observamos que ele manifestou a produção de sentenças proposicionais a respeito do comportamento de um *registro algébrico* formado com a presença do computador. Sua declaração constitui uma *intuição conjectural* que necessitou ser confirmada nas etapas subsequentes da *Sequência Fedathi*.

O **aluno 7** manifestou uma análise e descreveu um cálculo mental a respeito do comportamento dos *registros algébricos* relacionados às *derivadas parciais* das funções acima, quando mencionou que: "Sim...indeterminação nessa segunda..fração....se de uma indeterminação na segunda...já morre...Não muito por que é de cabeça....dá muito não...". Notamos em seu discurso produzido na *tomada de posição*, uma identificação no *registro algébrico* da ideia de indeterminação na fração. Neste caso, o estudante produziu *intuições conjecturais* que anteciparam sua resolução e o *tratamento* formal dos *registros algébricos* em foco.

O **aluno 21** declarou: "Mas as derivadas primeiras todas tem que ser contínuas...não....não necessariamente....pode ser ou pode não ser..por que nessa segunda aqui tem uma indeterminação...quando $y \to 0$". Mais uma vez, registramos a atividade discursiva do estudante ao desenvolver uma análise com arrimo na *percepção* e na *visualização* dos *registros algébricos* fornecidos na atividade 3 (p. 224).

O **aluno 21**, de modo semelhante ao **aluno 7**, com respeito a atividade 3 (tarefa 1), indicou a possibilidade de uma identerminação em uma das frações presentes nos seguintes *registros algébricos*: $\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = -\frac{6\,x^2\,y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8\,x^4\,y}{(x^2+y^2)^3}$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) =$$
$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2\,x^2}{x^2+y^2} - \frac{2\,x^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8\,x^2\,y^2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Notemos que a *formação* destes *registros algébricos* foi assegurada pelo computador. Na prática, é muito fastidioso exigir que o próprio estudante, por meio de um longo *tratamento* deles, obtenha os resultados há pouco indicados. Assim, na fase 1 – *tomada de posição* - por intermédio da *formação de registros*, proporcionamos a produção de *intuições conjecturais* por intermédio de uma análise visual dos *registros* fornecidos na atividade 3.

Com respeito à atividade 4 (p. 226), na *tomada de posição*, proporcionamos a exploração da atividade *perceptiva* e da *visualização* das propriedades de *registros gráficos* em 2D como os que obtivemos por intermédio do *software Maple*. Reparamos na figura 113 que o **aluno 29**, comparou e relacionou os *registros gráficos* com os de natureza algébrica.

De modo particular, quando analisamos o *registro algébrico* $f(x,y) = x^3y - xy^3$, não conseguimos explorar a *percepção* do estudante. De fato, com suporte no *registro gráfico* em 2D, o **aluno 29** identificou as regiões de bordo e regiões interiores do gráfico exibido na atividade 4. Por outro lado, quando analisamos o *registro algébrico* $f(x,y) = x^3y - xy^3$, não percebemos a variação da imagem da função, e propriedades qualitativas como a suavidade do comportamento da superfície que representa seu gráfico e a presença de algum ponto de não definição do gráfico, etc. Vejamos sua atitude na figura 113.

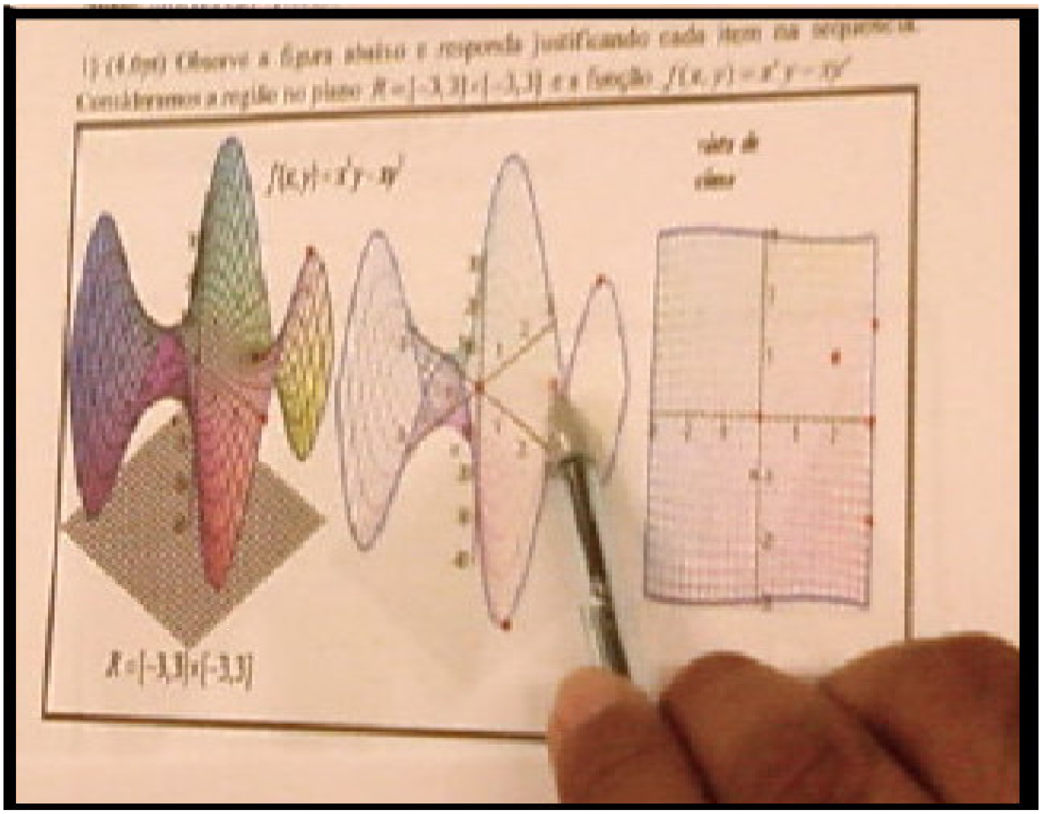


Figura 113. O aluno 29 explorou os *registros gráficos* em 2D fornecidos na atividade 4.

O **aluno 29** (ante à atividade 4, tarefa 1) forneceu a seguinte declaração na *tomada de posição* ao exprimir a ideia de que

> Na fronteira, esses três pontos aqui... por que...eles são analisados...identificados...e no interior...são dois...estão dentro do gráfico da função....é fronteira por que estão nas bordas....eles estão limitados nas extremidades do gráfico...estão nas bordas...dois pontos interiores...esse daqui e aqui...são interiores...dentro do gráfico...e o teste da hessiana...em dois pontos...na origem e neste ponto que provavelmente deve ser um ponto de inflexão...nas bordas posso aplicar....

No fragmento do seu relato, evidenciamos a presença no seu discurso com a intenção de registrar o fato de que sua análise não necessitou do *tratamento de registros algébricos*. Assim, proporcionamos um terreno fértil, que possibilitou a produção de *intuições conjecturais* que devem ser confirmadas ou não nas fases seguintes da SF.

Na atividade 4, obtivemos a *formação* dos *registros gráficos* relacionados com as *curvas de nível* da função. Indicamos as limitações da exploração dos *registros gráficos* em 2D, uma vez que o **aluno 29** (ver figura 114) buscou completar as *curvas de nível* com vistas a prever seu comportamento. Tal atividade tem natureza perceptiva, pois a *visualização* do comportamento dos *registros gráficos* fornecidos pelo professor foi essencial no sentido de proporcionar a produção de declarações sobre o fato.

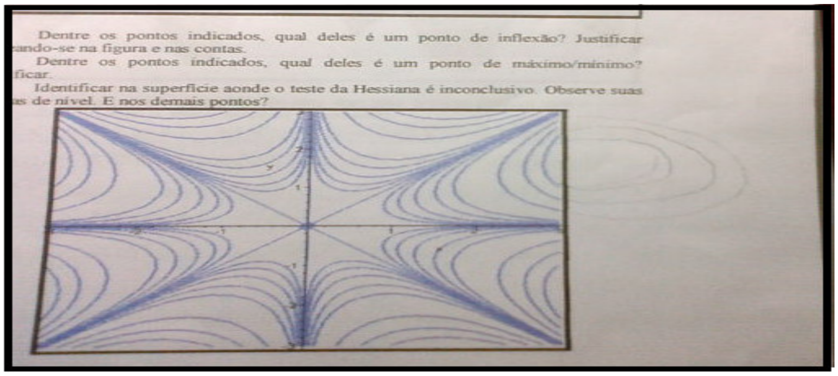


Figura 114. O aluno 29 buscou completar a figura e perceber seu comportamento no plano.

Em seguida, apresentamos os dados produzidos pelo **aluno 24** na *tomada de posição*. Mais uma vez, registramos o fato de que ele se apoiou na *apreensão perceptiva* (DUVAL, 1995b) e na *visualização*, com vistas a identificar a natureza da atividade 4. Observemos na figura abaixo 115, que o aluno procurou relacionar o *registro algébrico* $f(x, y) = x^3y - xy^3$ com o *registro gráfico* produzido pelo computador, o que exibimos na folha da avaliação.

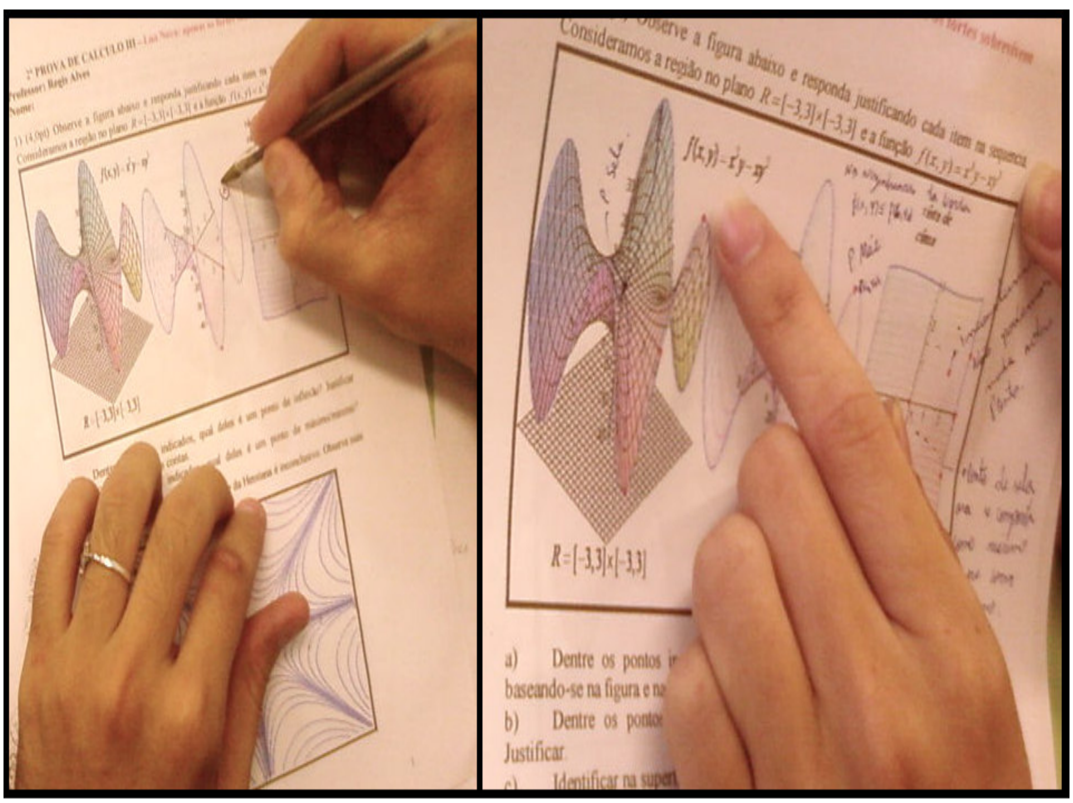
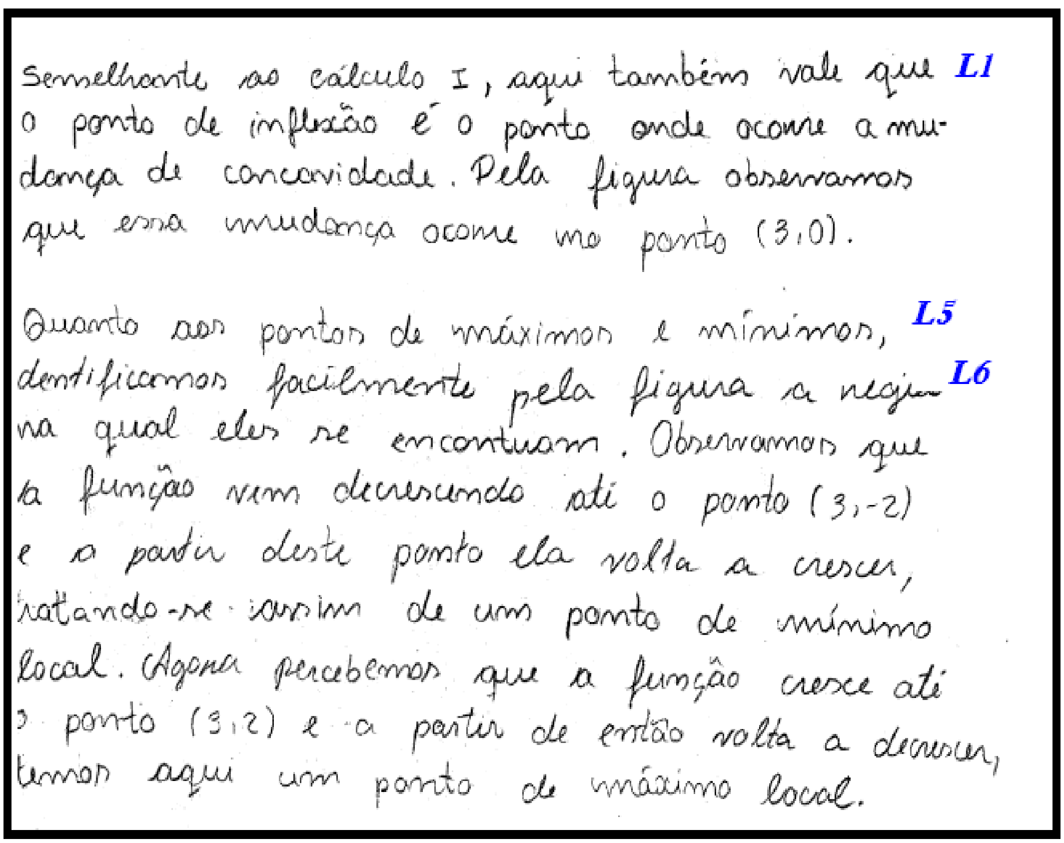


Figura 115. O aluno 24 analisou e percebeu as propriedades inerentes ao registro gráfico proposto na atividade 4.

Na *tomada de posição*, não estimulamos o *tratamento* precipitado dos *registros algébricos*, como se observa nos livros didáticos. Nesta fase, o entendimento e a descrição da situação-problema envolvida na atividade 4 puderam ser realizados por meio da *língua natural*. De fato, na figura 116, o **aluno 24** desenvolveu uma analogia interessante ao reaplicar a noção de *ponto de inflexão* do contexto do CUV para o novo contexto do CVV, o que fortalece a *transição interna*.

Como mencionamos nos capítulos anteriores, habilidades como esta proporcionam a *transição interna* do CUV para o CVV (ver Cap. 1, p. 61), na medida em que o sujeito percebe a validade de um resultado ou estratégia familiar do contexto do CUV. Destacamos na linha 5, sem o emprego do *tratamento* de *registros algébricos*, a identificação, por meio da *percepção* e *visualização*, da presença de pontos de *máximo* e *mínimo local*.

Por outro lado, o *tratamento* dos registros demandaria algum tempo. Ante tal circunstância o **aluno 24** declarou: "Quantos aos pontos de máximo e de mínimo, identificamos facilmente pela figura, o local onde se encontram...". Esta *intuição conjectural* será essencial nas fases subsequentes da SF. Indicamos isto na figura 116.


Semelhante ao cálculo I, aqui também vale que L1
o ponto de inflexão é o ponto onde ocorre a mu-
dança de concavidade. Pela figura observamos
que essa mudança ocorre no ponto (3,0).

Quanto aos pontos de máximos e mínimos, L5
dentificamos facilmente pela figura a regi- L6
na qual eles se encontram. Observamos que
a função vem decrescendo até o ponto (3,-2)
e a partir deste ponto ela volta a crescer,
tratando-se assim de um ponto de mínimo
local. Agora percebemos que a função cresce até
o ponto (3,2) e a partir de então volta a decrescer,
temos aqui um ponto de máximo local.

Figura 116. O aluno 24 forneceu uma descrição com uso da língua natural para a atividade 4, na *tomada de posição*.

Indicamos ainda que o **aluno 24** declarou que: "Pela figura, observamos que....", o que comprova que toda sua atividade de produção de sentenças proposicionais, como as que exibimos há instantes, foi obtida por intermédio da *percepção* e *visualização* dos *registros gráficos* em 2D, que caracterizam *intuições conjecturais*.

No que diz respeito ao **aluno 7**, no âmbito da resolução da atividade 4, ele afirmou que: "Aqui diz que tem que identificar apenas na figura...acho que é um extremo..e esse aqui acho que é de sela..parece de sela.....esse aqui é sela". Isto caracteriza uma sentença proposicional apoiada em um conhecimento mobilizado com suporte apenas na *visualização*. Aqui temos o registro de uma *intuição conjectural* na *tomada de posição*. Sua análise restringiu-se aos *registros gráficos* em 2D nesta fase.

De modo semelhante ao que o **aluno 29** indicou, o **aluno 7** sublinhou as restrições decorrentes dos *registros gráficos* em 2D, ao acentuar que

> ....porque estou achando que é extremo..por nessa região aqui...as curvas de nível estão fechadas...apesar de não estar na prova...Na origem..parece ponto de sela...e temos hipérboles..provavelmente é sela...

O **aluno 7** indicou as restrições e entraves impostos pelos *registros gráficos* relacionados com as *curvas de nível* da função fornecida na atividade 4 (p. 226). Apontamos a sentença proposicional em destaque no excerto acima: "Na origem... parece ponto de sela...e temos hipérboles..provavelmente é sela...", o que caracteriza uma *intuição conjectural*.

Por fim, na *tomada de posição*, o **aluno 21**, com auxílio da *visualização* dos *registros gráficos* 2D, argumentou que: "Tá aqui.....ponto de sela nem é máximo e nem é mínimo.....Não tô conseguindo enxergar se é o (I) ou (II) a curva de nível associada....". Mais uma vez, comprovamos a produção de *intuições conjecturais* promovidas por uma mediação didática ancorada nos pressupostos da *Sequência Fedathi*.

Notemos que as estratégias dos estudantes foram analisadas e, ao serem questionados a respeito do domínio das *definições formais* matemáticas, os sujeitos responderam de modo semelhante ao que disse o **aluno 21**, quando confirmou que: " Pelo que eu lembro da definição agora é o ponto aonde a função assume o seu valor máximo em determinado x e determinado y.".

Assim, ratificamos o caso em que os estudantes realizam as atividades sem um razoável domínio dos resultados formais, o que nos permitiu asserverar que suas estratégias foram intuitivas e, em alguns casos, registramos *intuições afirmativas*, como, por exemplo, a tarefa de derivar a função $f(x,y) = x^3y - xy^3$ sem se preocupar com a definição do limite pois os estudantes aprendem no CUV que funções polinomiais são sempre deriváveis, portanto, acreditam que a regra continua sendo válida no contexto do CVV.

Na atividade 5 (p. 227), abordamos o conteúdo de *integral múltipla*. Verificamos que, na análise de livros, a abordagem proporciona o fastidioso *tratamento* de *registros algébricos* e em poucos casos observamos o estimulo à *visualização* e à *percepção* das propriedades dos objetos envolvidos. Na *tomada de posição*, fornecemos ao **aluno 29** os *registros algébricos* e os registros descritos em língua natural que possibilitam a elaboração das primeiras estratégias.

Por exemplo, na figura 117, o **aluno 29** manifestou dificuldades para a identificação do tipo de *integral múltipla* sem a exploração de *registros gráficos*. Notemos que, em tarefas desta natureza, não possibilitamos ao aluno explorar a atividade perceptual e a *visualização*. Observemos suas análises.

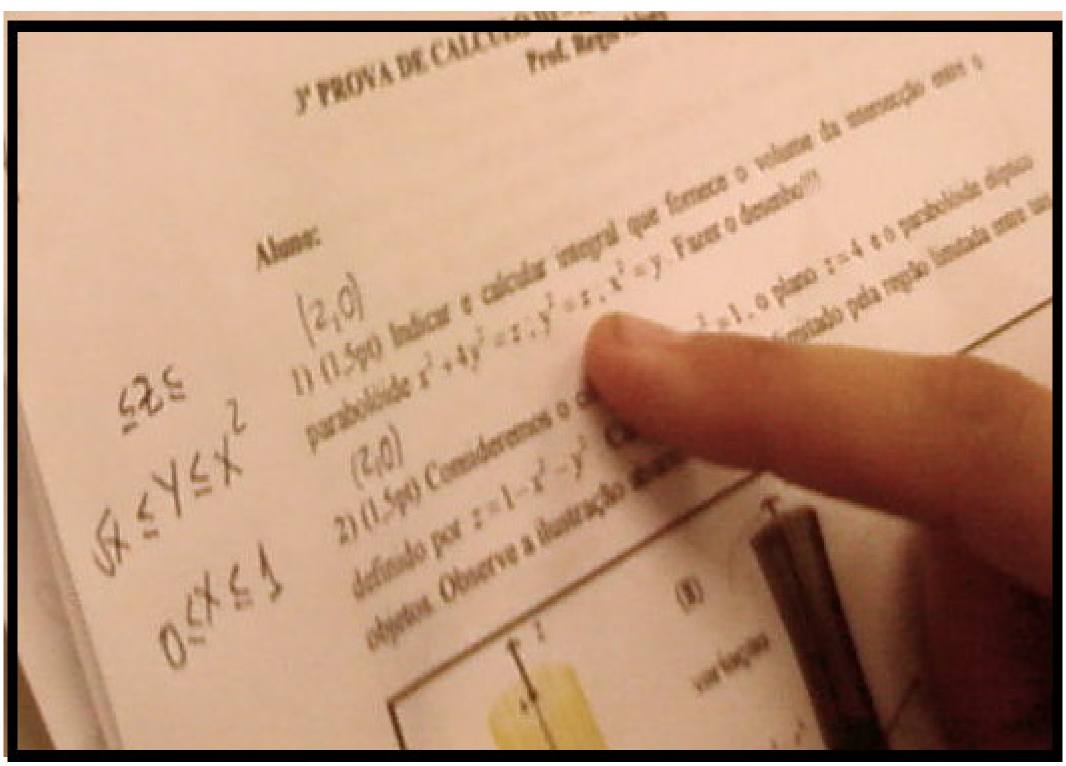


Figura 117. O aluno 29 analisou apenas os *registros* em *língua natural* e *registros algébricos* nas tarefas 1 e 2 da atividade 5.

Constatamos as dificuldades enfrentadas pelos estudantes quando depararam tarefas em que não fornecemos os *registros gráficos* adequados em 2D, na *tomada de posição* da SF. Tais dificuldades tiveram como consequência a escassez da produção de *intuições conjecturais* e *intuições afirmativas* nesta fase.

Por outro lado, nas tarefas da atividade 5 (p. 227), em que fornecemos os *registros gráficos*, como a que indicamos na figura 117, no canto inferior da figura, o **aluno 29** conseguiu produzir sentenças proposicionais explicativas da situação-problema.

Em seguida, ante a resolução da atividade 5, indicamos os dados produzidos pelo **aluno 24**, na *tomada de posição*. Em sua análise (figura 118) da respectiva tarefa, o aluno 24 declarou que: "Na 1ª é porque só achei os intervalos...mas eu não sou muito bom em desenho". Isto indicou também a complexidade dos *registros gráficos* obtidos graças à exploração didática do computador.

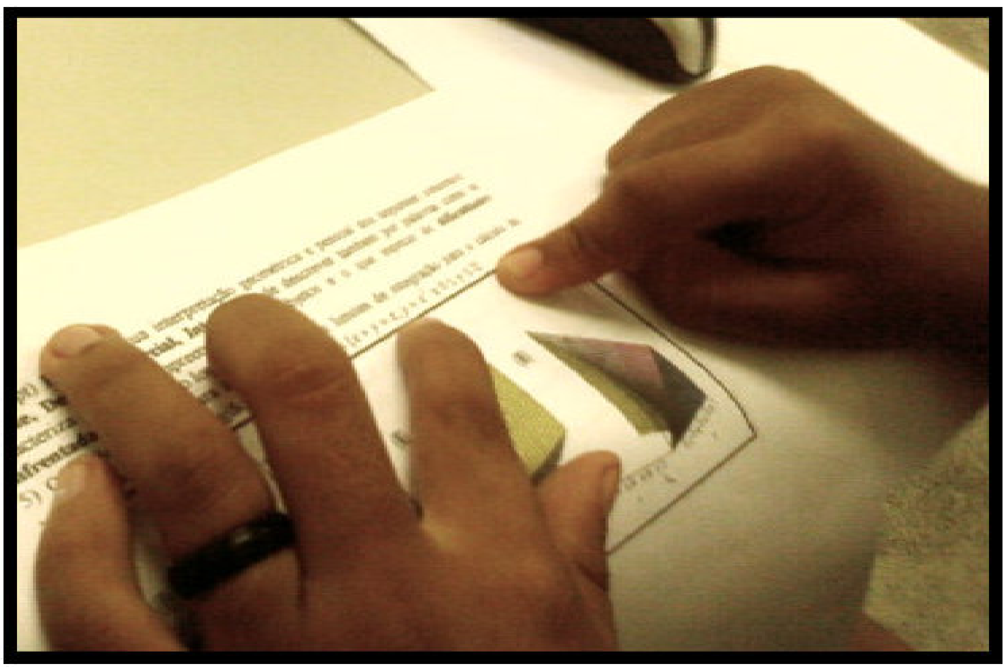


Figura 118. O aluno 24 manifestou maiores dificuldades nas tarefas das quais houve a ausência de *registros gráficos* em 2D.

Indicamos que, nas tarefas em que não fornecemos *registros gráficos* em 2D, na *tomada de posição* da SF, deparamos maiores queixas dos estudantes (**alunos 21, 24** e **29**) que conseguiram, na maioria dos casos, elaborar *registros gráficos* em 2D que designavam apenas a variação da integral no plano xOy.

O **aluno 7**, na *tomada de posição*, forneceu o desenho (ver figura 119) que exibimos na sequência para representar a região pretendida no processo de integração.

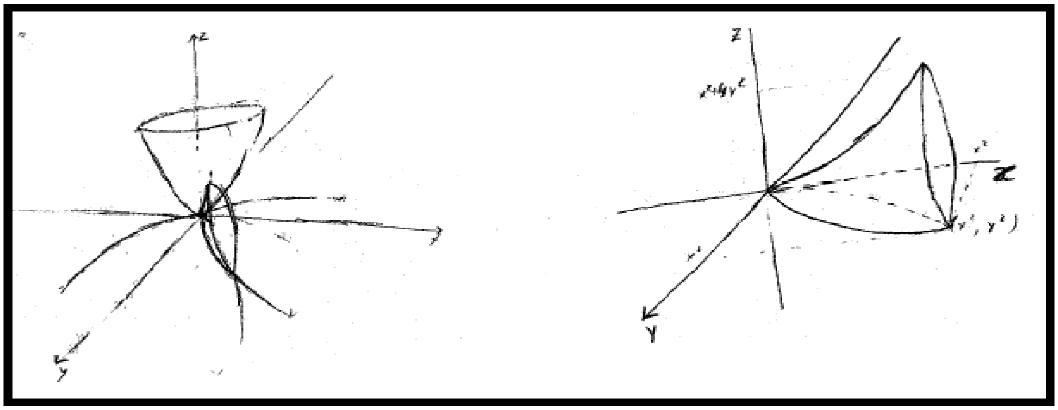


Figura 119. Apenas o aluno 7 logrou êxito em esboçar um desenho como auxílio ao raciocínio na *tomada de posição*.

A sistemática de investigação nas atividades que envolveram o processo de integração caracterizou-se pela exploração da *conversão de registros* por parte do professor apenas na *maturação* da SF.

Para concluir, apresentamos na figura 120, o desenho produzido pelo **aluno 21**, na *tomada de posição*. Reparemos mais uma vez que o **aluno 21** buscou realizar uma *conversão* conveniente dos registros inicialmente fornecidos de natureza algébrica para o plano, com a intenção de identificar os limites de integração no plano xOy. Observemos ainda que, ele não efetuou nenhum *tratamento* dos *registros algébricos* nesta fase e, a com base na *viualização* do desenho, o mesmo criou condições para a produzir de *intuições conjecturais*. Vejamos isto na figura 120.

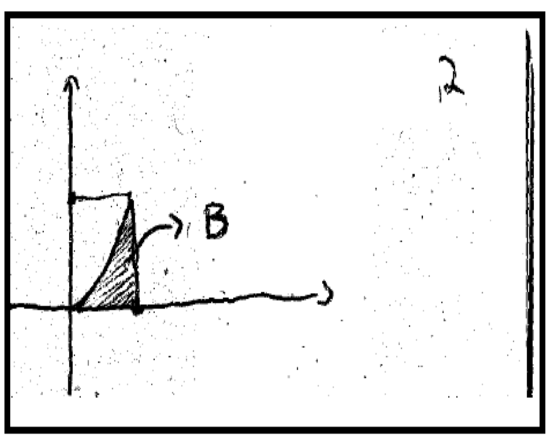


Figura 120. O aluno 21 conseguiu realizar a *conversão de registros* na fase 1 de *tomada de posição* da SF apenas no que diz respeito ao plano.

Para encerrar esta seção, destacamos o fato de que na *tomada de posição*, com nossa mediação, o estudante foi incentivado a recorrer a uma exploração perceptual e a *visualização* dos *registros gráficos* em 2D, fornecidos na folha de papel, portanto, em

2D. Indicamos nos parágrafos anteriores os momentos em que observamos o aparecimento de *intuições afirmativas* e *intuições conjecturais*.

Ademais, na *tomada de posição*, o estudante deparou um problema inicial e outros elementos pertinentes a cada uma das cinco tarefas foram paulatinamente explorados nas fases subsequentes da SF, na medida em que exploramos as noções de *formação* e *conversão*. Sugerimos a necessidade do *tratamento* dos registros do CUV e do CVV apenas nas fases 2 e 3.

De modo sistemático, durante as atividades na *maturação*, disponibilizamos o computador para os estudantes participantes do experimento. Sublinhamos que a intenção didática foi proporcionar a demanda, por parte do próprio estudante, por analisar os *registros gráficos* em 3D no computador e aperfeiçoar o processo perceptivo e a identificação dos elementos mais importantes nas cinco atividades.

5.2 Fase de *Maturação*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

Como destacamos na seção passada, na *maturação*, disponibilizamos para os estudantes a oportunidade de analisar e comparar as propriedades dos *registros gráficos* e *registros algébricos* fornecidos nas atividades. De modo sistemático disponibilizamos para cada sujeito, a possibilidade de comparar as análises no contexto computacional.

Assim, na atividade 1 (tarefa 1), o **aluno 29**, compararou o comportamento e as propriedades dos *registros gráficos* em 2D e 3D, fornecidos pelo computador. Na figura 121, observemos que o aluno 2 comparou o comportamento da *curva parametrizada* no plano (lado esquerod) e no espaço 3D (no computador, lado direito da figura 121).

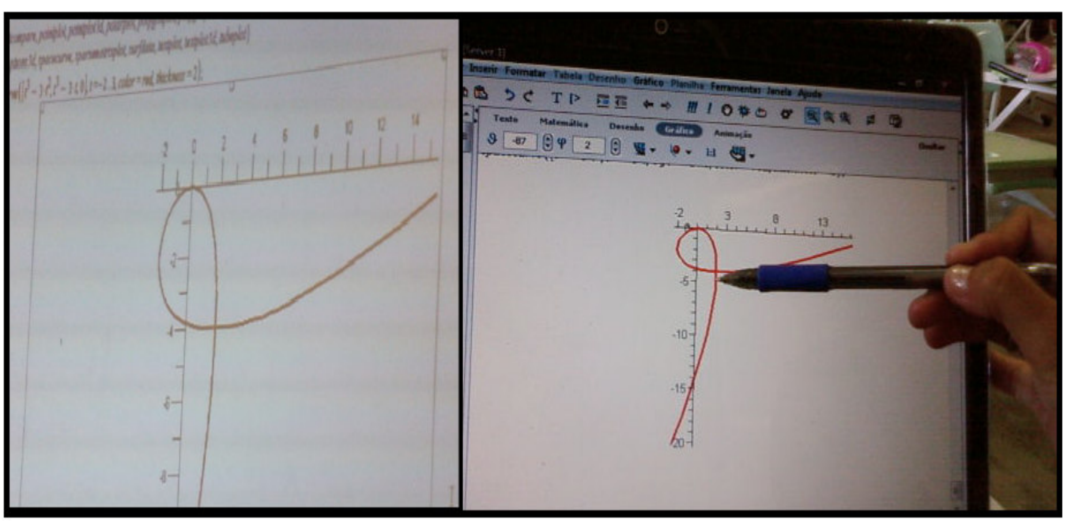


Figura 121. Na fase de *maturação* o aluno 29 comparou os *registros* em 2D com os 3D fornecidos pelo computador.

Indicamos o fato de que, apoiado na *percepção* e *visualização* das propriedades do *registro gráfico*, o **aluno 29** identificou elementos no gráfico em que ele suspeitou que o auxiliariam na etapa posterior de *tratamento* dos *registros algébricos*. Reparemos isso em sua fala, ao mencionar que

> Ah to entendendo...a declividade que é o ângulo. Então será onde a declividade vai se anular. Quando a declividade é nula a reta vai ser paralela ao eixo Ox ou ao eixo Oy. Aí eu substituo na primeira função? Aí eu coloco para $t=1$ e $t=-1$ na primeira função.

Na atividade 1 (tarefa 1), os alunos procuravam relacionar os *registros algébricos* e gráficos de modo correto e identificar as retas tangentes horizontas/ verticais. No trecho que segue, obtido da entrevista com o **aluno 24**, na *maturação* - declarou que

> É para gente saber... É a derivada de dy sobre x. É a reta tangente ao gráfico. ... A derivada de y em relação a t é isso...Vou encontrar a reta paralela ao eixo Ox e ao eixo Oy. Primeiro, para a ser paralela ao eixo Ox essa parte aqui debaixo é zero...Não aqui em cima é zero...Por isso aqui me da a reta tangente paralela ao Ox, a tangente não é zero. Mas se aqui for zero não existe....é 90º quando a tangente não existe...

Em sua argumentação, destacamos o trecho em que afirmou " É para gente saber... É a derivada de dy sobre x. É a reta tangente ao gráfico. ...". Isto, porém, caracteriza uma habilidade adquirida no contexto do CUV que é readaptada ao contexto de ensino do CVV. O diferencial nesta tarefa é que, antes mesmo de realizar algum *tratamento* dos *registros algébricos*, o **aluno 24** formulou suas hipóteses e identificou detalhadamente, os elementos mais importantes da questão, ao visualizar os *registros gráficos* em 3D, como exibimos na figura 122.

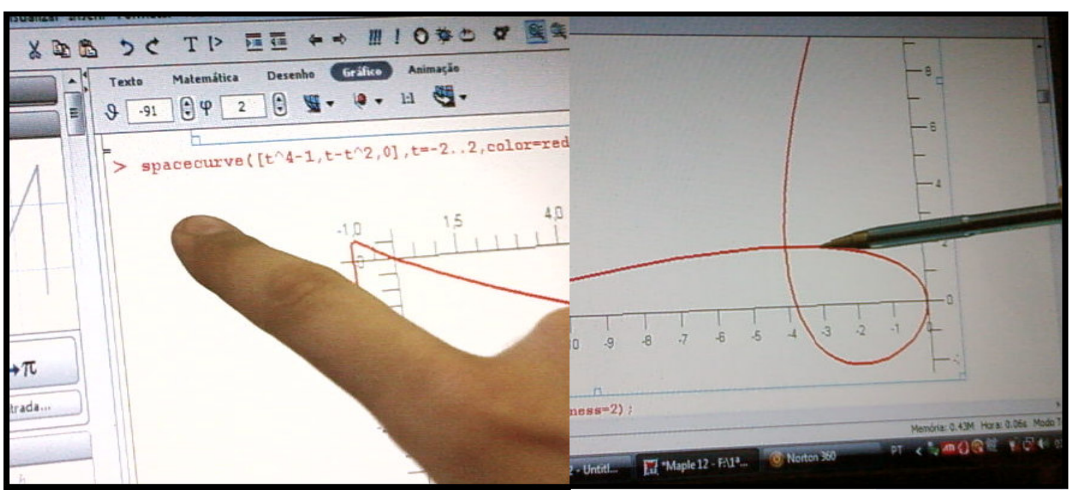


Figura 122. Na maturação, o aluno 24 recorreu aos *registros gráficos* em 3D fornecidos pelo computador no sentido de melhorar sua *visualização* (atividade 1).

Na *maturação* - da SF, o **aluno 7** produziu *intuições* de natureza *conjectural* descritivas do comportamento dos *registros gráficos*. Vejamos que a produção de *intuições conjecturais*, semelhantes às identificadas no próximo trecho, são inexequíveis num contexto de ensino que explora apenas os *registros algébricos*.

De fato, o aluno 7 explicou que: "*Acho que não...Ela ta subindo ali e tinha que ta descendo...Aqui ela decresce e depois cresce...Bem aqui no (0,0) tem...tangente horizontal é nesse ponto e nesse ponto aqui...*". Notemos que, suas *intuições conjecturais* produzidas na fase de *maturação* da SF foram produzidas com apoio apenas na *percepção* e *visualização* das propriedades dos *registros gráficos* em 3D.

Para concluir, sublinhamos o caso do **aluno 21** que, durante a fase de *tomada de posição*, manifestou estranheza na natureza e no comportamento dos *registros algébricos* e *registros gráficos* presentes na atividade 1 (ver figura 123). Recordamos ainda que, na fase anterior, o **aluno 21** manifestou a necessidade de investigar de modo mais aprofundado o comportamento dos *registros gráficos* em 3D no computador. Na figura 123, o **aluno 21** analisou e comparou os registro 2D/3D e os *registros algébricos*.

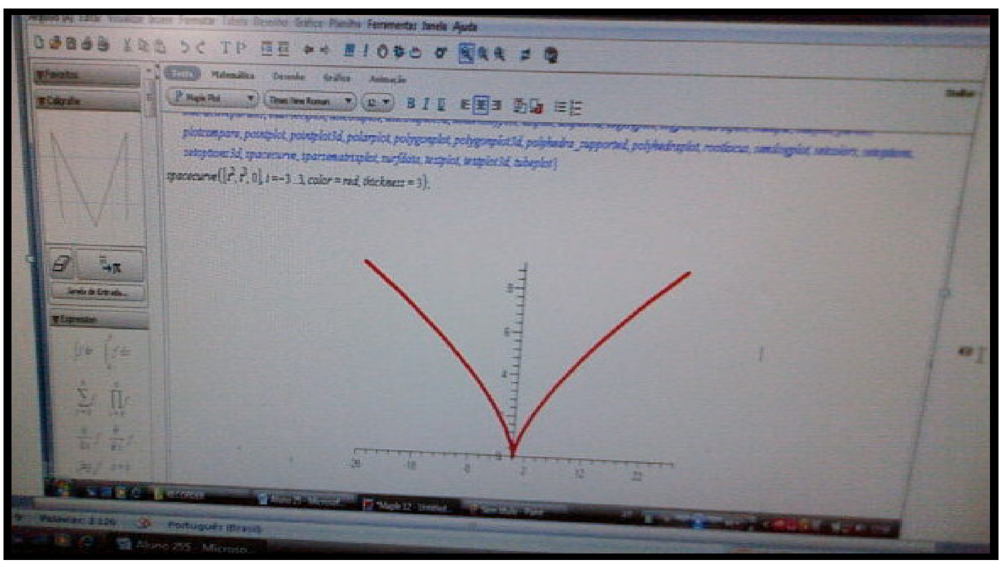


Figura 123. O aluno 21 comparou registros em 2D e registros gráficos em 3D e manifestou intuições conjecturais na fase de *maturação* da SF.

Como resultado de sua *visualização*, o **aluno 21** relacionou os *registros algébricos* da parametrização acima descritos por $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ (atividade 1) exibidos na atividade 2, o **aluno 21** compreendeu a *conversão de registros* ao declarar que

> Na parte que era negativo...vemos $t^2 \geq 0$..tá dando positivo...e o comportamento do gráfico eu não acredito que seja assim...e deve ser assim...não deste modo...porque derivando a função aqui....a medida

que isso for para zero...isso aqui vai para zero....e tende a zerar...o coeficiente angular....e não tangente vertical...como vemos no gráfico de $y = x^{3/2}$. É como se tivesse uma tangente horizontal e não vertical...

De fato, indicamos neste excerto sua comparação entre os *registros algébricos* $t^2 \geq 0$, $y = x^{3/2}$ e os *registros gráficos* que ele consultou e manipulou na tela do computador. Destacamos aí a interpretação dinâmica e intuitiva manifesta em *intuições conjecturais* do tipo: "...a medida que isso for para zero...isso aqui vai para zero....e tende a zerar...o coeficiente angular....e não tangente vertical...como vemos no gráfico de $y = x^{3/2}$". Sua afirmação põe em evidência que na *maturação*, o **aluno 21** produziu *intuições conjecturais* apoiadas na *percepção* e *visualização* das propriedades de *registros gráficos* e *algébricos*.

No que diz respeito à atividade 2, discutimos na seção imediatamente passada que o domínio das *definições formais* do CVV é problemático e que caracteriza uma herança das dificuldades de compreensão das *definições formais* do CUV. Na resolução da atividade 2 (tarefa 1), o **aluno 29** requisitou a análise do gráfico de uma função que possui imagem ilimitada. Na figura seguinte, vemos sua atividade de visualização desenvolvida na tentativa de comparar os *registros algébricos* $\frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x^2 + y^2}$. Vejamos que ambas são funções cujo valor é ilimitado nas vizinhanças da origem. Esta atividade exploratória desenvolvida com a necessidade manifestada pelos sujeitos de analisar e manipular os *registros gráficos* 3D no computador se mostrou decisiva para a produção de *intuições conjecturais* na *fase de maturação* da SF.

Na figura 124, registramos o momento em que analisou o comportamento dos *registros gráficos* em 3D obtidos por meio do computador.

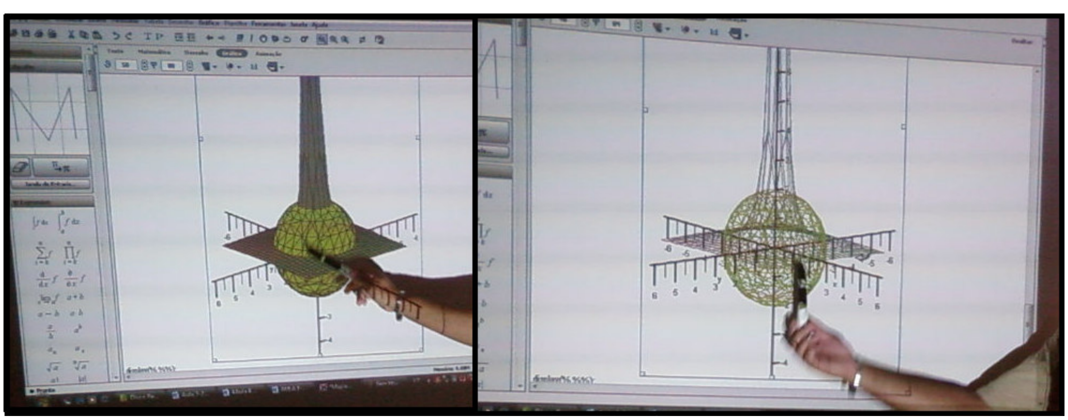


Figura 124. O aluno 29 requisitou a análise do comportamento do *registro gráfico* em 3D.

Em seguida, apresentamos os dados do **aluno 24**, recolhidos durante a *maturação* da SF. Como destacamos no início, nesta fase, os alunos requisitaram e tiveram livre acesso ao computador e à manipulação dos *registros gráficos* na tela. Assim, o **aluno 24** comparou *registros gráficos* em 2D com 3D, como evidenciamos na figura 125. Observamos sua investigação na atividade 2, tarefa 1.

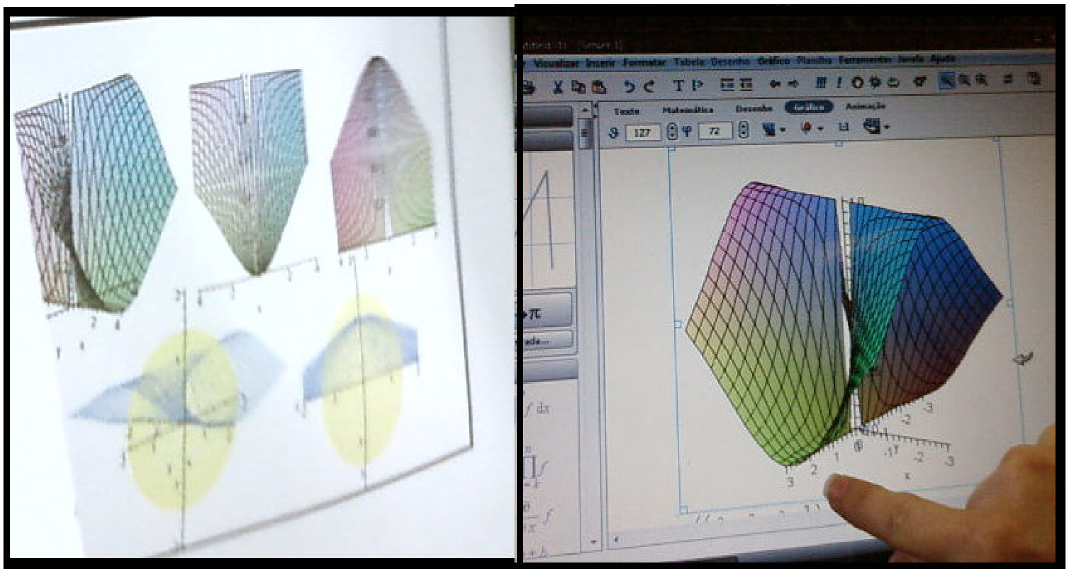


Figura 125. O aluno 24 comparou o comportamento dos registros gráficos em 3D e explorou os mesmos na tela do computador na fase 2 de *maturação*.

Com apoio nesta análise visual dos elementos acima, o aluno 24 declarou

> Acho que não é limitada...a imagem é muito grande...nas proximidade da origem a imagem é grande...Depende do valor...do tamanho da bola...aqui essa no gráfico sai.acho que não pode...vou olhar mais para ter certeza...

Observemos que o **aluno 24** comparou os *registros gráficos* em 2D e em 3D. É de se notar o fato de que de posse destes registros, produziu a seguinte *intuição conjectural*: "Depende do valor...do tamanho da bola...aqui essa no gráfico sai.acho que não pode...vou olhar mais para ter certeza...". Sua afirmação evidencia que o conhecimento mobilizado como intuitivo, demonstrando que o conhecimento que registramos no discurso do **aluno 24** é *não-inferencial* e característico de uma crença. Ele admite sua insegurança e a necessidade de continuar o processo de *visualização* e exploração do *registro gráfico* há pouco reproduzido.

Observemos que nenhum *tratamento dos registros algébricos* foi incentivado por parte do professor. Assim, constituíram nossas *variáveis didáticas* as noções de *formação* e *conversão de registros*.

Em seguida, discutimos as atividades **do aluno 7** na *maturação* da SF. Nesta fase, ao observar e comparar os registros gráficos em 2D e 3D, afirmou que

> Mas tem esse buraco aqui no gráfico...não contínua... Não...esse aqui ta com um furo na origem...essa aqui não tá... essa ta definida na origem...essa não. O limite existe... Quando você se aproxima de zero por ambos os lados... Ela tem o mesmo valor... ta tendendo para o mesmo valor...e pode limitar ela aqui...é por isso que aquela anterior...pode existir por que você não pode limitar... No item (II) pode existir..Mas esse item aqui (e) dá as parametrizações...

Usando a capacidade perceptiva, o **aluno 7** identificou rapidamente a presença de um "buraco" no centro dos eixos. Observamos sua atividade de investigação na figura 126, concernente à atividade 2 (tarefa 1). Ademais, as próprias características e limitações do *software* provocaram a produção de *intuições conjecturais* inadequadas que apresentam a capacidade de provocar inconsistências em relação aos dados que serão obtidos nas fases subsequentes da *Sequência Fedathi*.

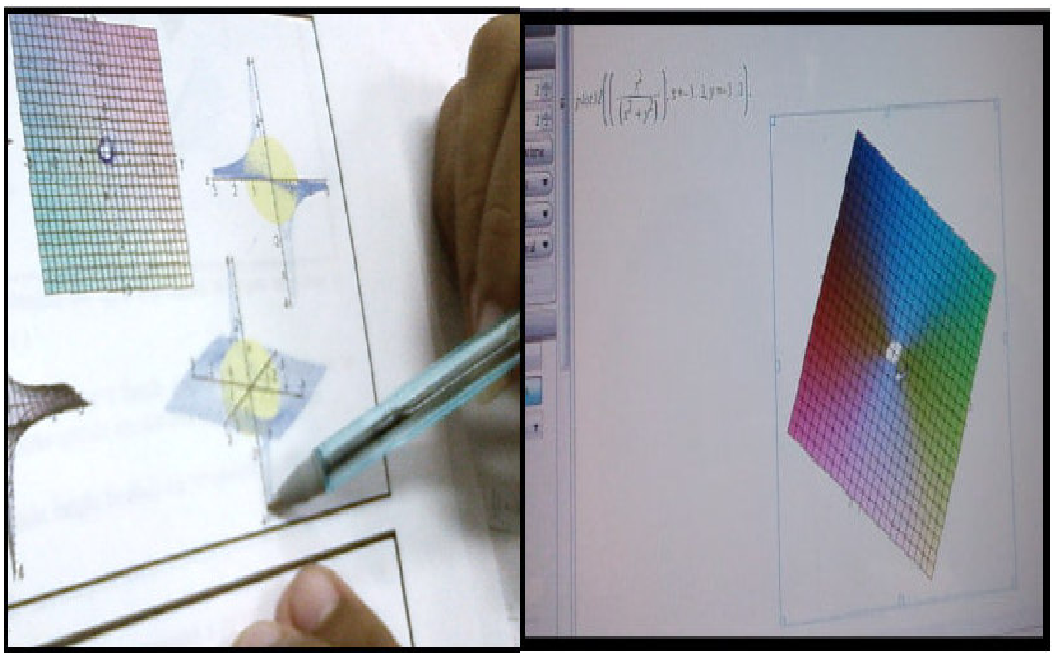


Figura 126. O aluno 7 desenvolveu sua capacidade de *visualização* na fase 2 – *maturação* - da SF.

Tais inconsistências descrevem o que discutimos no capítulo 1, chamado de *Conflito Teórico Computacional*. Aqui, com base na analise e *visualização* do *registro gráfico* em 2D, do lado esquerdo, que indicamos na figura 127, o **aluno 7** afirmou num momento inicial que seu gráfico era limitado.

Figura 127. O aluno 7 comparou o comportamento dos *registros gráficos* em 2D e 3D na fase 2 – *maturação* - da SF.

De modo semelhante, na *maturação*, o **aluno 21** manifestou hesitações e reformulou várias vezes suas declarações, fato demonstrativo de que ele produziu sentenças proposicionais apoiadas em um conhecimento mobilizado de natureza intuitiva. Com efeito, indicamos as seguintes afirmações

> Não, na origem ela não ta definida...no espaço...Não...acredito que não...se é a gente passa aquela bola...é limitada...ta tendendo a ser...limitada...a gente vê que tem um buraco...a descontinuidade...não é limitada por causa do buraco... Acredito que não. .. Por causa do buraco...

O **aluno 21** manifestou *intuição conjectural* ao decorrer da resolução da atividade 2. Reparemos sua *atitude proposicional*, ao declarar que "...*não é limitada por causa do buraco... Acredito que não. .. Por causa do buraco...*", fato que registramos na *maturação*. Na figura 128, na medida em que o **aluno 21** identificou as limitações do *registro gráfico* em 2D, exibido na atividade, ele foi conduzido para a análise do *registro gráfico* em 3D fornecido pelo computador.

Destacamos que, no caso do **aluno 21**, como em outros que relatamos nos anexos, identificamos a mudança de opinião do estudante, ao longo da *tomada de posição* e na *maturação*, na medida em que nossa intervenção proporcionou que eles comparassem os registros fornecidos no documento escrito e os *registros gráficos* em 3D, como o que exibimos na figura 128.

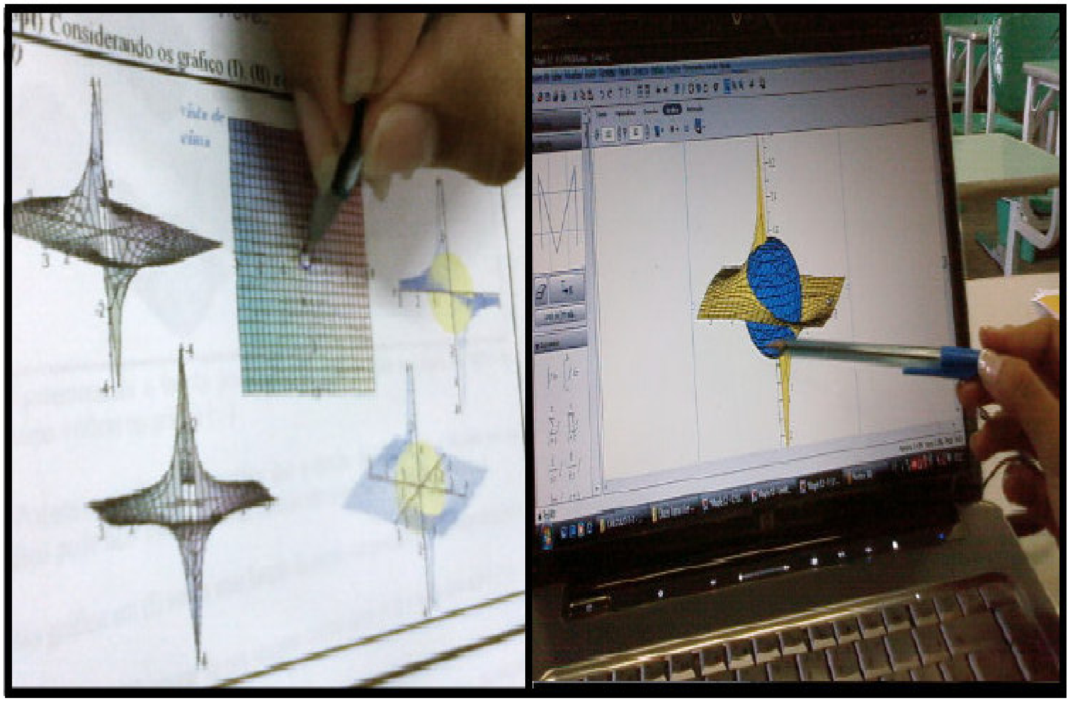


Figura 128. A *visualização* dos registros gráficos em 3D e sua exploração do computador foram essenciais na fase de *maturação* (atividade 2).

No fim de sua atividade, o **aluno 21** concluiu, como resultado de sua análise perceptiva e na *visualização* dos registros, que "Acho que não é limitada...não acho que é limitada...". Mais uma vez, registramos na fase de *maturação*, a produção de uma sentença proposicional ancorada em conhecimentos intuitivos, que não manifestam plena convicção do que é declarado.

No fim desta etapa, durante a atividade 2, o **aluno 21** teve a oportunidade de confirmar ou não suas *intuições conjecturais*, entretanto, deixaremos esta discussão para o momento em que analisaremos a *solução* da SF.

Na atividade 3 (p. 224), os alunos requisitaram o uso do apoio computacional para a evolução de suas atividades inerentes às propriedades dos *registros algébricos*, descritos por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ e $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

No ensino tradicional, restrito às mídias lápis e papel, a tarefa dos estudantes se resume ao cálculo fastidioso (*tratamento dos registros*) que deve ser efetuado sobre as funções que exibimos há pouco.

Por outro lado, com a exploração didática do computador e sua intervenção no momento e fase adequada da *Sequência Fedathi*, proporcionamos a produção de *intuições conjecturais* que deverão ser testadas e verificadas na fase 3 – *solução* e na de *prova* da SF.

Na figura 129, o **aluno 29**, por intermédio da *percepção* e da *visualização*, procurou analisar as condições e hipóteses do Teorema de Clairaut-Schawrz. Observamos que necessitamos da continuidade das derivadas de 1ª e 2ª ordem. Na figura abaixo o **aluno 29** verificou a propriedade da continuidade das *derivadas parciais* da função $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

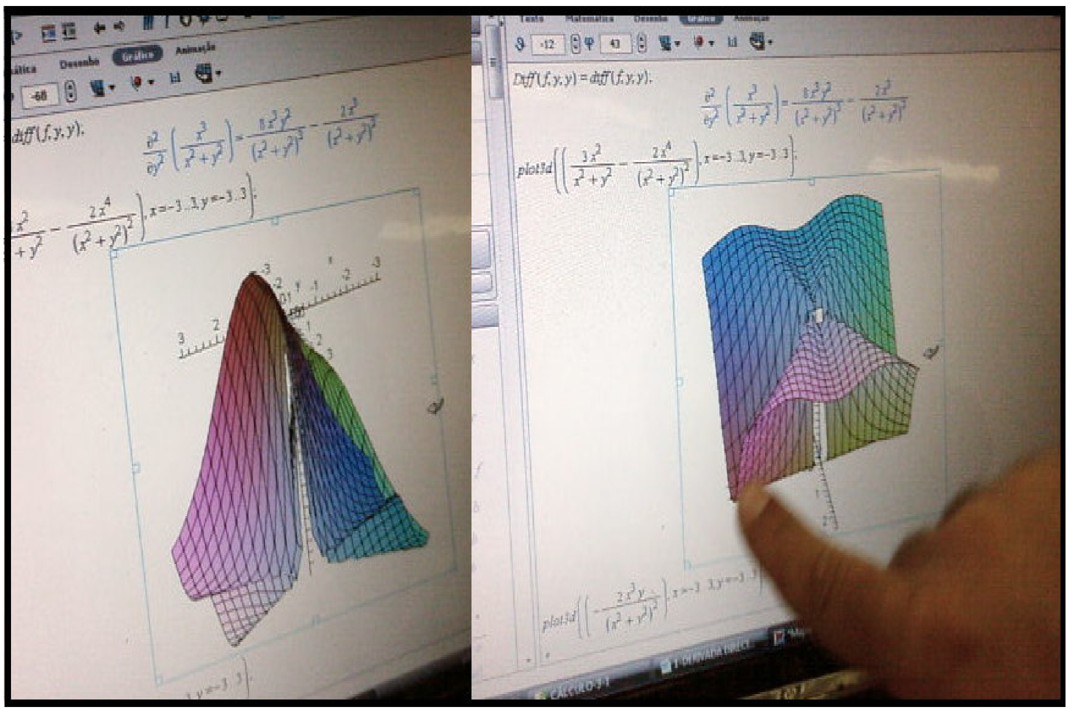


Figura 129. O aluno 29 analisou o *registro gráfico* em 3D fornecido na fase de *maturação* da SF.

Percebemos que o **aluno 29**, de modo semelhante ao que mencionou na fase anterior, procurou identificar o caráter de limitação da imagem da função. Notemos que ele se confundiu com a presença de um “buraco” na origem (ver figura 129). O mesmo comentou que

> Não, pois pode ser colocada dentro de uma bola..acho que é limitada..porque é descontínua no (0,0)...Por que isso aqui na origem...um buraco..o limite não existe...O limite não existe por que falha uma propriedade na origem...que a função é descontínua...

Em razão do caráter subjetivo da noção de intuição, ao decorrer de todas as intervenções, questionamos os sujeitos a respeito de sua segurança e justificativas no tocante à escolha de estratégias das atividades propostas. O **aluno 29** é um exemplo em que identificamos um elemento gerador de incertezas, em razão do uso das tecnologias e a exploração de *registros gráficos* em 2D e 3D.

Na figura seguinte, o **aluno 24** analisou e comparou os *registros algébricos* e os *registros gráficos* fornecidos pelo computador. Inicialmente, ele exclamou que "Mas não é possível colocá-la dentro de uma bola...por que ela é descontínua...Não é possível....na origem....não to acreditando na figura..." Frases desta natureza confirmaram que houve uma mudança de opinião do **aluno 24** na *tomada de posição* para a *maturação* da *Sequência Fedathi* – SF.

De outra parte, expressões do tipo "....não to acreditando na figura..." explicita uma velha *atitude proposicional* (DUVAL, 1991) dos estudantes depositarem toda sua confiança apenas no *tratamento dos registros algébricos*. Tal atitude proposicional não é reforçada em um ensino de CVV baseado na SF. Observamos sua ação na figura 130.

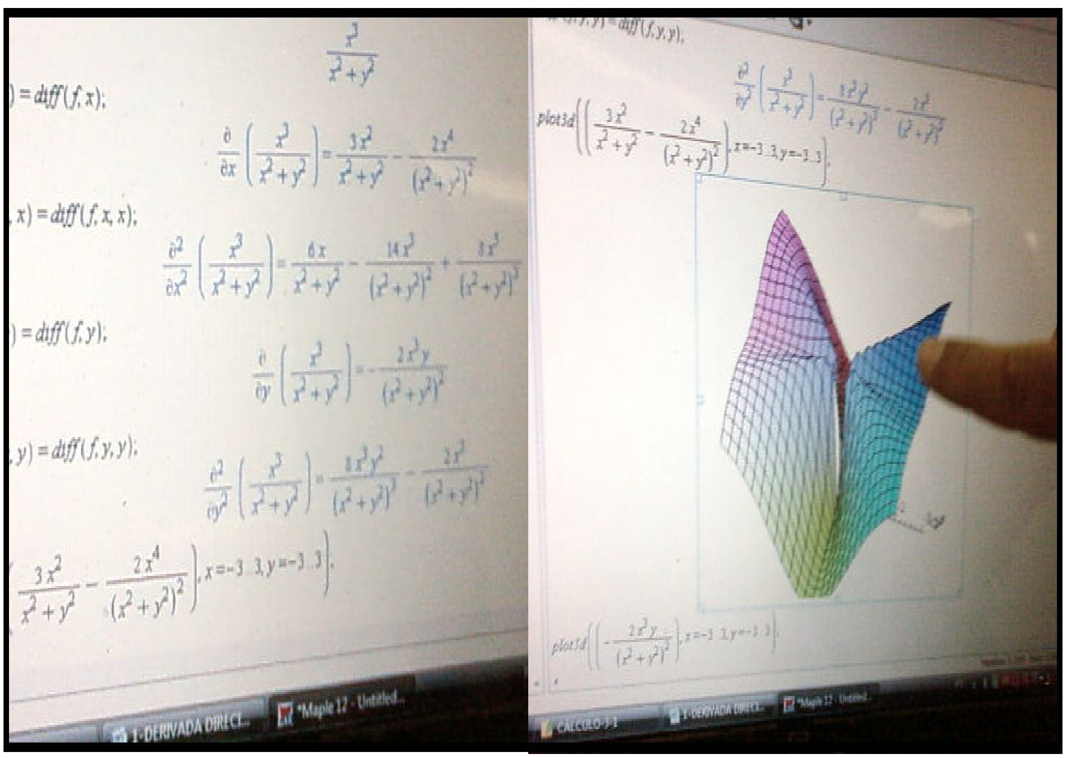


Figura 130. O aluno 24 comparou os registros algébricos com os registros gráficos na fase 2 – *maturação* - da SF e manifestou mudança de opinião.

Com respeito à atividade 3, na *maturação* da SF, o **aluno 7** desenvolveu atividades que envolveram a visualização dos gráficos e a comparação dos *registros gráficos* e *registros algébricos*, havendo formulado declarações como as que destacamos nas linhas abaixo na figura.

Vejamos que, na linha 2, em destaque na figura 131, o **aluno 7** destacou que "Nenhuma das derivadas parciais podem ser diferenciável na origem, pois pelo seu gráfico podemo perceber a descontinuidade....". Sua sentença proposicional confirmou que sua análise foi *perceptiva* e *visual*, sem o apelo ao *tratamento de registros algébricos*, o que é peculiar nos livros de CVV em situações-problema como esta. Destacamos algumas linhas na figura 131, em seu documento escrito.

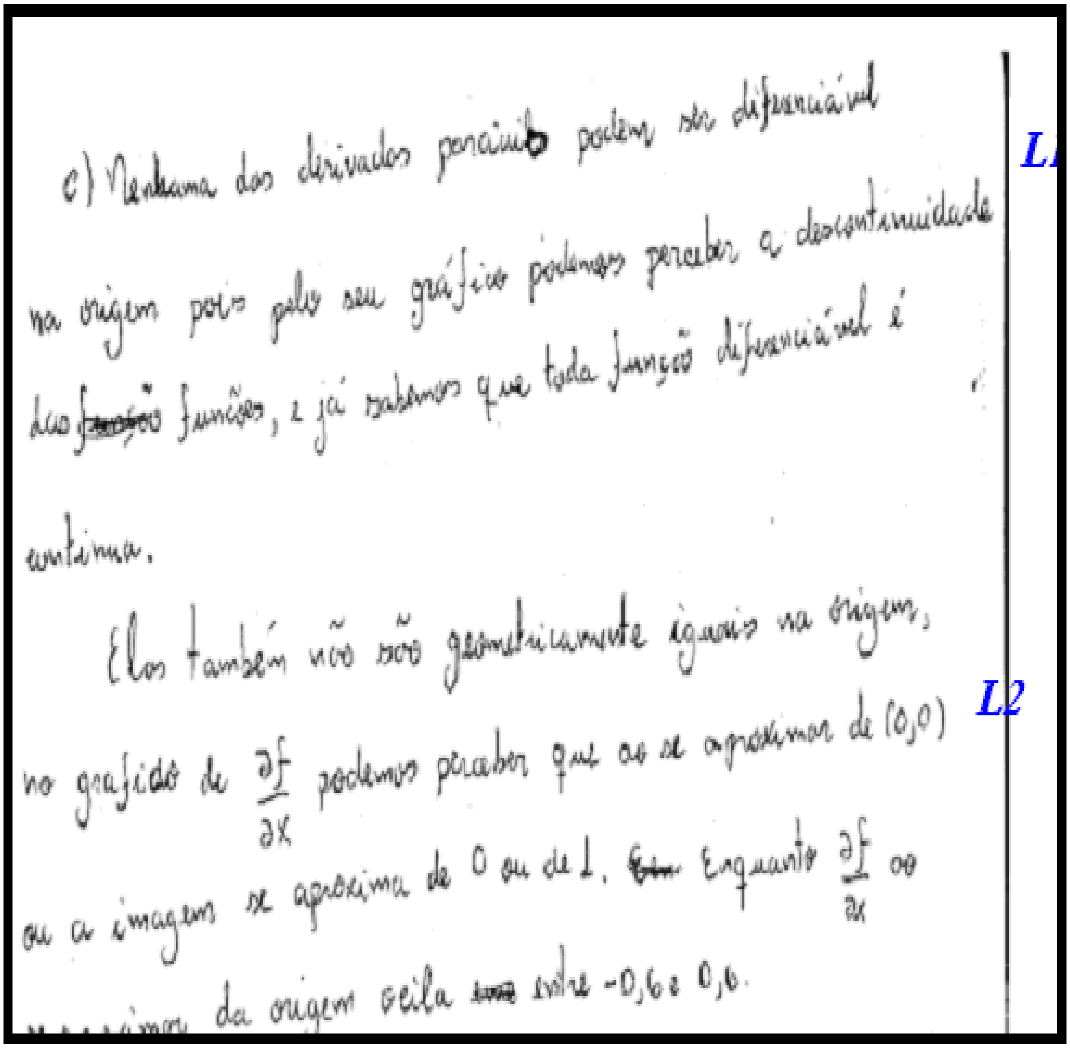
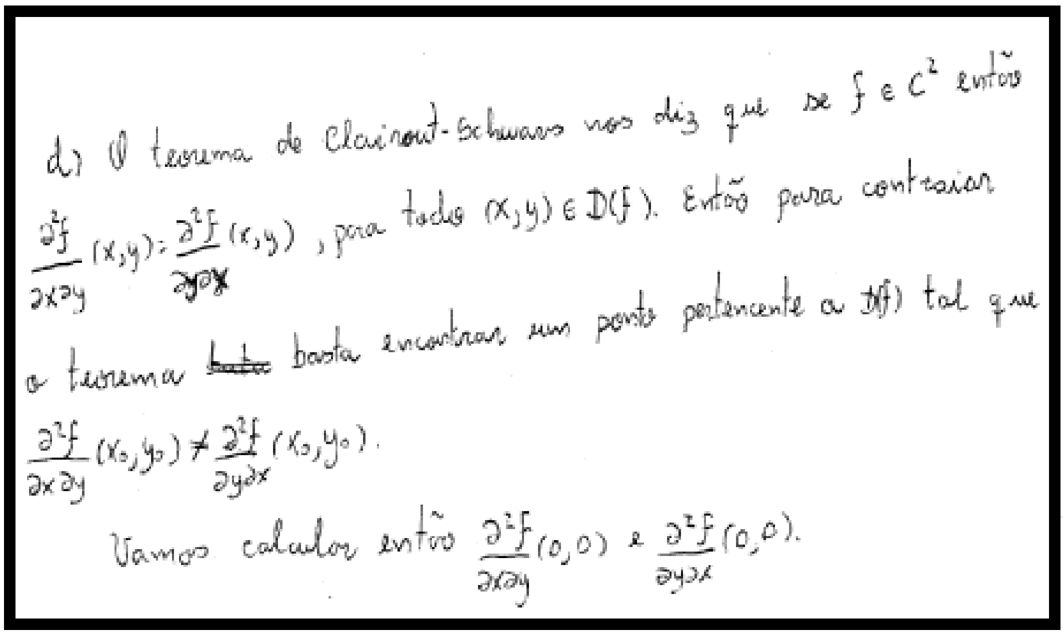


Figura 131. Após a análise visual dos *registros gráficos* em 3D, o aluno 7 desenvolveu *intuições conjecturais*.

Consideremos ainda, que o **aluno 7** comparou os *registros algébricos* fornecidos pelo computador e os *registros gráficos* em 3D e mencionou, na linha 2, na figura 131, que "Elas são também geometricamente iguais na origem, no gráfico de $\frac{\partial f}{\partial x}$ podemos perceber que ao se aproximar de $(0,0)$ ou a imgem se aproxima de 0 ou de 1. Enquanto que sua imagem oscila na origem....".

Mais uma vez o aluno, por intermédio da *visualização*, elaborou sentenças proposicionais que necessitam ser confirmadas na etapa seguinte da *Sequência Fedathi*.

Com efeito, o próprio **aluno 7** exclamou que, em virtude das restrições dos *registros gráficos* em 3D, as derivadas de 2ª ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ precisam ser calculadas, como observamos na figura 132.


d) O teorema de Clairaut-Schwarz nos diz que se $f \in C^2$ então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, para todo $(x,y) \in D(f)$. Então para contrariar o teorema ~~basta~~ basta encontrar um ponto pertencente a $D(f)$ tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

Vamos calcular então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Figura 132. O aluno 7 indicou a necessidade do *tratamento* dos *registros algébricos* na tentativa de confirmar suas *intuições conjecturais*.

Com respeito aos dados colhidos na atividade 4 (tarefa 1), sublinhamos que os quatro alunos desenvolveram a habilidade de identificação visual dos pontos de *máximo local* e de *mínimo local* no $\mathbb{R}^3$, inclusive a noção de *ponto de inflexão*, o que geralmente é abordado apenas no CUV. Na fase *maturação* observamos na figura 133 o **aluno 29** comparando os *registros gráficos* em 2D com *registros gráficos* em 3D.

Destacamos o fato de que o **aluno 29** solicitou e manifestou a necessidade de explorar e manipular os objetos fornecidos pelo computador. Ao ser indagado sobre o que identificou no *registro gráfico* em 3D, declarou "Eu acredito que...visualmente que é da para ver que é -12 e -13...e aqui tem 17 e 18...é um candidato...".

Mais adiante, o **aluno 29** produziu a seguinte *intuição conjectural*, quando aargumentou que "*Eu vou analisar...vou encontrar vai ser se é máximo oi mínimo relativo...e* *depois analisar as bordas se é mínimo relativo*...Eu acredito que...visualmente que é da para ver que é -12 e -13...e aqui tem 17 e 18...é um candidato...".

Indicamos que expressões do tipo "Eu acredito que..." não são peculiares no ensino de CVV restrito às mídias lápis/papel, sobretudo quando falamos da *visualização* dos conceitos envolvidos na atividade 4. Tal expressão caracteriza a *atitude proposicional* (DUVAL, 1991) manifestada pelo **aluno 29** ante ao objeto de estudo.

De modo recorrente, observamos nas argumentações fornecidas pelos alunos a incerteza sobre os dados inferidos dos *registros gráficos*. Foi o caso do **aluno 24**, de na fase de *maturação* - mencionou que "Acho que poderia até dizer, mas por aqui...o mínimo é bem aqui...O mínimo é bem aqui...e sela você me pegou...essas curvas de nível...não sei não....".

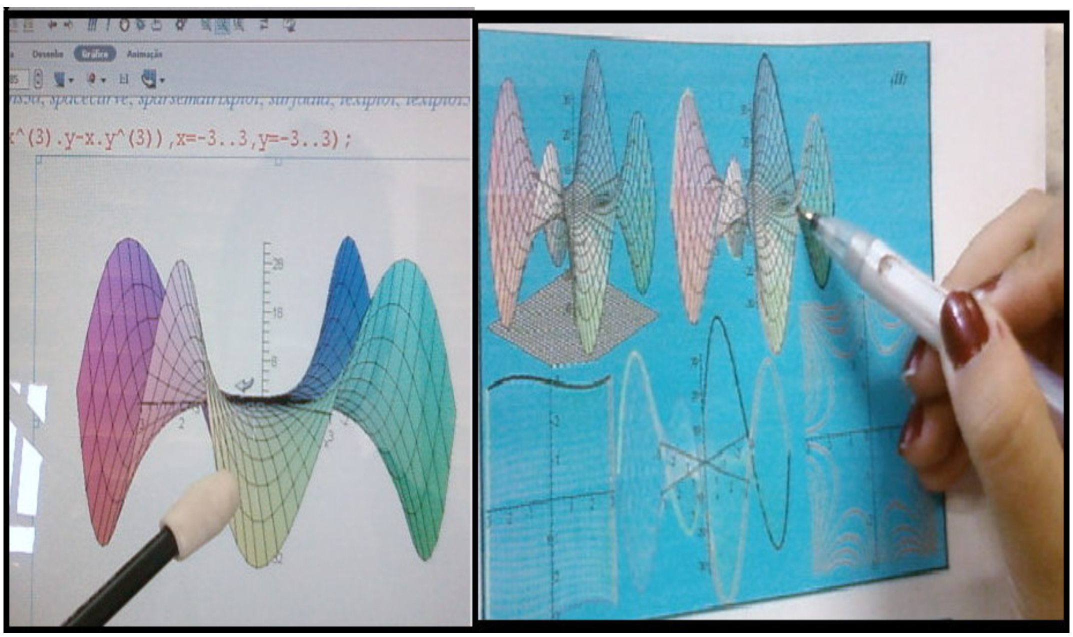


Figura 133. O aluno 29 comparou os *registros gráficos* em 2D com os *registros gráficos* em 3D na fase – *maturação* - da SF.

Quando questionado a respeito do comportamento da superfície nas proximidades da origem, o **aluno 24** admitiu que

> Eu consegui identificar....esse aqui...que é esse aqui...É o que eu to querendo responder...sinto que é um ponto de sela...eu chuto que seja sela..pela figura é tipo uma sela....e se tiver abaixo tem as curvas de linha...é tipo uma hipérbole...aqui....

Este excerto confirma que sua análise e a produção de sentenças proposicionais tiveram como fonte a *percepção* e a *visualização* dos *registros gráficos* em 3D fornecidos na *maturação*. Com respeito ainda à atividade 4, o **aluno 7** explicou que

> Aqui diz que tem que identificar apenas na figura...acho que é um extremo..e esse aqui acho que é de sela..parece de sela.....esse aqui é sela..por que se você tomar esse caminho aqui...vai ser máximo..se tomar esse outro caminho..vai ser mínimo..na origem...acho que esse aqui...vai ser um extremo..por que esse ponto vai estar por aqui..e se a gente analisar as curvas de nível....por que estou achando que é extremo..por nessa região aqui...as curvas de nível estão fechadas...apesar de não estar na prova...Na origem..parece ponto de sela...e temos hipérboles..provavelmente é sela...

Mais uma vez identificamos em seu discurso o grau de incerteza atribuído às suas conclusões formuladas com base apenas na *visualização* dos *registros gráficos* em 3D. O trecho em destaque apresenta *intuições conjecturais* registradas na *maturação* da *Sequência Fedathi* – SF.

Em seguida, discutimos os dados colhidos da participação do **aluno 21**. Na figura 134, ele examinou os elementos importantes da atividade 4. Por intermédio da apreensão perceptiva, questionou "Cada borda eu tenho que analisar um né...cada borda é uma curva...?

O **aluno 21** identificou (figura 134) as curvas nas *bordas da superfície*, como vemos na figura 134. Nestas curvas, estimulamos o emprego dos seus conhecimentos relativos ao CUV, o que auxilia a *transição interna* do CUV para o CVV.

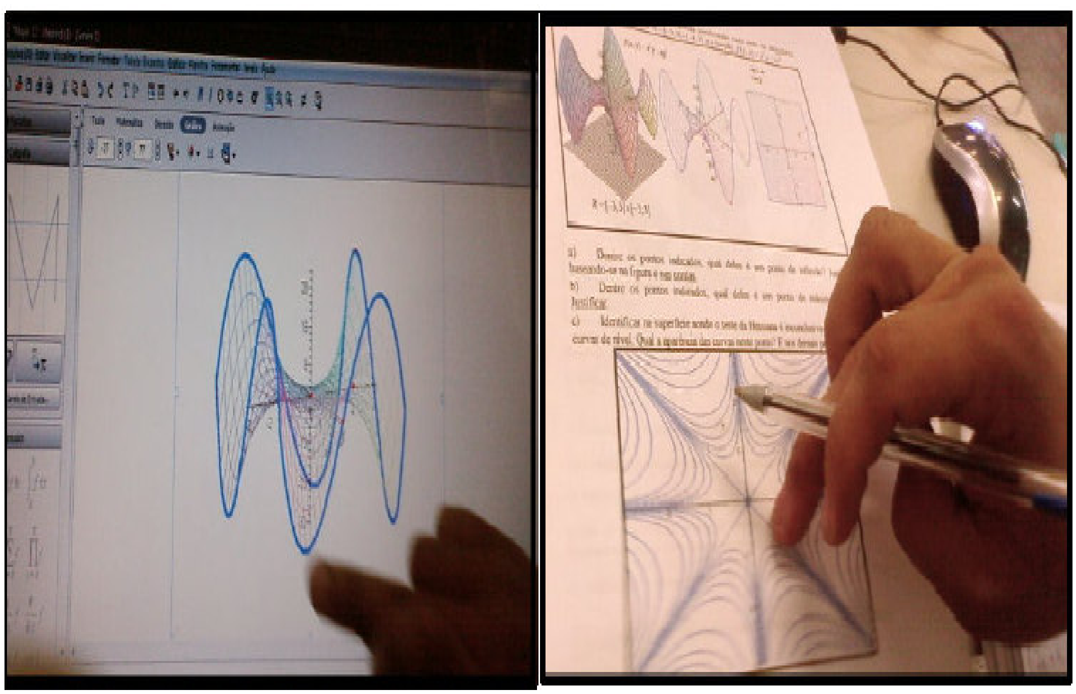


Figura 134. O aluno 21 identificou e analisou o comportamento das curvas de bordo e de nível ao decorrer da atividade 4.

Por fim, no que diz respeito à atividade 5, salientamos a importância da compreensão, por parte do aluno de que o símbolo $\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydx$ pode ser associado à noção de volume correspondente a uma região do espaço limitado no $\mathbb{R}^3$.

Assim, na atividade 5, na *maturação* o **aluno 29** comparou os *registros gráficos* em 2D com os *registros gráficos* em 3D exibidos pelo computador, como observamos na figura 135.

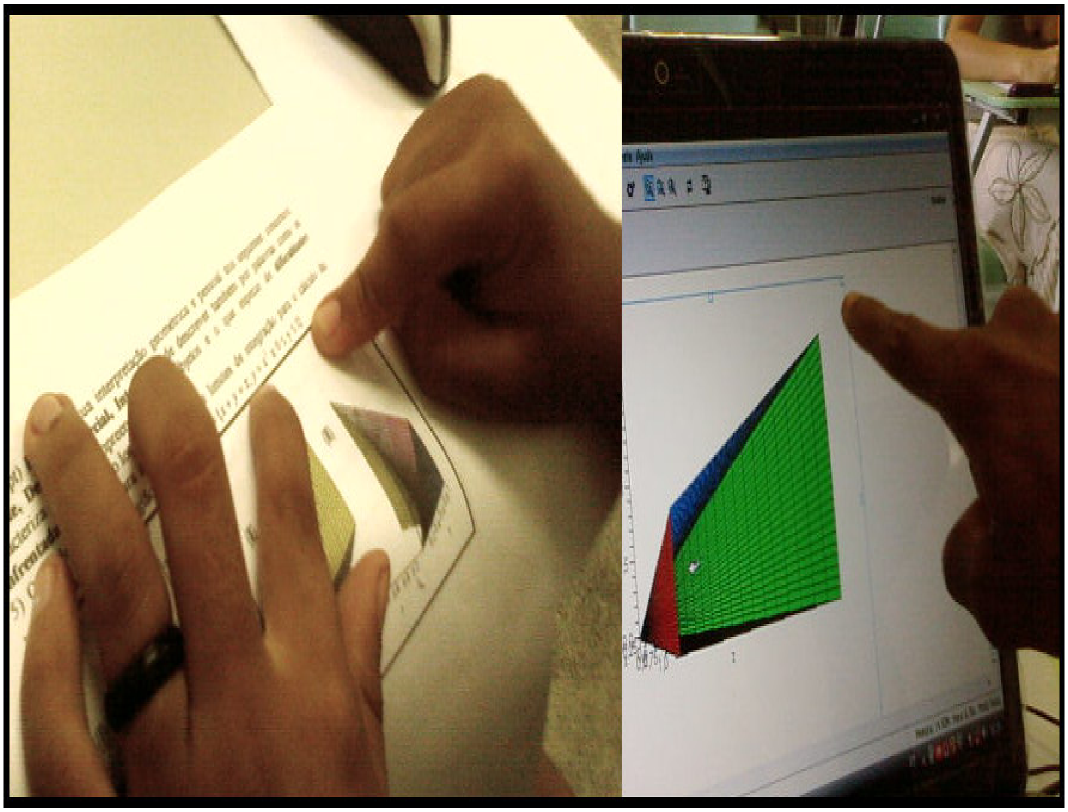


Figura 135. Durante a atividade 5, o aluno 29 identificou os elementos mais importantes da atividade, com base na *visualização* (atividade 5).

Observamos que alguns conjuntos propostos na atividade 5 (tarefa 1, tarefa 2, tarefa 3), como, por exemplo, $A = \{y^2 = x;\ \mathrm{x}^2 = y \text{ e } \mathrm{z}=\mathrm{x}^2 + 4y^2\}$, quando explorado apenas em termos de *registros algébricos*, condiciona determinadas ações dos estudantes, apoiadas em intuições afirmativas, pois eles têm dificuldade para compreender o comportamento da variação da *integral múltipla definida*.

Por exemplo, na tarefa 2, da atividade 5, fornecemos o conjunto $A = \{z = 1 - x^2 - y^2\ ;\ 1=\mathrm{x}^2 + y^2 \text{ e } \mathrm{z}=4\}$ relacionado com o *registro gráfico* correspondente, ao dizer que

> Aqui temos o cilindro ou uma circunferência...pois temos aqui a equação $x^2 + y^2 = 1$ e para mim é uma circunferência e não cilindro....Tem que variar o raio não... $x^2 + y^2 = 1$ é uma circunferência...no cilindro o raio é o z. Para mim é uma circunferência...O cilindro o raio é o z não...

Comprovemos que ao destacar "Tem que variar o raio não... $x^2 + y^2 = 1$ é uma circunferência...no cilindro o raio é o z", elaborou uma sentença proposicional apoiada em um conhecimento obtido por meio de *percepção*, *visualização* e a *conversão* dos registros semióticos fornecidos. Assim, esta *intuição conjectural* poderá apoiar na fase 3 – solução, suas escolhas e antecipações diante da resolução efetiva da atividade 5.

Na figura abaixo, o **aluno 29** identificou visualmente a variação no eixo Oz. Tal atividade se mostrou bastante restrita ao ser descrita no contexto de uso apenas dos *registros gráficos* em 2D. Vejamos isto na figura 136.

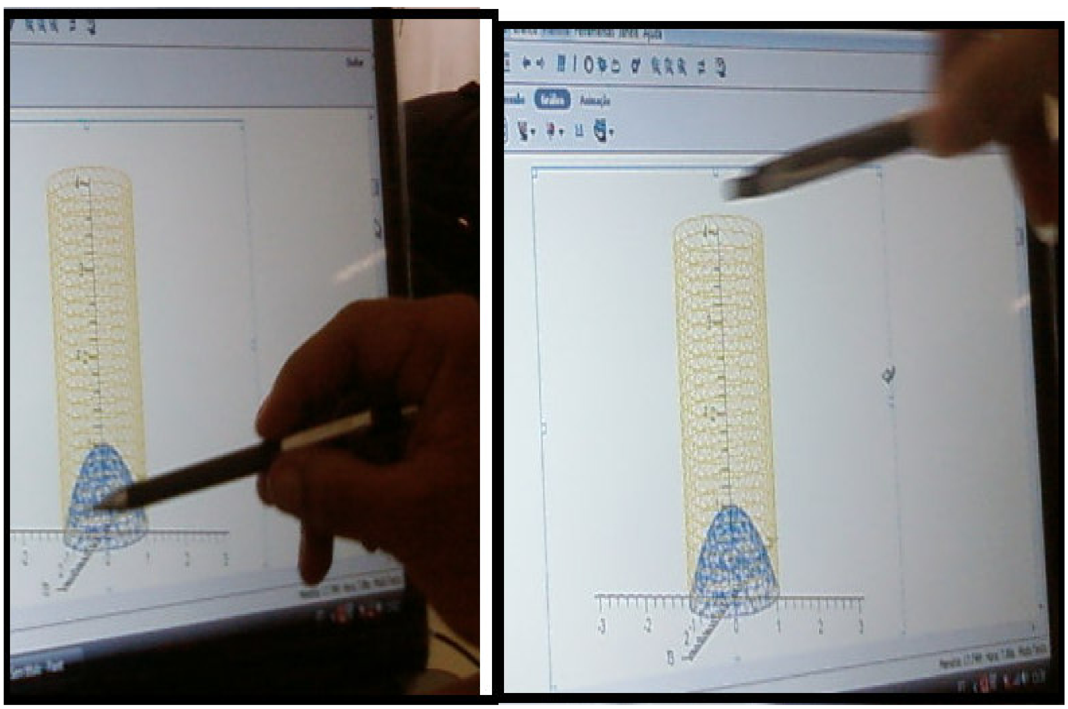


Figura 136. O aluno 29 investigou e comparou os *registros* de natureza *algébrica* e *gráfica* em 3D.

O **aluno 24**, durante a atividade 5, declarou que "*O Z nesse x caso tem que variar de 0 até + infinito....*". Já no trecho subsequente, por meio de sua análise visual dos *registros gráficos* em 3D, ele mudou de opinião e identificou a variação correta no eixo Oz ao reformular sua declaração: "*Acho que é de zero ou do parabolóide até 4....Acho que é do parabolóide até aqui...to vendo agora....To em duvida se é do zero até 4....*".

Reparemos que na *maturação*, conseguimos proporcionar um ambiente de investigação que proporcionou com que o **aluno 24** elaborasse a *intuição conjectural* destacada há momentos acima. Observe-se a mudança de opinião do mencionado estudante. Em alguns casos, por exemplo, o aluno conseguiu descrever a integral desejada por complexo sem um apelo freqüente aos conjuntos algébricos do tipo $A = \{z = 1 - x^2 - y^2 \text{ ; } 1\text{=x}^2 + y^2 \text{ e z=4}\}$. Foi o caso do **aluno 7**, que efetuou a *conversão* dos *registros* que indicamos na figura 137, sem recorrer às operações de *tratamento*.

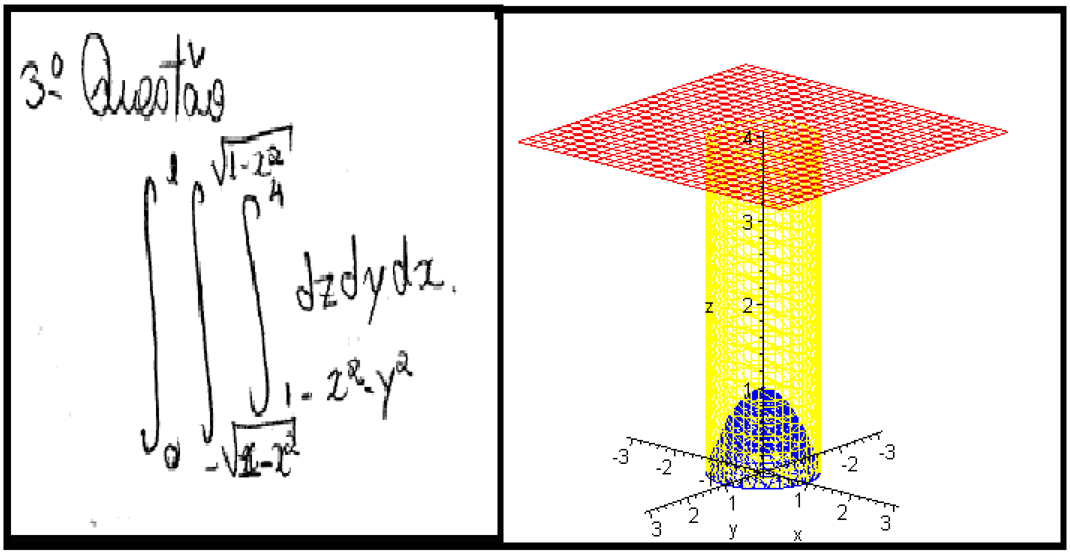


Figura 137. O aluno 7 conseguiu efetuar a *conversão* de registros, sem recorrer ao seu *tratamento*.

Por fim, na atividade 5, o **aluno 21**, com arrimo na *visualização* e na relação entre os *registros gráficos* em 3D e *registros algébricos*, declarou

> Vai daqui para cá...desse ponto aqui até esse ponto...De 0 até 5. Aqui não é zero...Mas vai até...Então vai de 0 até $x^2 + 4y^2$.... Mas no eixo Oz....aqui é maior do que zero.... $x^2 + 4y^2$...0 até 1 é a variação do x...e no Oy...é de x^2 até $\sqrt{x}$...pelo gráfico dá para perceber que ta embaixo....pelo gráfico...a integral vai do menor valor para o maior valor $\int_a^b$. Mas no eixo Oz....aqui é maior do que zero.... $x^2 + 4y^2$...

Nesta passagem, destacamos as *intuições conjecturais* produzidas sem o emprego do *tratamento dos registros* e apenas sua *conversão*. Tais *intuições conjecturais* serão essenciais na *solução* da SF. Na próxima seção, continuaremos a discussão apresentando os dados colhidos no referido estádio.

5.3 Fase de *Solução*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

Destacamos o fato de que até o momento da fase de *solução* os alunos participantes da pesquisa produziram uma quantidade considerável de *intuições conjecturais* e algumas *intuições afirmativas*.

De modo sistemático, ambas as categorias do raciocínio intuitivo devem ser testadas no momento efetivo da solução das cinco atividades, o que proporcionou a produção de *intuições antecipatórias*.

Assim, na *solução*, o **aluno 29**, com amparo nos dados extraídos dos *registros gráficos* em 2D e 3D, produziu o *tratamento* dos *registros algébricos* que destacamos na figura 138.

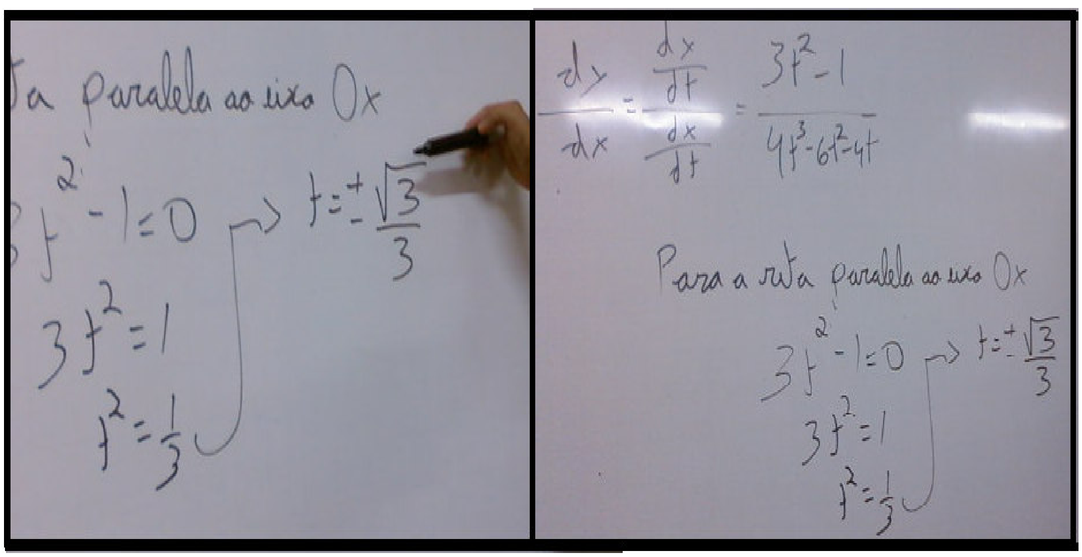


Figura 138. O aluno 29 manifestou a atividade de *tratamento* dos *registros* na fase de *solução* da SF.

Em seguida, o **aluno 29** buscou compreender as relações entre o *registro algébrico* descrito por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ e os registros gráficos, como observamos na figura 139. Nesta, após efetuar o *tratamento* necessário na atividade 1, o **aluno 29**, buscou analisar e produziu um significado geométrico para o quociente acima.

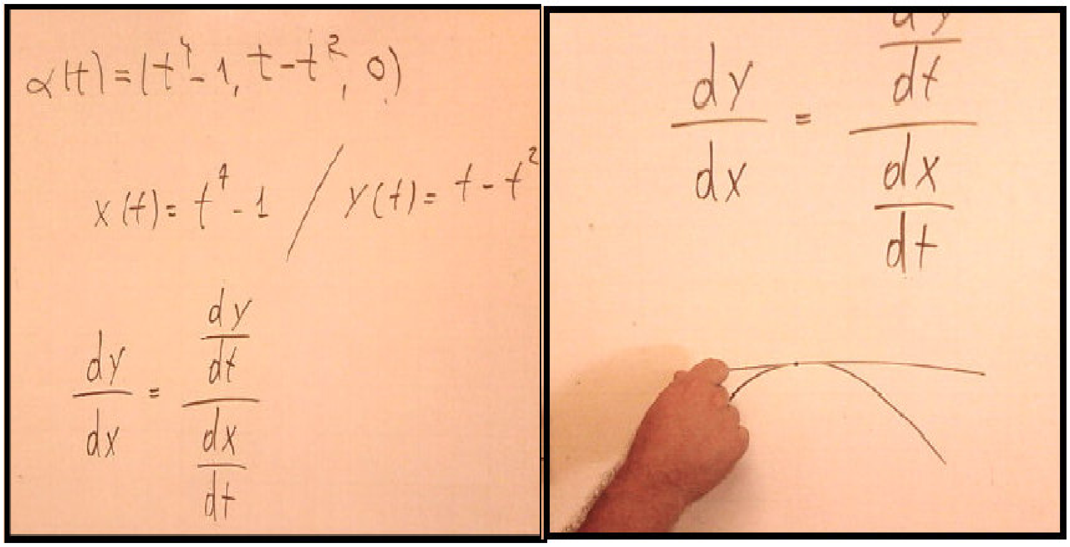


Figura 139. O aluno 29, na fase 3 – *solução* - após realizar o *tratamento* dos registros, atribuiu o significado geométrico dos mesmos.

Em seguida, o **aluno 29** efetuou a *conversão* dos *registros* ao procurar descrever seu gráfico no plano cartesiano, como identificamos na figura 140.

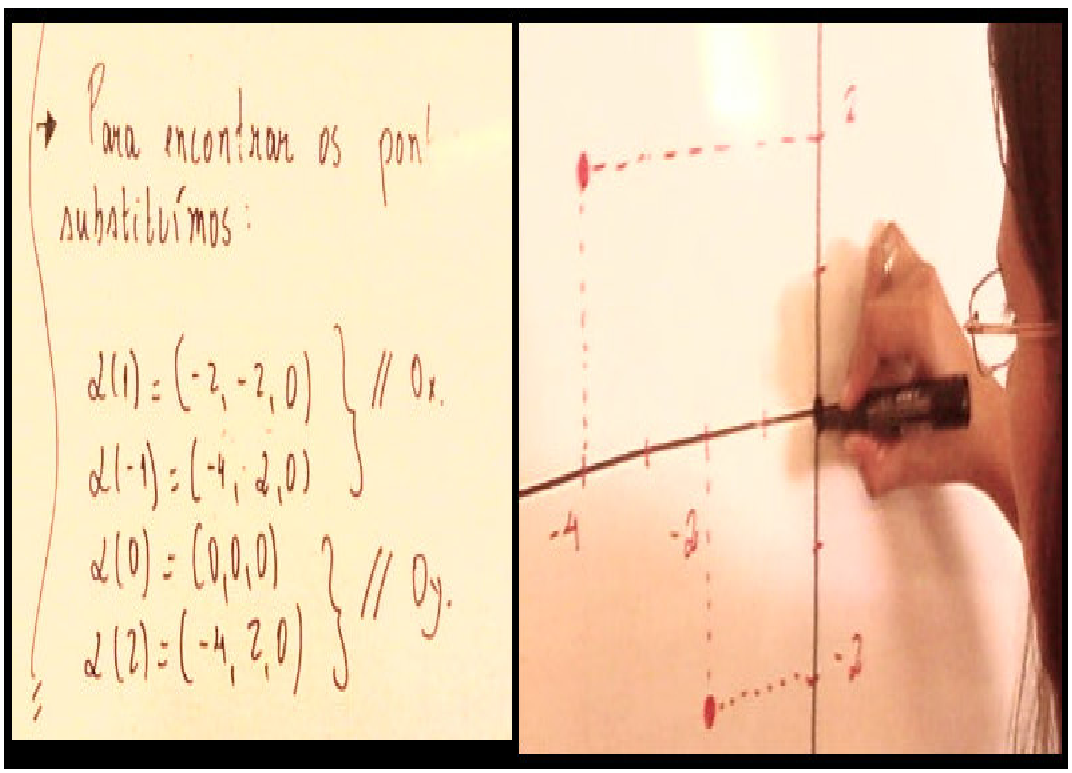


Figura 140. O aluno 29 efetuou a *conversão* dos registros na fase 3 – *solução* - da SF.

Registramos na *solução*, o fato de que o **aluno 29** empregou alguns resultados do CUV no contexto do CVV. De fato, ele declarou que "*Aonde a função se anula...não lembro...Porque não lembro.. Vai ser positiva e crescente e negativa decrescente*". Vemos que isto constitui uma *intuição afirmativa*, proveniente dos seus saberes adquiridos no contexto do CUV. A ênfase neste tipo de habilidade facilita a *transição interna* do CUV para o CVV.

O **aluno 29** fez referência, de modo claro, a um teorema formal e admitiu não conhecer sua argumentação formal. No que segue, ele descreveu o comportamento da *curva parametrizada*, como visto na figura 141.

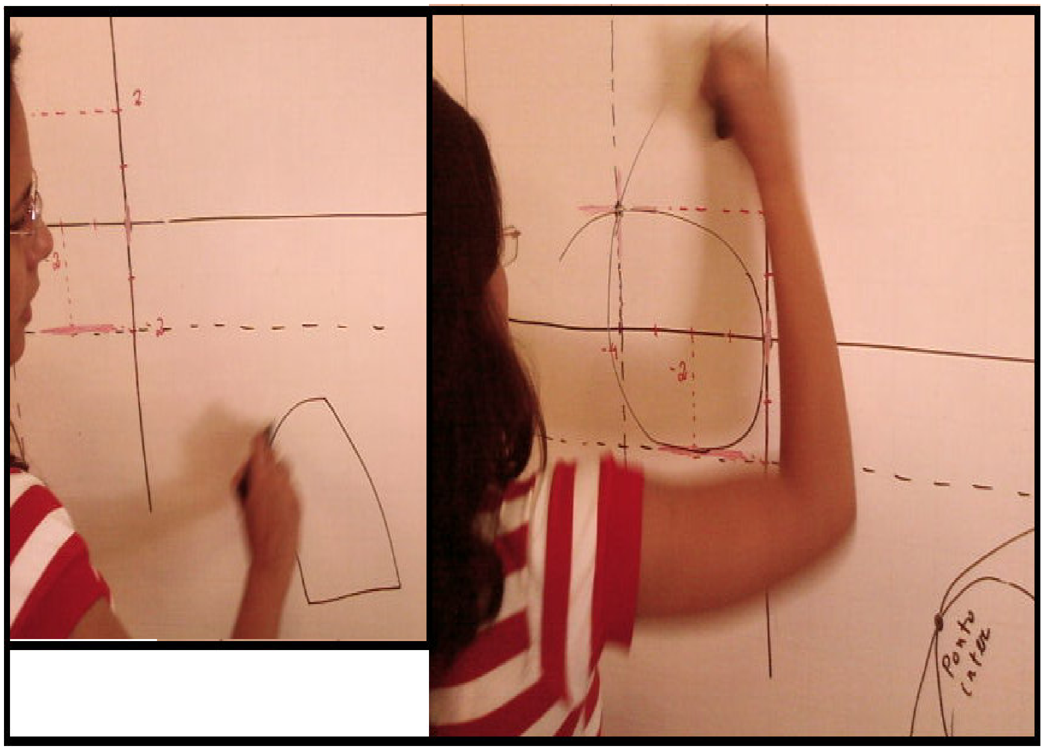


Figura 141. O aluno 29 efetuou *a conversão de registros* e produziu *intuições afirmativas* e *intuições antecipatórias* na fase de *solução* da SF.

Observemos acima, no canto esquerdo, que, antes de efetuar a descrição por completo da *curva parametrizada* proposta como tarefa na atividade 1, o aluno desenvolveu um esboço provisório da *curva parametrizada*.

Tal ação foi apoiada em uma *intuição antecipatória*. Salientamos que, após realizar a *conversão* dos *registros gráficos* em 2D, o **aluno 29** requisitou uma nova análise e comparação dos dados na tela do computador, o que ocorreu na *prova* da SF. Reparamos abaixo sua produção de *intuições antecipatórias*, quando buscou prever o comportamento do *registro gráfico*. Registramos sua atividade de investigação na figura 142. Neste momento o **aluno 29** já havia empregado o tratamento necessário dos registros algébricos.

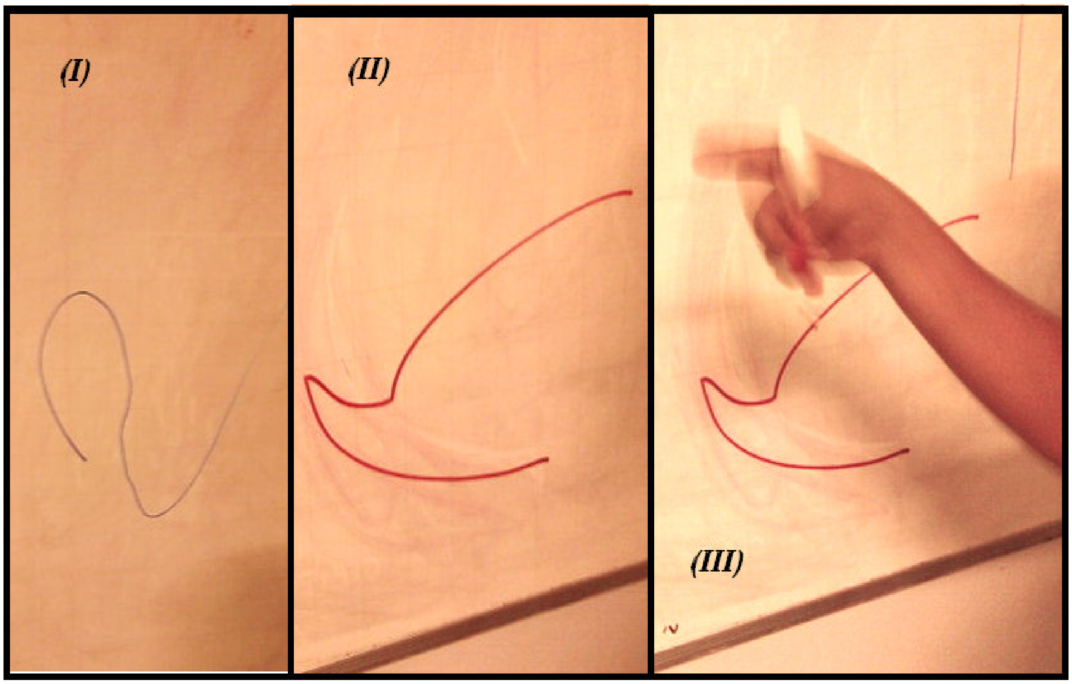


Figura 142. O aluno 29 elaborou *intuições antecipatórias* no sentido de antever o comportamento dos *registros gráficos* na fase 3 – solução.

No fim da atividade, conseguiu descrever o *registro gráfico* adequado que demandamos na atividade 1 como observamos na figura 143. O **aluno 29** efetuou a *conversão* de registros do CVV o que é pouco estimulado pelos livros que consultamos.

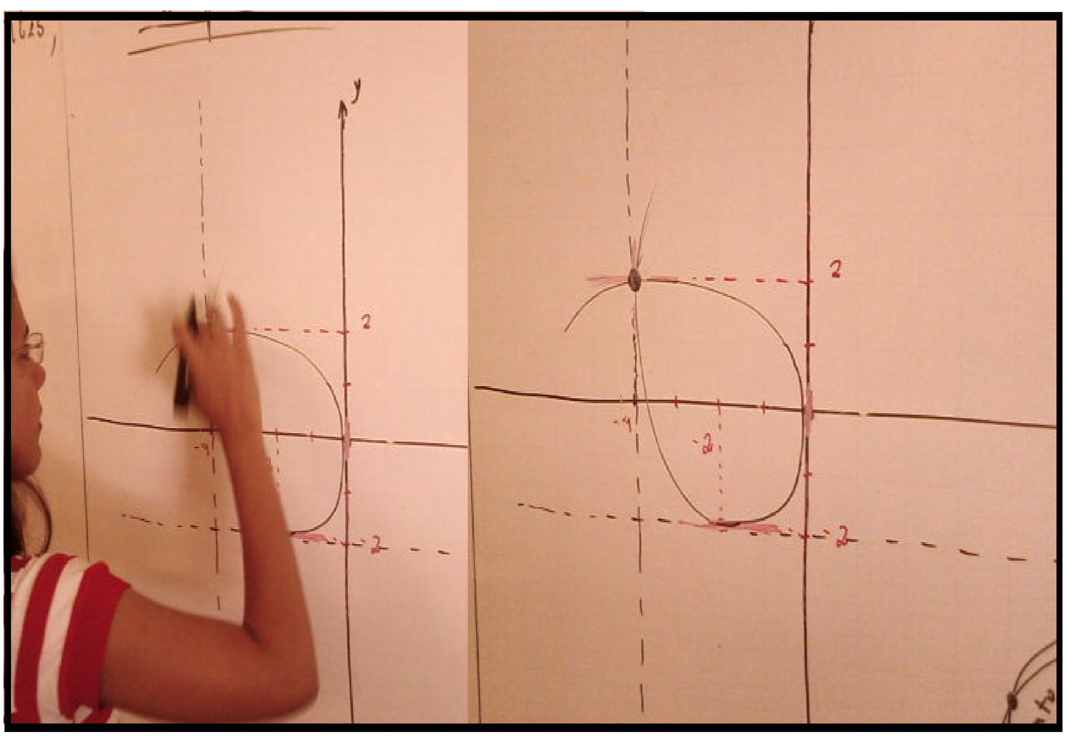


Figura 143. O aluno 29 efetuou a *conversão* de registros na atividade 1.

Já no caso do **aluno 24**, registramos na figura 144 todas as ações de *tratamento* dos *registros algébricos* necessárias na atividade 1. Divisamos o recurso de *registros gráficos* no sentido de apoiar seu raciocínio. Vejamos nas figuras 144 e 145.

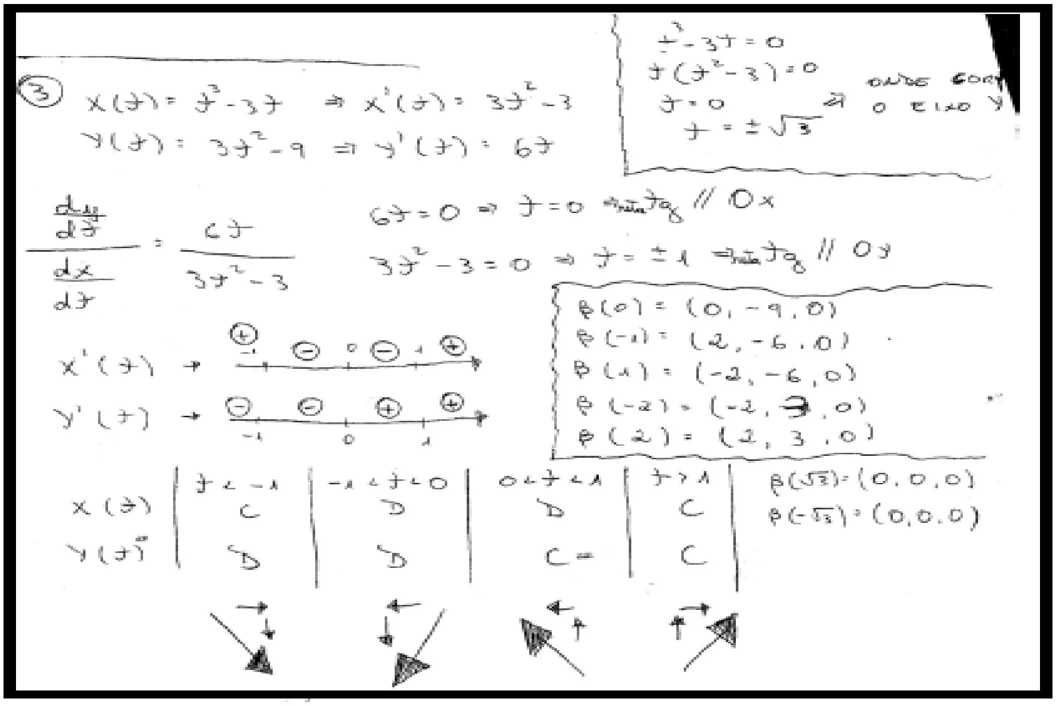


Figura 144. O aluno 24 desenvolveu o *tratamento* dos registros na atividade 1, na fase de *solução* da SF.

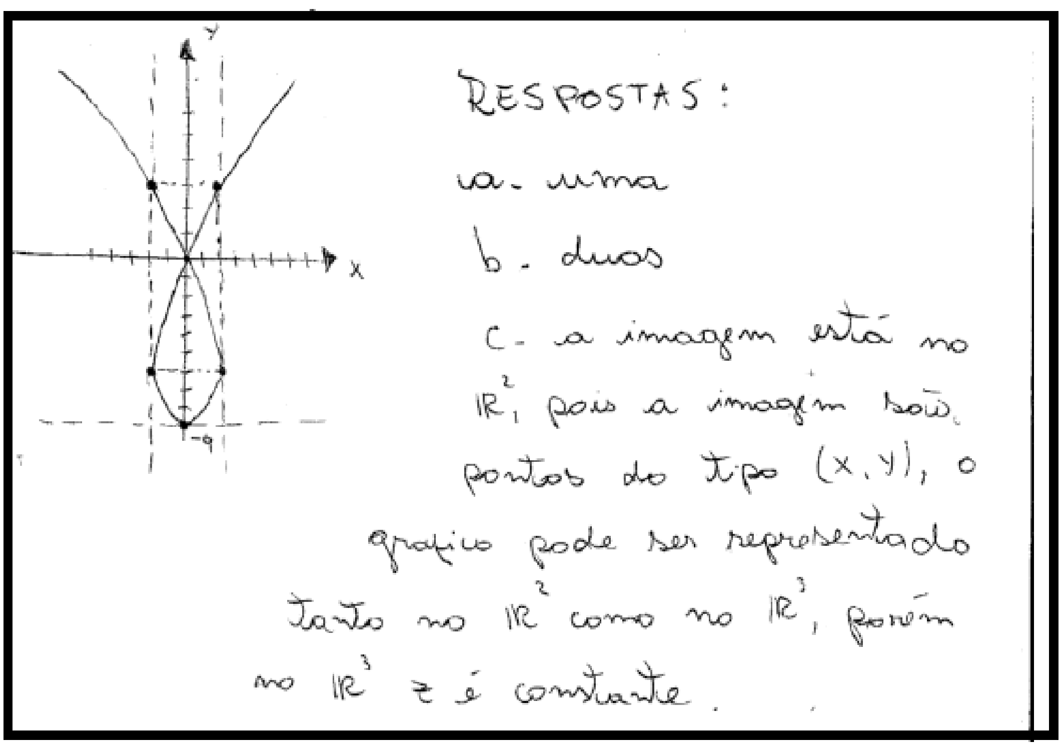


Figura 145. No final, empregou um significado ao *registro gráfico* em 2D obtido.

Na atividade 1, o **aluno 7** declarou o seguinte

> Eu vou encontrar os pontos onde a derivada dessa curva...encontrando a derivada dessa curva...ai eu encontro e igualo a zero...Ela vai ser indeterminado....não existe...Ela vai se anular no numerador quando em ± 1...e a posição da reta é paralela ao eixo Ox....Mas aí eu não sei...por que decoro assim... quando é $\frac{dy}{dt}$ é paralela ao eixo Ox. E quando é $\frac{dx}{dt}$ é paralela ao eixo Oy. Não me lembro...

Ele confirmou que não se recordava dos resultados formais previstos nos teoremas e *definições formais* empregadas. Assim, sua ação teve como substrato um conhecimento mobilizado de base intuitiva, com o registro de *intuições afirmativas* e *intuições antecipatórias*. Por exemplo, sublinhamos a *intuição afirmativa* "Mas aí eu não sei...por que decoro assim... quando é $\frac{dy}{dt}$ é paralela ao eixo Ox...". No final da tarefa, o aluno efetuou *conversão* de *registros* e buscou prever o comportamento da *curva parametrizada* investigada na atividade 1.

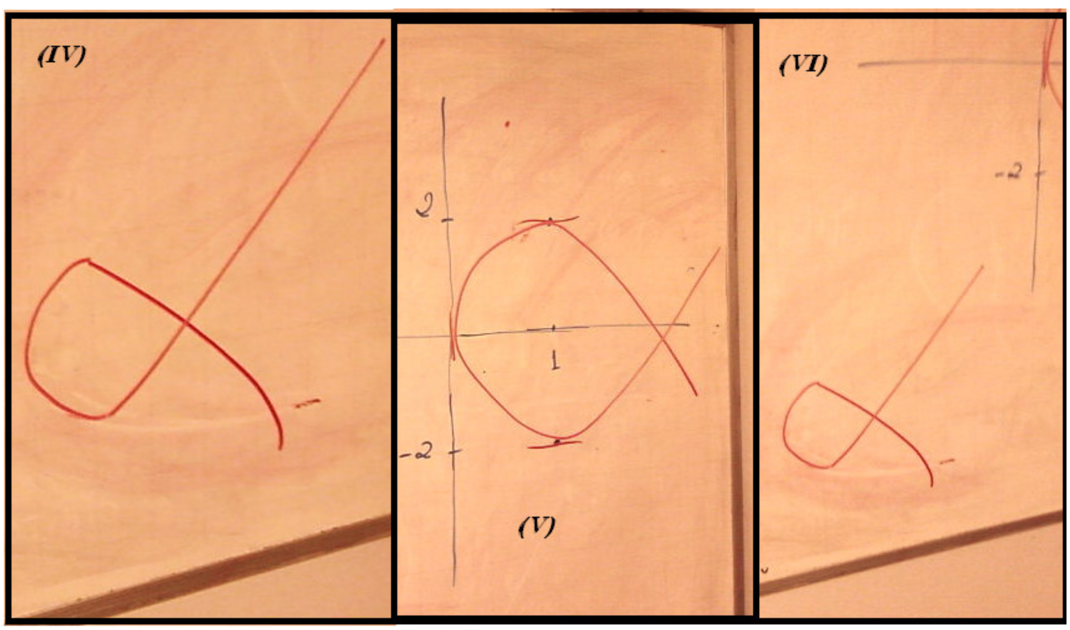


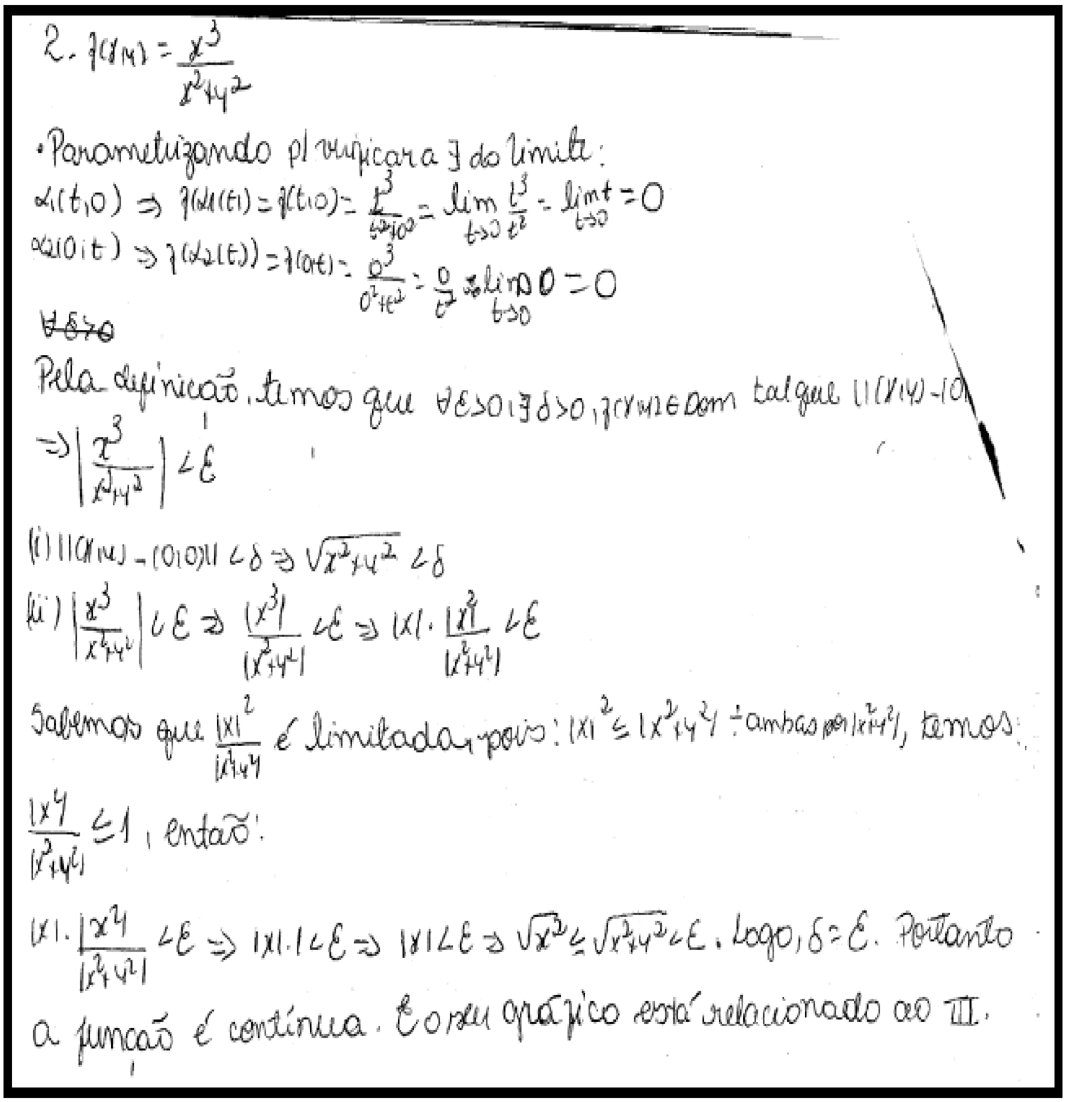
Figura 146. O aluno 7 efetuou a *conversão de registros* na fase 3 – *solução* - da SF.

Por fim, o **aluno 21** produziu sentenças proposicionais que corroboraram os dados indicados nos **alunos 29**, **24** e **7**, ao explicar que

> Quatro....não são três tangentes....tem uma reta tangente aqui....e no $(-4,2,0)$ tem outra paralela ao eixo Oy aqui. Não....há entendi....vai ficar assim...forma de um peixe...o gráfico...Depois ta subindo...vem por aqui...e subiu....o comportamento do gráfico...b

Registramos nesse discurso a metáfora explicativa para a sua atividade, quando disse que "Não....há entendi....vai ficar assim...forma de um peixe...o gráfico". Tal emprego de metáforas proporciona a *transição interna* do CUV para o CVV.

No que diz respeito a atividade 2, discutimos no capítulo 1 as dificuldades inerentes aos processo de limite. Neste caso, na fase de*solução*, apenas o **aluno 29** empregou o método por *épsilon* e *delta* para efetuar o *tratamento* dos *registros algébricos*, como podemos perceber na figura 147.


2. $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$

• Parametrizando p/ verificar a $\exists$ do limite:

$\alpha_1(t,0) \Rightarrow f(\alpha_1(t)) = f(t,0) = \frac{t^3}{t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2} = \lim_{t \to 0} t = 0$

$\alpha_2(0,t) \Rightarrow f(\alpha_2(t)) = f(0,t) = \frac{0^3}{0^2+t^2} = \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$

~~$\forall \varepsilon > 0$~~

Pela definição, temos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(x,y) \in Dom$ tal que $\|f(x,y) - (0$

$\Rightarrow \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$

(i) $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

(ii) $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x^3|}{|x^2+y^2|} < \varepsilon \Rightarrow |x| \cdot \frac{|x|^2}{|x^2+y^2|} < \varepsilon$

Sabemos que $\frac{|x|^2}{|x^2+y^2|}$ é limitada, pois: $|x|^2 \leq |x^2+y^2|$ ÷ ambas por $|x^2+y^2|$, temos:

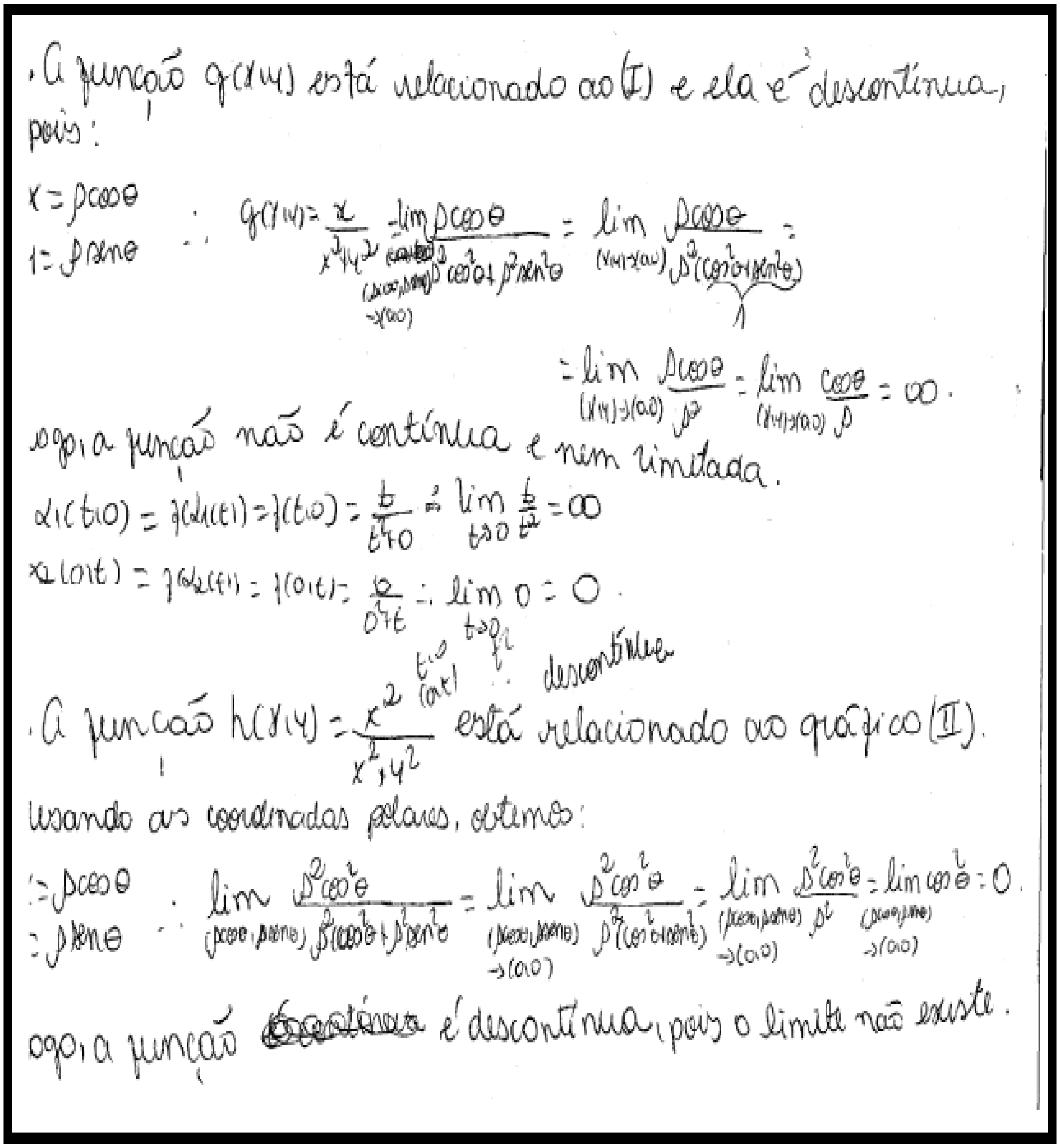
$\frac{|x^2|}{|x^2+y^2|} \leq 1$, então:

$|x| \cdot \frac{|x^2|}{|x^2+y^2|} < \varepsilon \Rightarrow |x| \cdot 1 < \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$. Logo, $\delta = \varepsilon$. Portanto a função é contínua. E o seu gráfico está relacionado ao III.

Figura 147. O aluno 29 aplicou o modelo por épsilon e delta para efetuar o *tratamento* do limite na atividade 2.

Observemos que os alunos manifestaram maior dificuldade para verificar formalmente que o limite existe, do que o caso em que suspeitam da não existência. Isto só foi possível graças às atividades desenvolvidas na SF, na *tomada de posição* e na *maturação*, nas quais os alunos elaboraram suas *intuições afirmativas* e *intuições conjecturais* e buscaram comprová-las na *solução* da SF.

Na figura 148 o **aluno 24** empregou alguns teoremas desenvolvidos em sala de aula durante as sessões de abordagem dos conteúdos. Vejamos a figura 148.


. A função g(x,y) está relacionado ao (I) e ela é descontínua, pois:

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ $\therefore$ $g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\to(0,0)} \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2(\underbrace{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}_{1})}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\theta}{\rho} = \infty$.

Logo, a função não é contínua e nem limitada.

$\alpha_1(t,0) = g(\alpha_1(t)) = g(t,0) = \frac{t}{t^2+0} \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t^2} = \infty$

$\alpha_2(0,t) = g(\alpha_2(t)) = g(0,t) = \frac{0}{0+t} \therefore \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$.

$\therefore$ descontínua

. A função $h(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ está relacionado ao gráfico (II).

Usando as coordenadas polares, obtemos:

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ $\therefore$ $\lim\limits_{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim\limits_{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\to(0,0)} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)} = \lim\limits_{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\to(0,0)} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2} = \lim\limits_{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\to(0,0)} \cos^2\theta = 0$.

Logo, a função ~~contínua~~ é descontínua, pois o limite não existe.

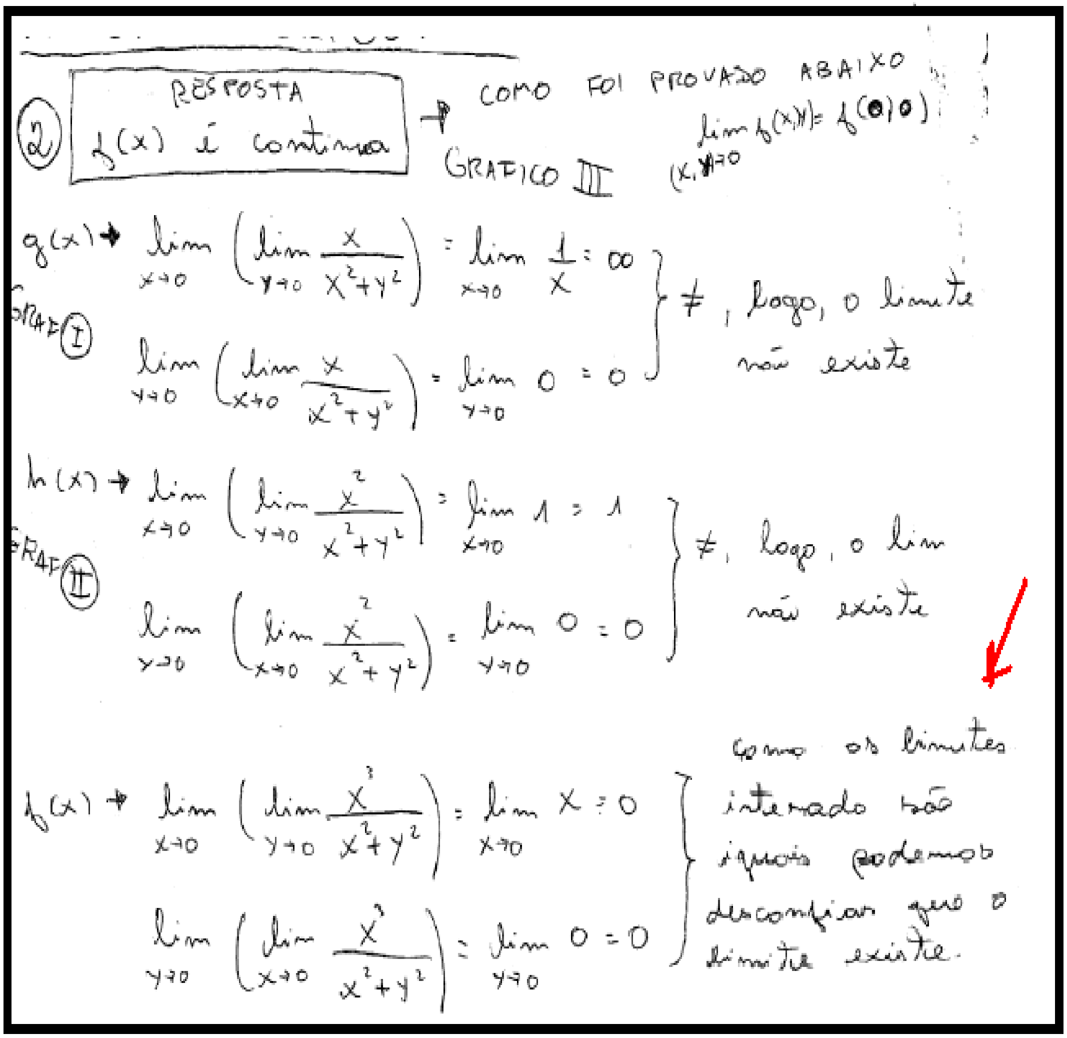
Figura 148. O aluno 24 verificou que o limite não existe usando teoremas.

O **aluno 7** e o **aluno 21**, por exemplo, admitiram não estudar o modelo formal envolvendo demonstrações por *épsilon* e *delta*, entretanto, eles conseguiram desenvolver uma argumentação satisfatória com base na *visualização* dos *registros* e na produção de *intuições conjecturais* sobre a existência de limite, como apontamos na *maturação* da SF.

Isto colocou em evidência a complexidade do *tratamento* de registros envolvidos nas questões relacionadas ao conceito de *limite* e *continuidade*.

Na sequência, exibimos uma figura que evidencia o critério necessário para verificação da existência de um limite. Reparemos que apenas na fase de *prova* da SF, mediamos as condições suficientes para que se tenha a propriedade.

De fato, o **aluno 7**, por exemplo (figura 149), empregou o tratamento de registro peculiar à noção de *limites interados* e declarou que "Como os limiets interados são iguais, podemos desconfiar que o limite existe...". Isto caracteriza uma sentença proposicional, que envolveu uma *intuição antecipatória* registrada na *solução* da SF.



2) $\boxed{\text{RESPOSTA} \quad f(x) \text{ é contínua}}$ → COMO FOI PROVADO ABAIXO GRAFICO III $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = f(0,0)$

$g(x) \to \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$

GRAF (I) $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$\neq$, logo, o limite não existe

$h(x) \to \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

GRAF (II) $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$\neq$, logo, o lim não existe

$f(x) \to \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$

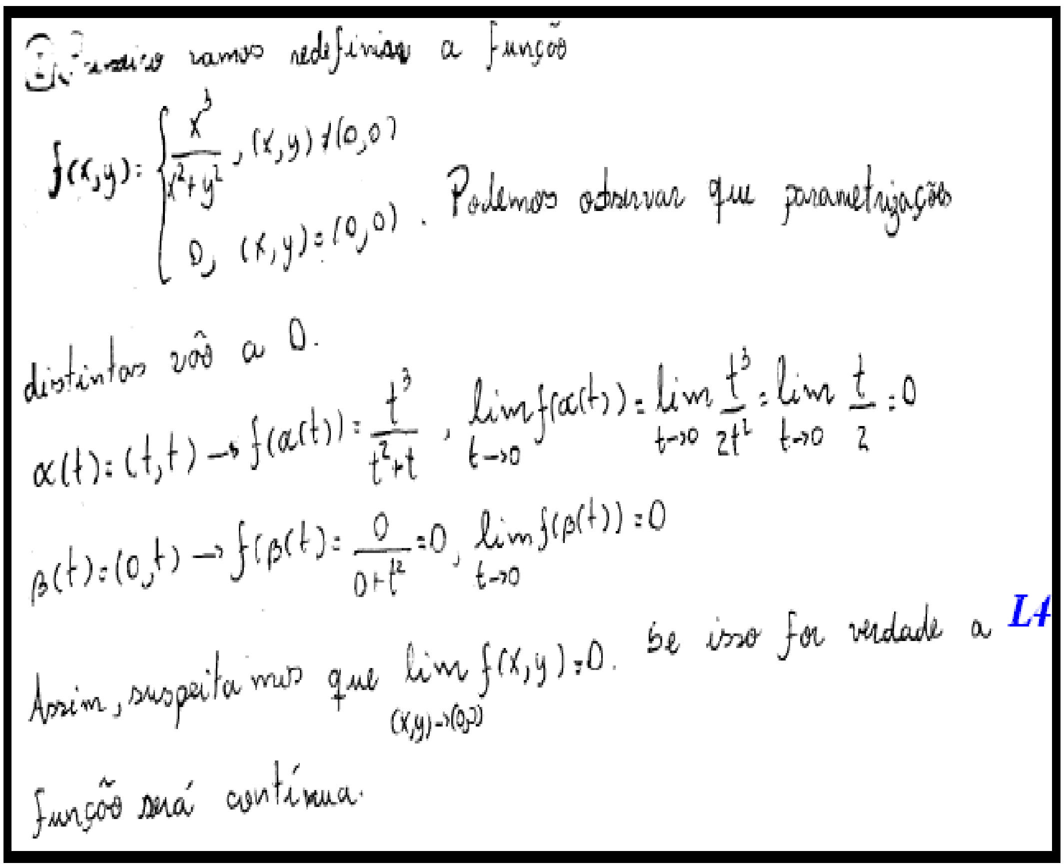
$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

Como os limites interado são iguais podemos desconfiar que o limite existe.

Figura 149. O aluno 7 efetuou o *tratamento* sobre os *limites interados* para verificar as condições necessárias para a existência de um limite na atividade 2.

De modo semelhante, na atividade 2, o **aluno 21** declarou na linha 4 que "Assim, podemos suspeitar que $Lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ...". Mais uma vez, na solução da SF, o **aluno 21** (figura 150) empregou um método necessário para a verificação de um limite presente na atividade 2 (tarefa 2, p. 223).

Vejamos o termo "suspeitar" no sentido de não se ter certeza a respeito do resultado inferido por meio do *tratamento* de *registros algébricos*. Assim, de modo semelhante ao que registramos no caso do **aluno 7**, o **aluno 21** buscou a verificação final e formal para o problema. Outras questões, porém, relacionadas a este fato serão discutidas na *prova* da SF.



Primeiro vamos redefinir a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

. Podemos observar que parametrizações distintas vão a 0.

$\alpha(t) = (t,t) \to f(\alpha(t)) = \frac{t^3}{t^2+t}$, $\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2} = 0$

$\beta(t) = (0,t) \to f(\beta(t) = \frac{0}{0+t^2} = 0$, $\lim_{t\to 0} f(\beta(t)) = 0$

Assim, suspeitamos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Se isso for verdade a função será contínua.

L4

Figura 150. O aluno 21 empregou métodos apenas necessários para a resolução e manifestou intuições antecipatórias que serão comprovadas na fase 4 – prova da SF.

No que se refere à atividade 3, indicamos na figura 151 o extenso *tratamento* necessário para a verificação das condições do teorema de Clairaut-Swharz, com o uso apenas de *registros algébricos* na *solução* da SF. Observamos que, na fase anterior, o **aluno 29** teve acesso ao *registro algébrico* formado pelo computador.

As limitações do *software* são apontadas no sentido de que este fornece apenas o comportamento das *derivadas parciais* de 1ª e 2ª apenas nos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Assim, na origem, os alunos necessitavam empregar as noções de *derivadas parciais* pela definição de limite. Isto foi verificado pelo **aluno 29**.

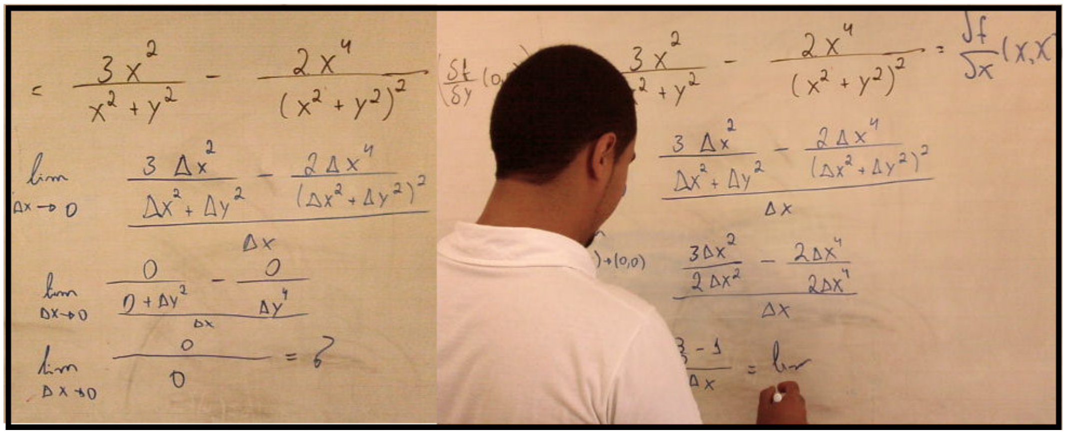


Figura 151. O aluno 29 efetuou o *tratamento* dos registros no quadro branco.

Na *solução*, o **aluno 24** (figura 152) efetuou o *tratamento* dos *registros algébricos* e obteve o comportamento da *derivada parcial* de 1ª ordem fora da origem. Reparemos que, neste caso, o aluno empregou um *modelo matemático* conhecido do CUV para derivar uma função a duas variáveis reais. Tais argumentos foram empregados na fase de *solução* e auxiliam a *transição interna* do CUV para o CVV.

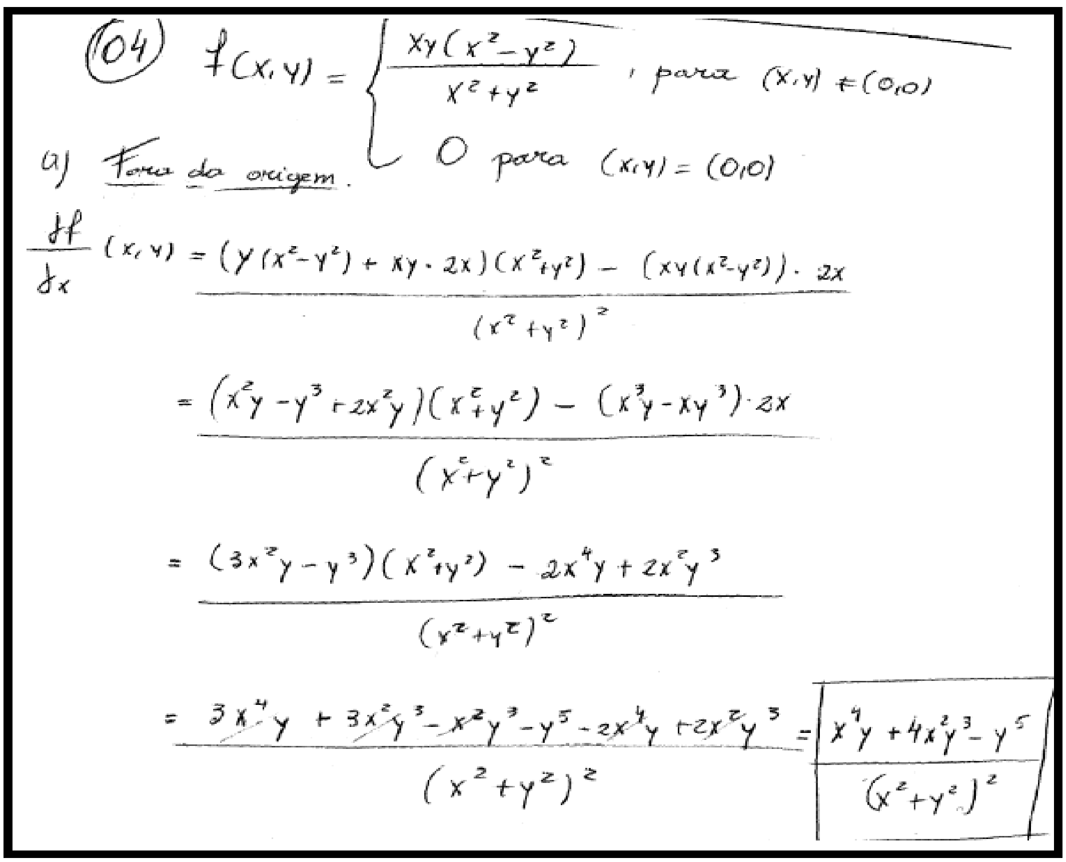


Figura 152. O aluno 24 efetuou o *tratamento* de registros e empregou um modelo do CUV na solução de um problema do CVV.

Na *solução* registramos o *tratamento* realizado pelo **aluno 7** na atividade 3. Notemos que o **aluno 7** (figura 153) empregou o método dos *limites interados* para avaliar o comportamento das *derivadas mistas* descritas por $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Observemos que tal abordagem proporcionou melhor entendimento e a ligação conceitual entre *limites* e *derivadas parciais* e está relacionada à *transição interna* do CUV para o CVV.

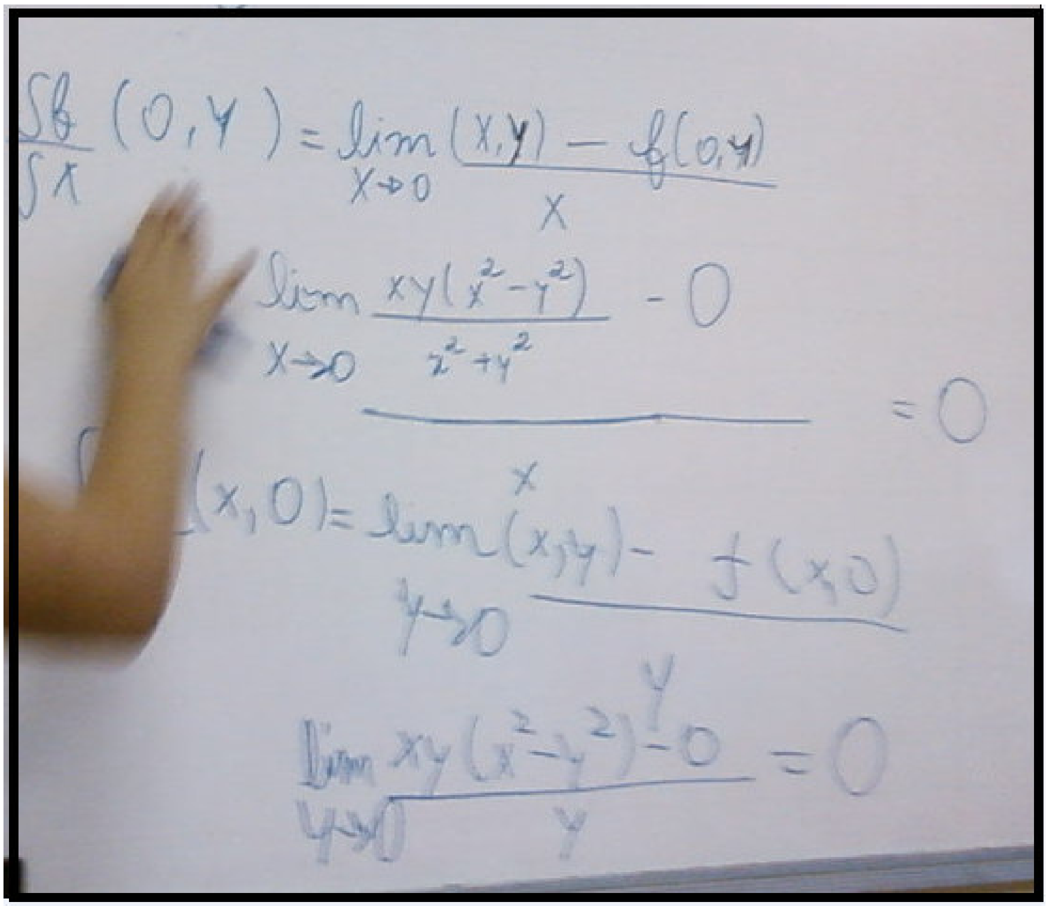


Figura 153. O aluno 7 empregou os *limites interados* para realizar o tratamento dos registros da atividade 3 na fase 3 - *solução*.

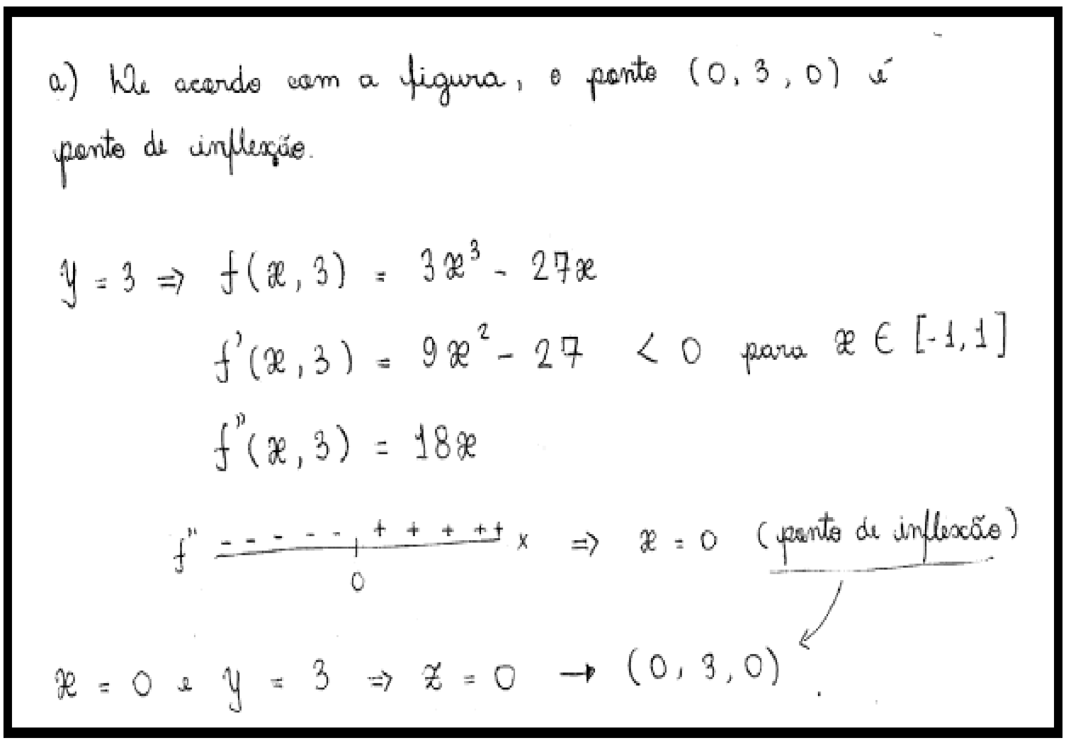
Por fim, o **aluno 21**, no momento em que resolvia a atividade 3, pediu mais uma vez para analisar e explorar o *registro gráfico* em 3D no computador. Ao visualizar e explorar o comportamento do *registro gráfico* e comparar com o *tratamento* dos registros, realizado até aquele momento, afirmou

> Se fossem contínuas as derivadas de segunda ordem...já poderia afirmar que e igualdade é válida...acho que...não..por que x está variando entre 2,2 e 2,8....e o gráfico se parece com uma montanha

Notemos que ele investigava a continuidade das derivadas de 1ª e 2ª ordem que concorrem nas condições do teorema de Clairaut-Schawrz. Por outro lado, a *visualização* do *registro gráfico* em 3D e a comparação dos seus resultados obtidos com o *tratamento* dos *registros* o fizeram alterar as estratégias de solução da atividade 3.

Reparemos o emprego de uma " metáfora" no sentido de significar os elementos observados na *superfície*. Como já salientamos, a expressão "montanha" pode auxiliar a comunicação dos resultados e a *transição interna* do CUV para o CVV.

Quando à atividade 4, exibimos o *tratamento* realizado pelo **aluno 29**, na *solução* da SF. Observamos que o próprio aluno sublinhou a ideia de que comparou os resultados obtidos a partir do *tratamento dos registros algébricos* com os resultados inferidos na fase 2 de *maturação*, apoiados na visualização dos *registros gráficos* em 3D. Comprovamos isto nas figuras 154 e 155.



a) De acordo com a figura, o ponto $(0,3,0)$ é ponto de inflexão.

$y = 3 \Rightarrow f(x,3) = 3x^3 - 27x$

$f'(x,3) = 9x^2 - 27 < 0$ para $x \in [-1,1]$

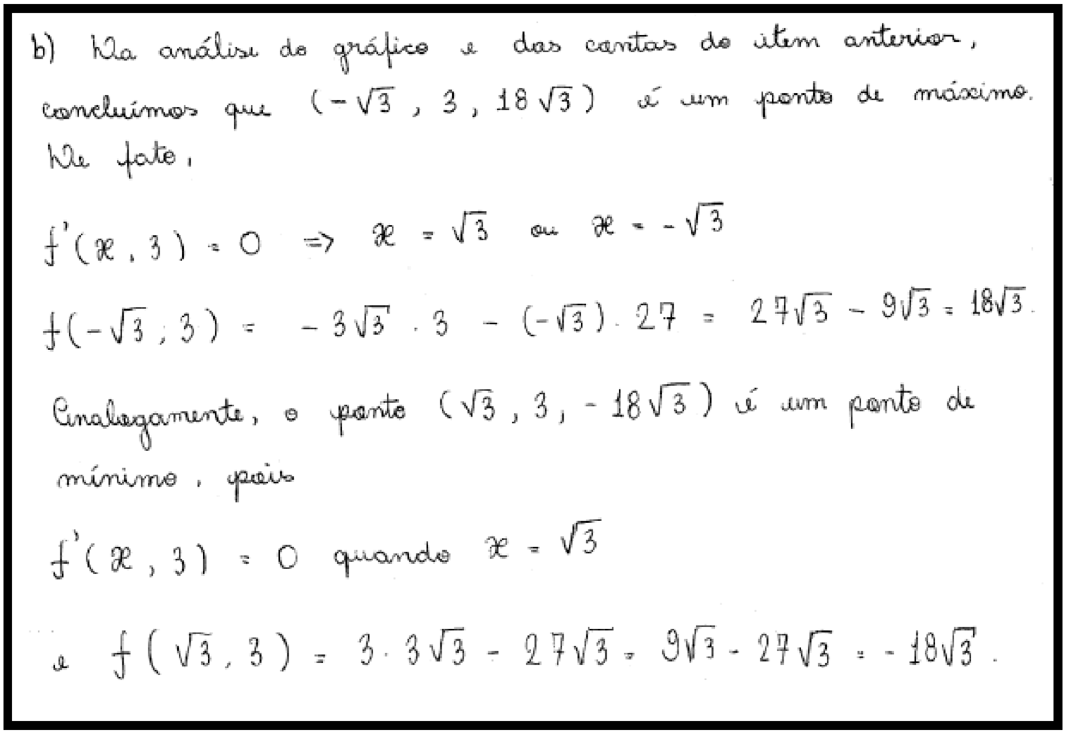
$f''(x,3) = 18x$

f'' $- - - - - \underset{0}{|} + + + + +$ x $\Rightarrow x = 0$ (ponto de inflexão)

$x = 0$ e $y = 3 \Rightarrow z = 0 \rightarrow (0,3,0)$

Figura 154. O aluno 29 comparou os dados obtidos a partir da *visualização* dos *registros gráficos* com os *registros algébricos* na fase de *solução* da SF.

Na figura 154, o **aluno 29** identificou na solução da SF, os *pontos extremos* e *pontos de inflexão* no $\mathbb{R}^3$, o que não é explorado pelos livros didáticos que consultamos. Na figura 155 ele admitiu obter suas conclusões a partir dos *registros gráficos* em 3D visualizados e do *tratamento* dos *registros algébricos*.



b) Da análise do gráfico e das contas do item anterior, concluímos que $(-\sqrt{3}, 3, 18\sqrt{3})$ é um ponto de máximo. De fato,

$f'(x, 3) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$f(-\sqrt{3}; 3) = -3\sqrt{3} \cdot 3 - (-\sqrt{3}) \cdot 27 = 27\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

Analogamente, o ponto $(\sqrt{3}, 3, -18\sqrt{3})$ é um ponto de mínimo, pois

$f'(x, 3) = 0$ quando $x = \sqrt{3}$

e $f(\sqrt{3}, 3) = 3 \cdot 3\sqrt{3} - 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3} - 27\sqrt{3} = -18\sqrt{3}$.

Figura 155. O aluno 29 comparou os dados obtidos da *visualização* dos *registros gráficos* com os *registros algébricos* na fase de *solução*.

Notemos que na solução, o **aluno 24** efetuou o tratamento dos *registros algébricos* que fornecemos na atividade 4. Observemos a figura 156.

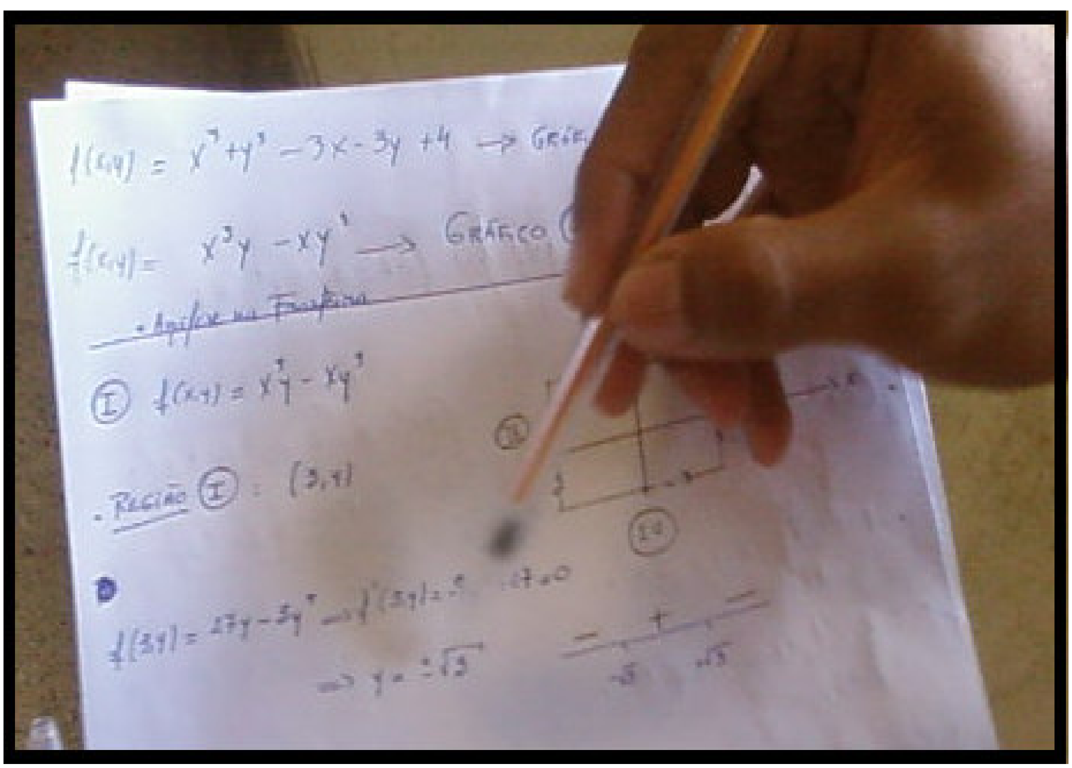


Figura 156. O aluno 24 efetuou o *tratamento* dos *registros algébricos* na fase 3 – *solução* da SF

Por outro lado, o **aluno 24** nos relatou o seguinte

> Eu to com dificuldade aqui...a orientação dos eixos na primeira me confundiu...e as respostas estão diferentes...na figura que o senhor tem aqui se for assim...os valores devem ser negativos...é por que geralmente assumimos..por que é a maneira comum...esse aqui é o x..esse aqui é o y e esse aqui é o z..aqui o x cresce para la...para outro lado...dá uma confusão...

Destacamos no trecho acima que ele ficou confuso com o *registro gráfico* em 3D e sua interpretação, desde o comportamento dos *registros algébricos*. De modo recorrente, deparamos situações, sobretudo na *solução*, e na prova da SF, em que os estudantes requereram a *visualização* dos *registros* formados no computador com os dados inferidos do *tratamento* e aplicação das regras formais.

Estes dados evidenciaram o fato da mobilização dos saberes do CVV apoiados na *percepção* e *visualização* dos objetos, o que é neglicenciado pelos livros didáticos que analisamos. O mesmo fato ocorreu também com o **aluno 7**, na *solução*, que manifestou a seguinte dúvida

> É por que eu queria que o senhor localizasse no gráfico o valor $(-\sqrt{3},3)$ ...a figura..esse ponto é de máximo...o senhor pode apontar o ponto ai...no gráfico... As contas conferem com a realidade do software...as coordenadas...a orientação diferente da minha cabeça..a orientação normal...

Destacamos as dificuldades enfrentadas pelo **aluno 7**, ao confrontar os dados obtidos do *tratamento* dos *registros algébricos* com as impressões que adquiriu da *visualização* do objeto da atividade 4. No decorrer da resolução da atividade, o aluno 7 acrescentou que "Na origem ainda eu não cheguei..identifiquei apenas os pontos de inflexão e pontos críticos...analiso aqui na figura e depois as contas".

Isto evidenciou que toda sua ação na *solução*, foi apoiada no *tratamento* dos *registros* e na *conversão dos registros* pertinentes à situação.

Por fim, o **aluno 21**, descreveu detalhadamente seu procedimento de ataque e resolução do problema, quando disse que

> Eu peguei a função...e essa borda aqui...esta no intervalo de $-3 \leq x \leq 3$ ...mas o y está fixo... $y = 3$ ...deriva a primeira vez e iguala a zero...para determinar os pontos críticos...na origem ainda eu não cheguei..identifiquei apenas os pontos de inflexão e pontos críticos...analiso aqui na figura e depois as contas...ainda não cheguei no interior da superfície...para estes pontos no interior...a gente vai usar o teste da Hessiana...eu descobri os pontos de máximos e míminos..a máximo esta aqui..o mínimo aqui..e o de inflexão..aqui...eu analiso aqui a figura....

Expressemos que a mediação proporcionada pelos pressupostos da *Sequência Fedathi* fortaleceu não apenas o *tratamento* cansativo e algorítmico dos dados. Com efeito, na fala ora reproduzida, destacamos a declaração "...analiso aqui na figura e depois as contas...".

Para concluir, discutiremos os dados colhidos na atividade 5. Nesta, o **aluno 29** comparou os *registros gráficos* em 2D e buscou realizar a *conversão dos registros*, como observamos na figura 157. .

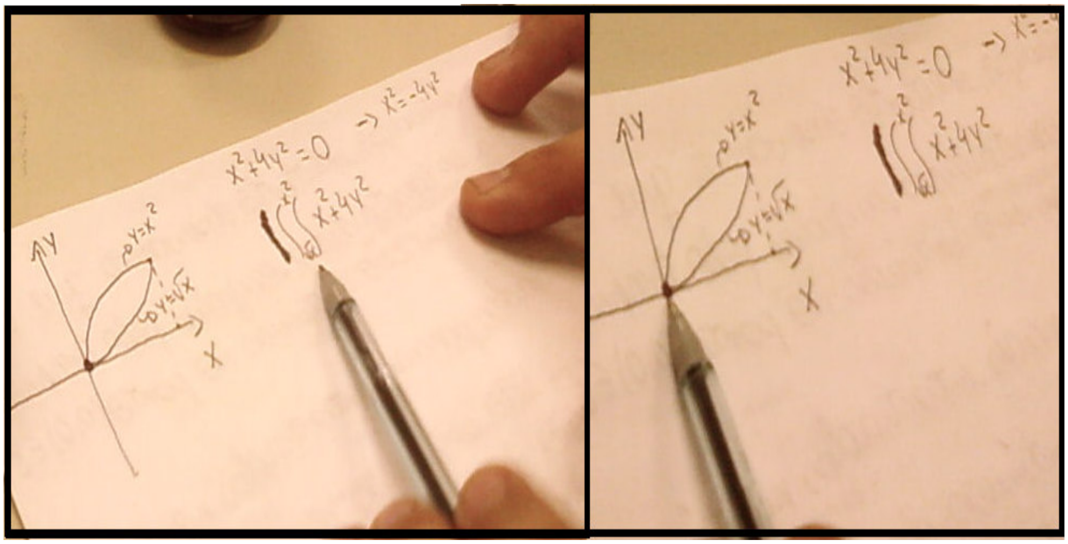
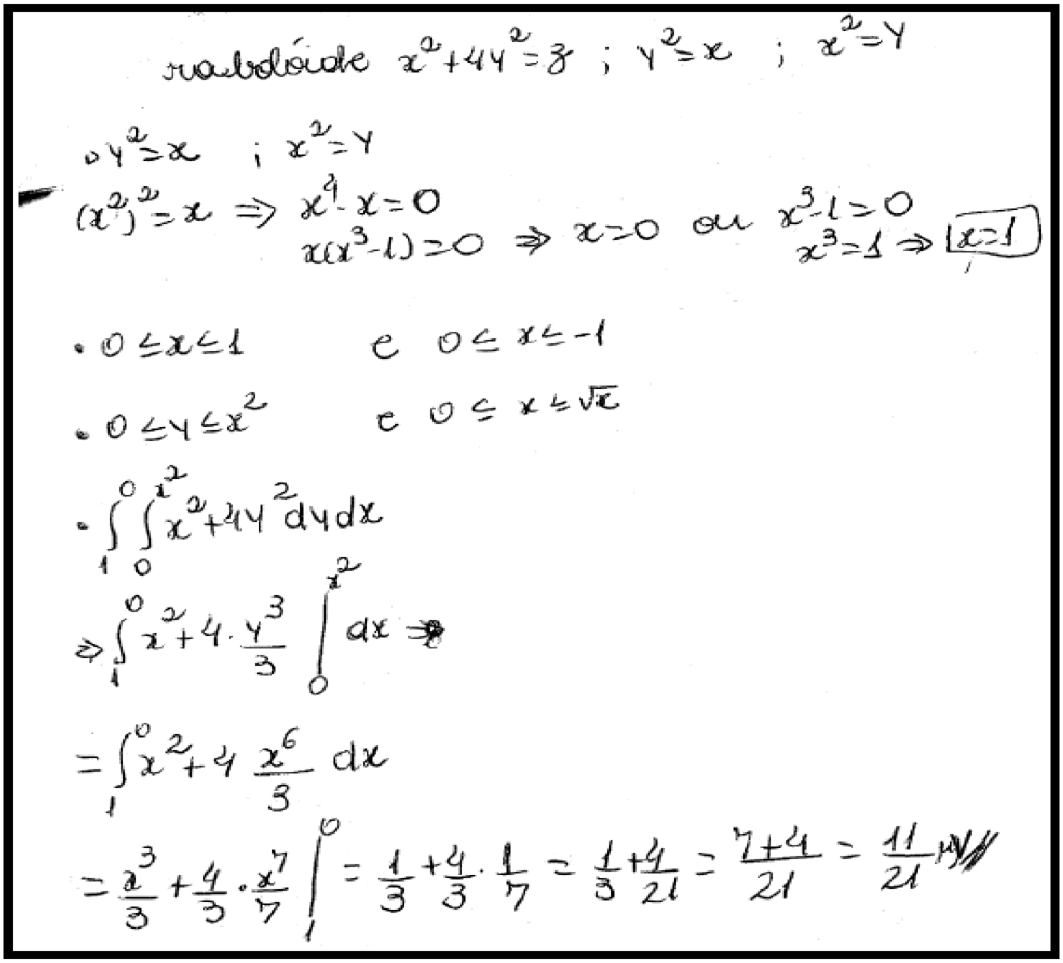


Figura 157. O aluno 29 tentou realizar a *conversão* dos registros na fase 3 – *solução* da SF.

Comentamos na *maturação* da SF, que, em certas tarefas da atividade 5, não fornecemos os *registros gráficos* em 3D gerados no computador. A intenção foi registrar as dificuldades ante o tratamento dos *registros algébricos* e, sobretudo, a identificação dos limites da integração.

Na figura 158, observamos que o **aluno 24** não recorreu a nenhum desenho como guia para seu raciocínio na solução da SF. Evidenciemos que situações como esta proporcionam o surgimento de *intuições afirmativas* que se constituem de ações ou escolhas não refletidas tomadas pelo estudante. Registramos seu *tratamento* de registros na figura 158.



rabdóide $x^2+4y^2=z$; $y^2=x$; $x^2=y$

$\circ\ y^2=x$; $x^2=y$

$(x^2)^2=x \Rightarrow x^4-x=0$

$x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x^3-1=0$

$x^3=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

• $0\leq x\leq 1$ e $0\leq x\leq -1$

• $0\leq y\leq x^2$ e $0\leq x\leq \sqrt{x}$

• $\int_1^0\int_0^{x^2} x^2+4y^2\,dy\,dx$

$\Rightarrow \int_1^0 x^2+4\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^{x^2} dx \Rightarrow$

$= \int_1^0 x^2+4\,\frac{x^6}{3}\,dx$

$= \frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_1^0 = \frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{3}+\frac{4}{21} = \frac{7+4}{21} = \frac{11}{21}$

Figura 158. O aluno 24 não recorreu a nenhum desenho ou figura como guia para seu raciocínio.

Por outro lado, no caso do **aluno 7**, ele desenvolveu as atividades com o auxílio de *registros gráficos*, e requereu a consulta ao comportamento dos *registros gráficos* na medida em que empregou suas estratégias.

Note-se que todos os estudantes manifestaram dificuldades na descrição da região em foco, a qual se queria considerar no cálculo da *integral tripla*, e exibiram desenho ou figuras apenas no $\mathbb{R}^2$, como evidenciamos na figura 159.

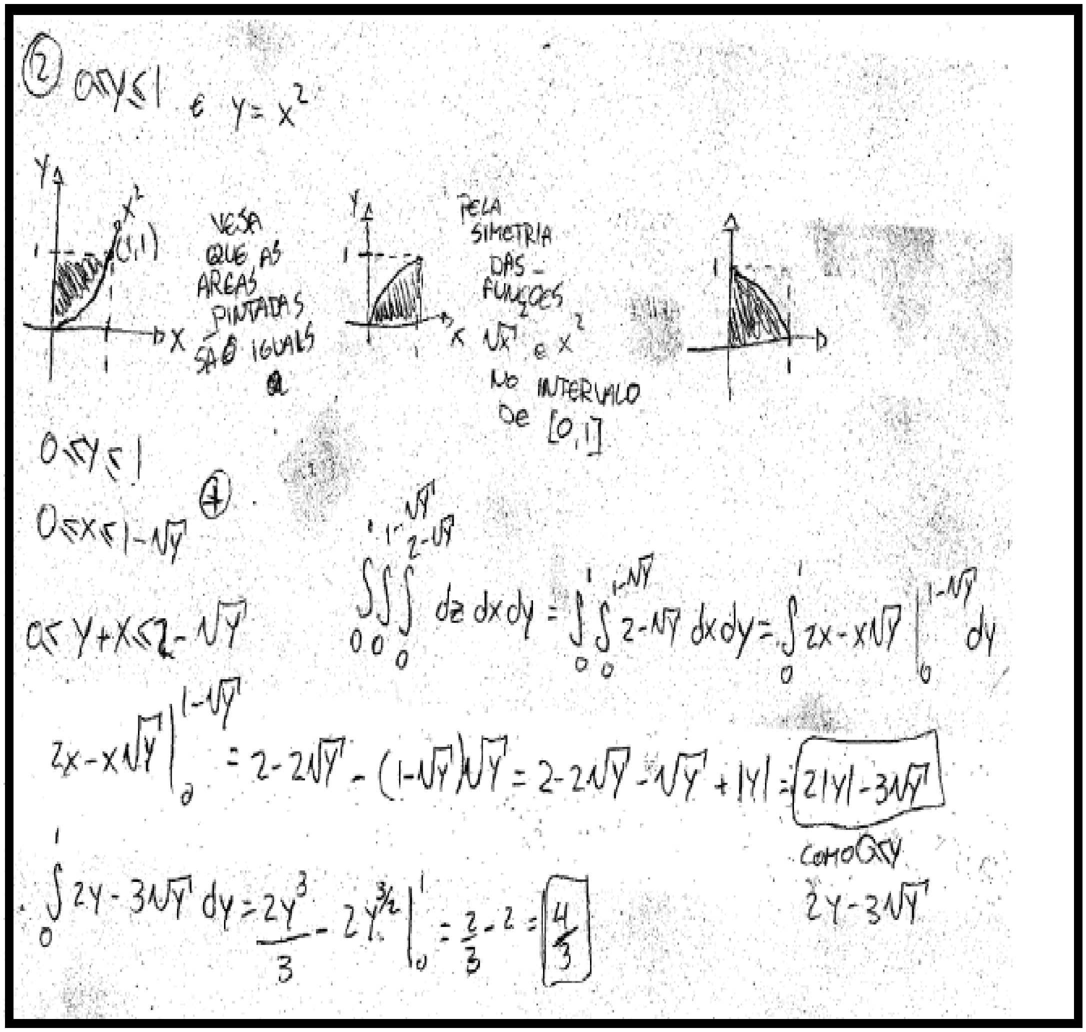


Figura 159. O aluno 7 descreveu desenhos que o auxiliaram no *tratamento* dos registros algébricos na atividade 5, na fase de *solução*.

Por fim, trazemos um trecho da atividade 5, do **aluno 21**, que elaborou uma figura como guia para o raciocínio e identificação dos *limites de integração* no plano $\mathbb{R}^2$, entretanto, para identificar a variação no eixo das cotas, requisitou o apoio computacional.

Assim, após a verificação do comportamento do *registro gráfico* 3D, o **aluno 21**, na *solução* da SF, conseguiu resolver com êxito da *integral tripla* fornecida na atividade. Comprovamos isto na figura 160.

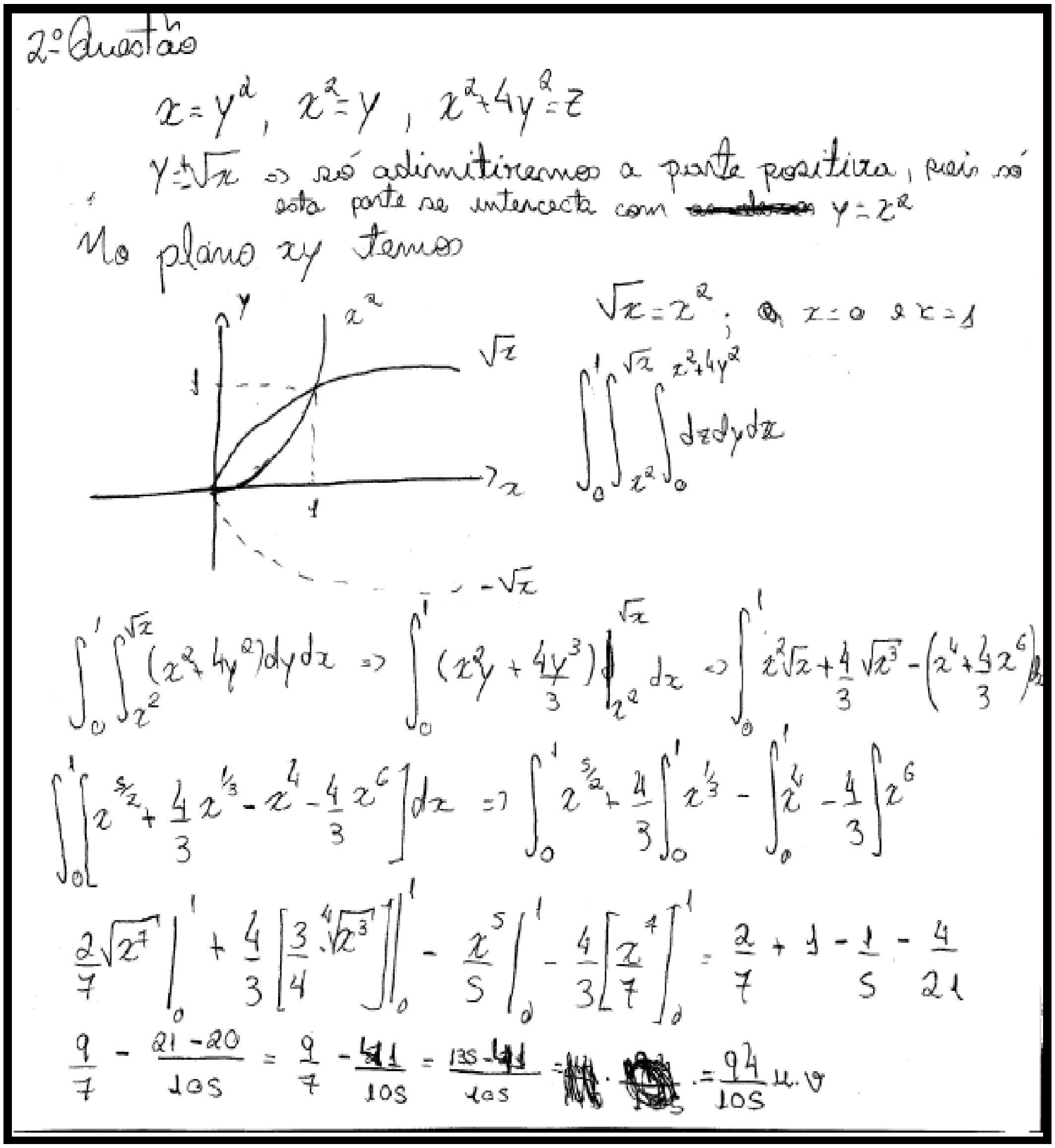


Figura 160. O aluno 21 requereu a *visualização* do *registro gráfico* para a identificação dos limites de integração no eixo Oz na fase de *solução*.

Por fim, vale observar que, sem o auxílio computacional, as atividades permanecem na forte dependência do tratamento dos *registros algébrico*s. Por outro lado, a mediação estruturada com base na mediação que assume os pressupostos da *Sequência Fedathi* permite que se evite o reforço de *intuições afirmativas* indesejadas e, ao decorrer da solução, as escolhas dos alunos são baseadas no conhecimento obtido por meio da percepção e da intuição, que estimulamos nas fases anteriores.

Na próxima seção, discutiremos os dados colhidos na ultima fase da SF.

5.4 Fase de *prova*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

Com suporte na análise de livros didáticos (p. 185) constatamos que alguns autores (GUIDORIZZI, 2010; LEITHOLD, 1999) apresentam uma argumentação formal que extrapola os limites de interesse de um curso de licenciatura em Matemática.

Por outro lado, na *prova* da SF, os alunos deparam uma situação em que precisam formalizar, identificar os limites de validade de todas suas afirmações e sentenças proposicionais produzidas nas fases anteriores e, sobretudo, no caso em que identifiquem inconsistências nos resultados, exibir e discutir contraexemplos no contexto do CVV ou do CUV.

Assim, escolhemos alguns conteúdos do CVV que evidenciaram a complexidade intrínseca da teoria e o modo de argumentação dos **alunos 29**, **24**, **7** e **21**. Para iniciar a discussão dos dados, indicamos o trecho da atividade 2, que buscou formalizar a existência e o valor de um limite usando o *épsilon* e o *delta*.

Na figura 161, observamos seu *tratamento* dispensado para a resolução do limite.

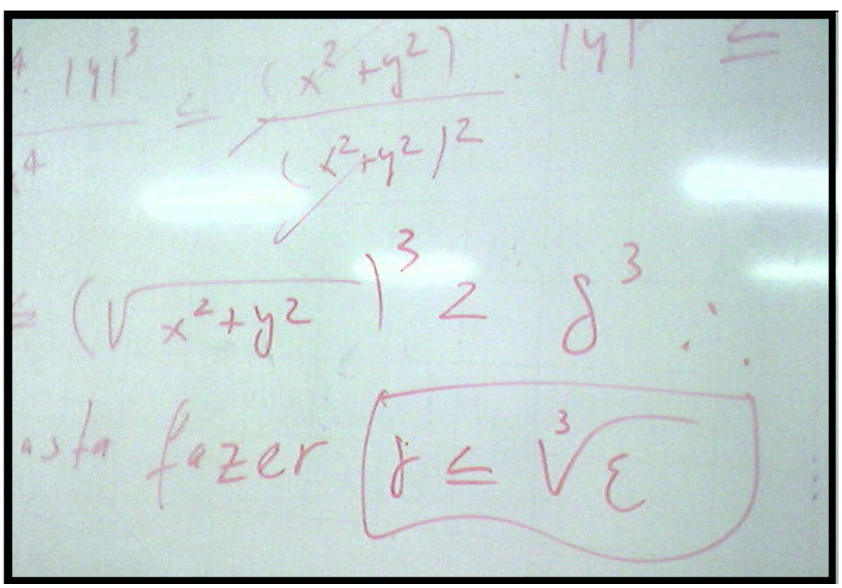


Figura 161. O aluno 29 procurou formalizar os resultados obtidos na fase de *prova*.

O **aluno 24** buscou comparar a noção de limites por *épsilon* e *delta* estudada no CUV, com a mesma noção examinada no CVV. Abaixo na figura, o **aluno 24** descreveu e comparou os seguintes *registros algébricos* $Lim_{x \to a} f(x) = L$ e

$Lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$. Reparemos abaixo, nas figuras 162 e 163, que ele descreveu desenhos e figuras buscando compreender as noções topológicas envolvidas.

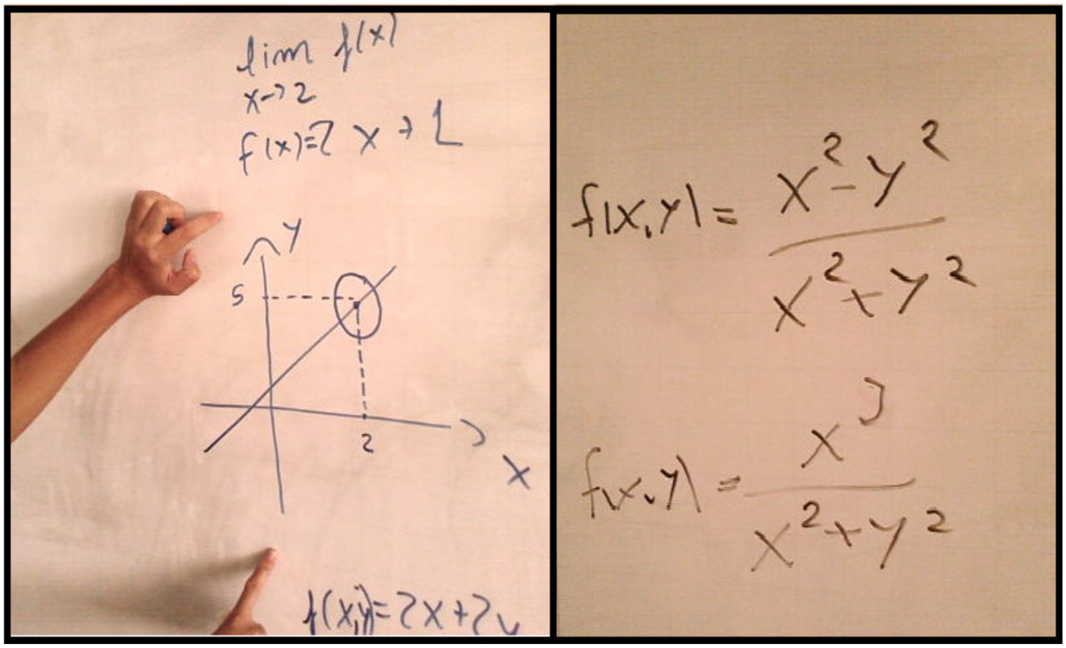


Figura 162. O aluno 24 descreveu o comportamento geométrico da noção de limites na fase 4 – *prova*.

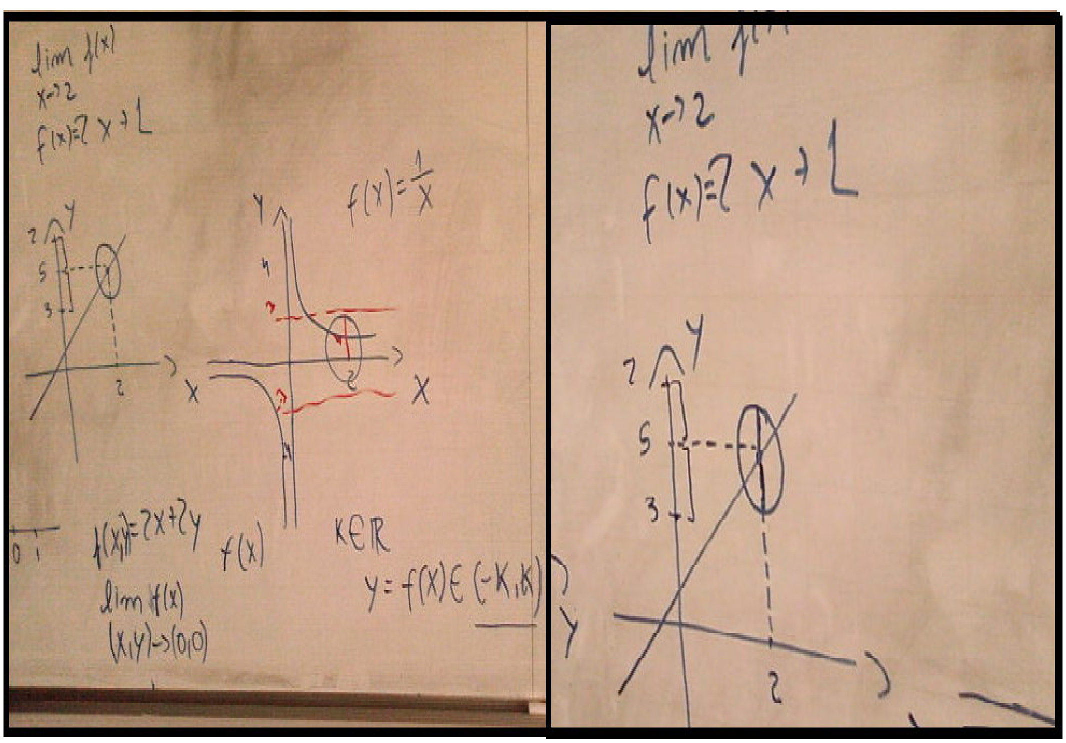
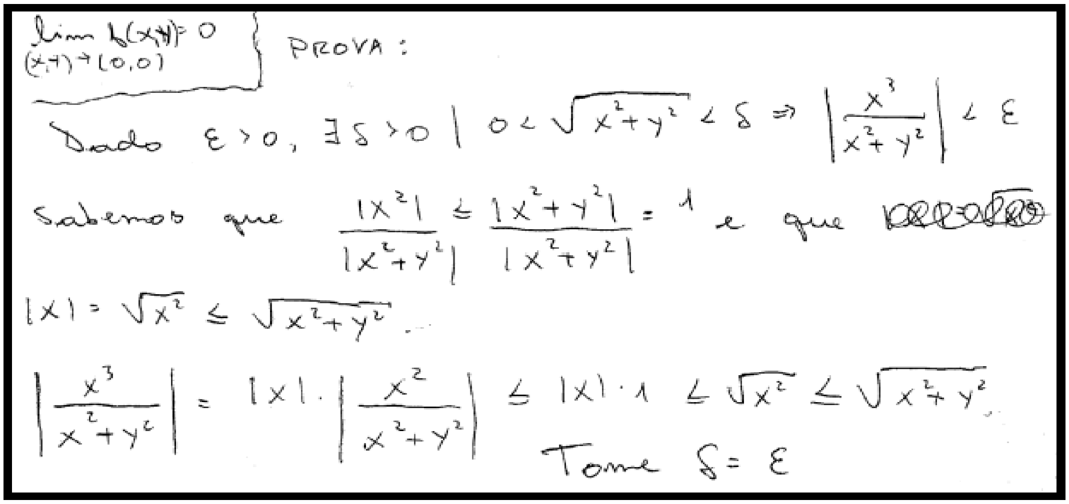


Figura 163. O aluno 24 descreveu o comportamento geométrico da noção de limites na fase 4 – *prova*.

Identificamos apenas o emprego de *registros algébricos* e regras da Lógica proposicional pelo **aluno 7**. Recordemos que na *solução*, o aluno indicou claramente que a aplicação de condições necessárias não eram suficientes para se asseverar que o limite apresentado na atividade 2 existe. Para uma conclusão definitiva, o **aluno** 7 aplicou o método por épsilon e delta como vemos na figura 164.



$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ PROVA:

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$

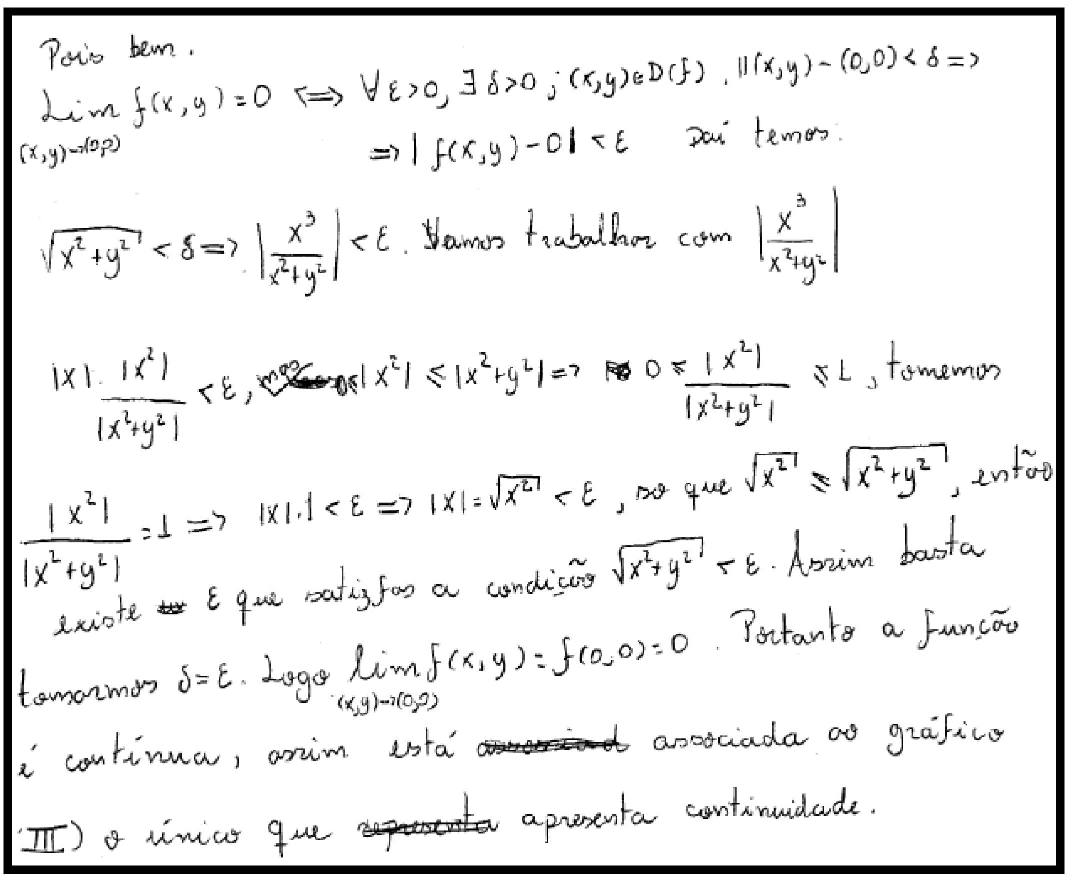
Sabemos que $\frac{|x^2|}{|x^2+y^2|} \le \frac{|x^2+y^2|}{|x^2+y^2|} = 1$ e que

$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$ ...

$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x| \cdot \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le |x| \cdot 1 \le \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$

Tome $\delta = \varepsilon$

Figura 164. O aluno 7 empregou o modelo por *épsilon* e *delta* na fase 4 – *prova* da SF.



Pois bem.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; (x,y) \in D(f), \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$ daí temos:

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$. Vamos trabalhar com $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|$

$|x| \cdot \frac{|x^2|}{|x^2+y^2|} < \varepsilon$, ~~mas~~ $|x^2| \le |x^2+y^2| \Rightarrow 0 \le \frac{|x^2|}{|x^2+y^2|} \le 1$, tomemos

$\frac{|x^2|}{|x^2+y^2|} = 1 \Rightarrow |x| \cdot 1 < \varepsilon \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2} < \varepsilon$, só que $\sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$, então

existe ε que satisfaz a condição $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$. Assim basta

tomarmos $\delta = \varepsilon$. Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Portanto a função

é contínua, assim está ~~associad~~ associada ao gráfico

III) o único que ~~apresenta~~ apresenta continuidade.

Figura 165: O aluno 21 empregou o modelo por *épsilon* e *delta* na fase 4 de *prova* da SF.

Outra atividade que envolveu uma necessidade de formalização se relaciona com a atividade 4 (p. 225-226). Esta é baseada em um teorema matemático discutido em sala de aula. O diferencial importante desta questão é a possibilidade de que os alunos têm de empregar todos seus conhecimentos do CUV no contexto do CVV e, assim, estimulamos a *transição interna* do CUV para o CVV.

Com efeito, os estudantes exploraram as noções de *ponto critico* e *ponto de inflexão* na borda da superfície que exibimos na atividade 4.

Vejamos que nenhum dos livros didáticos consultados explora estes conceitos formais, oriundos do CUV no contexto do CVV, preservando os *registros algébricos* do CVV. Ademais, a atividade 4 envolvia o emprego do teste da segunda derivada ou teste da Hessiana, aplicável para somente os *pontos críticos*. O **aluno 29** observou o seguinte

> De fronteira esses três pontos aqui... por que...eles são analisados...identificados...e no interior...são dois...estão dentro do gráfico da função....é fronteira por que estão nas bordas....eles estão limitados nas extremidades do gráfico...estão nas bordas...dois pontos interiores...esse daqui e aqui...são interiores...dentro do gráfico...e o teste da hessiana...em dois pontos...na origem e neste ponto que provavelmente deve ser um ponto de inflexão...nas bordas posso aplicar....

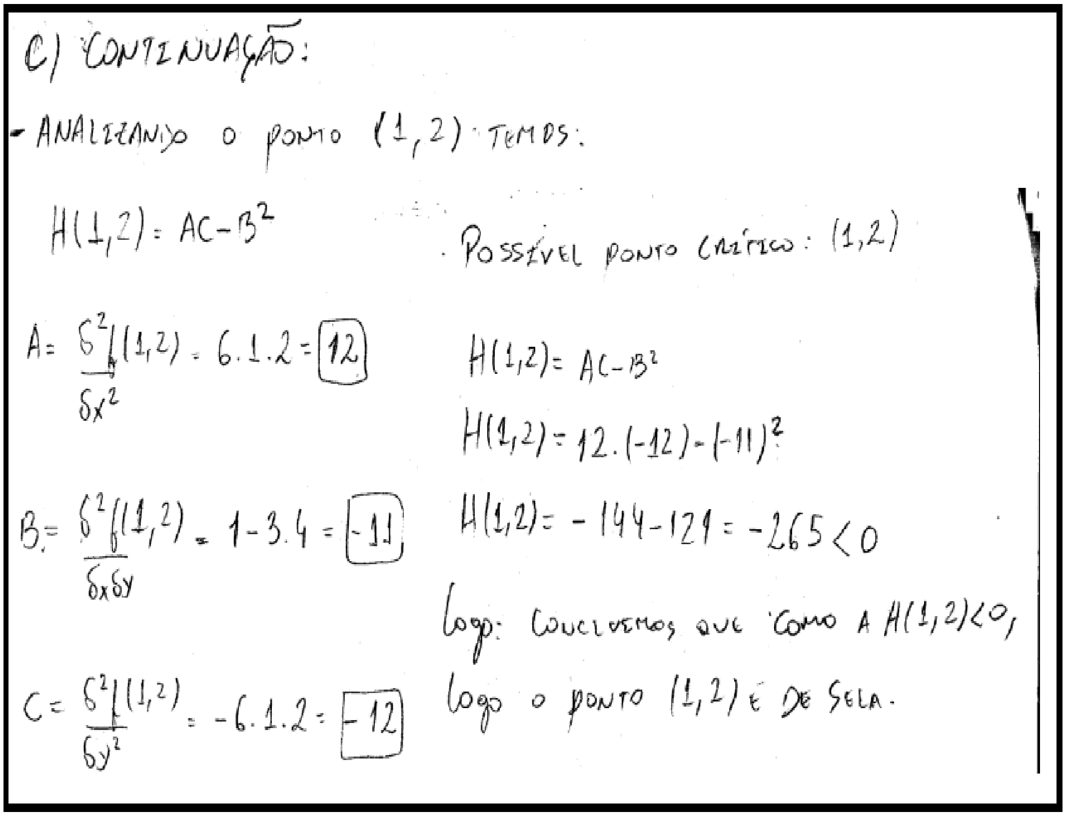
Na *prova*, o **aluno 29** pediu para analisar e comparar os resultados finais obtidos. Identificamos em seu discurso a importância que a *visualização* teve no sentido de apoiar as inferências realizadas na *solução*. Por outro lado, nesta última fase da SF, o aluno, com base no *tratamento* desenvolvido sobre os *registros* (*fase de solução*) e a aplicação do teorema formal relacionada com o *teste da Hessiana*, acentuou que

> Não...estou fazendo aqui a segunda derivada...alem desses pontos que estão no interior..que eu saiba para aplicar o teste tem que estar no interior...conclui que aplicando o teste da hessiana...no ponto $(2,1)$ e analisando o sinal de A..deve ser mínimo local...

Não acreditando nos dados obtidos na atividade 4, o **aluno 29** acrescentou ainda que

> Dá para acreditar...ele está embaixo...na figura...parece mais como...ponto de sela...pela analise visual...e as contas que eu fiz...o mínimo era para ser mais por aqui..,....pela análise visual está dando sela..aqui é o ponto $(2,1)$...seu eu for para cima...se eu sair daqui e vir para cá...vou obter um mínimo..assim é sela...se for local..pode ser um mínimo local...

Por fim, neste fragmento, compreendemos, identificamos seu estado individual de insegurança e, com o *tratamento* dos *registros algébricos*, vemos que ele aplicou o *teste da Hessiana* (2ª derivada) no ponto $(2,1)$, o que formalmente se mostrou incorreto.


C) CONTINUAÇÃO:

- ANALIZANDO O PONTO (1,2) TEMOS:

$H(1,2) = AC - B^2$

· POSSÍVEL PONTO CRÍTICO: (1,2)

$A = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(1,2) = 6.1.2 = \boxed{12}$

$H(1,2) = AC - B^2$

$H(1,2) = 12.(-12) - (-11)^2$

$B = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(1,2) = 1 - 3.4 = \boxed{-11}$

$H(1,2) = -144 - 121 = -265 < 0$

LOGO: CONCLUÍMOS QUE COMO A $H(1,2) < 0$,

$C = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(1,2) = -6.1.2 = \boxed{-12}$

LOGO O PONTO (1,2) É DE SELA.

Figura 166: O aluno 29 aplicou o teste da 2ª derivada em pontos indevidos como conseqüência da mediação apoiada no computador na fase 4 de *prova* da *Sequência Fedathi*.

O fato registrado com o **aluno 29**, na *prova* da SF, não se mostrou isolado. Como consequência, podemos garantir que, neste caso, o **aluno 29**, como nos outros casos que descreveremos, aplicou uma estratégia de resolução referendada pelo professor, e este desconhecia as condições e *hipóteses* em que se pode aplicar o teste. Ver na figura 166.

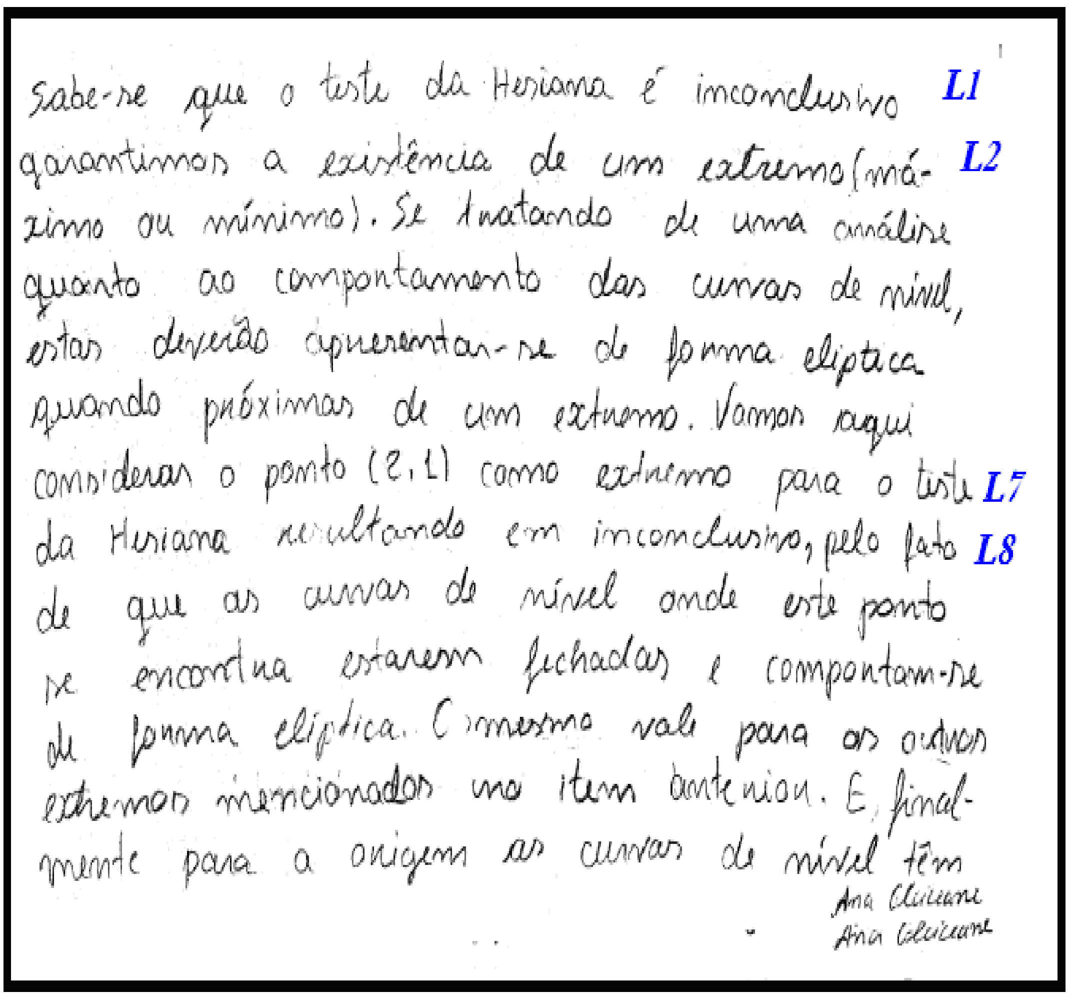
Isto nos conduz a garantir que sua estratégia foi intuitiva, e que o computador, ao proporcionar a *percepção* e *visualização* dos *registros gráficos* em 3D foi um instrumento importante na mediação na fase 4. Note-se que, no ensino restrito ao ambiente lápis/papel, a atividade investigativa do aluno cessa por completo após o *tratamento* dos registros.

Por intermédio de uma intervenção didático-metodológica, entretanto, acompanhamos muitos alunos darem prosseguimento ao seu estudo, como no caso do **aluno 24** que acentuou que

Nos pontos interiores aonde posso empregar o teste da hessiana...aqui...analisando para que eu tenha um mínimo... $(0,0)$ e $(2,1)$ ...por que são interiores..aqui...analisando..para que eu tenha mínimo...fazendo os cálculos....pelas curvas de nível...mínimo era para ser círculo...fechadas...curvas fechadas..aqui está aberto...quando eu analisei os pontos críticos encontrei apenas o $(0,0)$ ...eu só tirei por que vi no gráfico aqui o ponto $(2,1)$ e procurei aplicar também...mas não está batendo...pelas curvas de nível...analisando aqui...diria que é inconclusivo...

Observamos que o **aluno 24**, nesta verbalização, recolheu dados perceptuais a respeito do comportamento das *curvas de nível* para então formular declarações a respeito dos pontos de *máximo* e de *mínimo local* no interior da *superfície*. Assim, suas declarações constituíram *intuições antecipatórias* que registramos na *prova* da SF.

Por fim, anotamos a atividade predominantemente discursiva do **aluno 24**, não peculiar ao que se costuma exigir em tarefas desta natureza pelos livros didáticos de CVV. No referido trecho, destacamos algumas linhas na figura 167.


Sabe-se que o teste da Hessiana é inconclusivo **L1**
garantimos a existência de um extremo (má- **L2**
ximo ou mínimo). Se tratando de uma análise
quanto ao comportamento das curvas de nível,
estas deverão apresentar-se de forma elíptica
quando próximas de um extremo. Vamos aqui
considerar o ponto (2,1) como extremo para o teste **L7**
da Hessiana resultando em inconclusivo, pelo fato **L8**
de que as curvas de nível onde este ponto
se encontra estarem fechadas e comportam-se
de forma elíptica. O mesmo vale para os outros
extremos mencionados no item anterior. E final-
mente para a origem as curvas de nível têm
Ana Cleiciane
Ana Cleiciane

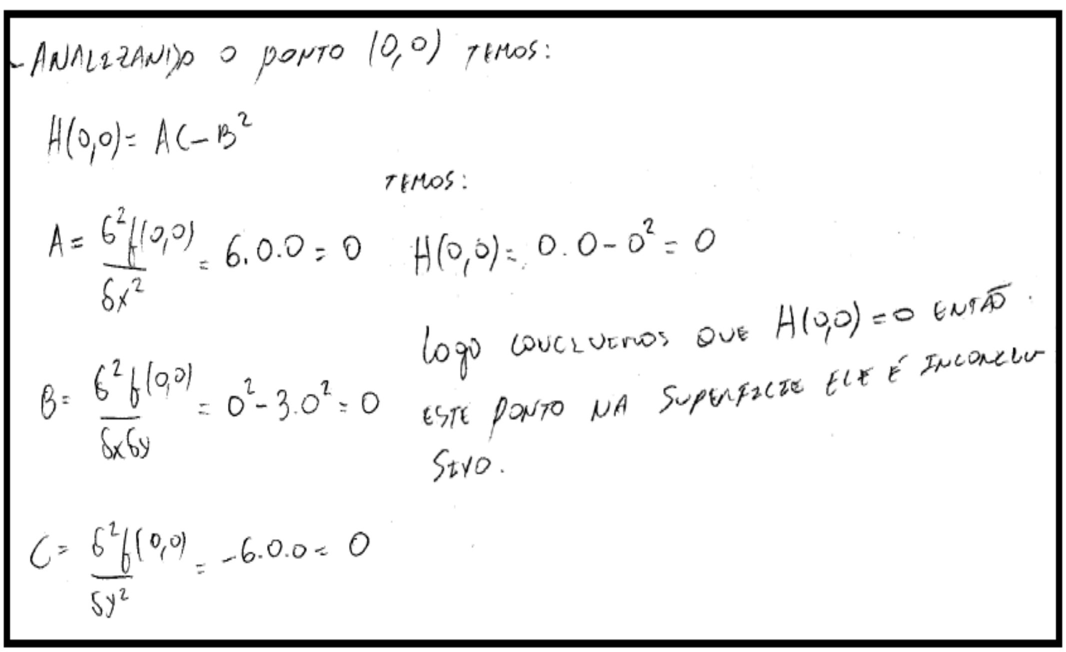
Final 167: Atividade final do aluno 24 na fase 4 de *prova* da SF.

Na linha 1, o **aluno 24** manifestou a incompreensão e a dificuldade em lidar com a noção de *existência*, o que já havia se manifestado na aprendizagem dos outros conteúdos. Ademais, podemos observar que ele adquiriu informações a respeito dos pontos extremos da função da atividade 4, não somente com a aplicação do teorema conhecido como *Teste da Hessiana* ou da 2ª derivada, mas também da visualização das *curvas de nível* da superfície, o que evidenciamos ser precário na análise de livros didáticos.

Na linha 7, o **aluno 24** aplicou o teste no ponto $(2,1)$, fato foi condicionado pela percepção de propriedades e da *visualização* e identificação de elementos sobre a *superfície*. Mais uma vez, na condição em que se aplica, o *tratamento* é restrito ao tipo de representação algébrica, pois se encontra apenas o ponto $(0,0)$, o que mostrou, neste caso como nos outros em que observamos, o mesmo comportamento recorrente, pois a *visualização* dos *registros gráficos* em 3D proporcionou uma atividade de reflexão mais prolongada do solucionador de problemas, que evoluiu até a fase de *prova*.

Registramos a seguinte *intuição conjectural* expressa na setença proposicional elaborada na ultima fase da SF, quando o **aluno 7** declarou que "...teste da Hessiana resultando em inconclusivo, pelo fato de que as curvas de nível onde este ponto se encontra estarem fechadas...".

No próximo trecho, exibimos o *tratamento dos registros* efetuado pelo **aluno 7**, na fase 4 de *prova*. Evidenciamos tal fato na figura 168.


- ANALIZANDO O PONTO (0,0) TEMOS:

$H(0,0) = AC - B^2$

$A = \frac{\delta^2 f(0,0)}{\delta x^2} = 6.0.0 = 0$

TEMOS:

$H(0,0) = 0.0 - 0^2 = 0$

$B = \frac{\delta^2 f(0,0)}{\delta x \delta y} = 0^2 - 3.0^2 = 0$

logo CONCLUIMOS QUE $H(0,0) = 0$ ENTÃO ESTE PONTO NA SUPERFICIE ELE É INCONCLUSIVO.

$C = \frac{\delta^2 f(0,0)}{\delta y^2} = -6.0.0 = 0$

Figura 168: O aluno 7 efetuou o *tratamento* dos *registros algébricos* e concluiu de modo adequado a atividade 4.

Por fim, o **aluno 21** também aplicou o teste da *Hessiana* na origem e no ponto $(2,1)$, como vemos na figura 169. Quando questionado, afirmou que "Acho que o ponto $(2,1)$..acho que não é nada não...mas vamos aplicar...nem dá máximo e nem dá mínimo...geometricamente parece ser ponto de sela.". Observamos que e ação do **aluno 21** foi estimulada com a investigação visual, na fase de *prova* da SF.

Como vemos abaixo, o aluno aplicou de modo indevido o teste no ponto $(2,1)$, comprovando que suas escolhas e estratégias foram intuitivas, na medida em que não recordava ou aplicava de modo formal as condições previstas no teorema do *teste da Hessiana*, como observamos na figura 169.

$H(x,y) = \begin{vmatrix} B & C \\ A & B \end{vmatrix} \Rightarrow H(x,y) = B^2 - AC$, substituindo os valores de A, B e C em $H(x,y) = B^2 - AC$, temos:

$H(x,y) = (3x^2 - 3y^2)^2 - 6xy(-6xy) = \boxed{(3x^2-3y^2)^2 + 36(xy)^2}$

Para os pontos destacados no interior do gráfico, $(0,0)$ e $(2,1)$; faremos o teste:

$H(0,0) = (3\cdot 0^2 - 3\cdot 0^2)^2 + 36(0\cdot 0)^2 \therefore H(0,0) = 0$

$H(2,1) = (3\cdot 4 - 3\cdot 1)^2 + 36(2\cdot 1)^2 > 0$

Sabemos que:

se $A < 0$, $B^2 - AC < 0$ (máximo)

se $A > 0$, $B^2 - AC < 0$ (mínimo)

se $B^2 - AC > 0$ (sela)

se $B^2 - AC = 0$ inconclusivo.

Figura 169: O aluno 21 aplicou de modo indevido o *teste da Hessiana*.

Ao ser questionado sobre o motivo das suas escolhas na resolução da atividade 4, explicou que

> Geometricamente...a origem vai ser um ponto de sela...por que...tanto a função pode crescer como decrescer...depende do referencial...e o ponto $(2,1)$...geometricamente como um ponto de sela...mas analiticamente, pelos cálculos...provei que não é...é um ponto qualquer...quando se aplica o teste da hessiana...logo...não pode ser

> um ponto crítico..mas é um ponto qualquer do gráfico...para ser um ponto critico...não zera o gradiente..é um ponto qualquer do gráfico...

Destacamos neste discurso a seguinte *intuição conjectural* na fase 4 de *prova*: "..geometricamente como um ponto de sela...mas analiticamente, pelos cálculos...provei que não é...é um ponto qualquer...quando se aplica o teste da hessiana...logo...". Isto comprovou que o aluno entrou em uma situação conflitiva ao comparar e analisar os dados inferidos na *maturação*, com os dados obtidos, somente após o *tratamento dos registros algébricos*.

Assim, evidenciamos que, com o uso do instrumento computacional, tivemos a oportunidade de mediar e conduzir os estudantes a desenvolver uma análise dos *registros gráficos* em 3D, o que influenciou suas escolhas e conclusões. Por fim, ao analisar o comportamento na borda da superfície da atividade 4 (p. 225-226), esclareceu

> O ponto inconclusivo...onde as assíntotas se cruzam..mas em nenhum outro ponto...em nenhum outro ponto...na origem (0,0) é inconclusivo...geometricamente..é sela...no "olhômetro" imaginamos que é sela...depois pelas contas a gente vê que...a gente vê que é inconclusivo....

Na figura 170, trazemos ainda suas argumentações finais na fase de *prova*.

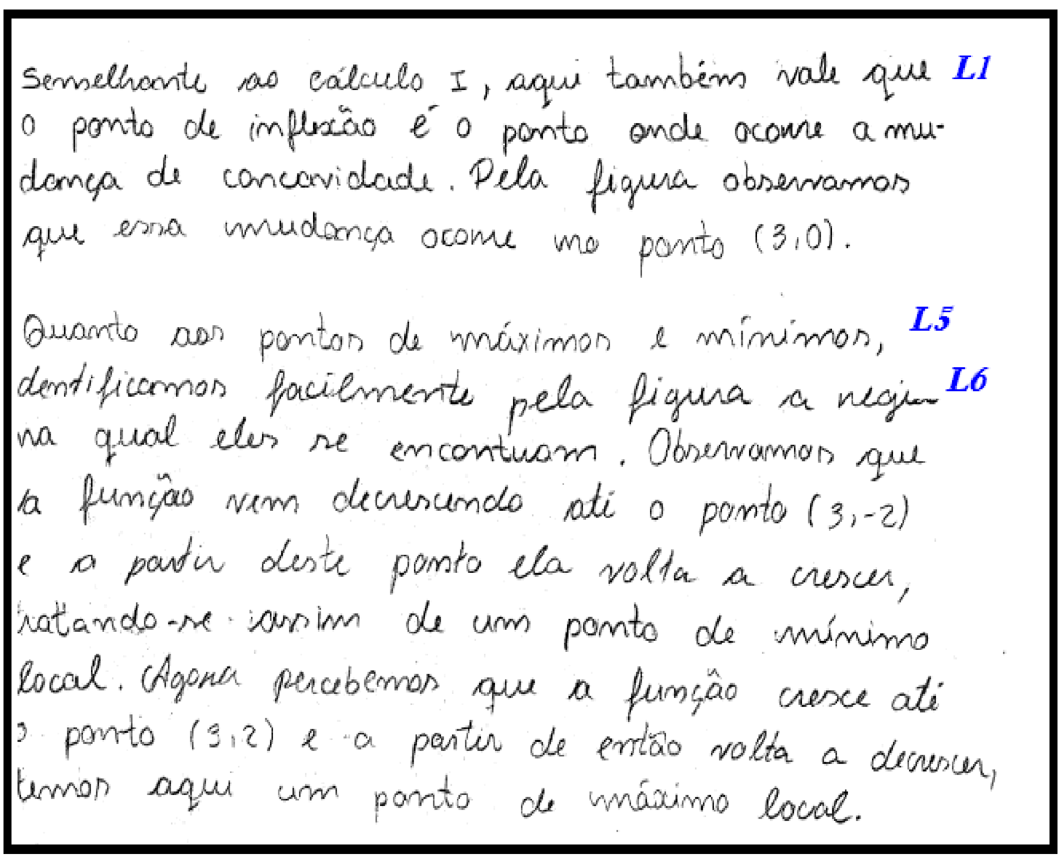


Figura 170: O aluno 21 manifestou uma atividade argumentativa na fase de *prova* da SF.

Por ultimo, evoquemos que no capítulo 1, colocamos em evidência as dificuldades e mudanças envolvidas na transição do CUV para o CVV. Sublinhamos que a atividade 6, tarefa 1, envolveu uma análise do domínio das argumentações formais, compreendendo a investigação da *diferenciabilidade* de uma função no CVV.

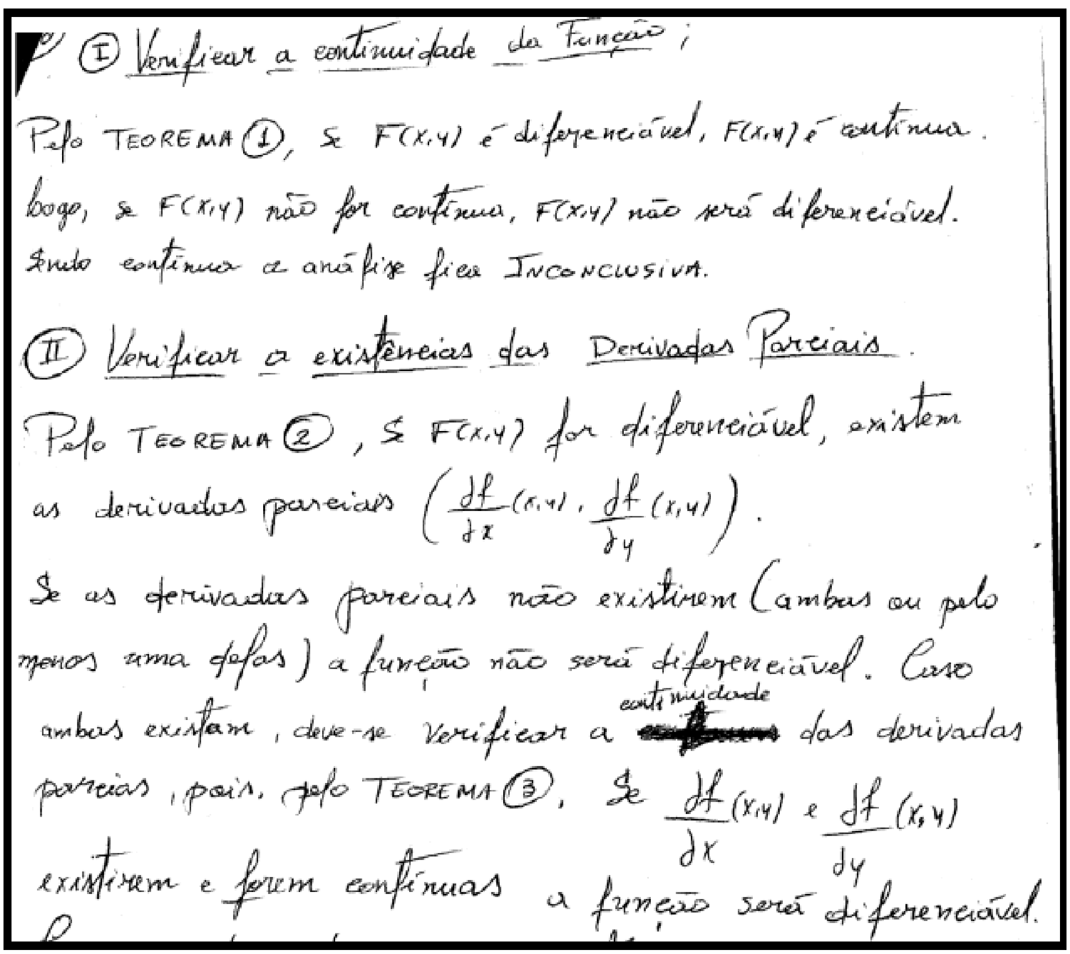
Reparemos, entretanto, as diferenças entre as seguintes afirmações:

(i) se a função $f(x)$ é *derivável*, logo será contínua;

(ii) se a função $f(x,y)$ é *derivável*, logo será contínua e

(iii) se a função $f(x,y)$ é *diferenciável*, logo será contínua.

Indicamos que as sentenças (i) e (iii) são verdadeiras e correspondem ao mesmo teorema, respeitando-se o contexto do CUV e do CVV. Por outro lado, a afirmação (ii) pode ser falsa no contexto do CVV. Assim, indicamos o aumento de complexidade formal envolvendo a teoria do CVV, e exemplos como este podem influenciar a produção de *intuições afirmativas* indesejadas. Passemos agora à discussão dos dados fornecidos pelo **aluno 29** na resolução da atividade 6, tarefa 1. Vejamos a figura 171.


I Verificar a continuidade da Função;

Pelo TEOREMA 1, se $F(x,y)$ é diferenciável, $F(x,y)$ é contínua.

Logo, se $F(x,y)$ não for contínua, $F(x,y)$ não será diferenciável.

Sendo contínua a análise fica INCONCLUSIVA.

II Verificar a existências das Derivadas Parciais.

Pelo TEOREMA 2, se $F(x,y)$ for diferenciável, existem as derivadas parciais $\left(\frac{df}{\partial x}(x,y), \frac{df}{\partial y}(x,y)\right)$.

Se as derivadas parciais não existirem (ambas ou pelo menos uma delas) a função não será diferenciável. Caso ambas existam, deve-se verificar a continuidade das derivadas parciais, pois, pelo TEOREMA 3, se $\frac{df}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{df}{\partial y}(x,y)$ existirem e forem contínuas a função será diferenciável.

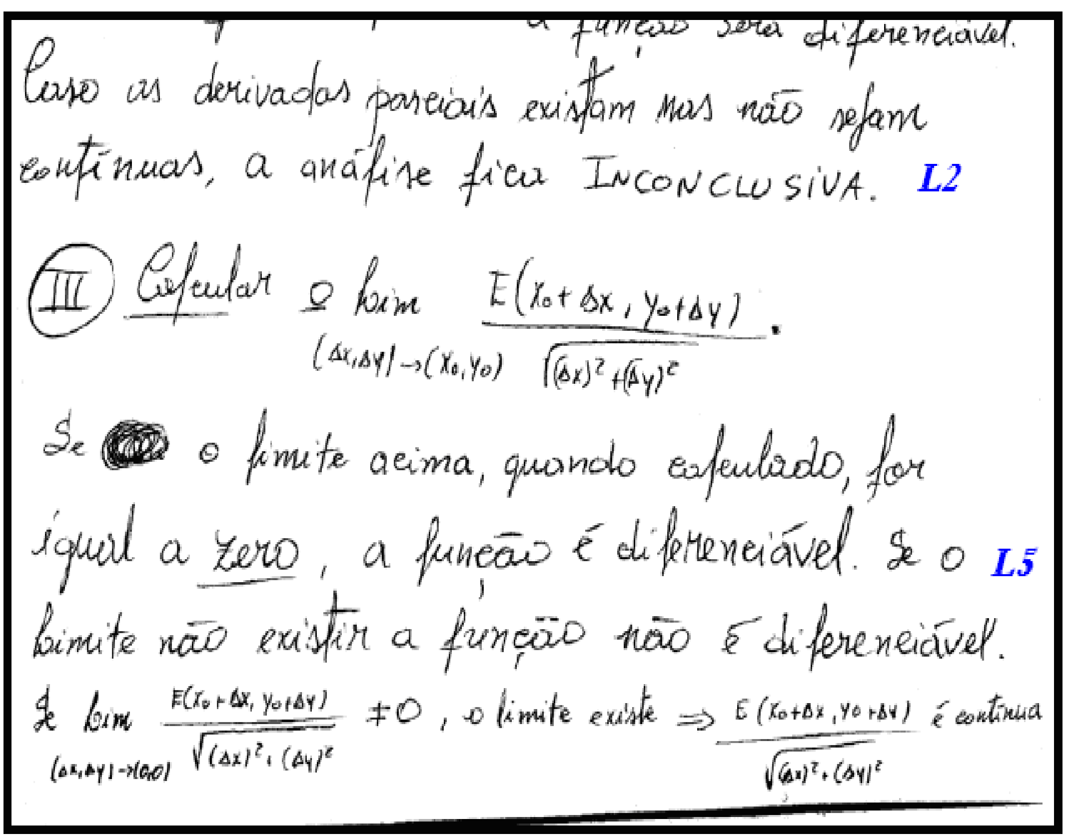
Figura 171: Argumentação desenvolvida pelo aluno 29 na atividade 6.

Na figura 171, verificamos o emprego adequado da declaração (iii). Observamos que o **aluno 29** manifestou maior habilidade na formulação de sentenças proposicionais envolvendo a *contra-positiva* e a *negação* de determinados teoremas, como verificamos acima.

Na linha 2, contudo, afirmou que "Caso as derivadas parciais existam mas não sejam contínuas, a análise fica inconclusiva...". Tal declaração não é confirmada por nenhum dos teoremas estudados e para nós constituiu uma *intuição conjectural* que faz referência a uma classe de objetos que podem gozar da propriedade investigada.

Foi interessante registrar o resto de suas conclusões, ao sublinhar na linha que "se o limite não existir a função não é diferenciavel. Se $Lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{E(x_0+\Delta x, x_0+\Delta x)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \neq 0$, o limite exite e $\dfrac{E(x_0+\Delta x, x_0+\Delta x)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ é contínua..."

Destacamos mais uma vez uma declaração que ele admitiu não saber justificar formalmente, ou seja, uma *intuição conjectural* relativa a uma classe de objetos que podem gozar da propriedade conjecturada pelo **aluno 29**, como destacamos na figura 172.


a função será diferenciável.

Caso as derivadas parciais existam mas não sejam contínuas, a análise fica INCONCLUSIVA. L2

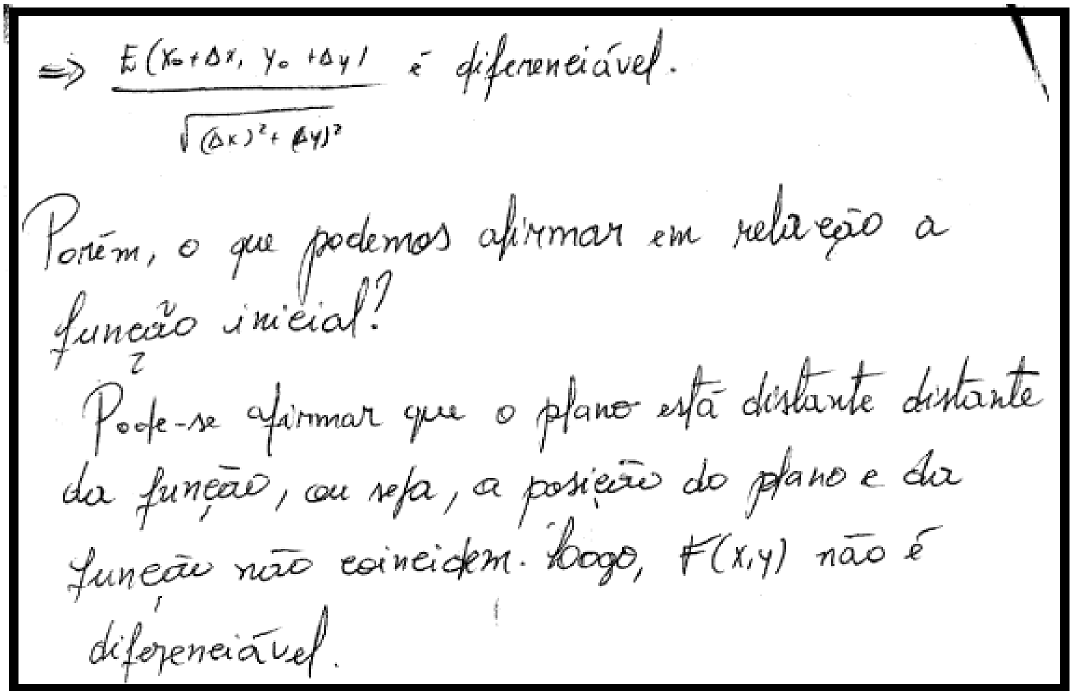
(III) Calcular o $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$.

Se o limite acima, quando calculado, for igual a zero, a função é diferenciável. Se o limite não existir a função não é diferenciável. L5

Se $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \neq 0$, o limite existe $\Rightarrow \dfrac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ é contínua

Figura 172: O aluno 29 manifestou uma *intuição conjectural* relacionada com uma classe de objetos.

Por fim, o **aluno 29** (figura 173) forneceu a interpretação geométrica para a noção de *diferenciabilidade*, quando escreveu o trecho que exibimos na sequência. Destacamos sua interpretação intuitiva, baseada na geometria dos objetos e que foi estimulada nele e no restante dos alunos ao decorrer de todas as fases da *Sequência Fedathi*.

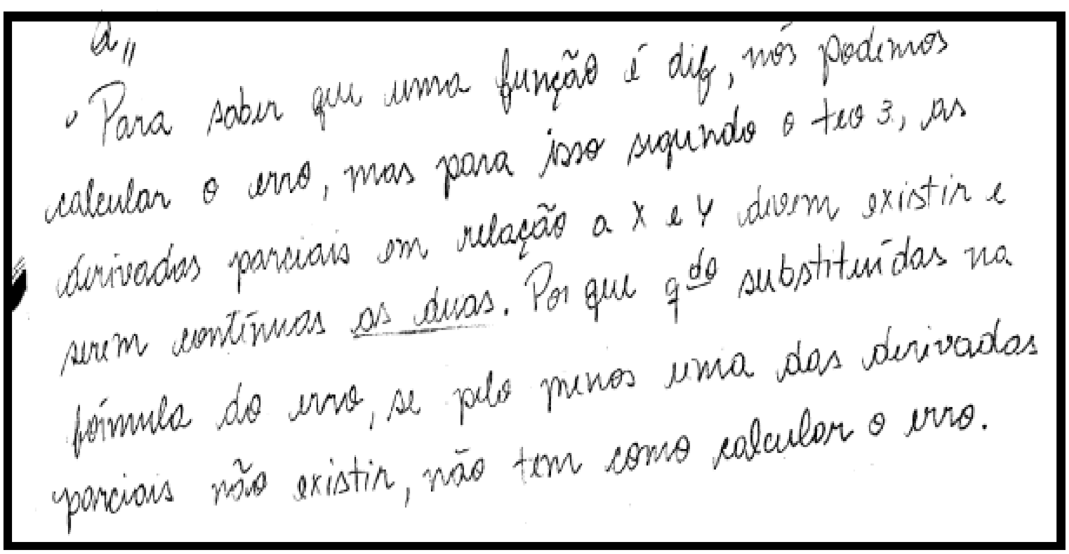

$\Rightarrow \dfrac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ é diferenciável.

Porém, o que podemos afirmar em relação a função inicial?

Pode-se afirmar que o plano está distante distante da função, ou seja, a posição do plano e da função não coincidem. Logo, $F(x,y)$ não é diferenciável.

Figura 173: O aluno 29 manifestou uma interpretação intuitiva da noção de diferenciabilidade.

Com relação, ainda, à atividade 6, tarefa 1, exibimos o trecho produzido, com o emprego predominante de registros em *língua natural*. Reparemos a figura 174.

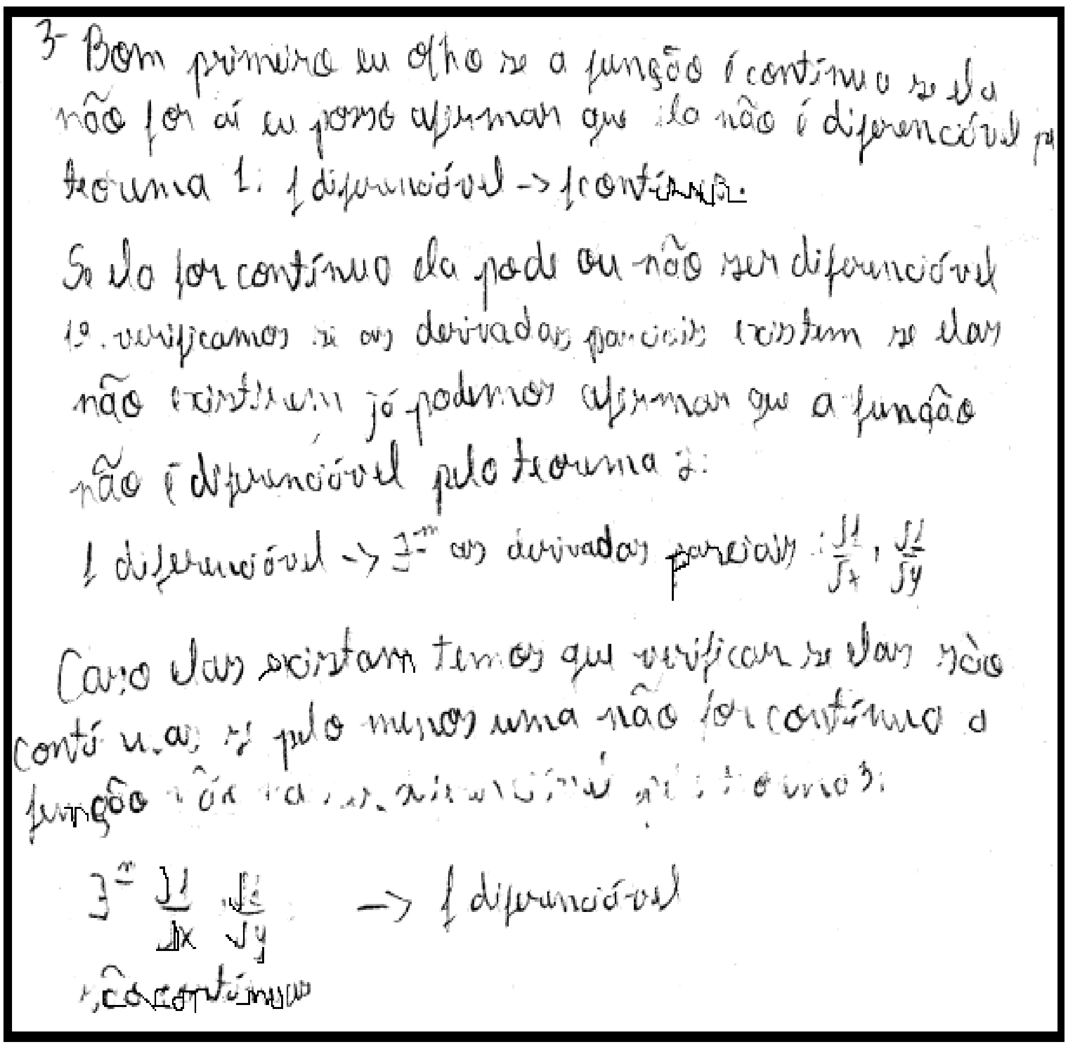

a)

Para saber que uma função é dif, nós podemos calcular o erro, mas para isso segundo o teo 3, as derivadas parciais em relação a x e y devem existir e serem contínuas as duas. Por que q^do substituídas na fórmula do erro, se pelo menos uma das derivadas parciais não existir, não tem como calcular o erro.

Figura 174: O aluno 24 descreveu o processo de investigação da tarefa 1, na atividade 6, com o uso apenas de registros na *língua natural*.

Observemos que o **aluno 24** (figura 174) indicou a necessidade da aplicação dos teoremas estudados ao longo da *Sequência Fedathi*. Por outro lado, o **aluno 24** indicou de modo prioritário a verificação da *definição formal* por meio do erro da aproximação local da função pelo plano tangente.

Destacamos a expressão produzida pelo **aluno 7**, quando declarou que: "Bom, primeiro eu olho se a função é contínua...". Destacamos que, quando da aplicação da *Sequência Fedathi*, estimulamos a identificação perceptiva e visual de todas as propriedades estudadas ao decorrer do curso, descrevemos geometricamente o processo de construção de todas as *definições formais* passiveis de interpretação no $\mathbb{R}^3$ e fornecemos o significado geométrico de *registros algébricos* importantes do CVV. Assim, ao declarar a expressão acima, o aluno 7 indicou um hábito, estimulado ao longo da disciplina, de "olhar", "observar", "identificar" os objetos e propriedades desejadas.


3- Bom primeiro eu olho se a função é contínua se ela não for aí eu posso afirmar que ela não é diferenciável pelo teorema 1: f diferenciável -> f contínua.

Se ela for contínua ela pode ou não ser diferenciável

1º. verificamos se as derivadas parciais existem se elas não existirem já podemos afirmar que a função não é diferenciável pelo teorema 2:

f diferenciável -> $\exists$ as derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

Caso elas existam temos que verificar se elas são contínuas se pelo menos uma não for contínua a função não será diferenciável pelo teorema 3:

$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}$ -> f diferenciável

e contínuas

Figura 175: O aluno 7 descreveu o processo investigativo na atividade 6, tarefa 1.

Por fim, na resolução da atividade 6, tarefa 1, o **aluno 21**, descreveu apenas com o emprego de registros em língua natural todas as possibilidades para o processo de investigação da *diferenciabilidade* de uma função no CVV. Observamos que ele indicou todos os teoremas formais necessários e, por fim, acentuou a necessidade da verificação da *definição formal*.

Como semelhante ao que ocorreu com os demais estudantes, entretanto, o **aluno 21** manifestou (figura 176) dificuldades em descrever o comportamento da função na condição em que o limite do erro não existe.

5) Para sabermos se uma função é diferenciável, temos que primeiro saber
se ela está definida no ponto se ela não estiver definida ela não será diferen-
ciável, mas se for, temos de avaliar a continuidade da função, caso ela não
seja contínua ela não será diferenciável, se ela for contínua temos de
observar se as derivadas parciais existem, caso não exista ela não será diferen-
ciável, caso existam e sejam contínuas pelo corolário que diz que se
as derivadas parciais existem e são contínuas a função é diferenciável, pelo
contrário temos de verificar se o limite do erro da função é igual a zero, caso
seja diferente de zero a função não é diferenciável se for pelo teorema que diz,
que se a função é diferenciável o limite do erro dessa função é igual a zero.

Figura 176: O aluno 21 descreveu apenas com o uso de registros em *língua natural* a tarefa 1 da atividade 6.

Para concluir esta seção, sublinhamos a ideia de que a importância da atividade 6, tarefa 1, colocou em evidência diferenças conceituais importantes entre o CUV e o CVV. Indicamos no capítulo 2, por exemplo, a mudança de *registro algébricos* no caso do CUV e do CVV.

Destacamos, entretanto, que a interpretação geométrica dos limites abaixo:

$$\text{(a)}\ Lim_{\Delta x \to} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot \Delta x}{\Delta x}=0$$

$$\text{(b)}\ Lim_{\|(\Delta x,\Delta y)\| \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot \Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot \Delta y}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}=0$$

A ênfase dada ao caráter geométrico da noção de *diferenciabilidade* e a compreensão com base na *percepção* e *visualização* dos *registros gráficos* em 3D foi essencial para se evitar o *tratament*o algorítmico do conceito.

Registramos ainda a dificuldade em lidar e compreender as demonstrações formais envolvidas dos teoremas necessários no processo investigativo da atividade 6, tarefa 1, sobretudo o surgimento de condições necessárias e não suficientes.

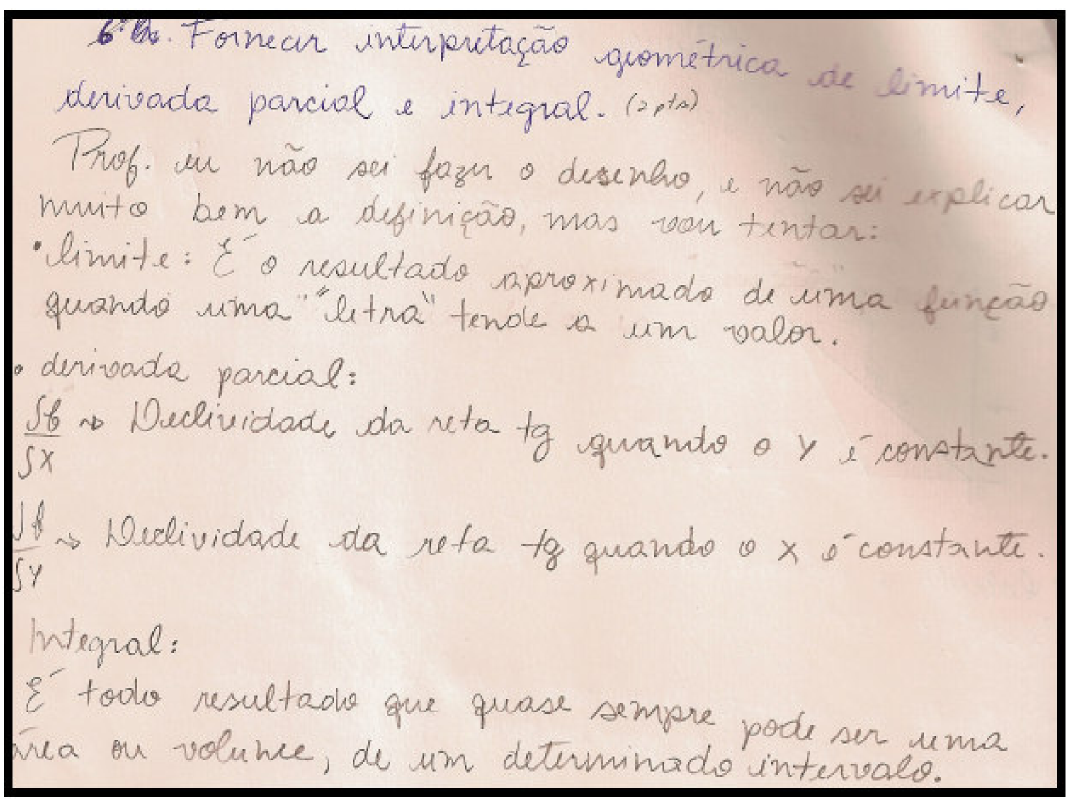
Colocamos em evidência que os elementos observados nas figuras 173, 174, 175 e176, registram atividades e habilidades que evoluíram nos sujeitos participantes do estudo, ao decorrer da disciplina Cálculo III e, que, tais habilidades não são estimuladas pelos livros didáticos que analisamos na seção anterior.

Na próxima seção, evidenciaremos as concepções e as maneiras de interpretar-significar os elementos vinculados ao que chamamos de *transição interna* do CUV para o CVV. Recordamos que os elementos que receberam nossa atenção dizem respeito ao modo de interpretar, significar, acreditar e elaborar os significados dos conceitos matemáticos do CVV, de modo comparativo aos conhecimentos adquiridos no CUV.

5.5 Relatos das entrevistas individuais e análise de resultados com respeito à *transição interna* do CUV para o CVV.

Nesta seção, discutiremos os dados pertinentes às atividades 6 (tarefa 2) e 7. Sublinhamos que seu conteúdo principal não envolveu a análise de habilidades matemáticas específicas, que devem ser adquiridas e promovidas ao decorrer da *Sequência Fedathi* e, sim, tais atividades dizem respeito ao *valor epistêmico* (DUVAL, 1991) manifestado nas explicações, argumentação e interpretação pessoal fornecidas pelos **alunos 29, 24, 7** e **21**.

Assim, no que diz respeito à atividade 6 (ver p. 228), questionamos os estudantes a respeito de sua interpretação geométrica dos conceitos de *limite*, *derivada* e *integral*. Recordemos de que, na análise de livros, indicamos as deficiências da exploração de *registros gráficos* no contexto do CUV, sobretudo para casos particulares complicados. Assim, apresentamos os dados produzidos pelo **aluno 29**, ao indicar que não consegue fazer os desenhos ou figuras relativas a tais conceitos. Observamos isto na figura 177 quando ele acentua sua dificuldade pessoal.


6ª a. Fornecer interpretação geométrica de limite, derivada parcial e integral. (2 pts)

Prof. eu não sei fazer o desenho, e não sei explicar muito bem a definição, mas vou tentar:

• limite: É o resultado aproximado de uma função quando uma "letra" tende a um valor.

• derivada parcial:

$\frac{\delta f}{\delta x}$ → Declividade da reta tg quando o y é constante.

$\frac{\delta f}{\delta y}$ → Declividade da reta tg quando o x é constante.

Integral:

É todo resultado que quase sempre pode ser uma área ou volume, de um determinado intervalo.

Figura 177: O aluno 29 declarou a dificuldade pessoal em descrever por meio de desenhos ou figuras os conceitos do Cálculo.

No que diz respeito à atividade 6, o **aluno 24** não conseguiu fornecer uma explicação pertinente ao CVV. Notamos em sua argumentação que ele envolveu apenas o *registro em língua natural* e a explicação do seguinte *registro algébrico* $Lim_{x \to a} f(x) = L$. Reparemos a inexistência de algum desenho ou figura explicativa dos conceitos requeridos que requer uma descrição em 3D.

Indicamos ainda que o processo de aproximação de limite é explicado apenas com o emprego das noções do CUV (aproximação pela esquerda e aproximação pela direita), o que evidenciou uma significação restrita e/ou inexistente dos conceitos do CVV. Observemos isso na figura 178.

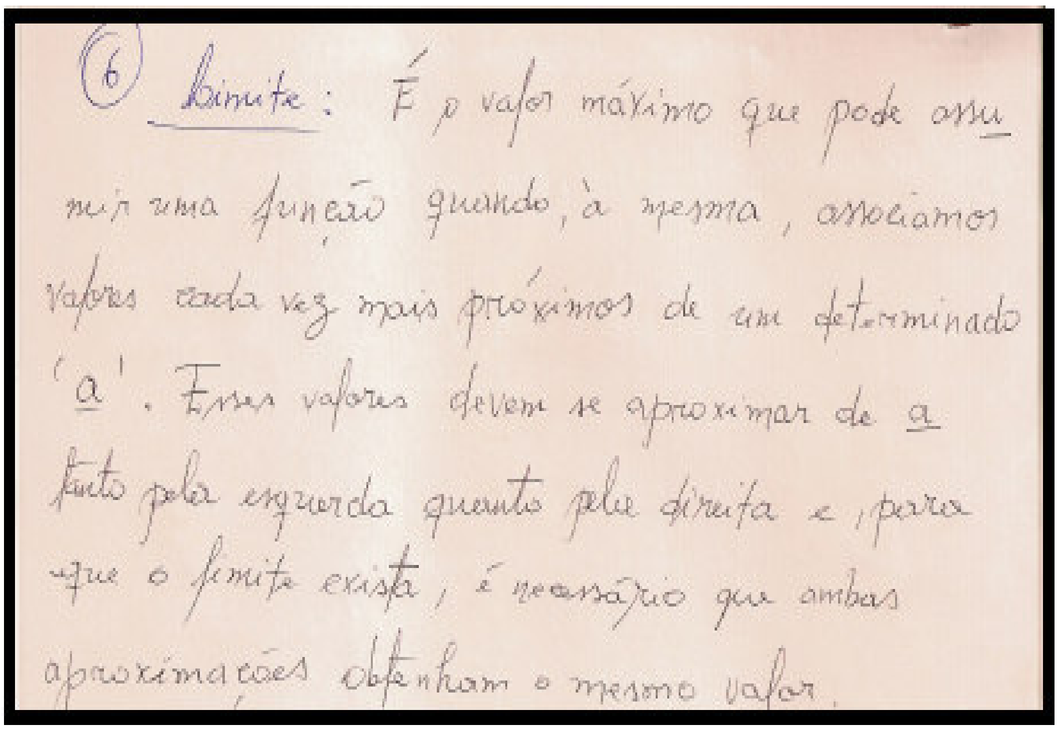

(6) Limite: É o valor máximo que pode assumir uma função quando, à mesma, associamos valores cada vez mais próximos de um determinado 'a'. Esses valores devem se aproximar de a tanto pela esquerda quanto pela direita e, para que o limite exista, é necessário que ambas aproximações obtenham o mesmo valor.

Figura 178: O aluno 24 descreveu a noção de limite com interpretações restritas ao CUV.

Mais adiante, o **aluno 24** forneceu uma interpretação geométrica relativa ao CUV para explicar a noção de *derivada parcial*. Notemos uma interpretação restrita da *derivada parcial*. Indicamos que o **aluno 24** não forneceu nenhum desenho ou figura explicativa do significado geométrico relacionado com esta noção. Por fim, na tentativa de explicar o conceito de *derivada parcial* acrescentou a noção de *diferenciabilidade* de uma função que, no caso do CVV, se caracteriza como uma noção mais forte e distinta da ideia de *derivabilidade*, como indicado imediatamente.

O **aluno 24** iniciou sua explicação com arrimo em uma interpretação inerente ao CUV, o que demonstrou a necessidade do emprego dos conhecimentos adquiridos.

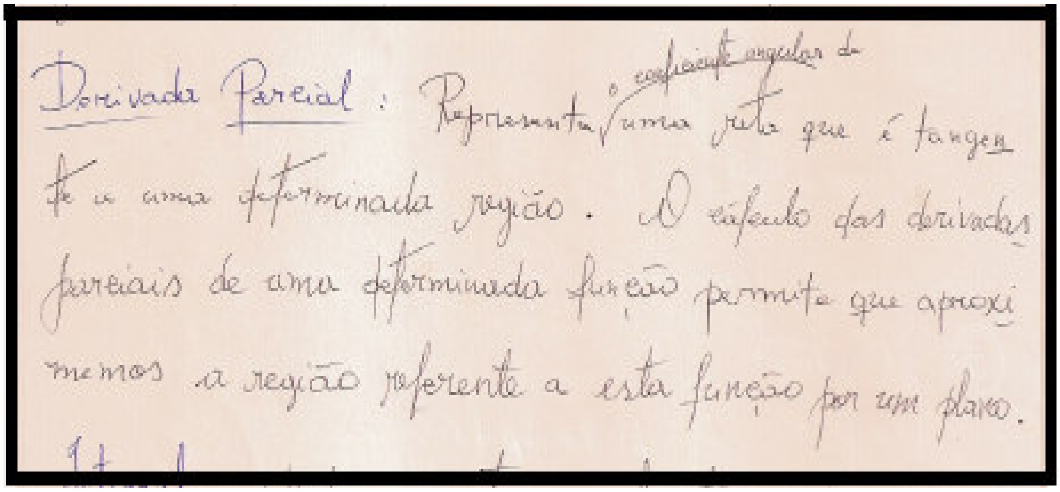


Figura 179: O aluno 24 confundiu as noções de *derivada parcial* com *diferenciabilidade*.

No próximo trecho, o **aluno 24** (figura 179) conseguiu fornecer um desenho explicativo para a noção de *integral*. Registramos ao lado sua dificuldade em descrever geometricamente a noção de *integral* para o caso do CVV.

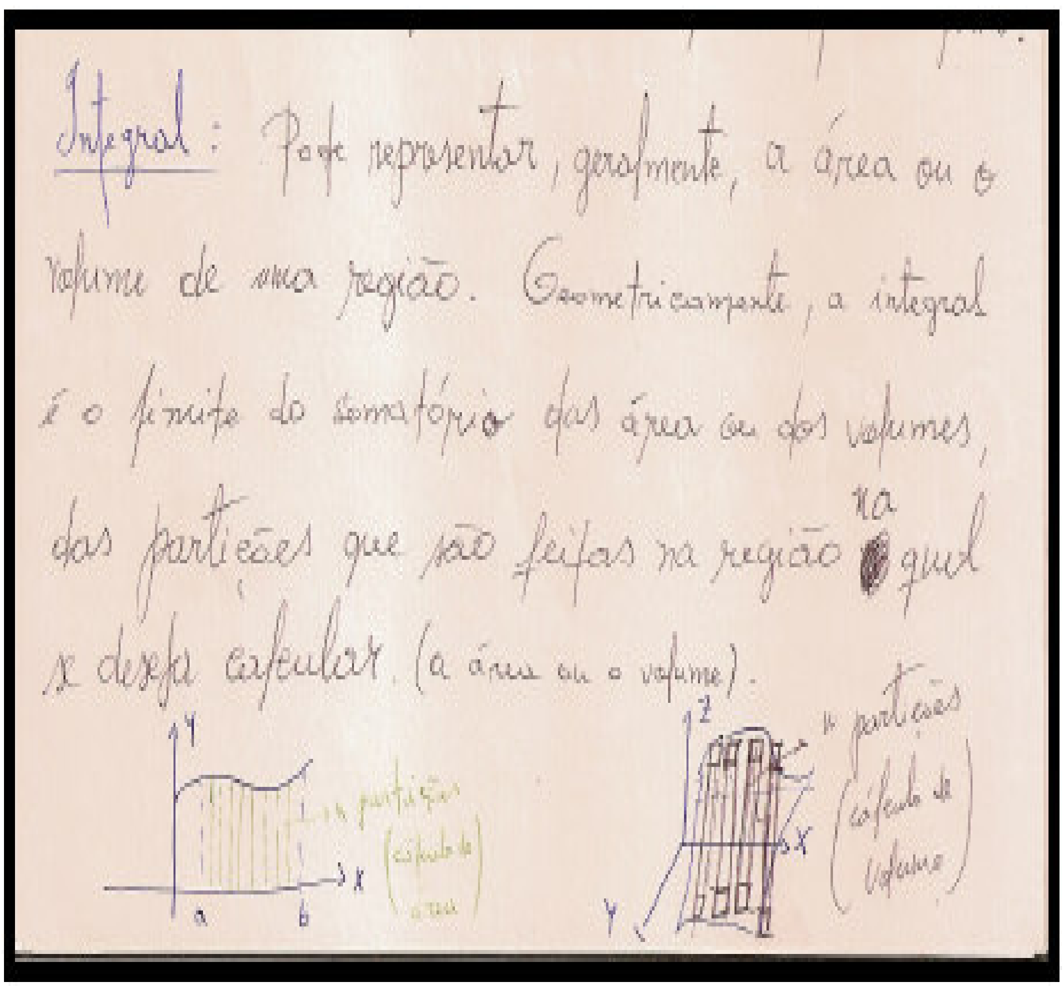
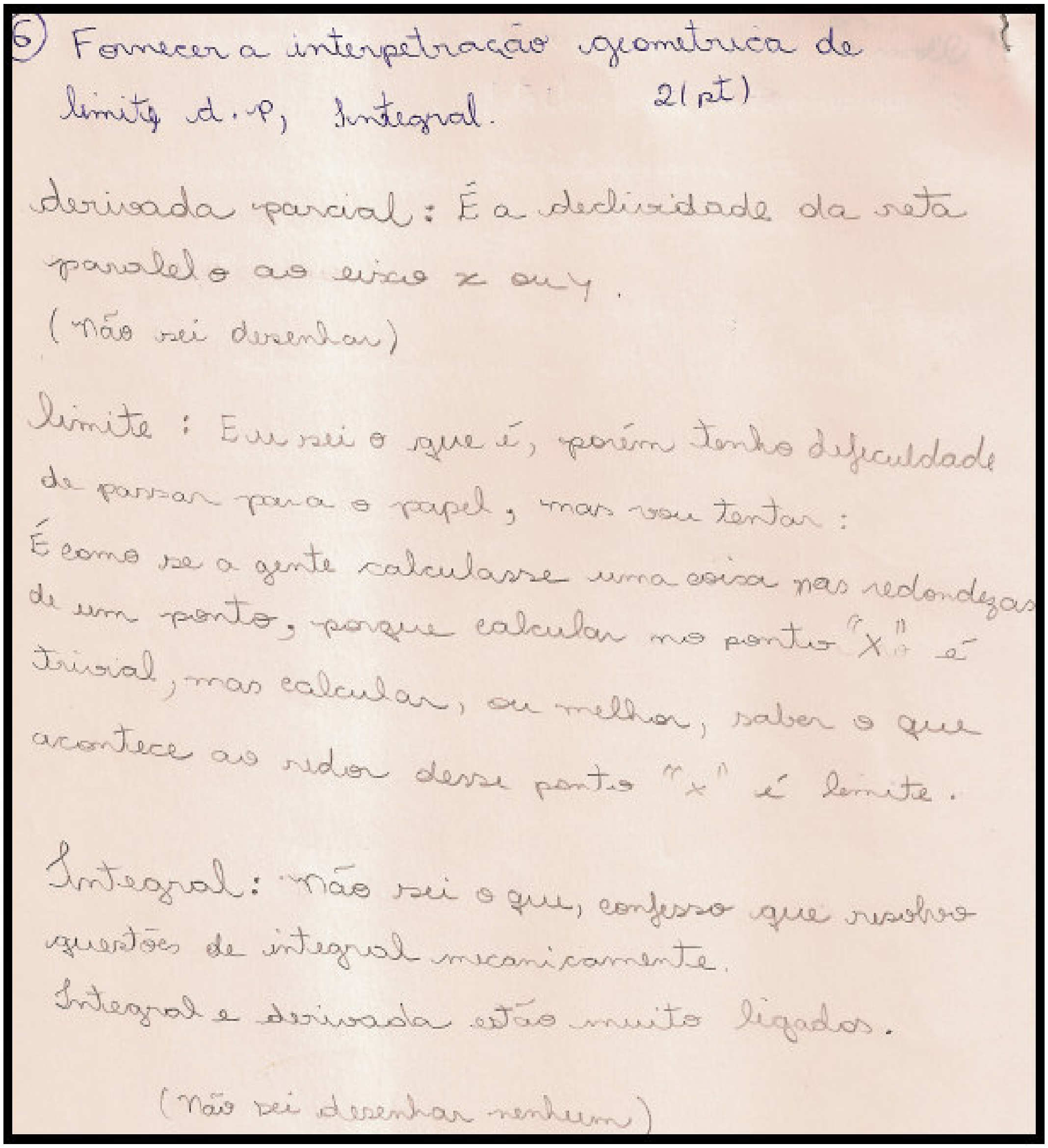


Figura 180: O aluno 24 descreveu as noções de *integral múltipla* no contexto do CUV e do CVV.

De modo satisfatório, o **aluno 24** conseguiu relacionar a noção de integral múltipla com a noção de volume. Por outro lado, na figura 181, divisamos o fato de que o **aluno 7** admitiu sua incapacidade de interpretação dos conceitos por meio de um desenho ou figura.



6) Fornecer a interpetração geometrica de limite, d.p, Integral. 2(pt)

derivada parcial: É a declividade da reta paralelo ao eixo x ou y.
(Não sei desenhar)

limite: Eu sei o que é, porém tenho dificuldade de passar para o papel, mas vou tentar:
É como se a gente calculasse uma coisa nas redondezas de um ponto, porque calcular no ponto "x" é trivial, mas calcular, ou melhor, saber o que acontece ao redor desse ponto "x" é limite.

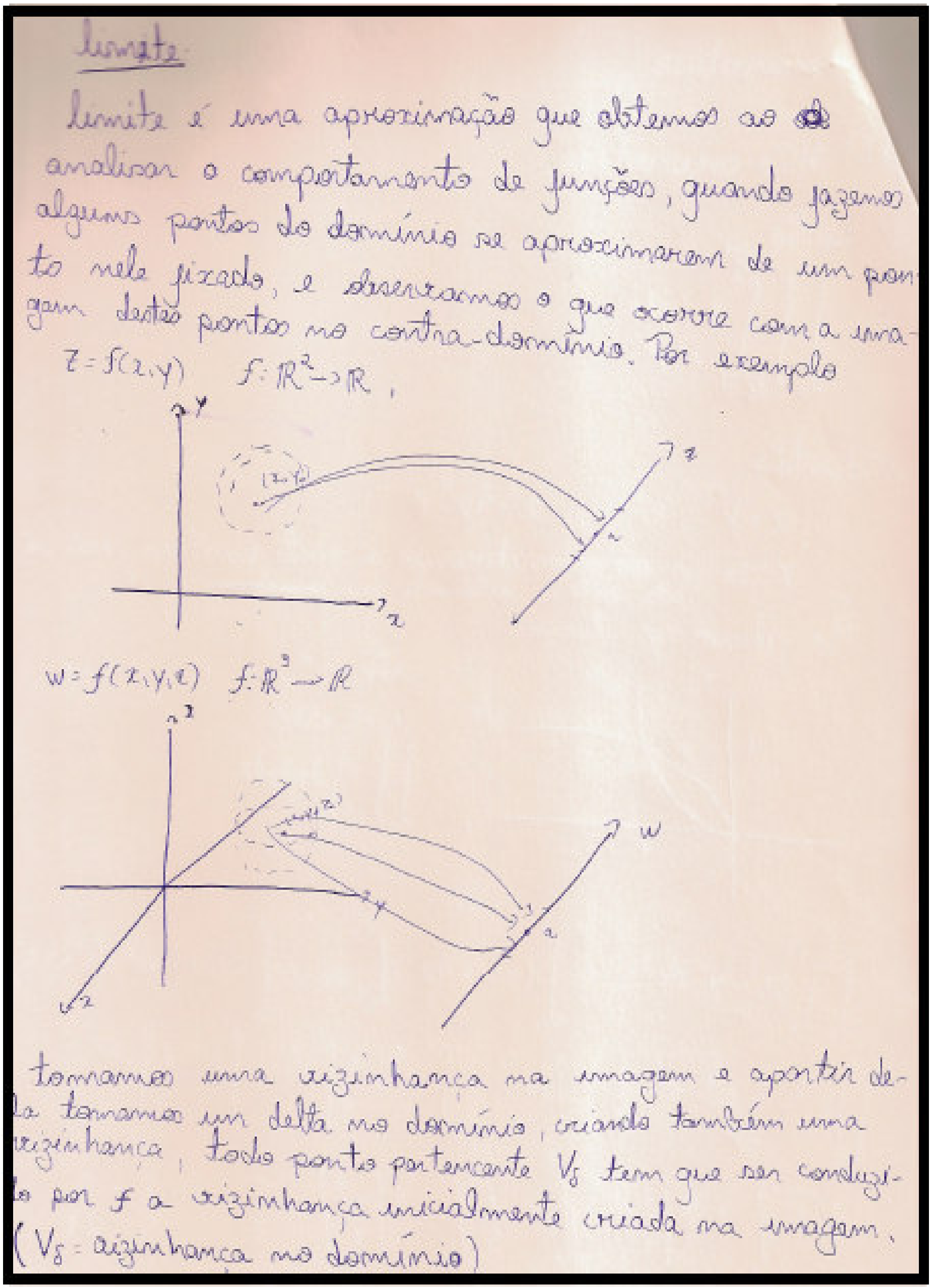
Integral: não sei o que, confesso que resolvo questões de integral mecanicamente.
Integral e derivada estão muito ligados.

(Não sei desenhar nenhum)

Figura 181: O aluno 7 admitiu a incapacidade de descrever um desenho ou figura explicativa das noções principais do Cálculo.

Indicamos nas análises de livros as mudanças do CUV e do CVV. Um dos aspectos que se sobressaíram, diz respeito às noções topológicas. Por exemplo, na figura o **aluno 21** (figura 182) buscou descrever a noção de limite de uma função do tipo $z = f(x, y)$ e $w = f(x, y, z)$. Aqui temos um dos raros casos em que o sujeito conseguiu descrever tal forma elaborada de interpretação geométrica do conceito.

Vale observar que, ao longo das fases da *Sequência Fedathi* damos ênfase às funções em duas variáveis reais que apresentam propriedades perceptivas acessíveis. Basta indicar que o gráfico da primeira se encontra no $\mathbb{R}^3$, enquanto o gráfico da segunda função encontra-se no $\mathbb{R}^4$ e, portanto, não acessível à *visualização*.


limite:

limite é uma aproximação que obtemos ao analisar o comportamento de funções, quando fazemos alguns pontos do domínio se aproximarem de um ponto nele fixado, e observamos o que ocorre com a imagem destes pontos no contra-domínio. Por exemplo

$z = f(x,y)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$w = f(x,y,z)$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

tomamos uma vizinhança na imagem e apartir dela tomamos um delta no domínio, criando também uma vizinhança, todo ponto pertencente V_δ tem que ser conduzido por f a vizinhança inicialmente criada na imagem. (V_δ = vizinhança no domínio)

Figura 182: O aluno 21 foi exceção, ao descrever as propriedades topológicas envolvidas na noção de limite no CVV.

Na mesma atividade, o **aluno 21** (figura 183), ao ser questionado a respeito das dificuldades da disciplina, respondeu o que exibimos na figura abaixo.

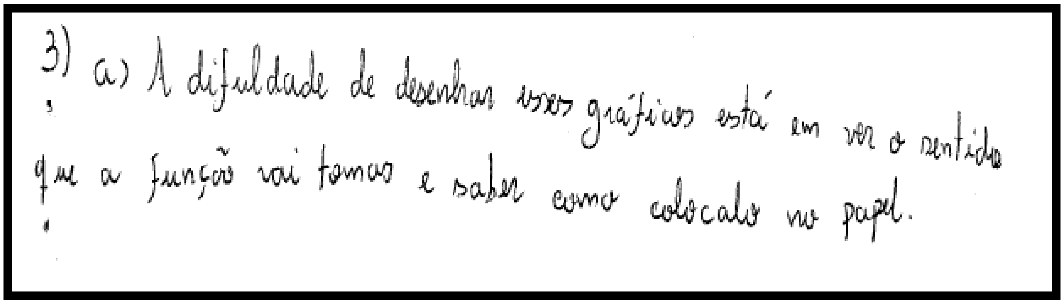


Figura 183: O aluno 21 admitiu a dificuldade em desenhar gráficos e figuras que explicam ou significam o comportamento da função.

Depoimentos desta natureza reforçam nossa argumentação relativa à ênfase na exploração de *registros gráficos* em 3D exequíveis apenas com o uso do computador. Sem tal recurso, as *imagens mentais* dos estudantes relativas ao CVV não evoluem, como é o caso do **aluno 8** (figura 184).

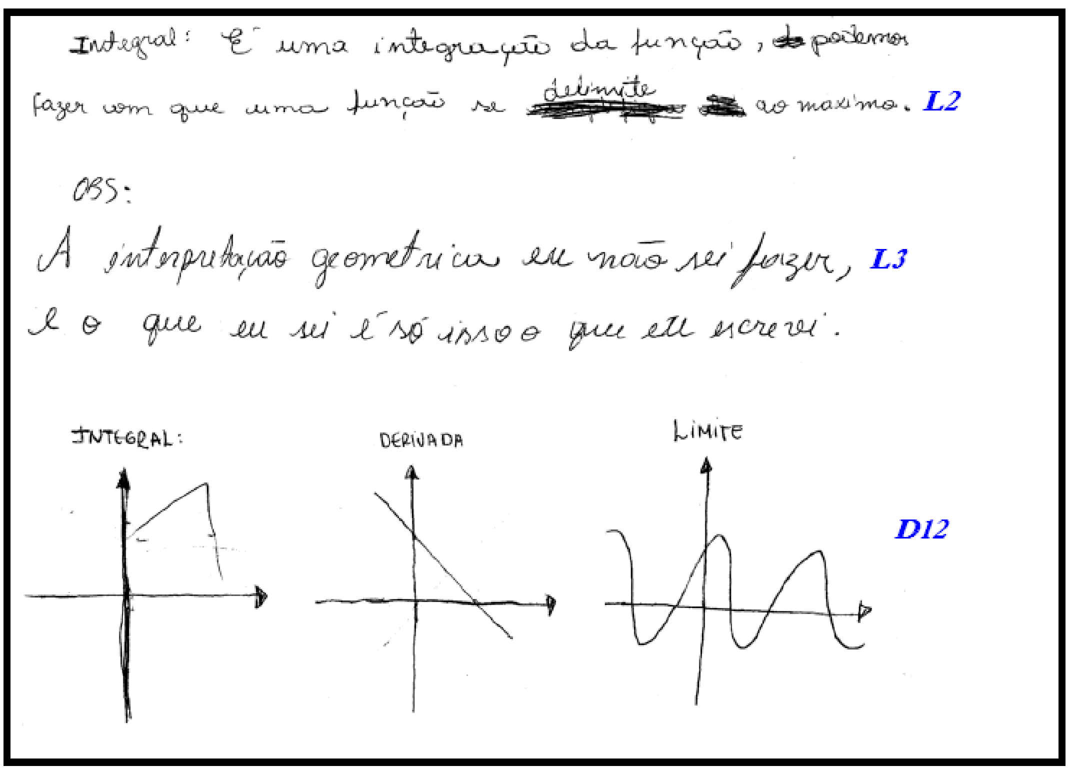


Figura 184: O aluno 8 descreveu o comportamento geométrico dos conceitos apenas do CUV.

Na figura 185, mostramos a interpretação geométrica do **aluno 15** com respeito aos principais conceitos do Cálculo. Mais uma vez, os registros que ele conseguiu produzir são pertencentes ao CUV, o que indicou *imagens mentais* restritas ou ausentes do CVV. Dados como este comprovam a *Hipótese de Trabalho* Hip_3 (Cap. 2, p. 149).

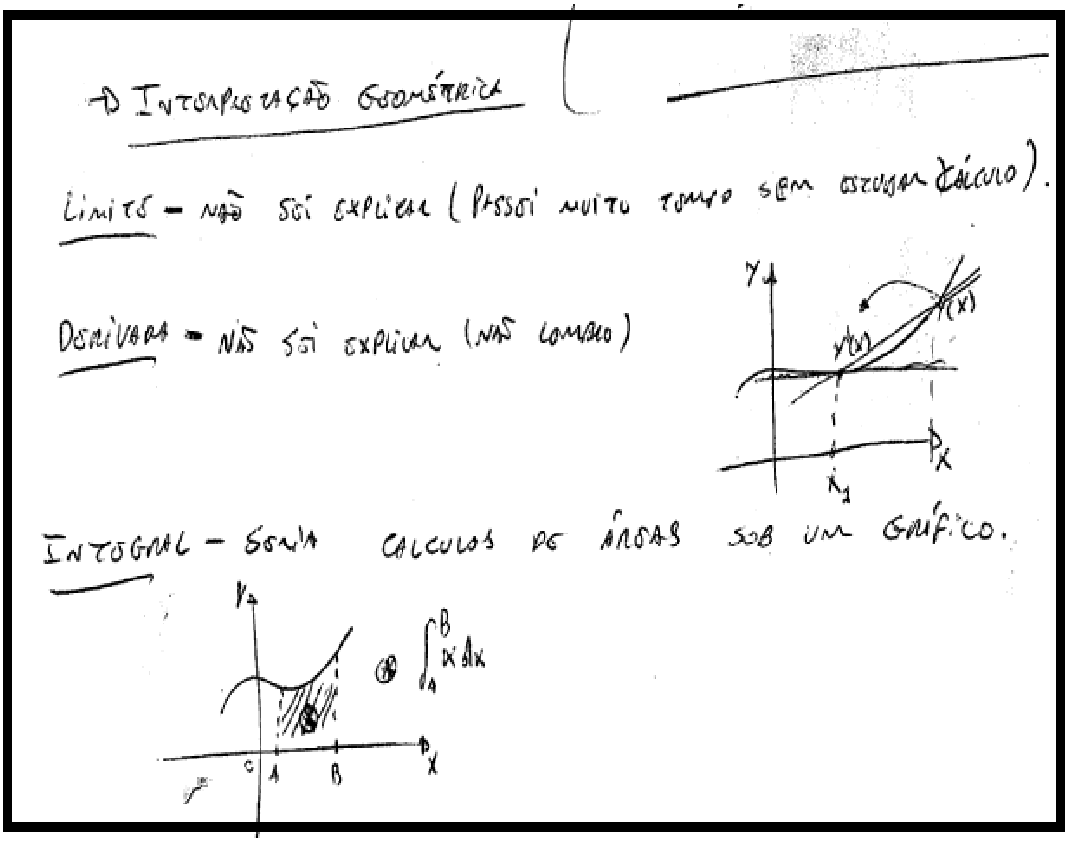


Figura 185: Desenhos e figuras produzidas pelo aluno 15, restritos ao CUV.

No decorrer do estudo, apontamos as dificuldades de se executar a construção de alguns *registros gráficos* em 3D, mesmo com o auxílio computacional. Por outro lado, sem o apoio computacional, não se consegue a produção destes registros e, consequentmente, não se logra explorar no ensino a *percepção* e a *visualização* dos objetos conceituais do CUV e do CVV.

Reparamos que tais *habilidades cognitivas* foram sistematicamente exploradas, sobretudo na *tomada de posição*, na *maturação* e na *prova*. Isso não se mostrou, porém, suficiente, pois constatamos que muitos alunos permanecem com *concepções* restritas ao CUV. É o caso do **aluno 17** (figura 186), que forneceu tanto desenhos explicativos dos conceitos de *limite, derivada e integral* restritos ao CUV como também exemplos particulares de *registros algébricos* restritos ao CUV.

Aqui, comprovamos a *hipótese* 4 de trabalho (p. 156), que diz respeito às consequências de um ensino de CUV que prioriza o *tratamento* de *registros*, com a ausência da exploração da *conversão de registros*. Consequentemente, toda a atividade argumentativa envolvendo a produção de *intuições afirmativas*, *conjecturais* e *antecipatórias* ficará comprometida.

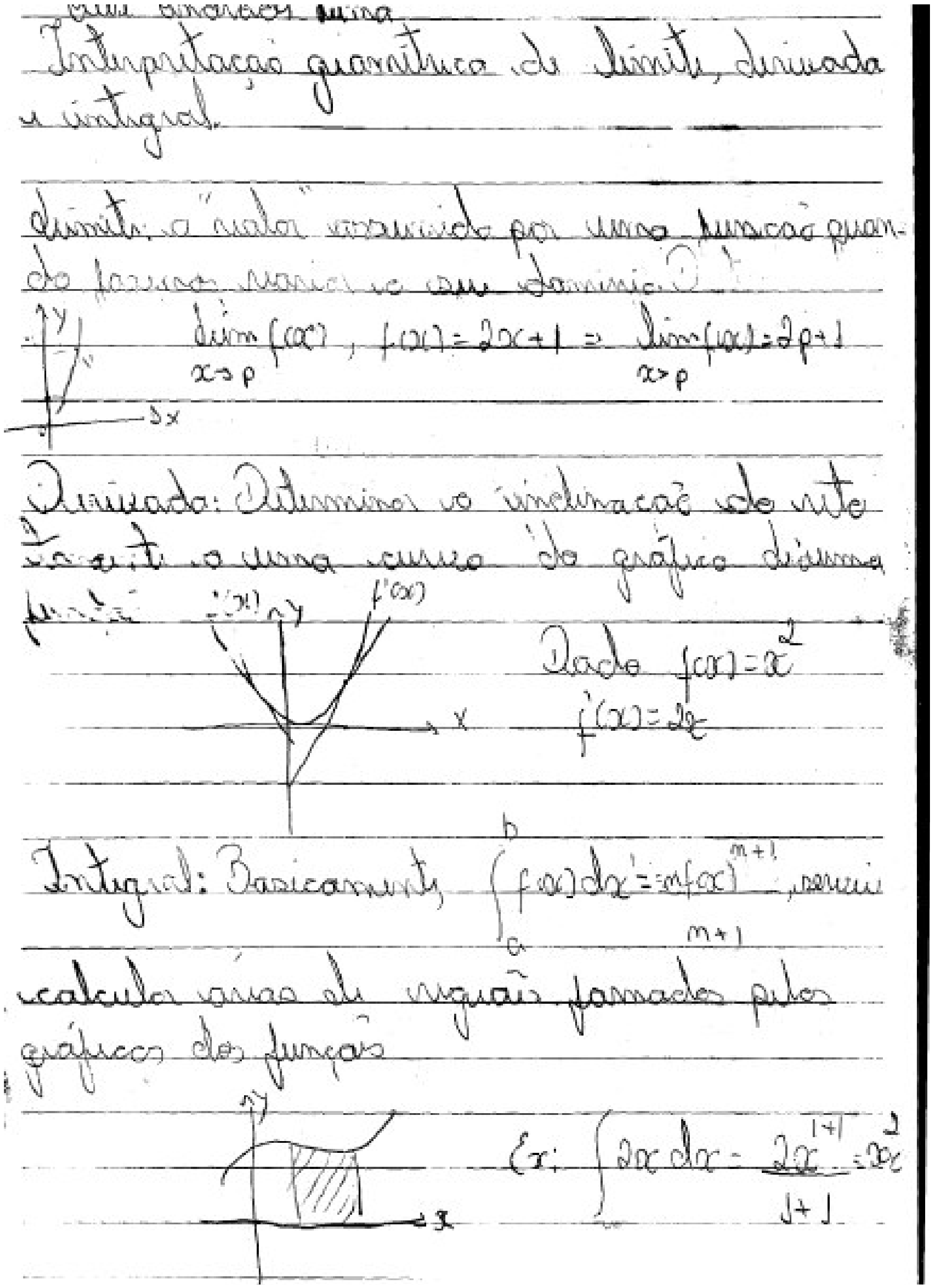
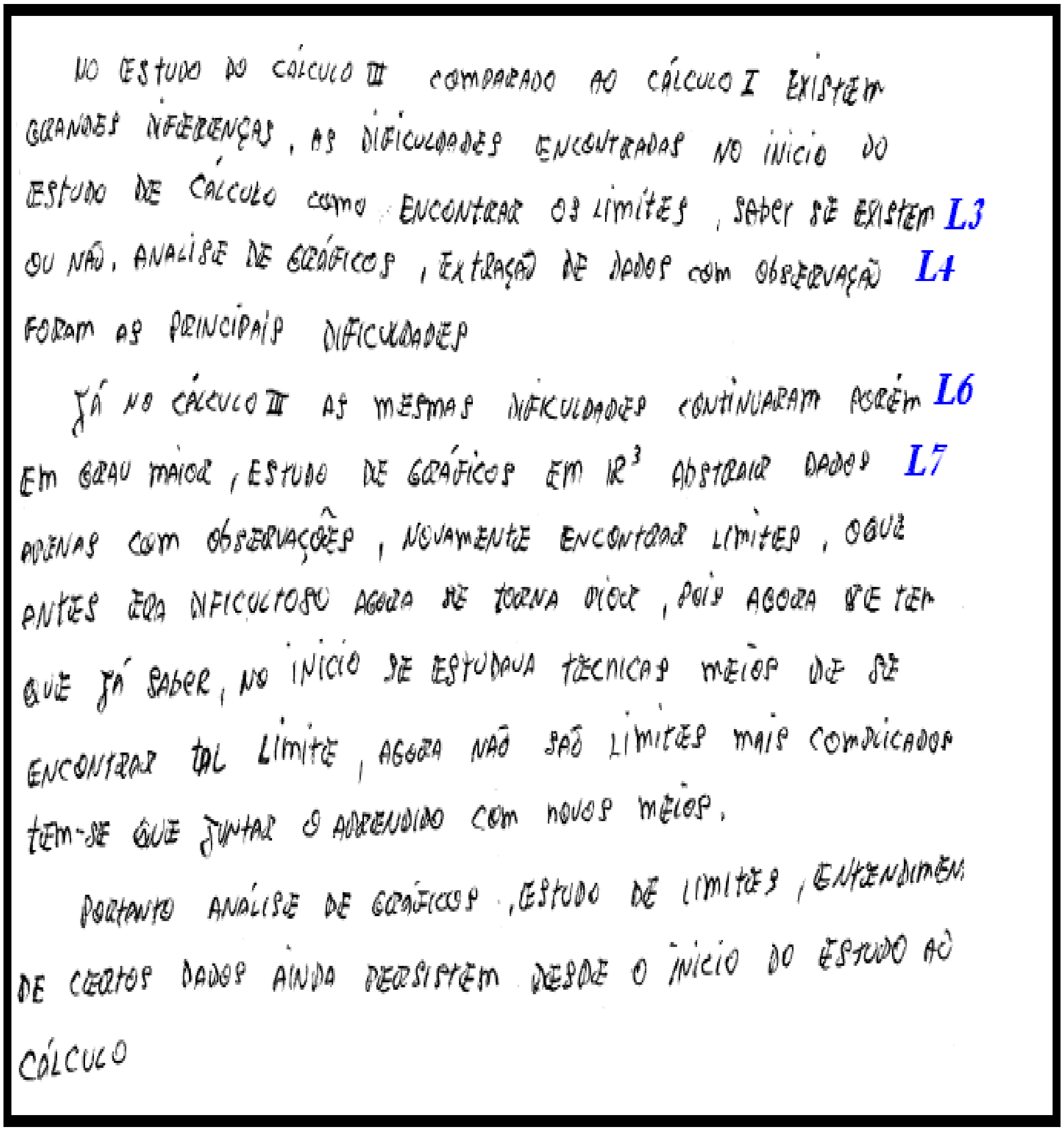


Figura 186: O aluno 17 forneceu *registros algébricos* e figuras restritas ao CUV.

No próximo trecho, evidenciamos a atividade argumentativa do **aluno 23** (figura 187) exigida na fase de prova da SF. Logo no início, o **aluno 23** indicou que "...existem grandes diferenças entre o Cálculo III comparado ao Cálculo I...". Nas linhas 3 e 4, indicou de modo particular a análise de limites, existência e análise de gráficos no CUV.



No estudo do cálculo III comparado ao cálculo I existem grandes diferenças, as dificuldades encontradas no início do estudo de cálculo como encontrar os limites, saber se existem L3
ou não, análise de gráficos, extração de dados com observação L4
foram as principais dificuldades

Já no cálculo III as mesmas dificuldades continuaram porém L6
em grau maior, estudo de gráficos em $\mathbb{R}^3$ abstrair dados L7
apenas com observações, novamente encontrar limites, o que antes era dificultoso agora se torna pior, pois agora se tem que já saber, no início se estudava técnicas meios de se encontrar tal limite, agora não são limites mais complicados tem-se que juntar o aprendido com novos meios.

Portanto análise de gráficos, estudo de limites, entendimento de certos dados ainda persistem desde o início do estudo ao cálculo

Figura 187: O aluno 23 manifestou suas impressões e concepções sobre a transição interna do CUV para o CVV.

Por outro lado, indicou nas linhas 6 e 7 que "...as dificuldades continuam, porém, em grau maior...". Mais adiante explica que para encontra limites "...tem-se que juntar o aprendido com os novos meios". Notemos que o **aluno 23** percebeu a readaptação e exploração das ideias relacionadas com a noção de limites no CUV no contexto do CVV. Fatos como este, no entanto, proporcionam a *transição interna* do CUV para o CVV. Observemos a descrição do objeto no quadro branco do **aluno 23**, na figura 188.

Por fim, o aluno realizou a *conversão* de *registros*, ao descrever, por meio de uma figura, o comportamento de um *registro gráfico* em 3D, que observou no computador (atividade 4). Indicou a complexidade intrínseca do objeto de estudo do CVV.

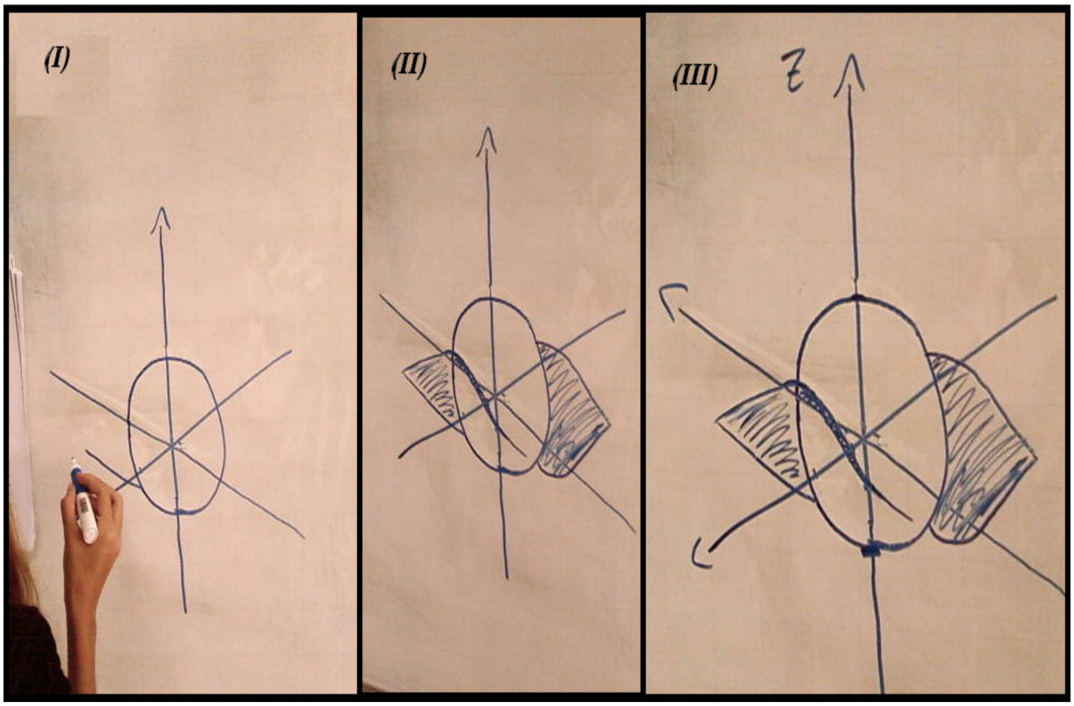
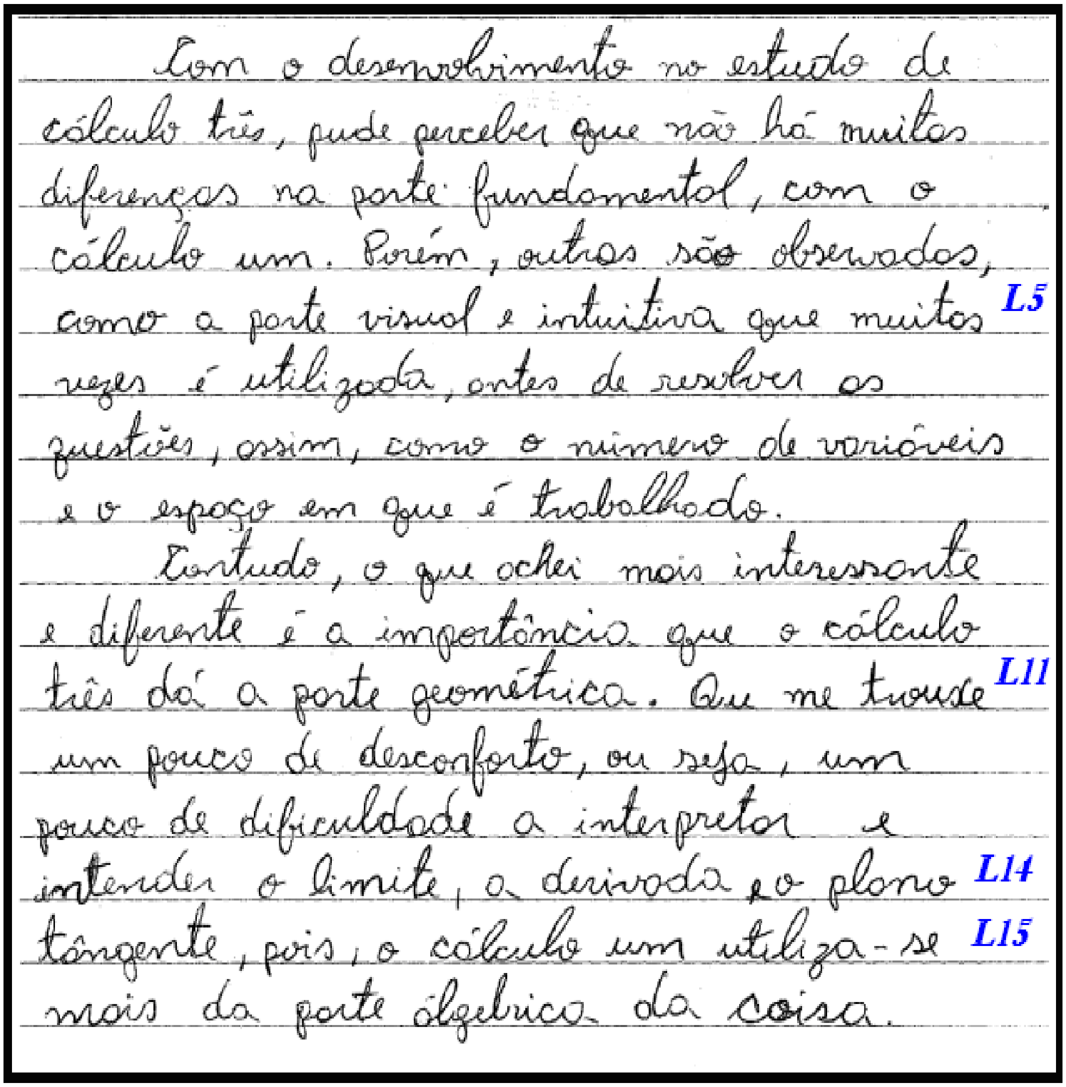


Figura 188: O aluno 23 forneceu um exemplo relativo à dificuldade pessoal ao elaborar uma figura que descreve o comportamento de um *registro gráfico* em 3D.

Por fim, analisamos a atividade argumentativa do **aluno 17** ao final dos estudos. Notemos que o aluno declarou na linha 5 que "...outros fatos são observados, como a parte visual é utilizada, antes de resolver questões, assim como o número de variáveis...". A indicação do **aluno 17** diz respeito à sistemática adotada por intermédio da *Sequência Fedathi*, ao proporcionar que nossa mediação evite a algoritmização precipitada e o emprego de instrumentos conceituais do CVV, desconsiderando o conhecimento aprendido no CUV.

Alem disso, na fase de *prova*, registramos a produção de sentenças proposicionais, como consequência de uma mediação que estimulou a mobilização de um raciocínio com base em *intuições conjecturais* que fazem referência a classes de objetos do CVV, em vez de objetos particulares e isolados, como as que registramos na fase de *tomada de posição* e na de *maturação*.

Isto evidenciou a possibilidade de se refinar e sistematizar as ideias intuitivas produzidas nas fases iniciais da *Sequência Fedathi* e, paulatinamente, conduzirmos o estudante à compreensão de argumentos formais.



Com o desenvolvimento no estudo de
cálculo três, pude perceber que não há muitas
diferenças na parte fundamental, com o
cálculo um. Porém, outros são observados,
como a parte visual e intuitiva que muitas L5
vezes é utilizada, antes de resolver as
questões, assim, como o número de variáveis
e o espaço em que é trabalhado.
Contudo, o que achei mais interessante
e diferente é a importância que o cálculo
três dá a parte geométrica. Que me trouxe L11
um pouco de desconforto, ou seja, um
pouco de dificuldade a interpretar e
entender o limite, a derivada e o plano L14
tângente, pois, o cálculo um utiliza-se L15
mais da parte álgebrica da coisa.

Figura 189: O aluno 29 manifestou suas impressões e concepções sobre a *transição interna* do CUV para o CVV.

Por fim, registramos mais uma vez nesta verbalização transcrita, na figura 189, do **aluno 29**, que a interpretação e a exigência da compreensão da *conversão* de registros e, consequentemente, a interpretação geométrica dos conceitos do CVV, propiciaram dificuldades e obstáculos ao entendimento, o que indicou, neste caso como em outros discutidos, a hipótese de trabalho 3.

Atribuímos este fato à natureza intrínsecas do sistema de representação semiótica do CVV, que dificulta/impede a *conversão de registros*. Ademais, salientamos a complexidade das construções geométricas que descrevem muitos dos conceitos do CVV, quando comparadas às construções geométricas do CUV em 2D. Dados como o que apontamos na figura 189 evidenciam que comprovamos nossa *Hipótese de trabalho* Hip_1 (Cap. 2, p. 149).

5.6 Análise final dos fatos observados nas entrevistas.

Concluiremos esta seção indicando os dados mais importantes colhidos ao decorrer do estudo com os oito alunos escolhidos de uma amostra total de oitenta alunos. Assim, a partir dos dados salientados acima dos alunos **7, 21, 24 e 29**, e dos dados referentes aos **alunos 8, 15, 17 e 23** (anexo II) que discutimos em anexo, concluímos que na fase de *tomada de posição* da *Sequência Fedathi*:

- Os alunos exploraram os elementos principais das atividades propostas por intermédio da *percepção* e *visualização* dos *registros gráficos* em 2D (Obj_2);
- A atividade de produção de *intuições afirmativas* e *intuições conjecturais* como conseqüência das relações identificadas pelos alunos entre os registros em língua natural, *registro algébrico* e *registros gráficos* em 2D;
- A partir de uma atitude pessoal, os alunos participantes requisitaram a análise visual e a manipulação dos *registros gráficos* em 3D o que indicou um hábito adquirido durante à disciplina Cálculo III, ministrada nos pressupostos da SF;
- As restrições e limitações (CTC) dos *registros gráficos* em 2D provocaram a produção de *intuições conjecturais* o que provocou uma reflexão à respeito das *intuições afirmativas*.
- Evolução de significados identificados no discurso dos alunos à respeito dos conceitos matemáticos do CVV a partir de uma interpretação metafórica dos *registros gráficos* em 2D, na ausência do domínio das *definições formais*;
- Não houve o *tratamento* de *registros algébricos* o que evitou o processo de algoritimização, muitas vezes nocivo, que detetectamos na análise de livros;
- As noções de *formação* e *conversão* de registros foram variáveis didáticas exploradas na mediação apoiada nos pressupostos da *Sequência Fedathi*;
- Os conhecimentos do CUV provocaram o surgimento de *intuições afirmativas* no contexto de aprendizagem do CVV o que fortalece a *transição interna*.

No que diz respeito às conclusões sistematizadas na fase de *maturação* da SF, destacamos:

- Todas as atividades desenvolvidas tiveram como ponto de partida e *percepção* e a *visualização* dos *registros gráficos* em 2D e em 3D;
- Os alunos requisitaram a análise do comportamento dos *registros gráficos* em 3D e sua exploração do computador como apoio e a identificação das variáveis mais importantes em cada atividade explorada na SF;

- Identificamos a intensa produção de "metáforas" no sentido de comunicar as ideias envolvidas com os conceitos de *curvas parametrizadas*, *limite*, *continuidade*, *máximos* e *mínimos* e *integrais múltiplas*;
- Os alunos admitem não se recordar das *definições formais* e construíram um significado para conceitos e propriedades a partir da visualização dos *registros gráficos* em 3D, o que evidenciou nossa *Hipótese de trabalho* (Hip_4);
- A *percepção* e a *visualização* dos *registros gráficos* em 3D provocam uma atividade argumentativa com a produção de *intuições afirmativas*;
- A *percepção* e a *visualização* dos *registros gráficos* provocam uma atividade argumentativa com a produção de categorias intuitivas que concorrem entre si e determinam os elementos mobilizados para a resolução das atividades;
- O *tratamento* de *registros algébricos* do CUV no contexto das atividades do CVV facilitou o processo de *transição interna*;
- As noções de *formação* e *conversão* de registros foram *variáveis didáticas* exploradas na mediação apoiada na *Sequência Fedathi*;
- A *conversão* de *registros* foi empregada e permitiu a exploração das condições "necessárias" para a verificação das atividades propostas, característica negligenciada pelos livros didáticos consultados;
- Registramos a exploração de *registros algébricos* do CUV que antecedeu o uso precipitado específico dos *registros algébricos* do CVV;
- A mediação didática enfatiza a *conversão* entre os *registros gráficos* em 2D e 3D, relacionando-se com os *registros algébricos*, o que se mostrou deficiente nos livros didáticos consultados.

No que diz respeito às conclusões sistematizadas na fase de *solução* da *Sequência Fedathi*, destacamos:

- A noção de *tratamento* de registros foi uma *variável didática* explorada na mediação apoiada na *Sequência Fedathi*;
- Os alunos manifestaram dificuldades em se recordar as condições formais do emprego de teoremas e as *definições formais* por completo e mesmo inexistentes, o que comprovou que suas estratégias são de natureza intuitiva;
- Os *registros gráficos* em 3D obtidos pelo suporte computacional agiram no sentido de influenciar a produção de *intuições antecipatórias*;

- As informações obtidas por intermédio da *percepção* e *visualização* apoiaram as estratégias tomadas na etapa de *solução* e escolha do *tratamento* dos *registros* adequado;
- O *tratamento* de *registros algébricos* foi evitado no estudo de muitas das atividades uma vez que as informações foram obtidas a partir da *percepção* e da *visualização* dos *registros gráficos* em 3D;
- O computador evitou o *tratamento* precipitado e fastidioso de *registros algébricos* no contexto do CVV.

No que diz respeito às conclusões sistematizadas na fase de *prova* da *Sequência Fedathi*, destacamos:

- Os alunos manifestam sérias dificuldades na compreensão de *demonstrações formais* e admitem não estudá-las;
- Os *registros gráficos* em 3D proporcionaram a comparação entre os resultados obtidos por intermédio do *tratamento* dos *registros algébricos* na fase anterior;
- Os *registros gráficos* em 3D proporcionaram a produção de *intuições conjecturais*;
- Os alunos manifestam a preferência pelo *tratamento dos registros* como uma conseqüência do aprendizado anterior no contexto do CVV;
- Os alunos manifestam dificuldades na compreensão do *épsilon* e *delta*, desde sua aprendizagem inicial no CUV que se preserva conflituosa no contexto de aprendizagem do CVV;
- As *intuições conjecturais* produzidas nesta fase foram descritas por sentenças proposicionais a respeito de classes de objetos, enquanto que as *intuições conjecturais* registradas na fase de *tomada de posição* e fase de *maturaçã*o da *Sequência Fedathi* são produzidas a partir da interação com um objeto particular;

No que diz respeito às concepções manifestadas pelos estudantes no contexto de *transição interna* do CUV para o CVV:

- Os alunos observaram as mudanças conceituais do CUV para o CVV, como por exemplo, a interpretação dos *registros gráficos* em 3D dos conceitos de limite, derivada e integral;

- Os alunos manifestam dificuldades na mudança notacional entre o CUV para o CVV com referência aos autores de livros consultados;
- Os desenhos e gráficos explicativos e que envolvem o significado atribuído e construído ao decorrer da disciplina para as noções de CVV são restritas ao plano e, portanto, retratam *imagens mentais* restritas ao CUV;
- As simplificações notacionais indicadas pelos livros didáticos de CVV proporcionam dificuldades ao entendimento dos alunos relacionadas aos conceitos de *limite, derivada e integral*;
- O surgimento de “metáforas” auxiliou de modo positivo na compreensão e aplicação dos conceitos do CVV, dado que, no decorrer das cinco atividades (p. 220), os alunos confirmam não recordar com precisão de todas as condições formais envolvidas e que poucos buscam compreender as *demonstrações formais*;
- O raciocínio baseado no significado atribuído às “metáforas”, que registramos, possibilitou aos alunos desenvolver um discurso descritivo/qualitativo das situações, dos conceitos do CVV e das mudanças percebidas pelos mesmos do CUV para o CVV;
- Os alunos manifestam uma verbalização e descrição de figuras vinculadas apenas ao CUV, o que evidenciou *imagens mentais* restritas dos objetos do CVV. Isto comprova nossa *hipótese de trabalho 1* (p. 156).

Para concluir esta seção, sublinhamos ainda que:

(i) Verificamos nossa *Hipótese de trabalho* Hip_5 na medida em que registramos nos compêndios analisados a deficiência com respeito aos elementos de análise de livros (Cap. 4, p. 184). Assim, nossa mediação didática atuou no sentido de superar tais deficiências e proporcionou uma exploração diferenciada no ensino dos conceitos o que promove a transição interna do CUV para o CVV.

(ii) Verificamos nossa *Hipótese de trabalho* Hip_3 quando observamos os entraves e incompreensões diante do sistema complexo de representação e definições.

(iii) Verificamos nos dados discutidos na seção anterior, nossa *Hipótese de trabalho* Hip_4 (p. 156), quando deparamos situações recorrentes em que os estudantes participantes do estudo admitem o não entendimento de determinadas atividades sem o recurso à visualização dos conceitos. Neste caso, a *visualização* atuou de modo positivo no sentido de impulsionar o entendimento.

Passaremos ao último capítulo de nossa tese. Nele forneceremos nossas ultimas impressões e indicaremos as possibilidades para o encaminhamento de futuras pesquisas.

Capítulo 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta última parte do nosso trabalho, apartir de tudo que discutimos desde os capítulos iniciais e em constraste com os dados que obtivemos e analisamos. Assim, decidimos evidenciar, neste trecho final, três elementos. O primeiro diz respeito à natureza dos dados empíricos que, em nossa opinião, não podem ser intepretados a partir de um universo separado e independente de uma mediação didática. O segundo elemento diz respeito à nossa perspectiva de interpretação da transição interna do Cálculo que, em muito, depende das simbologias e do sistema de representação utilizado.

6.1 Sobre a Metodologia de Ensino e os limites de nosso estudo

No que diz respeito à exploração de *representações semióticas* no ensino do CVV com o aparato computacional, as fases de ensino previstas na *Sequência Fedathi* possibilitam a introdução sistemática dos conceitos matemáticos, preservando a exploração dos registros do CUV, o que evidenciamos serem negligenciados pelos autores de livros didáticos que consultamos no capítulo 3. Este aspecto negativo dificulta a *transição interna* do CUV para o CVV que caracterizamos no capítulo 1.

Dedicamos uma parte do segundo capítulo à discussão em torno da tentativa de compreensão da natureza do conhecimento obtido por meio da *intuição* e se ele nos conduz à *certeza* ou à *crença* relativa a algum conhecimento matemático. Tal discussão nos proporcionou o entendimento a respeito da *intuição matemática*, o que permitiu divisar o elo da ligação que a mesma possibilita com a *crença* e com a *certeza*.

Além disso, assumimos a importância de uma abordagem didática dos conceitos do CVV, por meio do uso da *Sequência Fedathi* baseada na *crença*, caracterizada por uma mediação que evita a evolução de *intuições afirmativas* indesejadas (anexo IV) e que comprometem a aprendizagem, na medida em que fortalecem habilidades algorítmicas de modo restritivo.

Numa perspectiva empírica, concretizamos abordagens referentes aos conteúdos escolhidos no início do trabalho por meio da veiculação de um discurso que evitou determinadas expressões e jargões da Matemática, que alimentam justamente uma *verdade absoluta* e indiscutível à respeito do saber matemático discutido em sala.

Deste modo, exploramos o caráter provisório, falível e a verdade local dos conteúdos ensinados ao decorrer da aplicação da referida sequência de ensino do CVV. O lado visível deste posicionamento didático se mostrou evidente ante a atitude participativa e questionadora dos alunos participantes do estudo ao decorrer das tarefas.

Outra questão que merece ser retomada diz respeito às características atribuídas ao *raciocínio intuitivo*, principalmente, por filósofos. Parte dos autores consultados aponta seu caráter *não inferencial* do conhecimento obtido por meio da *intuição*. E parte indica a possibilidade do seu caráter inferencial. Assim, ante o impasse e a falta de consenso, assumimos o caráter *dual* do *raciocínio intuitivo*, que tanto pode se manifestar de uma forma como de outra.

Deste modo, na fase de *solução* da SF, de modo concomitante à evolução de um raciocínio lógico e dedutivo, de natureza essencialmente inferencial ($A \xrightarrow{\mathrm{Re}\,gra} B$), é possível a ocorrência de *intuições antecipatórias* de natureza *não inferencial*, como indicamos nas entrevistas com os alunos 8, 15, 17, 21, 23, 24, 27 e 29.

No que diz respeito às *intuições conjecturais*, os sujeitos não estão conscientes e aptos a fornecer uma justificativa tácita para as suas declarações no âmbito do CVV. Parte delas foi consequência de uma atividade cognitiva determinada pela *percepção* e pela *visualização*. Assim, estas categorias intuitivas, que identificamos nas fases da *Sequência Fedathi*, antecedem o emprego efetivo de uma estratégia (*tratamento* dos registros) de resolução e são não inferenciais, sendo impulsionadas pela *percepção* e a *visualização*.

Por outro lado, após a resolução das cinco atividades, espera-se que o estudante tenha atingido um patamar de pensamento mais elevado e ulterior sistematização das ideias empregadas. Assim, nas fases finais da SF, estimulamos um raciocínio sobre classes de objetos e não apenas sobre objetos particulares. Isto foi verificado nas atividades 6 e 7.

Sublinhamos que o papel do computador foi decisivo no sentido de proporcionar ao estudante a revisão do seu raciocínio, a produção de *intuições conjecturais* e a revisão de suas conjecturas que caracterizaram seu *valor epistêmico* e não apenas operatório com relação aos conceitos do CVV.

Além disso, por meio dos Conflitos Teóricos Computacionais – CTC, provocamos e geramos situações de incerteza (ver quadro 1). No quadro 8, apresentamos a síntese da sistematização de nossas mediações ancoradas nos pressupostos da *Sequência Fedathi*. Tal sistematização proporciona o aperfeiçoamento do quadro 5 (p. 179).

Apontamos ainda que nas categorias elencadas na primeira coluna do lado esquerdo, envolvem categorias relacionadas à ação/mediação docente (*atividades relacionadas às representações*, *atividade do aluno*) e outras se referem à atividade do estudante (*características do raciocínio*, *estrutura do raciocínio*).

Quadro 8: Elaboração e sistematização das fases da *Sequência Fedathi* com base na sistematização dos dados obtidos.

	Fase 1 - *Tomada de posição*	**Fase 2 - *Maturação***	**Fase 3- *Solução***	**Fase 4 - *Prova***
Características do raciocínio	**Intuição afirmativa e conjectural, não inferencial**	**Intuição conjectural, não inferencial**	**Intuição antecipatória, inferencial**	**Intuição conjectural, intuição afirmativa**
Estrutura do raciocínio	Estrutura não linear	Raciocínio incompleto na perspectiva formal; regras de inferências não explícitas	$A \xrightarrow{R} B$ Raciocínio incompleto na perspectiva formal	$A \xrightarrow{R} B$ Raciocínio completo na perspectiva formal
Atividades relacionadas às representações	Formação e conversão de registros	Conversão de registros	Tratamento de registros	Tratamento e conversão de registros
Com respeito a atividade perceptiva e surgimento do *insight*	Aquisição de crenças perceptuais a partir da interação com os objetos	Identificação ou momento de iluminação em que ocorre a escolha da estratégia e regra R que proporciona maior sentimento de certeza - *insight*	Aquisição de crenças perceptuais a partir da interação com propriedades descritas por sentenças proposicionais	Aquisição de crenças perceptuais a partir da interação com propriedades descritas por proposicionais
Quanto à natureza das definições (mediação docente)	Compreensão da *essência* da definição	Caráter operacional da definição	Caráter operacional da definição	Compreensão da *existência* da definição
Quanto à atividade do	Atividade argumentativa	Atividade argumentativa	Atividade dedutiva	Atividade argumentativa

aluno				e dedutiva
Quanto à exploração didática de CTC (mediação docente)	Situação conflituosa com a presença de CTC	Situação conflituosa com a presença de CTC	Discussão do modelo matemático e o modelo computacional	Compreensão do CTC
Quanto à *transição interna* do CUV para o CVV (mediação docente)	Exploração das ideias do CUV	Exploração das ideias do CUV e do CVV	Exploração das ideias do CVV	

Fonte: Pesquisa do autor.

Assim, com base no nosso experimento, apresentamos o quadro acima que proporciona a sistematização e a identificação das variáveis didáticas que podem ser consideradas no contexto da aplicação da *Sequência Fedathi*, tanto no contexto do ensino do CVV, como em outros conteúdos do *locus* acadêmico.

Por outro lado, desde que a atividade matemática exige o acesso aos objetos matemáticos por meio do uso de representações e simbologias, acrescentaremos ainda alguns comentários e indicações de determinadas limitações e potencialidades da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

6. 2 Sobre a Teoria das Representações Semióticas no ensino do Cálculo e a *Transição Interna*.

> Crer, portanto, é desejar, isto é, ater-se a uma ideia, se decidir a afirmá-la, a escolher entre várias, fixá-la como definitiva, não apenas pelo nosso pensamento atual, mas sempre e para todo outro pensamento. (BROCHARD, 1884, p. 17, tradução nossa)

A perspectiva de Raymond Duval fornece profícuas implicações para o ensino do CUV e do CVV. No caso particular do CVV, observamos frequentemente nas produções escritas pelos estudantes incompreensões recorrentes que, possivelmente, apresentam sua história inicial desde os primeiros estudos no Cálculo e no contexto escolar.

Deste modo, a exploração didática das noções de *formação*, *tratamento* e *coordenação* pode atuar de modo decisivo no sentido de evitar, nas situações de ensino envolvendo a mediação proposta pela *Sequência Fedathi*, a evolução de concepções indesejadas relativas aos conceitos do CUV e do CVV, como, por exemplo, as concepções registradas pela literatura relacionadas ao conceito de limite de funções.

De modo geral, no ensino de CVV, o docente pode explorar condições necessárias à noção de *existência* de limites, o que efetuamos neste estudo por intermédio do emprego de *softwares*. Pode também relacionar as simbologias $\lim_{x \to a} f(x) = L$; $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$; $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = L$ e $\lim_{x \to a} \lim[f_{y \to a}(x,y)] = L$. E em termos do CUV para o CVV, a noção de *limite interado* poderia ser mais explorada em sala de aula, haja vista que nem sempre é abordada pelos livros que consultamos e relacionada com a noção de *derivada parcial*.

Com respeito ainda à noção de *limite*, a *formação* de registros gráficos em 3D é determinante no sentido de proporcionar uma atividade argumentativa com base na *visualização*, na *percepção* de suas propriedades. Assim, no ensino de limite no CVV, as propriedades topológicas podem ser exploradas de modo mais significativo.

Evidenciamos também no nosso estudo que tarefas do tipo - (i) verificar o seguinte limite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$; (ii) mostrar que a função $f(x,y) = x^3 y - xy^3$ é diferenciavel; (iii) avaliar a integral $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4}^{1-x^2-y^2} dzdydx$ - reforçam o caráter de um ensino baseado na *certeza* ou, melhor exprimindo, um ensino baseado na reprodução do receituário previamente definido pelo professor.

Como salientamos ao decorrer deste estudo, um ensino baseado na *crença* exige que reformulemos os tres itens passados para a seguinte forma: (i*) é possível avaliar o limite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = ?$ A imagem da função se aproxima de algum valor?; (ii*) observamos no gráfico da superfície descrita por $f(x,y) = x^3 y - xy^3$ um plano tangente em um ponto (x_0, y_0). Podemos assim concluir que a função é diferenciavel?; e (iii*) o valor numérico da integral $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4}^{1-x^2-y^2} dzdydx$ corresponde a que no espaço tridimensional?

Nestes casos, a *formação* de registros gráficos em 3D proporcionada pelo computador e a *conversão de representações semióticas* nos possibilitou extrema proficuidade no sentido de ensejar desequilíbrios cognitivos, estimular a *percepção* e a produção de sentenças proposicionais que competem entre si.

Relativamente à exploração da identificação de propriedades importantes por meio da *visualização*, observamos ocorrência de vários casos de situações e conceitos matemáticos que poderiam ser explorados desde o CUV no espaço $\mathbb{R}^3$, entretanto, em virtude do tímido uso de poucas figuras e *registros gráficos* em 3D, como os conceitos de *ponto crítico*, *ponto de inflexão*, propriedades de *mudança de concavidade* e *crescimento/decrescimento*, não são explorados por um via intuitiva no contexto do CVV, como evidenciamos na seção de análise de livros de CVV.

No que diz respeito ao *tratamento* dos *registros algébricos* do CVV, sugerimos que se evite a sua simplificação, tencionando acelerar os cálculos que, apesar de fastidiosos, são necessários. Por exemplo, identificamos situações em que os alunos se deparavam com as simbologias: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)_{y=0}$; $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right]_{y=0}$ $f_x(0,0)$ ou $Df_x(0,0)$.

Com suporte nos depoimentos dos alunos, observamos que a simplificação ou a compressão destas simbologias são fatores de incompreensões e insegurança. De fato, registramos ao decorrer das aulas que o estudante analisa a simbologia $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e observa dois algarismos zero, entretanto o primeiro zero não significa o valor assumido pela variável x e sim a sua aproximação, enquanto designamos o mesmo algarismo para dizer que $y = 0 = cte$.

A simplificação de notações é marcante no tópico que analisamos, também relacionado à comutatividade das *derivadas mistas*. Por exemplo, encontramos na literatura consultada as simbologias: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$; $f_{xy}(0,0)$. Mais uma vez observamos o mesmo algarismo (zero) representando dois processos matemáticos distintos, e na ocasião em que os alunos empregaram a formulação $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]$, fizeram uso da trejetória indicada por $(x,y) \xrightarrow{x=cte} (x,0) \to (0,0)$.

Outro exemplo observado nos dados escritos dos alunos diz respeito à comparação de *registros algébricos* do tipo $f_{xy}(0,0)$ e $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]$. Notamos que os alunos precisam realizar as *conversões* necessárias para compreender que se referem ao mesmo objeto.

Tal processo de simplificação notacional identificada nos livros didáticos que analisamos funciona de modo nocivo para os estudantes, apesar de que para o professor tais escolhas viabilizam maior rapidez e operacionalidade nos cálculos fastidiosos do CVV. Nossa mediação estimulou o uso dos registros de representação do CUV e do CVV, o que proporciona a *transição interna* do CUV para o CVV, como indicam os autores Alves e Borges Neto (2011) na figura abaixo.

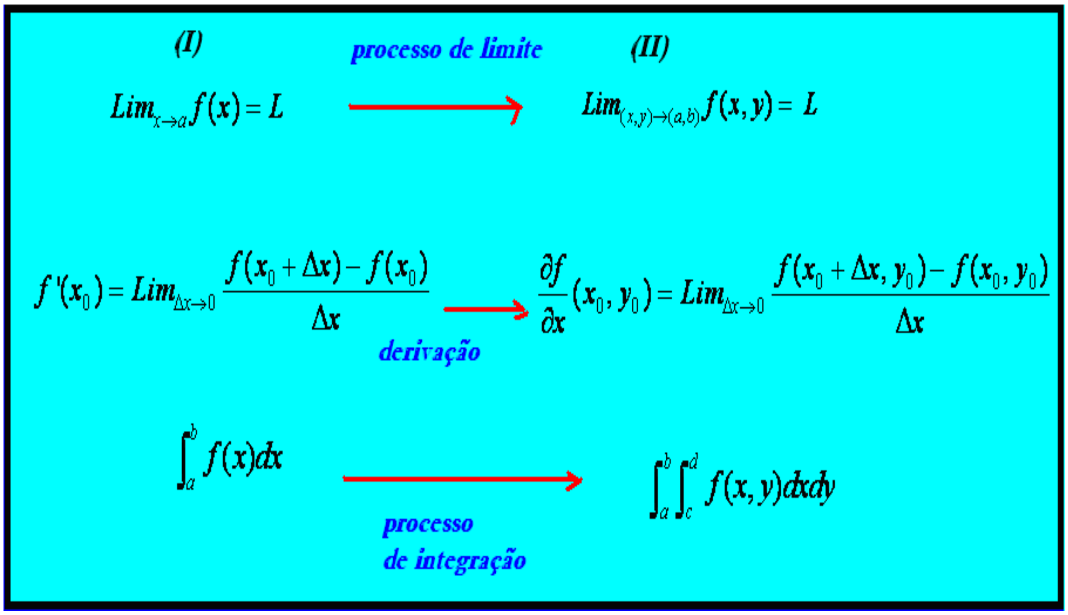


Figura 190: Quadro da *transição interna* no Cálculo, descrita por Alves e Borges Neto (2011a).

Com relação à ideia de *integral múltipla*, por exemplo, sublinhamos que identificamos situações-problema nas quais é impossível divisar os *limites de integração* em virtude das características intrínsecas das superfícies no $\mathbb{R}^3$. Tal dificuldade pode ser superada por meio da *percepção* e da *visualização* no espaço tridimensional.

No que diz respeito à opinião dos estudantes, observamos de modo frequente a sensação estranha manifestada pelos estudantes ao lidar com notações que, apesar de se relacionarem com os mesmos objetos do CVV, exigem *tratamentos* e regras operatórias pouco explicadas e completamente distintas em relação às que eles conheceram no CUV.

Buscamos realizar e obtivemos dados empíricos que apontam isto, no que diz respeito à mediação didática, ao longo das fases da *Sequência Fedathi*; sobretudo na *tomada de posição* e na *prova*, o que estimulou a elaboração de *imagens mentais* relacionadas aos conceitos abordados no CVV.

Observamos, por exemplo, alguns termos metafóricos empregados ao decorrer das sete atividades que propusemos neste trabalho e ao decorrer da disciplina de Cálculo III e que evidenciou, no discurso dos oito sujeitos participantes nas entrevistas, um significado intuitivo dos conceitos do CVV, na ausência do domínio das definições formais. Reparamos do lado direito do símbolo "≡", seu significado formal dentro da teoria.

Quadro 9: Descrição das metáforas elaboradas pelos alunos na resolução das atividades e ao longo da disciplina de Cálculo III.

Metáfora empregada	Significa/sentido dentro da teoria formal do CVV.
Bico	Local ou ponto onde não existe a declividade ou reta tangente à curva do tipo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.
Suave	Vetor velocidade $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0$.
Bico suave	Local onde não existe a diferenciabilidade de curvas parametrizadas.
Limitado	Existe $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\lvert f(x, y \rvert \leq k$.
Buraco, furo	Ponto onde a função não esta definida, todavia, existe o limite.
Cratera	Ponto onde a função não esta definida e existe o limite.
Montanha, Tapete suave	Gráfico $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ de superfície diferenciavel.
Montanha, tapete com arestas, pontas	Gráfico $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ de superfície não diferenciavel.
Bordas da montanha	*Pontos de fronteira* da superfície descrita por $z = f(x, y)$.
Lombadas na montanha	*Pontos de máximo local* na superfície descrita pelo gráfico $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$.
Sombra da montanha, vista de cima	Projeção do gráfico da função $z = f(x, y)$ no plano $\mathbb{R}^2$

Fonte: Pesquisa do autor.

Possivelmente uma abordagem que valoriza o *valor epistêmico* e não apenas o caráter algorítmico e operatório dos enunciados, uma abordagem que dedique uma atenção especial a expedientes da natureza que apontamos no quadro 9, reconhecidamente, despertam a *percepção* e estimulam a *visualização*. Tal opção pode suavizar a *transição interna* do CUV para o CVV.

Por fim, apesar de não nos determos nas dificuldades específicas com respeito às *demonstrações formais* do CVV, observamos, a partir da análise de livros didáticos e das atividades seis e sete, que os alunos se restringem ao emprego/aplicação de teoremas, uma vez que eles não manifestam hábitos de estudar *demonstrações formais* ancoradas nos fundamentos da Análise no $\mathbb{R}^n$, desde os estudos no CUV.

No que diz respeito aos livros didáticos que os alunos têm acesso no IFCE ao decorrer da disciplina Cálculo III, observamos que os argumentos e ideias principais empregados nas demonstrações não reaparecem ou são exigidos na aplicação das atividades, com o agravante de que parte das ideias discutidas por uma via intuitiva ou restrita a casos particulares possuiam uma justificativa maior apenas quando consultamos a Análise no $\mathbb{R}^n$, que não faz parte da grade de formação curricular do licenciando em Matemática num contexto nacional.

Uma das consequências que observamos em sala de aula é a mera reprodução de encadeamentos longos de raciocínio dedutivos envolvidos nas demonstrações que sustentam tanto a validade inquestionável desvelada pelo enunciado do teorema, como também fortalecem a *crença* do docente a respeito daquilo que professa.

Notamos que o professor, mesmo sem necessariamente pensar a respeito dos conteúdos do Cálculo, carrega consigo a *crença* a respeito da *verdade* sobre o conhecimento, ao passo que o aluno pode pensar sobre, mas, não possuir ou adquirir uma crença particular acerca daquilo discutido pelo mestre, nem muito menos carregar consigo o significado de determinadas proposições.

Outro elemento a merecer atenção por parte dos professores, que foi um fator gerador de dificuldades aos estudantes, foram as *definições formais* empregadas ordinariamente no CVV. Pudemos notar na observação das atividades dos estudantes o pouco recurso e o incipiente conhecimento das *definições formais* ao decorrer da resolução das tarefas que apresentamos. Com o recurso computacional, conseguimos fornecer uma significação intuitiva e menos algorítmica, que em geral é o aspecto habitual recordado pelos estudantes no CUV.

Em relação a vários pontos destacados e comentados até aqui, a *Teoria das Representações Semióticas* possibilitou maneiras diferenciadas de evitar ou, pelo menos, atenuar os efeitos de uma aprendizagem baseada no *pensamento algorítmico*. Neste sentido, a exploração de atividades que envolveram a *conversão* de registros de representações semióticas proporcionou um ambiente adequado para o estímulo do pensamento visual dos estudantes relativos aos conceitos discutidos, embora tenhamos identificado a resistência e a preferência por determinados hábitos originados durante os estudos do CUV.

No próximo segmento, realçamos as vantagens específicas e os elementos didáticos que seu uso nos proporcionou ao explorarmos em sala de aula a abordagem proposta pela *Sequência Fedathi* com arrimo computacional. Concluímos esta seção destacando que, com suporte no que foi discutido nesta parte, alcançamos o objetivo 1 desta tese, no Capítulo 3. (p. 149), que se refere na descrição das concepções dos estudantes e seu modo privado de interpretar-significar os conceitos de limite, derivada e integral.

6.3 Considerações sobre o uso do *software* Maple em sala de aula.

Como destacamos ao longo de nossa investigação, identificamos determinadas limitações do *software*. Efetuando uma análise comparativa entre o *Maple 10* e o *Maple 12*, observamos que versões mais atualizadas do programa tendem a eliminar, pelo menos em parte, a ocorrência de Conflitos Teóricos Computacionais – CTC.

Tais imperfeições, todavia, podem produzir conhecimento, na medida em que promovem a produção de *intuições conjecturais* e *intuições antecipatórias* nos estudantes e rever as *intuições afirmativas*, sobretudo, nas fases finais da *Sequência Fedathi*.

Por exemplo, recorrentemente, os estudantes, quando se deparavam com o gráfico da função $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (atividades 2), manifestavam *intuições conjecturais*, indicando que eles compreendiam seu gráfico como limitado (no eixo Oz) no intervalo $[-4,4]$.

Se exploramos, entretanto, esta representação de modo particular $f(x,x)=\dfrac{x}{x^2+x^2}$ no ambiente computacional proporcionado pelo software *Geogebra*, possibilitamos a exploração do *registro gráfico* em 3D, por meio das funções *zoom* e *deslocamento do gráfico*, o que permite compreender que o gráfico (figura 191) não pode ser limitado.

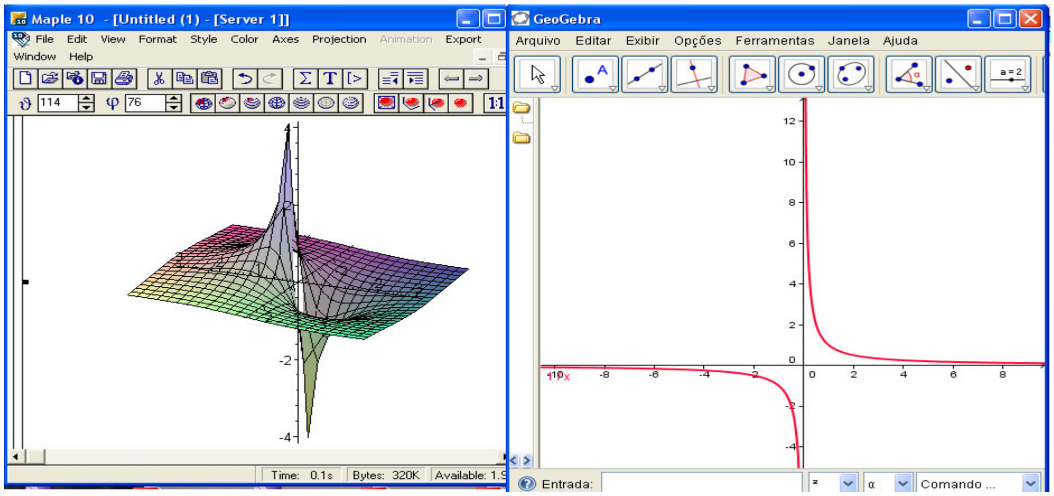


Figura 191: Quadro comparativo entre o *software Maple* e *Geogebra*.

Grande parte dos CTC do CVV que conseguimos identificar decorreu das atividades diretas e em sala de aula com os estudantes que participaram do estudo, uma vez que, na literatura, encontramos descrições restritas ao CUV. Deste modo, podemos evidenciar, com o convívio e o discurso dos estudantes, suas impressões individuais nos momentos em que interagiam com situações conflituosas.

Por fim, além das potencialidades intrínsecas do *software* Maple e limitações que podemos superar com o apoio de outro *software* (sugerimos o Geogebra), sua exploração em sala de aula serve para quebrar parte da rotina constante que o professor desenvolve diante do quadro branco, escrevendo e demonstrando cadeias gigantescas de inferências usuais no CVV, pois, perto do final, o estudante não se recorda mais de onde se partiu e muito menos onde o professor tenciona chegar.

Em decorrência da dificuldade relativa à pouca literatura a este respeito, contamos com o auxílio e contribuição dos estudantes na identificação do que intuitivamente lhes parecia estranho e produzia insegurança, mas que, de fato, representavam *Conflitos Teóricos Computacionais* no contexto do CVV.

Para concluir, observamos empiricamente a reação dos estudantes, ao interagirem com os registros gráficos em 3D, exibidos pelo computador, e quando procuravam um melhor ângulo de observação do objeto, com a intenção de identificar propriedades específicas de interesse em cada situação. Nestas circunstâncias, estimulamos a *percepção* e a *visualização*. Tais capacidades cognitivas não são exploradas pelos livros didáticos que consultamos.

Num contexto mais amplo, observamos que “...as tecnologias digitais colocaram em efervescência a balança tradicional entre os valores pragmáticos e epistêmicos das técnicas construídas na cultura do lápis e papel” (ARTIGUE, 2010, p. 467), apesar de que identificamos ocasiões em que os estudantes preferem a segurança decorrente do emprego de algoritmos e teoremas.

Por fim, apesar da incipiência registrada na área de investigação relativa ao ensino e aprendizagem do CVV no Brasil, os resultados apontados neste trabalho e em outros desenvolvidos no Exterior (MARTINEZ-PLANELL e GAISMAN, 2009, 2010; RALHA; HIRST e VAZ, 2004; WU & YU, 2008) indicam maior atenção no que se refere aos problemas de ensino/aprendizagem do CVV.

Na próxima e ultima seção deste trabalho, discutiremos alguns aspectos que viabilizam discussões futuras do que registramos aqui como relevante e apontaremos outros pontos que merecem maior vigilância científica.

6.4 Conclusões e questões para pensar

O filósofo argentino Mario Bunge (BUNGE, 1996) indica dois elementos essenciais observados nas Ciências e, de modo particular, na Matemática. O primeiro se refere à natureza intuitiva, fundada em crenças e impressões tácitas de ideias primárias que evoluem, nem sempre de modo consciente, quando realizamos a atividade científica. O segundo elemento diz respeito aos condicionantes e paradigmas de cada área do saber científico, no sentido de declarar que determinada crença conduza de fato a um conhecimento reconhecido com válido aos olhos de uma determinada comunidade.

Por outro lado, na trajetória descrita, o pesquisador e, de modo particular, o matemático, enfrenta uma diversidade de barreiras, até a geração de um conhecimento científico. É imperioso, entretanto, não perdermos de vista o papel da faculdade psíquica aqui chamada de *percepção* e do evento intelectual que interpretamos como intuitivo, que desempenham papeis fundamentais, embora de pouca visibilidade nos processos de ensino e de aprendizagem.

Deste modo, sublinhamos a importância para que o professor compreenda que a lógica não elabora e explica completamente um *raciocínio matemático*. Muitas vezes, na perspectiva do professor, se torna visível a identificação das estratégias de seus estudantes, e que estas se apoiam, predominantemente, em argumentos lógicos, todavia, nos interessamos, registramos e analisamos as formas de raciocínio demonstradas pelos alunos antes que suas respostas se harmonizam a determinada ordem requerida e validada na Lógica Clássica e na Matemática.

Outro ponto pouco investigado até o momento, em estudos na área de Educação Matemática, diz respeito à qualidade dos livros de CVV. Não nos referimos especificamente às qualidades lógicas e matemáticas que, como discutimos nos capítulos passados, são fundamentadas em Análise no $\mathbb{R}^n$, e sim sobre qualidade dos *registros* de *representação semiótica* que produzem o significado para o leitor.

De fato, quando discutimos o exemplo clássico encontrado nos livros de CVV que diz respeito ao *registro gráfico* da noção de *derivada parcial*. De modo semelhante ao modo de abordagem dos outros conceitos do CVV, este tipo de *registro* é mencionado com a intenção de produzir um significado para o referido conceito.

Um dos problemas que apontamos diz respeito à edificação deste conceito, que é descrito para o leitor ou durante uma aula pelo professor, todavia, o próprio aluno não elabora ou presencia o processo de elaboração/construção no sentido de evidenciar que ele é possível.

Com respeito a esta objeção, concluímos que o ensino de CVV apoiado em recursos computacionais proporciona esta descoberta, inclusive com a noção semelhante estudada no CUV. Destacamos ao longo do trabalho, os entraves e as dificuldades da descrição, por meio de desenhos no plano, de objetos que, pela própria constituição, possuem três dimensões. Sugerimos como um exemplo de amostra das dificuldades relacionadas com a *formação* de *registros geométricos* no plano a apreciação das aulas de Análise no $\mathbb{R}^n$ disponíveis na *internet*[33], ministradas pelo matemático Elon Lages Lima.

Outra questão não menos importante diz respeito à relevância concedida pelos autores de livros para as demonstrações matemáticas formais. Mencionamos a existência de vários trabalhos empíricos que evidenciam as deficiências na aprendizagem destas demonstrações no CUV. Note-se que, desde o Capítulo 2, apontamos a não essencialidade do ensino de *demonstrações* por meio da mediação proporcionada pela *Sequência Fedathi*.

De fato, com apoio em nossas observações que duraram um pouco mais de dois anos em disciplinas de Cálculo III, da Licenciatura do IFCE, registramos, de modo

[33] http://video.impa.br/index.php?page=download

recorrente, as dificuldades dos estudantes quando deparavam argumentos lógico-formais, de modo emblemático, relacionados ao ε (épsilon) e ao δ (delta).

No que diz respeito à discussão epistemológica e filosófica em torno do conhecimento obtido por meio da *intuição*, reavemos e discutimos pontos de vista nem sempre consensuais a respeito desta noção ontológica. Em todo caso, não compreendemos a eficiência de um ensino de CVV que desconsidera os conhecimentos mobilizados antes mesmo da efetiva solução e explicitação de argumentos lógicos do estudante. Para concluir, destacamos duas perspectivas importantes. A primeira refere-se à atividade importante de vigilância do professor com respeito ao discurso e ao modo de agir do estudante.

De fato, com base em tudo o que foi discutido nesta tese, o leitor que exerce a função de docente, poderá interpretar de modo mais profícuo a seguinte frase, recorrente nas argumentações dos estudantes, quando questionados sobre os motivos ou justificativas para determinada escolha e/ou argumento explorado em uma situação-problema: *Ah, professor!....Foi por lógica que eu respondi assim...*

Esta sentença pode caracterizar todo o esforço mental desenvolvido pelo estudante na resolução de uma tarefa, e, recorrendo a Cruz (2000), podemos dizer que seu significado revela o uso, enquanto na maioria das vezes inconsciente, de uma *metonímia*, que neste caso se caracteriza pela substituição do 'abstrato' pelo 'concreto'.

Note-se: o que lhes parece 'abstrato', pouco identificável e/ou explicado, é a manifestação inicial tácita de um raciocínio intuitivo, na maioria dos casos de natureza não inferencial, como caracterizamos no Capítulo 3. Entretanto, que o 'concreto' para eles diz respeito ao significado, constituído desde as etapas de escolarização, referente ao raciocínio lógico-algorítmico.

No caso do ensino, o aspecto preocupante é que aquele argumento salientado do aluno sintetiza um processo cognitivo de aprendizagem não acompanhado pelo professor. Este fenômeno, como vimos ao longo do trabalho, é relacionado à *intuição* e possui um forte componente de dependência da *percepção* do indivíduo. A segunda e última perspectiva diz respeito ao âmbito da pesquisa. De fato, desenvolvemos um estudo com vistas à aplicação de uma sequência metodológica de ensino, nomeada de *Sequência Fedathi*.

Nossa investigação apresentou determinadas fases características da metodologia de pesquisa chamada de *Engenharia Didática*. E com vistas aos trabalhos futuros que exploram a *Sequência Fedathi*, e que apresentem alguma semelhança com o nosso, destacamos as considerações interessantes de Artigue (2009, p. 10) quando sublinha:

> Vista como pesquisa ou evolução da prática, a Engenharia Didática é claramente uma prática controlada pelo tipo de intervenções, e esta intervenção é baseada numa teoria. Neste caso, a Teoria das Situações Didáticas é profundamente afetada pela visão deste design de pesquisa. (tradução nossa)

Assim, de modo semelhante ao que é descrito pela literatura e pela própria Artigue (2009), esperamos que nosso trabalho contribua no sentido de detalhar, sistematizar, identificar, pormenorizar e discutir elementos de pouca visibilidade no contexto da pesquisa de ensino/aprendizagem, todavia, são de enorme importância também para o professor de Matemática. Além disso, defendemos o argumento de que o uso da *Sequência Fedathi* na perspectiva de complementaridade com outras fundamentações teóricas pode ser "afetada" positivamente.

REFERÊNCIAS

ABELL, M.; BRASELTON, J. **Maple by example**, third edition, London: Elsevier Academic Press, 2005.

ALMARAZ, I. A. ***Creacion de imagenes mentales segun la naturaleza y las formas de los estimulos*** (tesis de doctoral), Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 1997.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **Uma sequência de Ensino para a aquisição do conceito de derivada parcial, direcional e teoremas correlatos no Cálculo em Várias Variáveis**. In: *Conexões, Ciência e Tecnologia*. nº1. v. 1. 2007, p. 29-34. Disponível em: http://revistaconexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/issue/archive

ALVES, Francisco, R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **Aplicação da Seqüência Fedathi na Aquisição do Processo de Integral Tripla com o Auxílio do Maple.** In: *XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática* – EMBRAPEM, 2008, p. 1-12. Disponível em: http://www.ebrapem.mat.br/

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **A imagem conceitual dos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática: o caso do Cálculo a Várias Variáveis**. In: *II Seminário Internacional de Educação Matemática*. 2009a, p. 1-10.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **A Teoria das Representações Semióticas e suas Aplicações no Cálculo a Várias Variáveis**. In: *19º Encontro de Pesquisa do Norte e Nordeste – EPENN*, 2009b, p. 1-10.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **Aplicação da Sequência Fedathi na Identificação dos Extremos de Uma Função**. In: *19º Encontro de Pesquisa do Norte e Nordeste – EPENN*. 2009c, p. 1-10.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **A imagem conceitual e o conflito teórico computacional no ensino de continuidade de funções**. In: *V Congresso Internacional do Ensino da Matemática*, 2010a, p. 1-8. Disponível em: http://www.ulbra.br/ciem2010/convidados.htm

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **Uma discussão e análise das questões de Cálculo presentes no Exame Nacional de Cursos – ENADE: o caso dos cursos de Licenciatura**. In: *V Congresso Internacional do Ensino da Matemática*, 2010b, p. 1-8. Disponível em: http://www.ulbra.br/ciem2010/convidados.htm

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais**. In: XIII *Conferência Interamericana de Educação Matemática*. 2011a, p. 1-12.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. **Aplicação de uma metodologia de ensino do cálculo a várias variáveis: o caso do teorema de Clairaut-schwarz**. In: XIII *Conferência Interamericana de Educação Matemática*. 2011b, p. 13-23.

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo** (dissertação de mestrado em Educação Matemática), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007. 195p.

ANDRADE, L. N. **Introdução a Computação Algébrica com o Maple**, Rio de Janeiro, 2ª Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

APOSTOL, Tom. **Calculus**. v. 2, New York: Handcover, 1967.

ARENAS, J. C. **Un modelo de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límites de succiones, límites de funciones y derivadas através de Maple**. (libro electronico interactivo) (tesis de doctoral), Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2003, 230p.

ARSLAN, Salahattin. **L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?** (thése des mathematiques et sciences des techonologies). Grenoble : Université Joseph Fourier, 2005, 240p.

ARTIGUE, Michelle. **Ingénierie didactique**, In: BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-264.

ARTIGUE, Michelle. (2002). **Analysis**. In: TALL. D. *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Klumer Academic Publishers, 2002, p.

ARTIGUE, M. **Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário?**, *Boletín de La Asociatíon Venezolana*, v. 10, nº 2, 2003, p. 117-134.

ARTIGUE, Michelle. **Didactical Design in Mathematics Education**. In: *Proceedings of NORMA08 – Nordic Research in Mathematics Education*, 2009.

ATIYAH, M. F.; MACDONALD. L. G. **Introduction to Commutative Álgebra**. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

AYRES, F.; MENDELSON, E. **Schaum´s outline of Theory and Problems of Differential and Integral Calculus**, Third Edition, New York: McGraw-Hill, 1990.

AZCÁRATE, M. P. (2006). **Realismo e entidades abstractas: los problemas del conocimiento en matemáticas** (teses doctoral), Granada: Universidad de Granada, 2006, 321p.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de Collége** (thése de doctarat d´etat), Grenoble: Université Joseph Fourier, Vol. 1. 1988. 423p.

BARCHELARD, G. (1928). **Essai sur la connaissance approchée**, In: GUTTING, G. *Continental Philosophy of Science*, Nova York: Blackwell Publishing, 2005, pp. 176-185.

BARGUIL, Paulo.; BORGES NETO. H. **Memorial: motivações e contribuições para a formação do pedagogo**. In: *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. v. 1, 2010, p. 1-11.

BARROSO, Natália. Maria. C. (2009). **Um modelo de ensino dos conceitos do Cálculo para os cursos de Engenharia Fundamentada em uma Epistemologia Histórica e baseada numa metodologia da Engenharia Didática: validação por meio do conceito de integral** (tese de doutorado em Educação Matemática). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2009, 187p.

BARRETO, Marcília. Chagas. **O desenvolvimento do raciocínio matemático: algumas questões acerca do telensino cearense** (tese de doutorado em Educação). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2001.

BARUFFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral** (tese de doutorado em Educação), São Paulo: Universidade de São Paulo, 1999, 267p.

BASSOK, M. **Analogical Transfer in Problem Solving**, In: DAVIDSON, J. & STERNBERG, R **The Psychology of Problem Solving**, New York: Cambridge University Press, 2003, p. 343-369.

BERGSON, Henri. **Matter and Memory**. London: The Macmillan Company, 1911.

BERGSON, Henri. **Essai sur la relation du corps à l´esprit**. Paris: Presses Universitaires de France, 12º édition, 1939.

BERTRAND, J. **Blaise Pascal par Joseph Bertrand**, Paris: Calmant Lévy Editeur, 1891.

BIRAN, M. **Memoire sur la décomposition de la Pensée**. Paris: Presses Universitáires, 1952.

BISHOP, Alan. J. **Spatial Habilities in Mathematics Education – a review**, In: CLARKSON, P.; PREMEG, N. In: *Critical Issues in Mathematics Education*, New York: Springer, 2008, p. 71-83.

BISHOP, Alan. J. **Decision-making, the intervening variable, in Critical Issues in Mathematics Education**. In: *Major Contributions of Alan Bishop*, eds (2008). Philip Clarkson and Norma Presmeg, USA: Springer, 2008, p. 29-35.

BONNEL. J-F. **Essai sur les définitions géométriques**. Paris : Ch. Delagrave, 1871.

BOREL, E. **Les nombres inaccessibles**, Paris: Gauthier-Villards, 1952.

BOREL, E. **Logique et intuition en Mathématiques**, In : *Revue de La Métaphysique et de Morale*, Paris, 1905, p. 274-283.

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Students Understanding of Transformation of Functions Using Multi-Representational Software** (thesis de doctor). Cornell: Cornell University, 1993.

BORBA, Marcelo.; VILLAREAL, Mônica. **Human with-media and the reorganization of Mathematical Thinking: Modeling, Visualization and Experimentation**, New York: Springer, 2005.

BORGES NETO, H. **Uma classificação sobre a utilização do computador pela escola**. In: *Revista Educação em debate***.** FACED-UFC. Fortaleza, Ano 21, nº 37, 1999, p. 135-138.

BORGES NETO, Hermínio. et al. **A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**, *XV EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional Do Nordeste*, São Luis, 2001, p. 590-609.

BOS, H. J. **Origens e desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Editora de Brasília. 1985.

BOURBAKI, Nicolas. **Éléments d´Histoire des Mathematiques**. Paris: Masson, 1984.

BOUTROUX, E. **Études d´histoire de la Philosophie**, Paris: Félix Alcan Éditeur, 1908.

BOUTROUX, Pierre. **L´ideal scientifique des Mathématiciens dans l´antiquité et dans le temps modernes**, Paris: Félix Alcan Librarie. 1920.

BOYER, Carl. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**, New York: Dover Publications, 1949a.

BOYER, Carl. **The concepts of the Calculus: a critical and historical discussion of the derivative and the integral**. New York: Columbia University Press, 1959b.

BRÄTING, K. **Studies in Conceptual Development of Mathematical Analisis** (thesis), Uppsala: Uppsala University, Sweden, 2009.

BROCHARD, Victor. **De la croyance**. In : *Revue Philosophique*, IX année, nº 7, 1884, p. 1-23.

BROCHARD, Vicotor. **De l´erreur** (thése de doctorat), Faculté de Lettres de Paris, Paris: Germer Bailliere et Berger. 1879, 245p.

BROSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactiques des mathématiques 1970 – 1990**, London: Klumer Academic Publishers, 2002.

BROUSSEAU, Guy.; GIBEL, P. **Didactical Handling of Students´ reasoning processes in Problems Solving Situations**. In: LABORDE, C. GLORIAN, M. J. e SIERPINSKA, A. *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom*, Netherlands: Springer, 2005, p. 14-58.

BROUSSEAU, Guy. **Fondement et méthodes de la Didactiques des Mathématiques**. In: Brun, J. *Didactiques de mathématiques*, Paris: Délachaux et Niestlé, 1996, p. 45-142.

BRUN, J. **Didactiques de mathématiques**, Paris: Délachaux et Niestlé, 1996.

BUCK, R. C. **Advanced Calculus**, Second Edition, New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

BUFFET, Cécile. Ouvrier. **Construction de definitions/construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématriques** (thése de doctorat). Grenoble: Université Joseph Fourier, 2003, 345p.

BUNGE, Mario. *Intuitición y Rázon*, 1ª édition, Buenos Aires: Delbolsíllo, 1996.

BURTON, L. **The practices of mathematicians: what do they tell us about coming to know mathematics?** In: *Educational Studies in Mathematics*, v. 37. 1999, p. 121-143.

BURTON, Leone. **Mathematicians as Enquirers: learning about learning Mathematics**. New York: Klumer Academic Publishers, 2004.

BUTCHART, S. J. **Evidence amd Explanation in Mathematics** (thesis), Swedish: Monash University, 2001.

CALLAHAN, James. J. **Advanced Calculus: a geometric view**. New York: Springer, 2010.

CAJORI, F. **A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching**, London: Macmillan & Co. 1896.

CAJORI, Florian. **A history of elementary mathematics**. New York: Mcmillan Press, 1901.

CAJORI, Florian. **A History of Mathematics**. New York: Mcmillan Company. 1929.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**, 5ª edição, Lisboa: Lisboa Editora, 1970.

CARNEIRO, Vera. C. G. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática**. In: ZETETIKÉ. v. 13. 2005, p. 87-120.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limites: imbricações sobre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior** (tese em Educação), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008, 324p.

CELAYA-LIZARRÁGA, C.; SHINGAREVA, I. **Maple and Mathematica: a problem solving approach for Mathematics**, New York: Springer, 2007.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné**. 2nd édition. Grenoble : La Pensée sauvage. 1991.

CONDILLAC, A. **La langue de Calculs**, Paris: Imprimerie Houel, 1798.

COUTURAT, Louis. **De l´infinit mathematiques** (thése), 1896.

COUTURAT, Louis. **La logiques de Leibniz : d´après de documents inédits**. Paris : Felix Alcan, 1901.

COUTURAT, Louis. **Définitions et demonstrations mathématiques**, In : *L´enseignement Mathématique*, p. 1-23, v.7, 1905.

COURNOT, A. A. **Essai sur le Fondements de nos Connaissances et sur les caracteres de la Critique Philosophique**, Paris: Librarie Hachette, 1851.

CRUZ, Ines de Carmen. P. **Analisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos** (tesis de doctoral). Laguna: Universidad de la Laguna. 2000. 271p.

CUJÓ, Jorge. Arenas. **Um modelo de ensenanza aprendisaje de los conceptos de limites de suceciones, limites de funciones y derivadas através de Maple** (thesis en Educacion). Madrid: Universidad Conplutense de Madrid, 2003.

D´ALLANESE, Claudio. **Conceito de Derivada: uma proposta para o seu ensino e sua aprendizagem** *(dissertação em Educação* Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000, 156p.

D´ALLANESE, Claudio. **Argumentos e metáforas conceituais para a taxa de variação** (tese de doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica da São Paulo, 2006, 326p.

D`AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**, Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2007.

D´AVLOGIO, Armando. R. **Derivada de uma função no ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito** (dissertação de mestrado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2002, 179p.

DALLOB, P.; DOMINOWSKI, R. **Insight and Problem Solving**, In: DAVIDSON, J. e STERNBERG, R *The Nature of Insight*, MIT: Press, 1992, p. 127-156.

DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. **Teaching for Thinking**, Washington: American Psychological Association, 1996.

DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. **The Psychology of Problem Solving**, New York: Cambridge University Press, 2003.

DAVIS, Philiphe. e HERSH, Rueben. **L´Univers Mathématiques**, Paris: Gauthiers et Villars, 1985.

DELACROIX, H. **Les grands formes de la vie mentale**, Paris: Félix Alcan, 1934.

DESERTI, Francesca. ***Aspects of learning and understanding in Multivariable calculus*** (dissertation in Mathematics Education). Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology – MIT, 2002, 245p.

DEVLIN, K. **The Language of Mathematics: making the invisible visible**, New York: Freeeman and Company, 1998.

DEVLIN, Keith. **Sets, Functions and Logic: an introduction to abstracts mathematics**, third edition, New York: Chapmann e Hall, 2005.

DIAS, M. S. **Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica** (tese de doutorado em educação matemática), São Paulo: Universidade de São Paulo, 2007, 245p.

DIEUDONNÉ, Jean. **Pour l´honneur de l´esprit humain: le mathematique aujourd´hui**. Paris: Hachette, 1987.

DIEUDONNÉ, Jean. **A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960.** Berlin: Birkhäuseur, 1989.

DOUADY, Regine. **Jeux de cadres et dialetique outil-objet dans l´enseignement de mathématiques** (thése d´etat). Paris : Paris VII, 1984. 245p.

DREYFUS, T.; EISENBERG. T. **On different facets of mathematical thinking**. In R. J. STERNBERG; BEN-ZEEV. T. (Eds.), In: *The nature of mathematical thinking*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1996, p. 253-284.

DUBINSKY, Ed.; TALL. David. **Advanced Mathematical Thinking**. In : TALL. David. *Advanced Mathematical Thinking. Holland: Klumer Publishers*, 1991, p. 231-248.

DUPIN, J. J. e Joshua, S. **Introduction à la didactiques des sciences et des mathématiques**, Paris: Presses Universitaires de France, 1989.

DUVAL, Raymond ; PLUVINAGE, F. **Démarche individuelles de réponse en mathematiques**, In: *Educational Studies in Mathematics*, v. 5, 1977, p. 207-242.

DUVAL, Raymond. **Strutucture du raisonnement déductif e apprentissage de la démonstration**, In : *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1991, p. 233-261.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,** Editeur: Peter Lang, 1995a.

DUVAL, Raymond. **Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing**. In: *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education*. R. Sutherland e J. Mason. (Eds.), 1995b, p. 142-157.

DUVAL, Raymond. **Reasoning in Geometry: Geometry from a cognitive point of view**. In: MAMMANA. Carmelo. e VILLANI. Vinício. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the* 21^{st} *century*. London: Klumer Academic Publishers. 1998, p. 37-52.

DUVAL, Raymond. **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics**. Netherlands: Springer Verlag, v. 61, 2006, p. 103-131.

DUVAL, Raymond. (2011). **Ver e ensinar a Matemática de outra forma:** *entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem. v.1.

DREYFUS, Tommy.; EISENBERG, Theodore. **On the different facets of Mathematical Thinking**. In: STERBERG, David. e BENZ-ZEV, Talia. *The Nature of Mathematical Thinking*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996, p. 253-284.

ECHEVERRY, N. **La ensenãnza del concepto de limite: continuidad y rupturas entre los niveles médio y universitário** (tesis de doctoral), Universidad Nacional de Rio Cuarto, Córdoba, 2001, 345p.

EDWARDS, B. S., DUBINSKY, E.; MCDONALD, M. A. **Advanced Mathematical Thinking**. In: *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 2005, p. 15–25.

EHRLICH, M. F. **Text Comprehension and Memory for Inferences**, In: HOFFMMAN, J.; KLIX, F. *Cognition and Memory, Advances in Psychology*, Amsterdam: North-Holland Company, 1980, p. 186-202.

ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. Problem Books in Mathematics, New York: Springer, 1997.

ENNS, J. T. **The nature of selectivity en early Human Vision**. In: BURNS, B. *Percepts, Concepts and Categories: the representation and processing of information*, Advances in Psychology, Amsterdam: North Holland Publishers, 1992, p. 40-75.

ENNS, J. **The nature of selectivity in Early Human Vision**. In: BURNS, B. *Percepts, Concepts and Categories*. Advances in Psychology, 1992, p. 40-78.

ERNEST, Paul. **The Philosophy of Mathematics Education**. Londres: Palmer Press.

FAINETEAU, H. **La Perception Kinesthésique des Distances** (thése de doctorat), Université de Géneve, 2004, 345p.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. **History in Mathematics Education,** ICMI Study, Netherlands: Klumer Academic Publishers, 2000.

FISCHBEIN, Efrain. **Image and Concept in learning mathematics**. In: *Educational Studies in Mathematics*. v. 8, 1977, p. 153-165.

FISCHBEIN, Efrain; TIROSH, Dina.; MELAMED, U. **Is it possible to mesure the intuitive acceptance of a mathematical statement?** In: *Educational Mathematics Studies*, 1981, p. 491-512.

FISCHBEIN, Efrain. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**, Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987.

FISCHBEIN, Efrain. **The theory of Figural Concept**. In: *Educational Mathematics Studies*, Netherlands: Klumer Academic Publishers, 1993, p.139-162.

FISCHBEIN, E.; MARIOTTI, M. **A. Defining in Classroom Activities**. In: *Educational Studies in Mathematics*. v. 34, 1997, p. 219-248.

FISCHBEIN, Efrain. **Psychology and Mathematics Education**. In: *Mathematical, Thinking and Learning*, London: Lawrence Erlbaum Associates, 1999, p. 47-58.

FISCHBEIN, Efrain.; BALTSAN, Madlen. **The mathematical concept of the set and the 'collection' model**. In: *Educational Mathematics Studies*, 1999, p. 1-22.

FISCHBEIN, Efrain. **Psychology and Mathematics Education**. In: *Mathematical, Thinking and Learning*. 2000, p. 47-58.

FISCHBEIN, Efrain. **Tacit models and Infinity**, In: *Educational Mathematics Studies*, 2001, v.24, 2001, p. 309-329.

FISCHBEIN, Efrain. **The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in Mathematical Activity**, In: BIEHLER. R. *Didactics of Mathematics as a Scientifique discipline*, Mathematics Educational Library, v. 13, New York: Klumer Academic Publishers, 2002a, p. 323-245.

FOWLER, D. **The Mathematics of Plato´s Academy: a new reconstruction**, Second Edition, Oxford: Clarendon Press, 1999.

FRERY, Alexandro; GOMES. Jonas e VELHO. Luis. **Image processing and computer graphics and visio***n*. Second Edition. New York: Springer, 2009.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**. London: Klumer Academic Publishers, 2002.

FREUDENTHAL, Hans. **Didactical Phenomenology of Mathematical structur***es*, New York: Klumer Academic Publishers, 2002.

FREKSA, C.; BARKOWKY, T. **On the duality and on the integration of propositional and spatial representations**, In: RICKHEIT, G. e HABEL, C. Mental models discourse processing and reasoning, *Advances in Psychology*, Amsterdam: Elsevier, 1999, p. 34-47.

FREUDENTHAL, H. **Weeding and Sowing: preface to a Science of Mathematics Education**, New York: Klumer Academic Publishers, 2004.

GARCIA, Alfonsa. et al. **Diferential Calculus of Several Variables with MATHEMATICA and Maple**. In: *Proceedings of PME*, 2006, p. 1-15.

GARCIA, José. J. **La comprénsion de las represenciones gráficas cartesianas** (tese de doctoral en Ciencias de la Educacion). Granada: Universidad de Granada, 2005, 320p.

GARVAN, Frank. **The Maple Book**. London : Chapman e Hall, 2002.

GHEDAMSI, Imene. **Enseignement du début de l´analyse réelle à l´entrée à l´université** (these). Bordeaux: Université Bordeaux 2, 2008, 264p.

GHORPADE, Sudhir. R. e LIMAVE, Balmohan. V. **A Course in Multivariable Calculus**. New York: Springer, 2010.

GIAQUINTO, M. **The Visual Thinking in Mathematics: an epistemological study**, Oxford: University Press, 2007.

GIBEL, Patrick.; BROUSSEAU. Guy. **Didactical handling of Student´s Reasoning Process in Solvind Problem Situations**. In: LABORDE. C.; PERRIN-GLORIAN. M. J. e SIERSPINSKA. Anna. *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classrrom*. New York: Springer, 2005, p. 13-58.

GIRALDO, V. **Magnificação Local e Conflitos Téorico-Computacionais. Exame de qualificação**, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2001.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada**. (tese de doutorado), Rio de Janeiro: COOPE, 2004.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. **Descrições e conflitos teóricos-computacionais: o caso da retidão local**, In: *II Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática*, 2003, p. 1-10.

GIRALDO, V., CARVALHO, L. M.; TALL, D. O. **Theoretical-Computational Conflicts and the Concept Image of Derivativ**e. In: *Proceedings of the BSRLM Conference*. Nottingham, England, 22 (3), 2002, p. 151-162. .

GIRALDO, V., CARVALHO, L. M.; TALL, D. O. **Descriptions and Definitions in the Teaching of Elementary Calculus**. In N.A. PATEMAN, B.J. DOUGHERTY and J. ZILLIOX (Eds.) In: *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, , 2003, p.445-452, Honolulu, USA.

GOMES, Maria. L. **Quatro visões iluministas sobre a educação matemática: Diderot, D'Alembert, Condillac e Condorcet** (tese de doutorado em Educação). Campinas: Universidade de Campinas, 2003, 342p.

GOMEZ, C; SALVY. B.; ZIMERMMANN, P. **Calcul Formel: mode d´emploi exemples en Maple**. Paris: Masson, 1995.

GRABINER, J. V. **The Origins of Cauchy´s Rigorous Calculus**. New York: Dover Publications, 1981.

GRABINER, J. V. **Who gave you the Epsilon? Cauhy and the Rigorous Calculus**, In : *Who gave you the Epsilon? And Other Talles of Mathematical History*. New York: Mathematical Association of America, 2009, p. 5-14.

GRATTAN, G. I. **The development of the Foundations of Mathematical Analisys from Euler to Riemann.** Massachusetts: MIT Press, 1970.

GRATTAN, Guiness. I. **The Search for the mathematical roots – 1870/1940**. Oxford: Princeton University Press, 2000.

GRUBER, H.; BÖDEKER, K. **Creativity, Psychology and History of Science**, Netherlands: Springer, 2005.

GRUBER, H. **Insight and Affect in the History of Science**, In: DAVIDSON, J. e STERNBERG, R. *The Nature of Insight*, MIT: Press, 1992, p. 256-287.

GRUGNETTI, L. e ROGERS, L. **Philosophical, multicultural and interdisciplinary**. In: FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. *History in Mathematics Education*, London: Klumer Academic Publishers, 2000, p. 39-61.

GUERRIER, V. D. **Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonement mathématiques** (habilitation de recherche), Lyon: Université Claude Bernard Lyon I, 2005, 234p.

GUIDORIZZI, H. (1986). **Um curso de Cálculo**, vol.2, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

HADAMARD, J. **An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field**, United Kingdom: Dover Publications, 1945.

HAIRER, E.; WARNER, G. **Analysis by Its History**, New York: Springer, 2008.

HAMBRICK, D.; ENGLE, R. **The Role of Working Memory in Problem Solving**, In: DAVIDSON, J.; STERNBERG, R *The Psychology of Problem Solving*, New York: Cambridge University Press, 2003, p. 176-206.

HANNA, R. **Kant and The Foundations of Analytic Philosophy**, Oxford: Oxford University Press, 2001.

HAREL, G. e KAPUT, J. **The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts**. In: Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking*, London: Klumer Academic Publishers, 2002, p. 82-94.

HARDY, Nadia. **Students´ perceptions of of institucional practices: the case of limits of functions in college level Calculus courses**. In: *Educational Mathematics Studies, Netherlands*: Springer Verlad, 2009, p. 341-358.

HEINZMANN, Gerard. **Intuition, History and Simbolic construction**. Départmant de Philosophie, Laboratoire de Philosophie et d`Histoire, 2005, p. 1-19. Disponível em:http://poincare.univnancy2.fr/digitalAssets/74756_intuition_history_symbolic_construction.pdf

HENRIQUES, Afonso. **L´enseignement et l´apprentissage des integrales multiples: analyse didactique integrant l´usage du logiciel Maple** (Thèse de Doctorat), Grenoble: Université Joseph Fourier, IMAG, 2006, 320p.

HERCULINO, Afonso. O. **A noção de integral no contexto das concepções operacional e estrutural** (dissertação de mestrado em Educação Matemática), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2004, 234p.

HERSH, Reuben. **What is Mathematics, Really?** New York: Oxford University Press, 1997.

HERSHKOWITZ, R. et al. **Mathematics Curriculum Development for Computerized Environments**: *A Designer– Researcher–Teacher–Learner Activity,* In: English, L. D. *Handbook of Research in Mathematics Education*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2002, p. 657-694.

HILBERT, D. **Sur les Problèmes Futur de Mathèmatiques**, In : *Compte Rendu du Deuxième Congrés Internacional de Mathematiciens*, Paris: Gauthier-Villars, 1902, p. 58-114.

HILBERT, D.; COHN-VOSSENN, S. **Geometry and Imagination**, New York: Chelsea Publishing Company, 1952.

HOEFER, F. **Histoire des mathématiques: depuis leur origine jusqu´au commencement du dix-neuvième siècle**, Paris: Librarie Hachette, 1874.

IMAFUKU, R. S. **Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis** (dissertação de mestrado), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008, 235p.

INDOW, Tarow. **The global structure of visual space**. New Jersey: World Scientific, 2004.

JAGNOW, R. **Edmund Husserl on the Applicability of Formal Geometry**, In: Carson, E.; Huber, R. *Intuition an the Axiomatic Method*, Netherlands: Springer, 2006.

JIMENEZ, Edelmira. R. **La derivada como objeto matemático y como objeto de ensenanza y aprendizaje en profesores de matemática de colombia** (tesis de doctoral). Barcelona: Universidad Autonoma de Barcelona, 2003, 324p.

KAPLAN, Wilfred.; LEWIS. Donald. **Calculus and Linear Algebra**. New York: Donald Publication, 1970.

KARRER, Mônica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica** (tese em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006, 435p.

KITCHER, P. **The Nature of Mathematical Knowledge**, Oxford: Oxford University Press, 1984.

KLINE, M. **Why the professor Can´t Teach**. New York: St. Martin´s Press, 1977.

KLINE, M. **Mathematics and the search for the knowledge**, Oxford: University Press, 1985.

KLEIN, F. **On mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to applied sciences**, In: *Evanston Colloquium*, 1893, p. 225-233.

KLEIN, F. **Conférences sur les Mathématiques**, Paris: Librarie Scientifique Hermann, 1898.

KLEIN, F. **On the structure and Function of Semantic Memory**, In: HOFFMANN, J.; KLIX, F. *Cognition and Memory, Advances in Pshychology*, Amsterdam: North-Holland Company, 1980, p. 11-26.

KIMCHI, R. e GOLDSMITH, M. **Structure and Process in Perceptual Organization**. In: BURNS, B. *Percepts, Concepts and Categories: the representation of processing of information*. Advances in Psychology, London: North-Holland, 1992, p. 123-145.

KLIX, F. **On Structure and Function of Semantic Memory**. In: KLIX. F.; HOFFMANN. J. *Cognition and Memory*. New York: North Holland Publishing Company, 1980, p. 11-27.

KOSSLYN. Stephen. **Image and Brain: the resolution of the image debate**. New York: Bradford Books, 1996.

KOTCHOUBEY, B. **What do Event-related Brain Potentials Tell us about the Organization of Action**, In: JORDAN, J. S. *Systems Theories and a priori aspects of Perception, Advances in Pychology*, Amsterdam: Elsevier, 1998, p. 209-258.

KRÖMER, R. **Tool and Object: a history of Category Theory**, Berlin: Birhäuser, 2007.

KUKLA, F. **Components Analysis of the Recognition of Semantic Relations Between Concepts**, In: HOFFMAN, J.; KLIX, F. *Cognition and Memory, Advances in Pshychology*, Amsterdam: North-Holland Company, 1980, p. 169-176.

LACHELIER, J. **Du fondement de L´induction**, Paris: Felix Alcan Editeur, 1896.

LACROIX, S. F. **Essais sur L´enseignement em general et sur celui de Mathématiques**, 4º édition, Paris: Bachelier Imprimeur Libraire. 1838.

LANG, Serge. **Calculus in Several Variables**. New York: Springer, 1971.

LAKATOS, I. **Mathematics, Science and Epistemology: philosophical papers**, v. 2, London: Cambridge University Press, 1976.

LAKATOS, I. **Mathematics, Science and Epistemology: philosophical papers**, v. 2, London: Cambridge University Press, 1978.

LEE, O. T **Use of the Ritual Metaphor to describe the practice and acquisition of mathematical knowledge** (thesis de doctoral), Australia: Curtin University of Technology, june, 2007. 245p.

LEITHOLD, Luois. **O Cálculo**. v. 2, 3ª edição, São Paulo: Editora Harbra, 1999.

LIARD, Louis. **Des définitions géométriques et des définitions empiriques**. Paris: Librarie Philosophique de Ladrange, 1873.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, v. 2, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, v. 1, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

LE ROY, E. **The New Philosophy of Henri Bergson**, London: Williams and Norgats, 1913.

LOHAMN, D. F. Reasoning Abilities, In: STERNBERG, R. J.; PRETZ, J. **Cognition & Intelligence: identifying the Mechanisms of the Mind**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005, p. 225-250.

LUBART, T.; MOUCHIROUD, C. ***Creativity: A Source of Difficult in Problem Solving***, In: DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. The Psychology of Problem Solving, New York: Cambridge University Press, 2003, p. 127-148.

MADDY. Penelope. **Realism in Mathematics**. Oxford : Oxford Press, 2003.

MAMONA-DOWNS, J.; MAMONA, D. M. **Advanced Mathematical ThinkingWith a Special Reference to Reflection on Mathematical Structure**, In: ENGLISH, L. D. *Handbook of Research in Mathematics Education*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2002, p. 165-195.

MAROGER, G. **Essai sur les conditions et de limites de la Certitude Logique**, 2e édition, Paris: Félix Alcan Éditeur, 1898.

MARIANI, R. C. P. **Transição da Educação Básica para o ensino superior: a coordenação de registros de representação semiótica e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no Curso de Cálculo** (tese de doutorado em educação matemática), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2006, 213p.

MARIN, D. **Contribution a une réflexion sur l´idée du vrai dans l´enseignement des mathématiques en classes de quatrième et troisième de collège** (thèse de doctorat), Lyon : Université Lyon II, 2003, 223p.

MARIOTTI, M. A. **The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning**, In: ENGLISH, L. D. *Handbook of Research in Mathematics Education*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2002, p. 695-723.

MARQUES, Leandro. **Sobre a utilização do livro didático no estudo de derivadas** (dissertação em Educação Matemática – mestrado profissional). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2009, 178p.

MARTINS, Custódio. T. **Uma engenharia didática para explorar o aspecto de processo dinâmico presente nos algoritmos** (tese de doutorado em educação matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010, 294p.

MARTINEZ-PLANELL, Rafael; GAISMAN. Maria. Trigueros. **Student´s ideas on functions of two variables: domain, range and representations**. In: *Proceedings of 31st annual meeting of Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University. 2009, p. 73-80.

MARTINEZ-PLANELL, Rafael; GAISMAN. Maria. Trigueros. **Geometrical representations in the learning of two-variable functions**. In: *Educational Studies in Mathematics*, 73, 2010, p. 3-19.

MATTUCK, Arthur. **Introduction to Analysis**. Massachusetts: MIT Press, 1999.

MAURICE, L. **Les idées d´élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir le zero et l´infini** (thése de doctorat), Québec: Université Laval, 2000.

MAYER, R. E. **Thinking, problem solving, cognition**. In: STERNBERG, R.; DAVIDSON, J. *The Nature of Insight*, MIT: Press, 1992, p. 3-32.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral: uma proposta computacional para o seu ensino e aprendizagem** (dissertação de mestrado em educação matemática), Pontifícia Universidade Católica: PUC/SP, 2002, 197p.

MILL, J. **Analysis of the phenomena of the human mind**, v. 1, London: Longmans, 1869.

MILL, J. S. **Système de Logique: deductive et inductive**, 3 édition, Tome I, Paris: Félix Alcan, 1889.

MILLAUD, G. **Le rationnel: etude complementaire à l´essai sur la certitude logique**, Paris: Félix Alcan Éditeur, 1898.

MILLAUD, G. **Nouvelles etudes sur l´histoire de la pensée Scientifique**, Paris: Félix Alcan Éditeur, 1911.

MILLAUD, G. **Le rationnel: etudes complementaires à l´essai sur la certitude logique**, Paris : Ancienne Librairie Germer Baillière et Félix Alcan, 1898.

MORAIS, S. R. **O papel das representações mentais na percepção-ação: uma perspectiva crítica** (tese de doutorado em educação matemática), Marília: Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, 2006, 234p.

MURPHY, Teri. GOODMAN. Russell.; WHITE. Jonathan. J. **Using the WWW in Multivariable calculus to Enhance the Visualization**. In: *Journal of Engineer*, v. 6, 1999, p. 425-431.

NARDI, E. **Amongst the Mathematicians: teaching and learning at university level**. United Kingdon: Springer, 2008.

NORMAN, A. J. **Visual reasoning in Euclide´s Geometry** (philosophy thesis), London: University College of London, 2003. Disponível em: http://sas-space.sas.ac.uk/dspace/bitstream/10065/1121/1/Jesse+Norman+-+PhD+Thesis.pdf

OLIVEIRA, A. H. **A noção de integral no contexto das concepções estrutural e operacional** (dissertação de mestrado educação matemática), Pontifícia Universidade Católica: PUC/SP, 2004. 213p.

O´HALLOREN, K. L. O. **Mathematical Discourse: language, symbolism and visual images**. London: Continuum, 2005.

ORTON, A. **Students´ understanding of Differentation**. In: *Educatinal Mathematical Studies*. Netherlands: Reidel Publishing Company, 1983a, p. 235-250.

ORTON, A. **Student´s understanding of integration**. In: *Educational Studies in Mathematics*, 1983b, p. 1-18.

OTTE, M.. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à Filosofia e a Didática da Matemática**, São Paulo: UNESP Editora, 1991.

OTTE, Michael. **Metaphor and Contingency**. In: RADFORD. Luis.; SCHUBRING. Gert e SEEGER. Falk. (eds). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture*, 2008, p. 63-85.

PAIVIO, Allan. **Mental Representations: a dual coding approach**. Oxford: Oxford University Press, 1990.

PARSONS, C. **Mathematical Thought and its Objects**, Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

PERJÉSI, Ildikó. H. **Application of CAS for teaching of integral-transforming theorems**. In: *International Journal of Mathematical Education*. v. 35, 2001, p. 20-23. p. 43-47.

PESCE, Cecília C. **Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demonstraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral** (tesis de doctoral). Barcelona: Universitar Autonoma de Barcelona, 2001, 245p.

PINTO, Marcia. F. **Students understanding of real analysis**. (Thesis of doctor of philosophy), Warwick: University of Warwick, 1998, 245p.

POINCARÉ, H. **La logique et l´intuition dans la science mathématique**, L´enseignement Mathématique, v. 1, 1899, p. 158-162.

POINCARÉ, Henri. **Les definitions générales en mathematiques**, In: *L´enseignement Mathematique*, v.6, 1904, p. 257-283.

POINCARÉ, Henri. **La valeur de la Science***,* Paris: Ernest Flammarion, 1905.

POINCARÉ, H. **Science et Méthode, Oeuvres Philosophique de Henri Poincaré**, Paris: Ernest Flammarion, 1908.

POINCARÉ, H. **Science and Method**, New York: Dover Publication, 1952.

POLYA, George **How to solve it: a new aspect of mathematical method**, Second edition, Princeton: University Press, 1945.

POLYA, George. **Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving**, New York: John Wiley and Sons, 1962.

POLYA, George. *Collected Papers:* **Probability, Combinatorics, Teaching and Learning in Mathematics**, v.4 , London: MIT Press, 1982.

PRAT, O. F. **Perceptual demonstrative and attention: Conceptual and Epistemological aspects of perceptual consciousness** (tesis de doctoral), Barcelona: University of Barcelona, jully, 2002, 312p.

PUECH, Nicolas. **Maple: regles et fonctions essentielles**. Paris: Springer-Verlag, 2009.

PUTZ, John. F. **Maple Animation**. London: Chapman & Hall, 2003.

QUENNEAU, Raymond. **Mathematiciens, précurseurs encyclopédiste**. Paris: Hermann Editeurs, 1978.

RALHA, E. HIRST, Keith.; VAZ, Olga. **A portuguese study on Learning Concepts and Proofs: Multivariable Calculus and Mathematica**. In: *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education*, 2002, p. 1-12.

REBUSCHI, Manoe. **Peut-on dire c´est qui n´est pas? Objets mathematiques et autres fiction: sémantique et ontology** (thése de doctorat). Nancy: Université de Nancy II, 2000, 235p.

REVUZ, André. **Les pièges de l´enseignement des Mathématiques**. In: *Educational Mathematics Studies*, Dordrecht-Holland: Reidel, 1968, p. 313-36.

REVUZ, André. **La notion de continuité dans l´enseignement du second degree**. In: *Educational Studies in Mathematics*. v. 4, 1972, p. 281-298.

RIBENBOIM, P. **My numbers, My friends: popular lectures in Number Theory**, New York: Springer, 2000.

ROBADEY, Anne. **Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systeme dynamiques** (thése de doctorat). Paris: Université Dennis Diderot, 2006, 367p.

RUFFIEUX, C. **La naissance du concept de structure algébrique en Grand-Bregtagne dans la prémiere moitiè du** 19ème **siecle: influence des philosophes L´école Écossaise du Sens Cumun** (these de doctorat en didactiques), Université de Genêve, 2005, 287p.

RUSSELL, Bertrand. **An inquiry into Meaning and Truth**, London: George Allen, 1940.

RUSSELL, Bertrand. **The Analysis of the Mind**, London: The Macmillan Company, 1921.

SAURIAU, Paul. **Théorie de L´invention**. Paris: Félix Alcan, 1881.

SCHWARZENBERGER, R. L. E.; TALL, D. **Conflicts in Learning of Real Numbers and Limits**, In: *Mathematics Teaching*, nº 82, 1978, p. 44-49.

SEIFERT, C. et al. **Demystification of cognitive insight: opportunistic assimilation and the prepared-mind perspective**, In: DAVIDSON, J. e STERNBERG, R. *The Nature of Insight*, MIT: Press, 1992, p. 235-274.

SHAPIRO, S. **Thinking about mathematics: the philosophy of mathematics**, Oxford: Oxford University Press, 2000.

SIERPINSKA, A. **Humanities students and epistemological obstacle related of limits**. In: *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands: Reidel Publishing Company, v. 18, 1987, p. 371-397.

SIERPINSKA, A. **Understanding in Mathematics**, London: The Palmer Press, Studies in Mathematics Education, 1994.

SILVA, F. R. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professor e pesquisadores e autores de livros** (tese de doutorado em educação matemática), Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001, 278p.

SIMMONS, G. F. **Calculus Gems: brief Lives and memorable mathematics**, New York: McGraw-Hill, 1992.

SHINGAREVA, Inna.; LIZARRÁGA-CELAYA, Carlos. **Maple and Mathematica**. New York: Springer Verlag, 2007.

SMITH, S. **Getting Into and Out of Mental Ruts: A theory of Fixation, Incubation, and Insight**, In: DAVIDSON, J. e STERNBERG, R. *The Nature of Insight*, MIT: Press, 1992, p. 123-145.

SOUZA, Vera. Helena. H. **O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica** (tese de doutorado em educação matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008, 238p.

SOUZA, Maria. J. A. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino de Geometria mediado pelas tecnologias digitais** (tese de doutorado em educação). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2010, 223p.

SPIVAK, Michael. **Calculus: infinitesimal calculus**. New York: Benjamin. C. 1996.

STEDALL, J. **Mathematics emerging: a sourcebook 1540-1900**. Oxford: Oxford University Press, 2008.

STEWART, D. **Elements of the Philosophy of the human mind**, v. 2, Boston: Welland Lilly, 1821.

STEWART, D. **Esquisse de Philosophie Morale**, Paris: Chez a Jouanneau – Librairie, 1826.

STUART, J. Mill. **Système de Logique deductive et inductive: exposé de principe de prevue et de métheodes de recherche scientifique**, 3e édition, Tome I, Paris: Félix Alcane, 1889.

STEWART, J. **Cálculo**, v. 2, 4ª edição, São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2004.

STEWART, D. **Elements of the Philosophy the Human Mind**, Boston: Wells and Lilly, 1821.

SWOKOWSKI, Earl. W. **Calculus with Analytic Geometry**. Boston: Prindle, Weber e Schmidt, 1983.

TABAK, John. **Algebra: sets, symbols, and the language of thought**. London: Facts on File, 2004.

TALL, D. **Mathematical Intuition with special reference to limiting process**. In: *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 1980, p. 170-176.

TALL, David.; VINNER, Slomo. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity**, In: *Educational Studies in Mathematics*, (12), 1981, p. 151-169.

TALL, D. **Chords, Tangents and the Leibniz Notation**. In: TALL. David e RAMOS. J. P. Reflecting on Post-Calculus-Reform. Plenary for *Topic Group 12: Calculus, International Congress of Mathematics Education*, Copenhagen, Denmark, 1985, p. 1-14.

TALL, David. **Concept Image and Concept Definition**, In: *Senior Secondary Mathematics Education*, 1988, p. 37-41.

TALL, D. **From School to University: the effects of learning styles in the transition from elementary to advanced mathematical thinking.** In: THOMAS, M. O. J. (Ed.) *Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference*, University of Auckland, 1997, p. 9-26.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Mathematics Education Library, v. 11, London: Klumer Academic Publishers, 2002.

TALL, D. e WEST, B. **Graphic Insight into Mathematical Concepts**, In: *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, 1986, p. 101-119.

TARSKI, A. **Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Science**, 4º edition, Oxford Logic Guides, nº 24, Oxford: Oxford University Press, 1994.

TAYLOR, Angus. e MANN. Robert. W. **Advanced Calculus**. New York: John Wiley. e Sons, 1983.

THAU, M. **Consciousness and Cognition**, Oxford: Oxford University Press, 2002.

TIESZEN, R. **Consciousness of Abstract Objects***, In:* SMITH. D. e THOMASSON. *A. Phenomenology and Philosophy of the Mind*, New York: Oxford University Press, 2005, p. 183-200.

TOULMIN, E. S. **The uses of Arguments**, New York: Cambridge University Press, 1958.

TRICK, Lana, M. **The nature and origins of mathematical skills**. In: (Org). CAMPBELL, J. D. *Advances in Psychology*, v. 91, 1992, p. 257-300.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequencia didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional** (tese de doutorado em educação), Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina, 2005, 310p.

VAN MOER, A. **Logic and Intuition in Mathematics and Mathematics Education**, In: François, K. e Bendegem, J. P. *Philosophical Dimensions Mathematics Education*, Springer, Belgium, 2007, p. 159-179.

VINNER, Slhomo. **The naïve concept of definition in Mathematics**. In: *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht-Holland: Reidel Publishing Company, 1976, p. 413-429.

ZASLAVSKY, O. **Seizing the opportunity to create uncertainty in Learning Mathematics**. In: *Educational Mathematics Studies*, Netherlands: Klumer Academic Studies, 2005, p. 297-321.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via seqüência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional** (tese de doutorado em educação), Santa Catariana: Universidade Federal de Santa Catarina, 2005, 215p.

WADE, William. R. **An introduction to Analysis**. New York: Prentice Hall, 2004.

WIDER, D. **Advanced Calculus**. New York: Prentice Hall, 1947.

WILDER, R. L. **Axiomatic and development of creative talent**, In: BROUWER, L. J. BETH, E. W.; HEYTHING. A. *Studies in The Logic and Foundations of Mathematics*, Holland: Publishing Company, 1959, p. 474-488.

WREDE, Robert.; SPIEGEL. Murray. R. **Advanced Calculus: Schaum´s outline**. New York: Mc-Grill Hill, 2010.

WU, Szu-Hui.; YU. Chi-Jer. **Visually assisted learning in multivariable calculus: the cases of continuity and differentiability**. In: *Proceedings of International Conference of computers in Education*. Taiwan: National Central University, 2008, p. 925-932.

YERUSHALMY, M.; CHAZAN, D. **Flux in School Algebra: curricular change, graphing technology, and research in the student´s learning and teacher knowledge**, In: ENGLISH, L. D. *Handbook of Research in Mathematics Education*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2002, p. 725-755.

ANEXOS

Anexo I: Roteiro das entrevistas.

Aplicamos o seguinte roteiro de questões adaptadas às situações-problema que exibimos no Capítulo

a) Trechos do roteiro das entrevistas dos alunos com respeito à noção de curva parametrizada.

i) Você consegue identificar nos gráficos retas tangente horizontais e verticais? Marque nos desenhos?

ii) Você consegue relacionar estas condições com as condições estudadas no CUV?

iii) Você consegue indicar aonde teremos retas tangentes horizontais e verticais somente pelo gráfico?

b) Trechos do roteiro das entrevistas dos alunos com respeito à noção de limite e continuidade.

i) Pelo gráfico, podemos inferir que o limite existe ou não?

ii) Pelo gráfico, podemos inferir se a função está definida na origem?

iii) Pelo gráfico, podemos inferir se a imagem da função é limitada ou não na origem?

c) Trechos do roteiro das entrevistas dos alunos com respeito à noção de diferenciabilidade.

i) Pelo gráfico, podemos inferir se a função é diferenciável? Explique?

ii) Pelo gráfico, podemos inferir se a função pode ser aproximada localmente por um plano?

d) Trechos do roteiro das entrevistas dos alunos com respeito à noção de pontos extremantes.

i) Pelo gráfico, podemos inferir que a função apresenta um ponto de máximo local?

ii) Pelo gráfico, podemos inferir que a função apresenta um ponto de mínimo local?

iii) Pelo gráfico, podemos inferir que a função apresenta um ponto que nem é máximo e nem é mínimo?

iv) Nada se pode afirmar a partir do comportamento do gráfico?

v) É possível aplicar o teste da Hessiana fora da origem?

vi) Pelo comportamento do gráfico, identificamos pontos de inflexão na fronteira desta superfície? Com se comportam as derivadas da função na fronteira?

vii) Pelo comportamento do gráfico, identificamos pontos extremos na fronteira desta superfície?

e) Trechos do roteiro das entrevistas dos alunos com respeito à noção de integral múltipla.

i) A partir do gráfico fornecido pelo computador, é possível identificar visualmente os limites integração no plano?

ii) A partir do gráfico fornecido pelo computador, é possível identificar visualmente os limites integração no eixo oz?

iii) Como você identificou estes limites de integração? Explique algebricamente?

iv) Como você identificou estes limites de integração? Explique baseando-se no gráfico exibido pelo computador.

f) Trechos do roteiro das entrevistas dos alunos com respeito à noção de *transição interna* do CUV para o CVV.

i) Em sua opinião, as ideias que você estudou no CUV foram estudadas e aplicadas nesta disciplina (CVV)?

ii) Qual sua interpretação geométrica da noção de limite? Explique, descreva, use um desenho.

iii) Qual sua interpretação geométrica da noção de derivada? Explique, descreva, use um desenho.

iv) Qual sua interpretação geométrica da noção de integral? Explique, descreva, use um desenho.

v) Você estuda demonstrações no CVV? Acredita e as compreende bem?

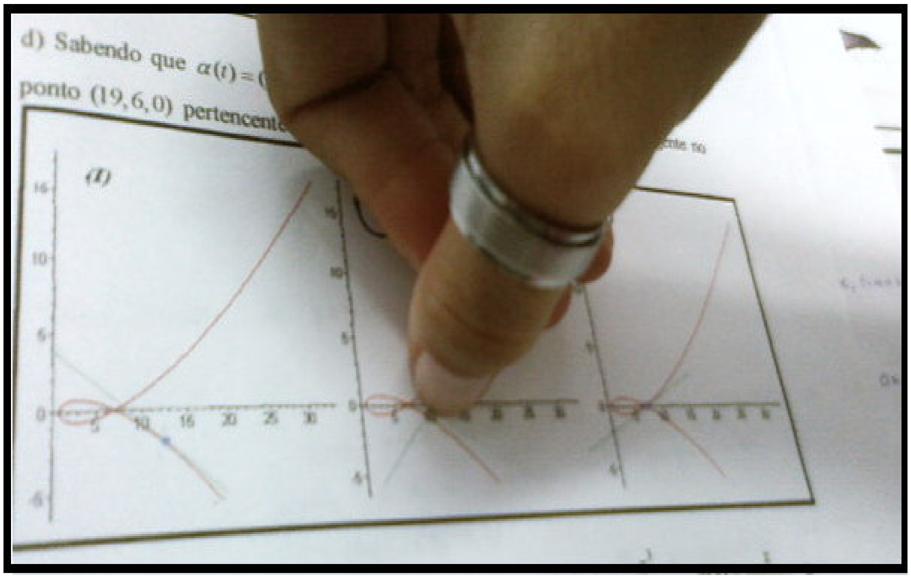
vi) Comparar o que você estudou no CUV com o CVV.

Anexo II: Dados das entrevistas dos alunos

Nesta parte do trabalho exibimos o restante das entrevistas semi-estruturadas obtidas a partir dos **alunos 8, 15, 17** e **23**, ao decorrer das fases de aplicação da *Sequência Fedathi*. Reparamos que os trechos destacados em **fonte vermelha** são referentes ao registro e identificação das categorias intuitivas desejadas ao decorrer de cada fase da sequência de ensino.

I) *Tomada de posição*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

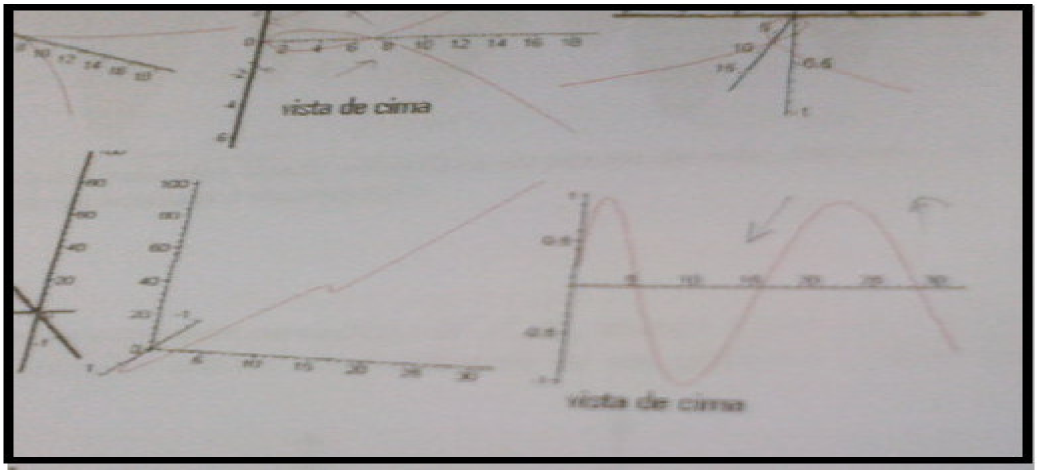
Na fase de *tomada de posição* da *Sequência Fedathi*, os alunos foram estimulados à interpretar e descrever as propriedades extraídas a partir de registros gráficos em 2D exibidos no documento escrito. Na imagem abaixo, o **aluno 8**, apoiado na percepção das propriedades, buscou identificar a presença de tangentes horizontais e tangentes verticais. O **aluno 8** não recorreu ao tratamento de registros.



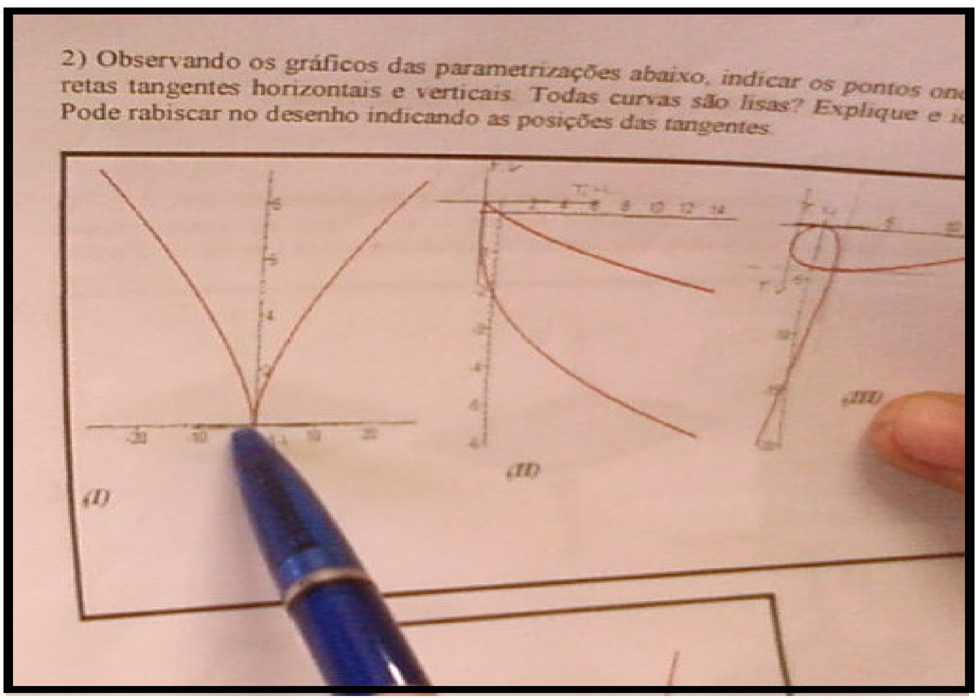
De modo recorrente, os alunos manifestavam dificuldades na identificação visual das retas tangentes horizontais e verticais, como registramos na imagem acima do **aluno 8**. Por outro lado, por meio da mediação apoiada nos pressupostos da *Sequência Fedathi*, evitamos o emprego precipitado dos registros semióticos de natureza algébrica e a aplicação automática de regras operacionais que escondem o significado geométrico. Neste sentido, o **aluno 15** forneceu o seguinte depoimento.

> Ela passa duas vezes nesse ponto...qual a dificuldade na construção do gráfico....A dificuldade é tudo...na hora da construção....A tangente ai da paralela ao eixo Ox mas ai quando $t = -1$ a tangente é paralela ao eixo Ox. Ai ela vem por aqui e volta a subir...e cruza duas vezes no ponto onde temos duas tangentes. Para mim é ruim visualizar como o gráfico tem que sair.....eu seu que vai ter que subir e tal mais colocar no papel é difícil....

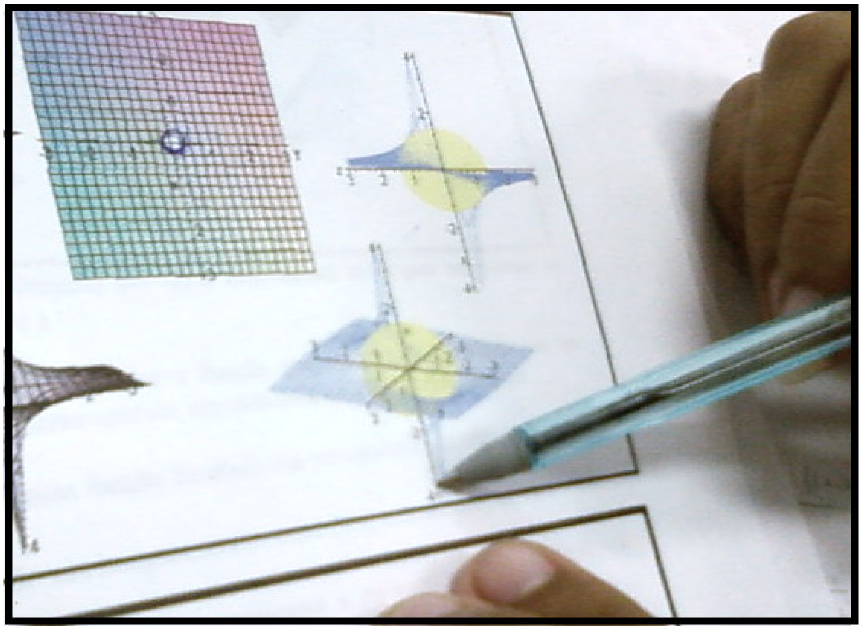
Note-se que o **aluno 15** admite as dificuldades e restrições em divisar as propriedades geométricas de registros em 2D. Na fase de *maturação*, os alunos dispõem do aparo computacional. No que segue o **aluno 17** realizou a analise estritamente visual do comportamento do gráfico presente na atividade 2.



Na figura acima identificamos sua interpretação dinâmica do registro de representação gráfico em 2D. No item subseqüente, o **aluno 17** investigou a presença de retas tangentes horizontais e verticais.



No que se refere à atividade 2, na imagem abaixo, o **aluno 17** analisou o caráter limitado/ilimitado da imagem da função $\frac{1}{x^2+y^2}$, condição apenas necessária para a existência de limites e pouco explorado pelos livros que consultamos.

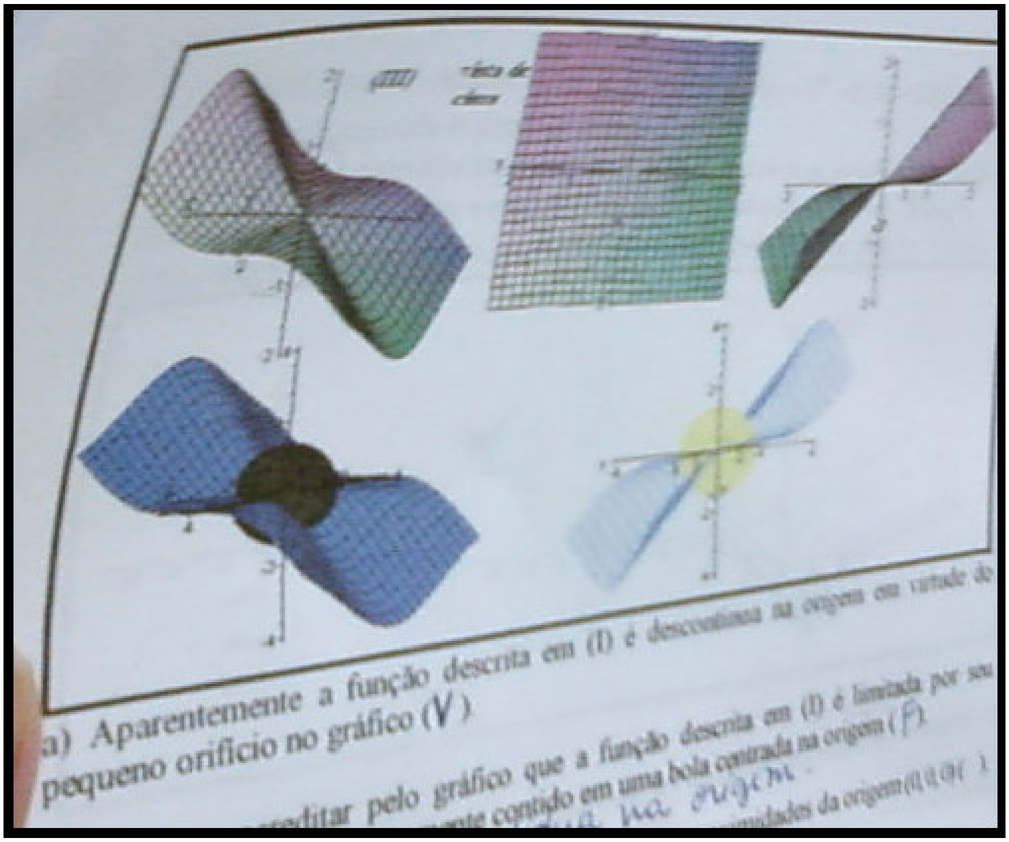


Na atividade, durante a fase de *tomada de posição* da *Sequência Fedathi*, o **aluno 23** desenvolveu uma análise visual dos registros gráficos em 2D. Quando questionado à respeito de suas conjecturas, o aluno acentuou que

> Tem uma boa suavidade na origem, acho que existe. Porque quando se aproxima da origem, ela tende a limites diferentes. Muita ondulação na origem....Acho que é contínua, e fazendo as aproximações pela origem, acho que é...

Registramos a sentença proposicional "Tem uma boa suavidade na origem, acho que existe." que envolve uma expressão metafórica relacionado ao objeto matemático que facilita a compreensão, o significado e a troca de informação entre os próprios estudantes. Reparamos que a partir destas conjecturas, o **aluno 23** levantou conjecturas no sentido de concluir à respeito da continuidade da função na origem.

Com respeito ao comportamento da função $\frac{x^3}{x^2 + y^2}$, exibida na atividade 2, o **aluno 23** efetuou a análise visual dos registros gráficos em 2D, como vemos na figura abaixo, na *tomada de posição* da *Sequência Fedathi*.

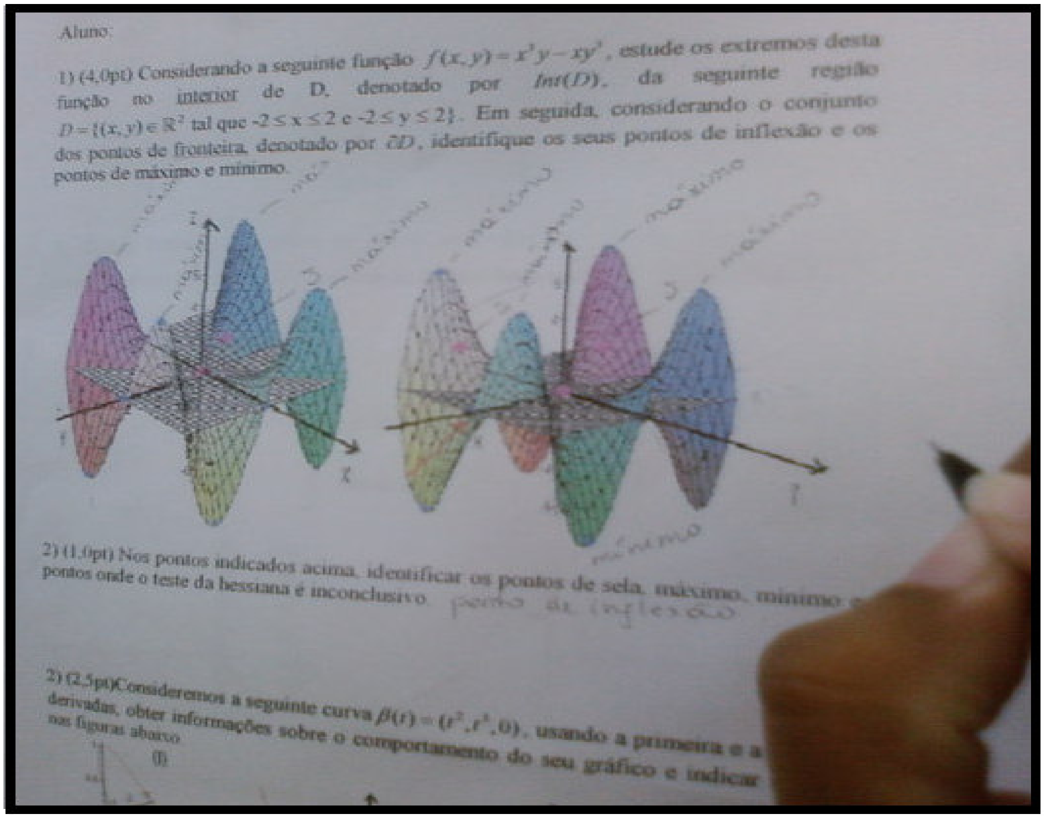


Destacamos que na fase de *tomada de posição*, não estimulamos o emprego de registros algébricos que envolvem a algoritmização imediata da tarefa e impede a elaboração de sentenças proposicionais à respeito do que foi demandado.

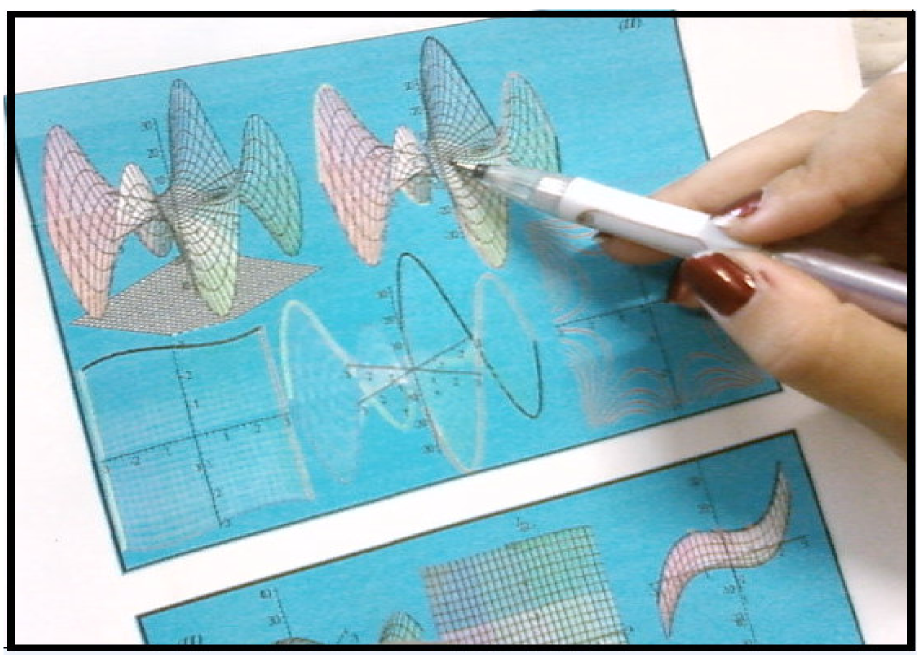
Comprovamos isto na figura abaixo, referente à atividade 4, na qual o aluno 8 desenvolveu uma atividade descritiva do comportamento da superfície descrita por $f(x,y) = x^3y - xy^3$. Reparamos que os registros empregados envolvem apenas a língua natural e toda a atividade do mesmo foi apoiada na percepção e visualização do objeto disponibilizado na folha de papel da atividade.

Na figura abaixo o **aluno 23** identificou os pontos de máximo e pontos de mínimo local. Reparamos a dificuldade para a identificação, por meio de uma apreensão imediata do registro gráfico em 2D, do ponto de sela, na origem $(0,0,0)$.

Note-se que são conceitos estudados no CUV e no contexto de ensino, são mediados por meio da *Sequência Fedathi*, no contexto do $\mathbb{R}^3$, o que fortalece o processo de *transição interna* do Cálculo. Tal exploração destes conceitos mostrou-se deficitária nos livros didáticos consultados.



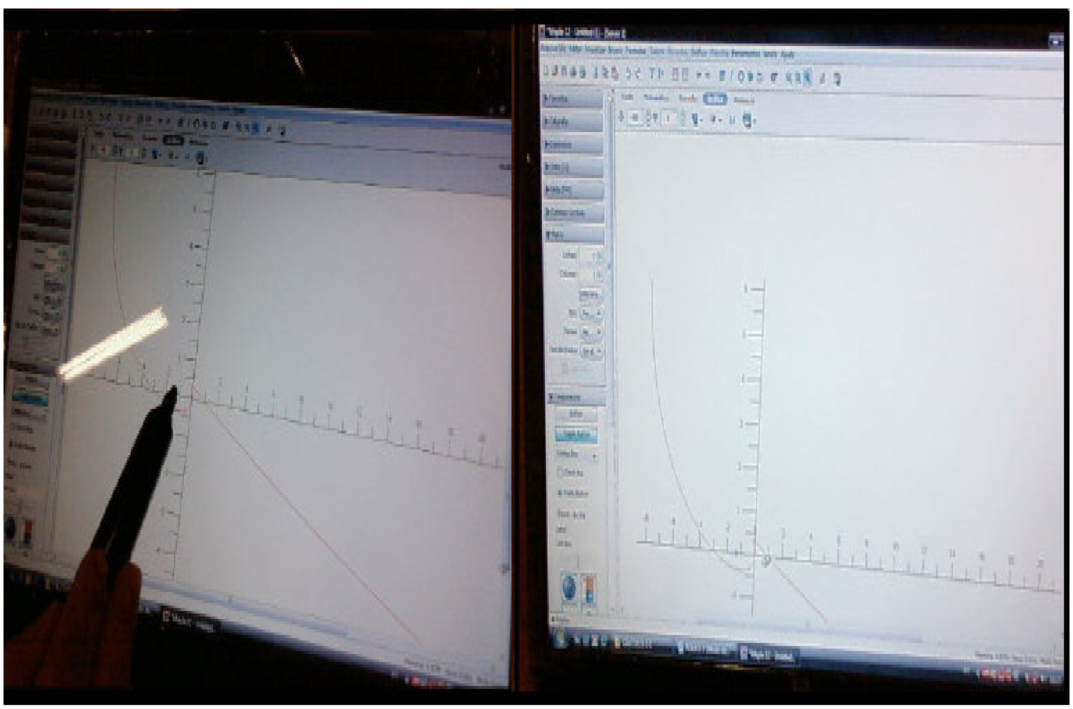
O aspecto merecedor de atenção na situação descrita acima diz respeito ao uso e exploração de conceitos do CUV no contexto de ensino do CVV, o que impulsiona o processo de *transição interna* do Cálculo, que apontamos e descrevemos no Capítulo 1. No próximo segmento analisaremos os dados colhidos com os **alunos 8**, **15, 17** e **23** referentes à fase de *maturação* da *Sequência Fedathi*.



II) *Maturação*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

Como destacamos na seção passada, na *maturação*, disponibilizamos para os estudantes a oportunidade de analisar e comparar as propriedades dos *registros gráficos* e *registros algébricos* fornecidos nas atividades. Assim, de modo sistemático, disponibilizamos para cada sujeito, de modo individual, a continuidade das análises dos comportamentos dos registros semióticos, todavia, agora em 3D.

Na fase de *maturação* da *Sequência Fedathi*, o **aluno 8** recorreu aos registros gráficos em 2D e 3D fornecidos pelo computador no sentido de comparar/verificar as *intuições afirmativas* e *intuições conjecturais* produzidas na fase de *tomada de posição*. Na figura abaixo vemos o **aluno 8** analisando no computador o gráfico de curvas parametrizadas.

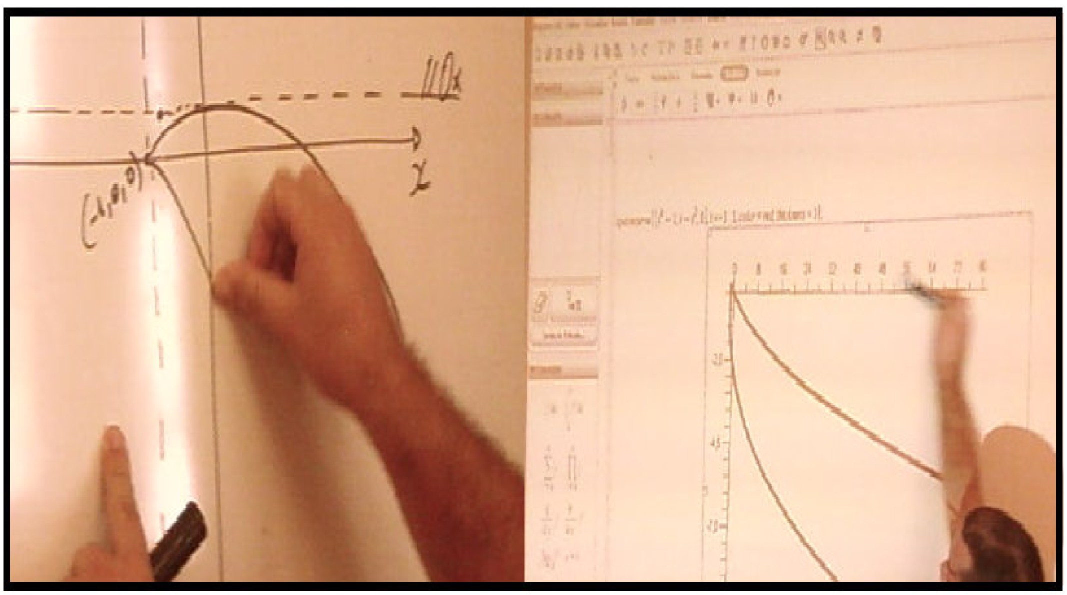


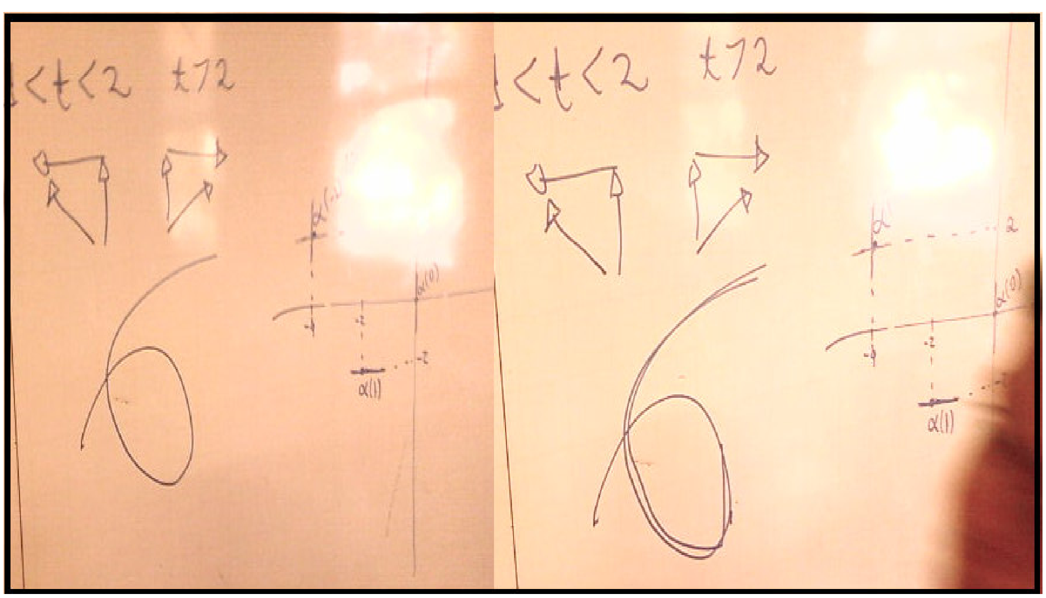
No excerto abaixo, o **aluno 8** manifestou a seguinte argumentação

> Eu to querendo construir o gráfico da parametrização e isso aqui me diz aonde as tangentes são paralelas aos eixos. Se eu puder zerar aqui temos uma paralela ao eixo Ox e aqui se zerar é paralela ao eixo Oy...por aqui temos uma indeterminação no quociente e temos um ângulo de 90º, sendo assim a reta é paralela ao eixo Oy. Acho que não pode dar...pois ai quando eu for construir uma tangente, teremos uma tangente paralela ao Ox e paralela ao Oy, no mesmo ponto....Quando temos $t=2$ ta paralela ao eixo Oy.

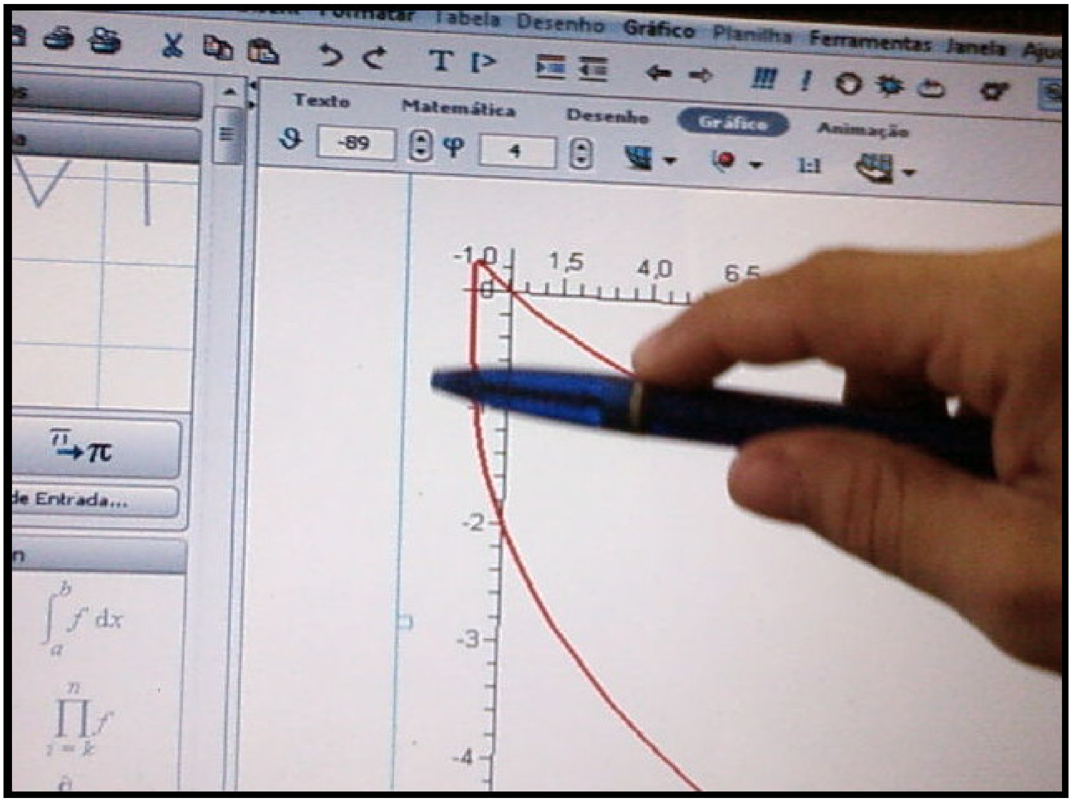
Sublinhamos a intuição conjectural descrita pela seguinte sentença proposicional "Eu to querendo construir o gráfico da parametrização e isso aqui me diz aonde as tangentes são paralelas aos eixos...". Aqui, evidenciamos que o sujeito extraiu informação a partir da *percepção imediata* e visualização dos registros gráficos em 2D envolvidos na atividade 1.

No caso do **aluno 15**, na figura abaixo, registramos suas observações e análises do comportamento das *curvas parametrizadas* em 3D geradas pelo computador. Observamos no lado esquerdo, que, após levantar algumas conjecturas, o mesmo efetuou a produção de *registros gráficos* em 2D no quadro branco, mas sem realizar o tratamento algébrico, com a aplicação de regras operatórias formais do CVV.





No caso do **aluno 17**, ao averiguar o comportamento dos registros gráficos em 3D exibidos na atividade 1, o aluno requereu examinar seu comportamento na tela do computador. Na figura abaixo o **aluno 17** buscou a partir da *percepção imediata* das propriedades dos registros gráficos em 3D gerado pelo computador, a existência de retas tangentes horizontais e verticais.



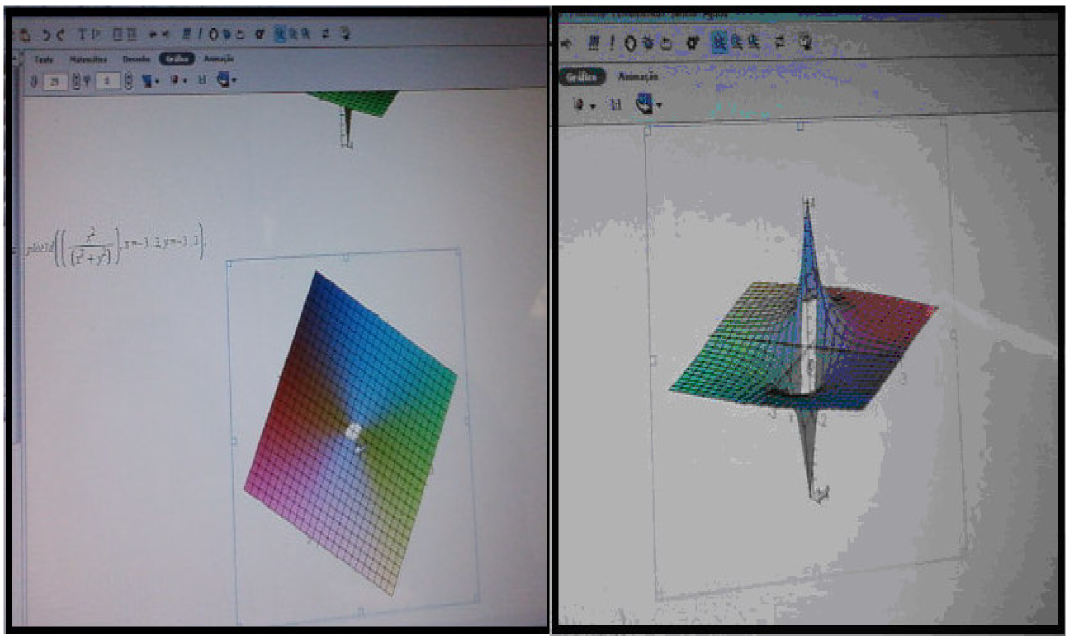
No que diz respeito à atividade 2, o **aluno 8**, ao analisar o comportamento do gráfico da função $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, declarou que

> Esta plano na origem...Se diminuir o intervalo não melhora?! Acho que existe mas esta ondulação me preocupa. Deixa eu fazer tendendo ao $(0,0)$, pela aproximação. Você fica mexendo no gráfico. Se analisar na reta a função seno, temos uma faixa de ondulação. Pela figura parece com a função $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. Acho que existe....

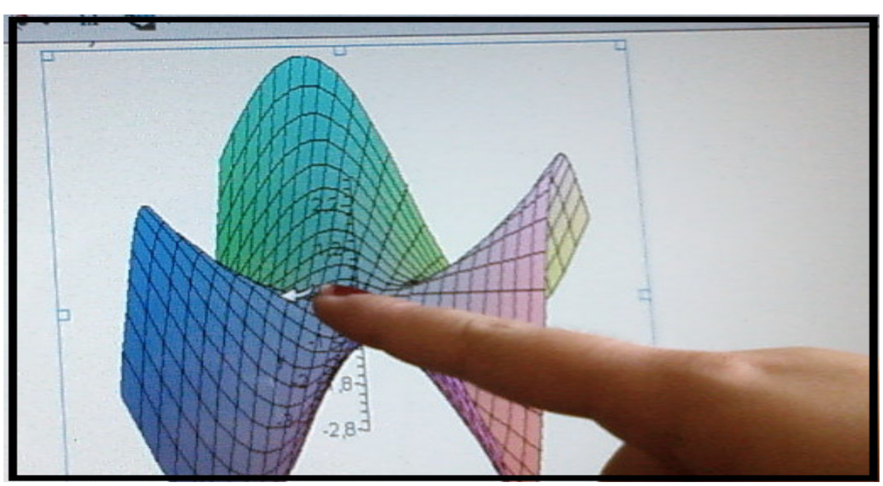
No excerto acima, destacamos seu comentário, quando apontou que "Acho que existe, mas esta ondulação me preocupa....". Neste trecho identificamos a produção de sentenças proposicionais que encerram *intuições conjecturais*, formuladas com base na apreensão imediata dos elementos pertinentes à situação, por intermédio da *visualização* do registro gráfico em 3D.

Apontamos ainda o trecho em que o aluno 8 menciona que "Pela figura parece com a função $\frac{x^3}{x^2+y^2}$. Acho que existe....". Isto evidencia que o mesmo se apoiou em um conhecimento intuitivo, mobilizado pela *percepção imediata* dos registros gráficos envolvidos na atividade 2.

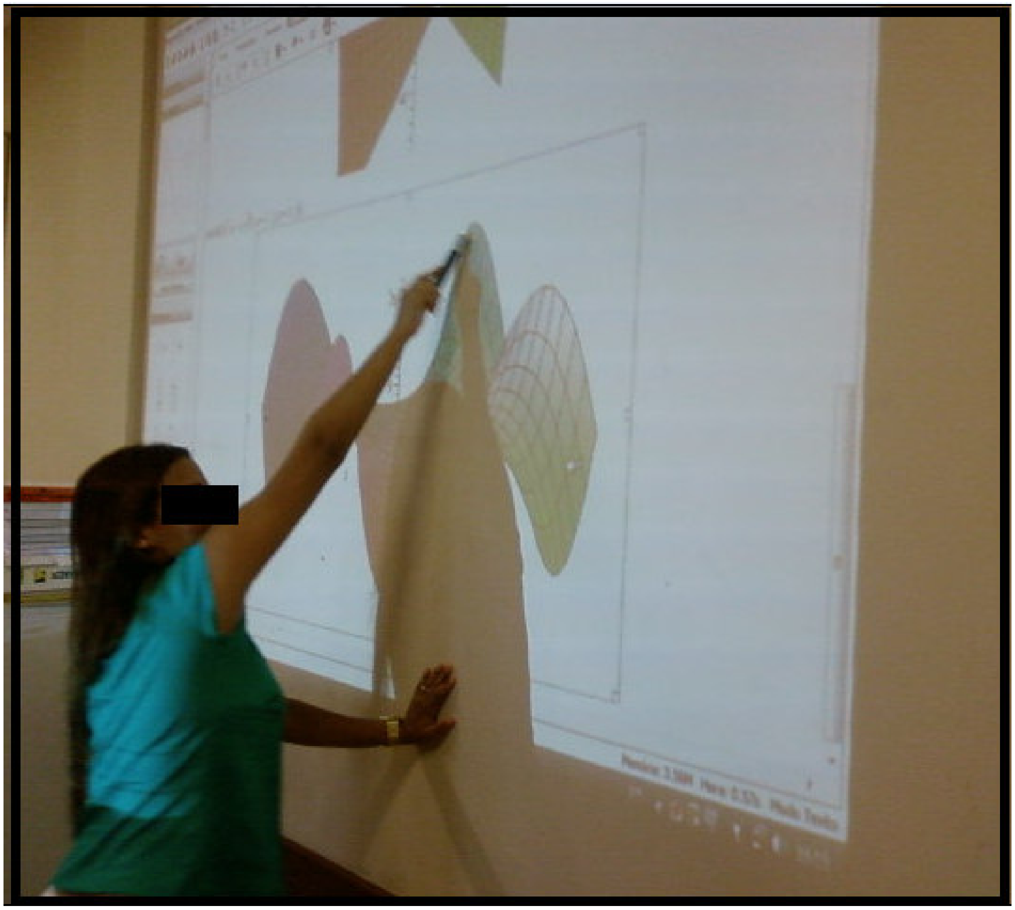
Em seguida, exibimos os registros gráficos em 3D analisados por este aluno na tela do computador.



Observamos que em vários casos em que entrevistamos os sujeitos participantes dos estudos, registramos a produção de intuições conjecturais condicionadas pela *visualização* e o comportamento do registro gráfico em 3D. No caso da figura acima do lado direito, muitos dos alunos afirmaram que a função da atividade 1, possuía a imagem limitada.

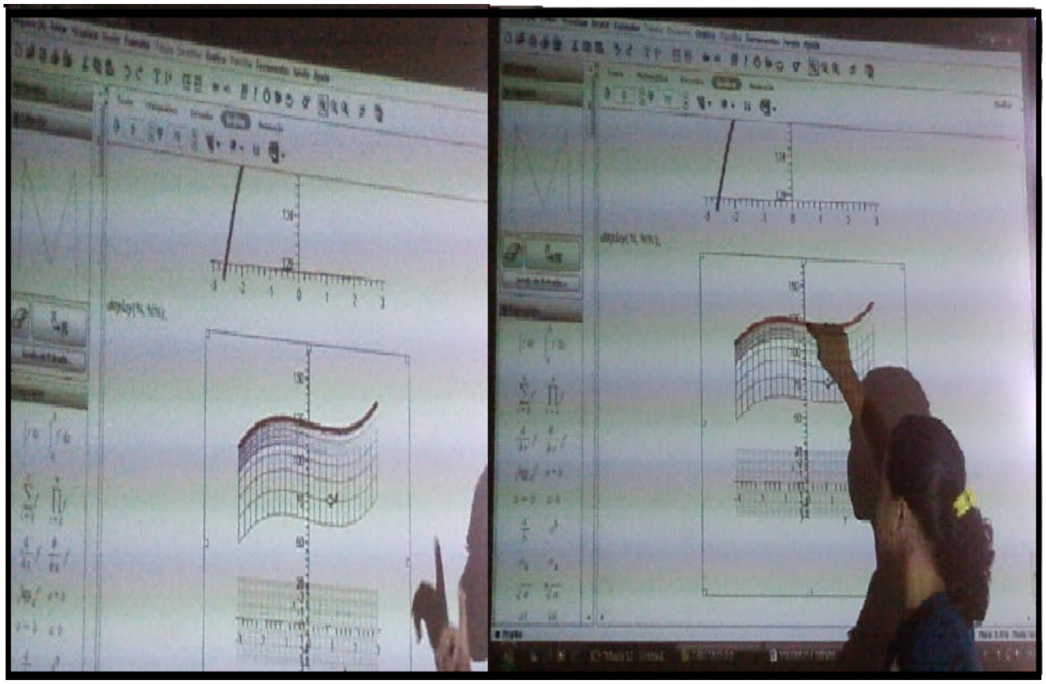


Com respeito à atividade 4, o **aluno 8** analisou o comportamento do registro gráfico em 3D, produzido pelo computador, na fase de maturação da *Sequência Fedathi*. De modo sistemático, a mediação ancorada nos pressupostos de nossa sequência de ensino, evitou o emprego precipitado dos registros de representação de natureza algébrica que aceleram o processo de algoritmização das situações-problema.



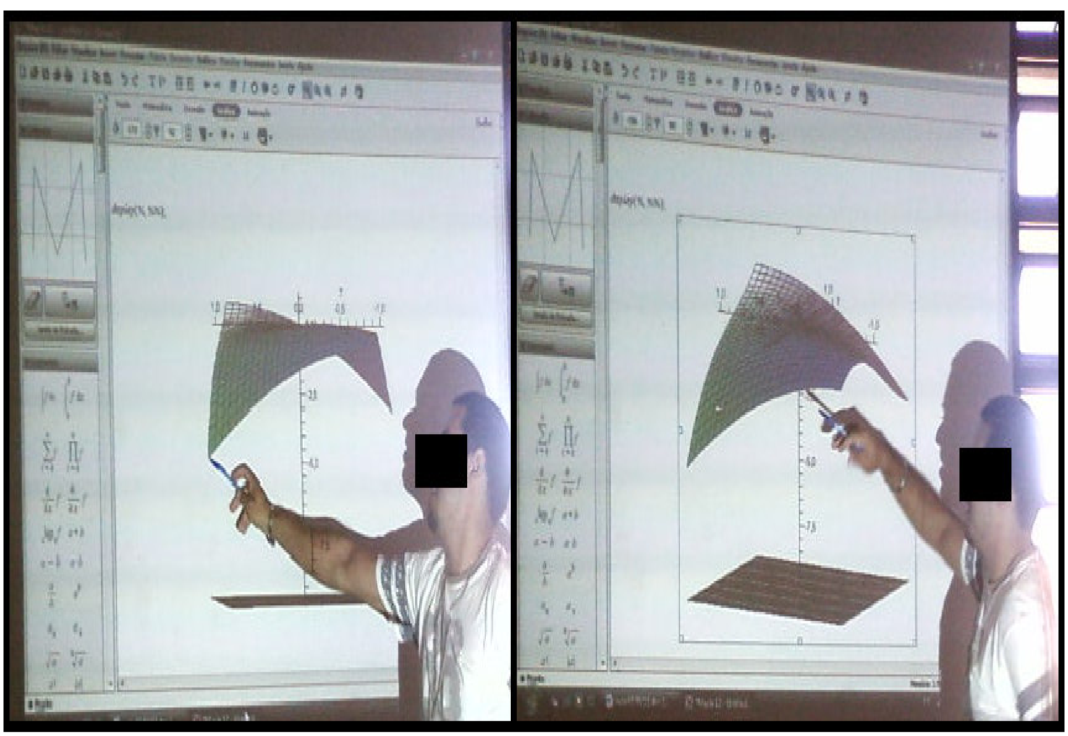
Na figura acima o **aluno 8**, buscou compreender a localização, por meio da visualização, de um ponto de sela da superfície descrita por $f(x, y) = x^3 y - xy^3$.

Em outra situação, o mesmo aluno, indicou e explicou para seus colegas de sala, a localização dos *pontos críticos* e *pontos de inflexão*, com a localização no espaço $\mathbb{R}^3$, situação negligenciada pelos livros didáticos consultados.

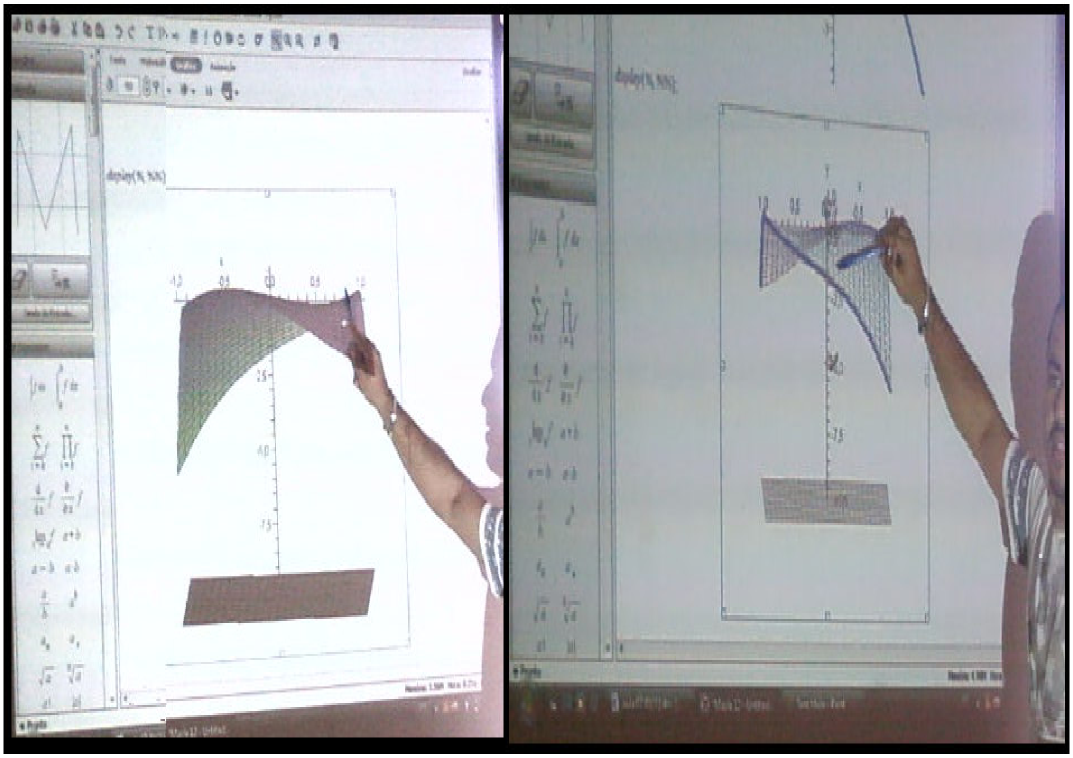


Em outra situação, o **aluno 15**, requereu a visualização do registro gráfico em 3D, referente à atividade 4. Mais uma vez, de modo sistemático, no momento de aplicação de nossa mediação didática, o sujeito explicou para seus colegas de sala, a localização dos *pontos críticos* e *pontos de inflexão*, com a localização no espaço $\mathbb{R}^3$, situação negligenciada pelos livros didáticos consultados.

Percebemos isto na figura abaixo.



O **aluno 15** estudou o comportamento da curva parametrizada na borda da superfície exibida na atividade 4, na *fase de maturação* da *Sequência Fedathi*.



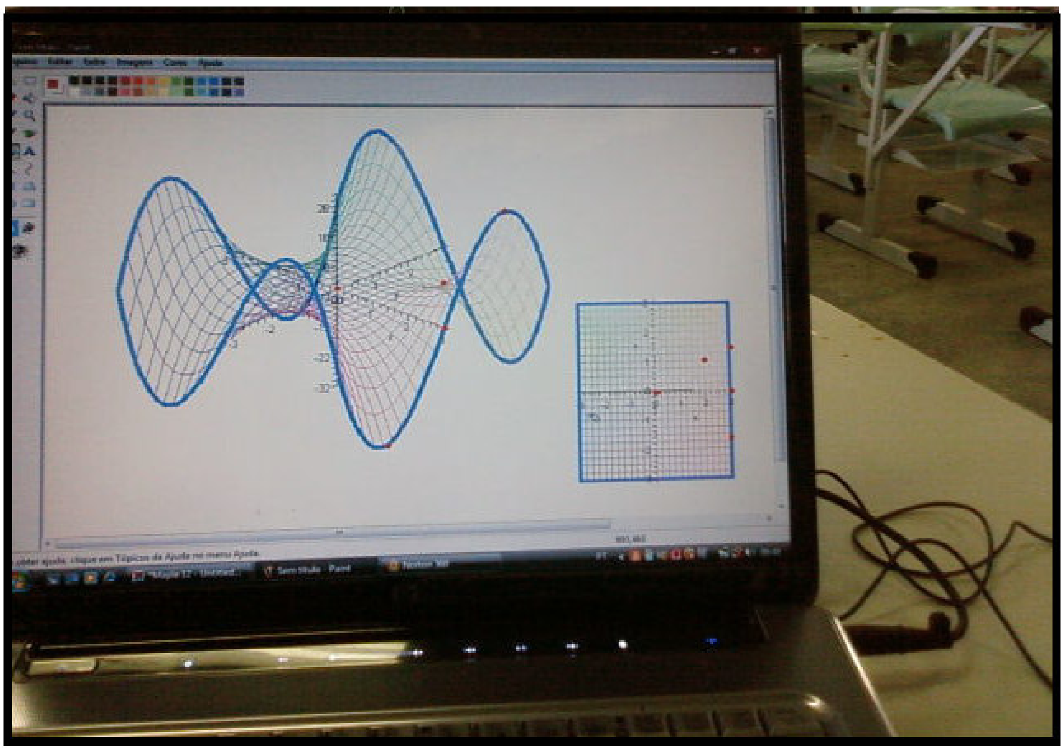
Após realizar a análise, com arrimo na *visualização* e *percepção imediata* das propriedades do registro gráfico em 3D, o aluno declarou

> Nessa região...dá uma descidinha...depois existe uma....um buraco aqui...não dá para encontrar de imediato este ponto ai...porque desse lado o tapete parece reto...apenas olhando o tapete...olhando do outro lado não dá para ver..apenas vendo aqui...do outro lado é praticamente reto..o tapete do outro lado é praticamente reto...é diferenciavel...do outro lado dá uma descida...quando a gente olha o eixo Ox...dá uma descida..mas quando olha em relação ao eixo Oy...ele faz ao contrário...

Nesta fase, registramos de modo sistemático, a introdução e descrição metafórica dos estudantes de vários conceitos introduzidos durante as aulas na disciplina. De fato, ao explicar que "Nessa região...dá uma descidinha...depois existe uma....um buraco aqui...não dá para encontrar de imediato este ponto ai...porque desse lado o tapete parece reto...apenas olhando o tapete...", observamos o emprego dos termos "buraco" e "tapete" no sentido de re-significar o conceito formal de continuidade e diferenciabilidade de função num ponto.

Ademais, o **aluno 15** obteve informações e produziu sentenças proposicionais com arrimo na percepção e visualização imediata das propriedades observadas na tela do computador. Registramos no excerto acima que "olhando do outro lado não dá para ver..apenas vendo aqui..." o que confirma a extração de informações a partir da visualização.

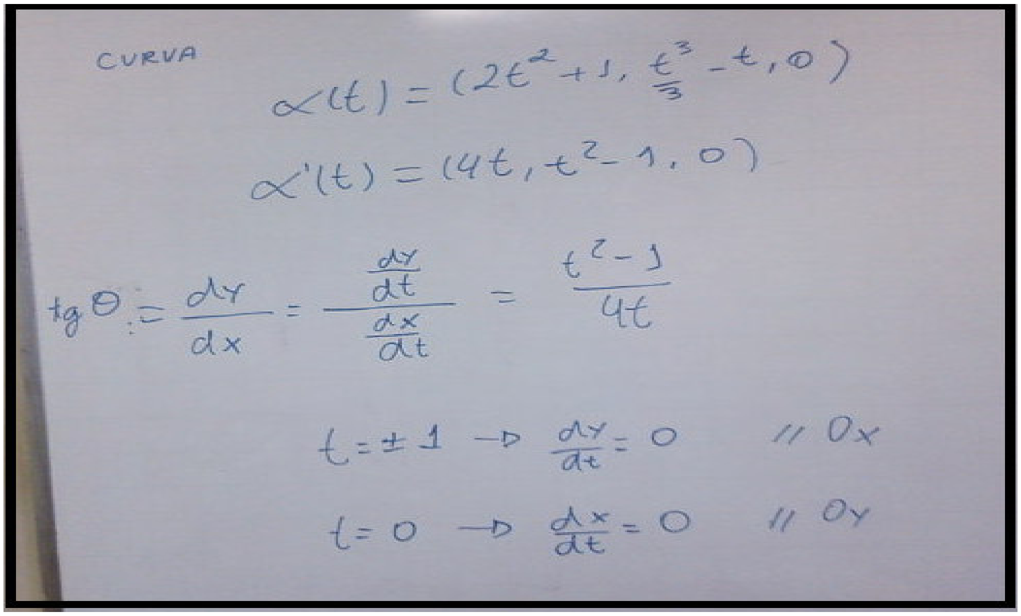
Na figura abaixo, exibimos a imagem observada pelos alunos ao decorrer da atividade 4 em sala de aula, na *fase de maturação* de *Sequência Fedathi*.



III) *Solução*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

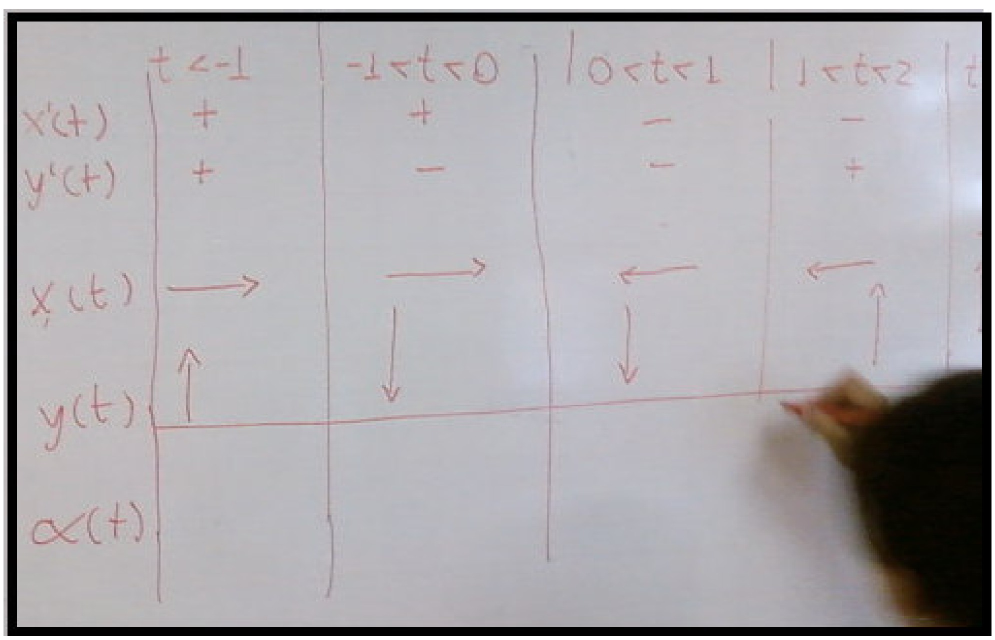
Nesta fase, os alunos empregaram o sistema de registros peculiar do CVV para a verificação da aplicação da estratégia de resolução. De fato, na figura abaixo, o **aluno 8**, empregou registros algébricos no sentido de analisar o comportamento e identificação das retas tangentes horizontais e verticais.

Na figura abaixo observamos o tratamento dos registros algébricos levada a cabo pelo aluno 8, na *fase de solução* de *Sequência Fedathi*. Apontamos que os dados inferidos e a identificação das variáveis visuais funcionaram de modo pertinente no sentido da escolha do registro de representação algébrica conveniente. Observamos sua ação na atividade 1.



Em seguida, a partir dos dados produzidos pelo *tratamento* dos registros, o aluno 8 buscou a descrição do comportamento geométrico da curva parametrizada em questão, como divisamos na imagem abaixo.

Na imagem abaixo o aluno comparou os dados inferidos na tela do computador com os resultados verificados a partir do tratamento dos registros de natureza algébrica.



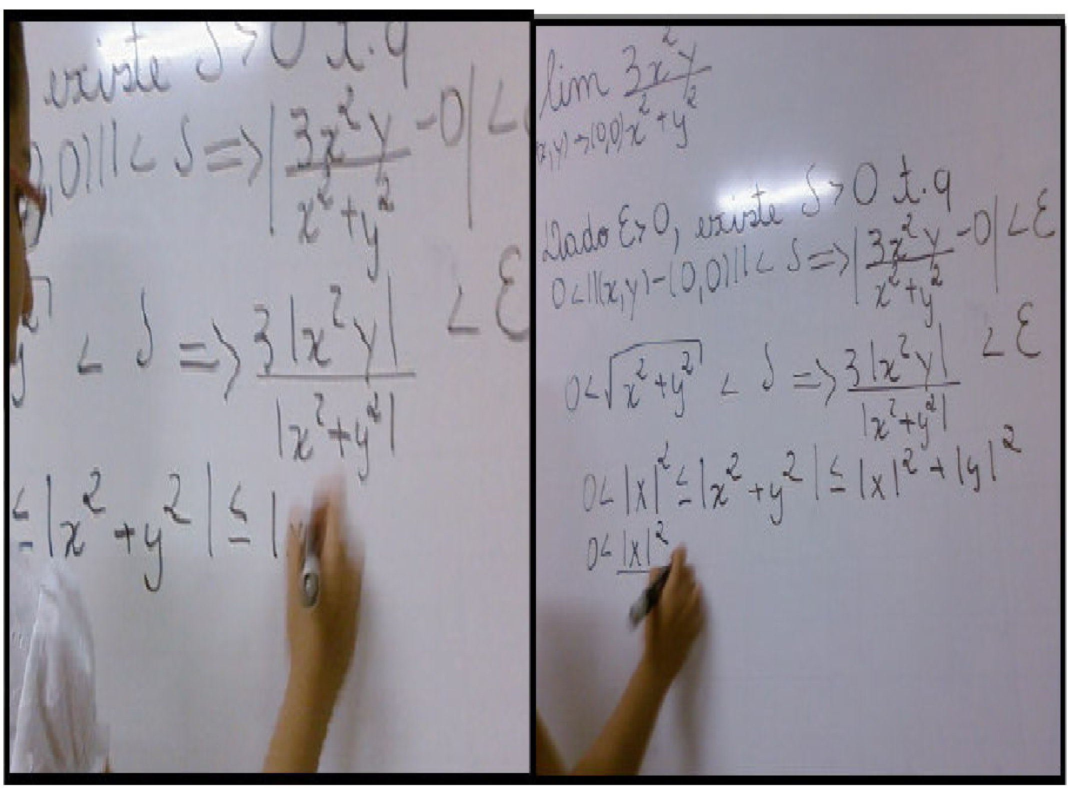
O aluno 8 manifestou uma ação discursiva ao buscar resolver o limite $Lim_{(x,y)\to(0,0)}(\frac{x^4y^3}{x^4+y^8})$ na atividade 2. O mesmo esclareceu que

> Quando eu escolhi esta fração, apesar de serem números reais quaisquer, eles não podem ser zero ao mesmo tempo, se não da zero na fração. Como qualquer fração não pode assumir zero, para esta fração existir, não pode assumir zero ao mesmo tempo. Não tem nada a ver com o limite... Eu cancelei o ρ, mas não tenho certeza se posso cortar.

Nos trechos destacados acima e registrados na fase de solução da *Sequência Fedathi*, observamos a *intuição antecipatória* relativa à afirmação "Eu cancelei o ρ, mas não tenho certeza se posso cortar.". Sua ilação reforça o fato de que sua estratégia foi intuitiva.

Na resolução da atividade 4, o **aluno 15** descreveu o *tratamento dos registros algébricos* necessários para a resolução da tarefa. Destacamos as dificuldades relacionadas ao *tratamento* que envolve a majoração de grandezas, como observamos na figura abaixo. Nesta atividade o aluno manifestou incompreensões relacionadas com a complexa noção do método por épsilon e delta.

Sublinhamos que o **aluno 15** buscou identificar elementos que majoram a expressão $\frac{3xy^2}{x^2+y^2}$ no sentido de verificar que a mesma é pequena, para todo $\varepsilon > 0$. Tal habilidade é explorada também no CUV.



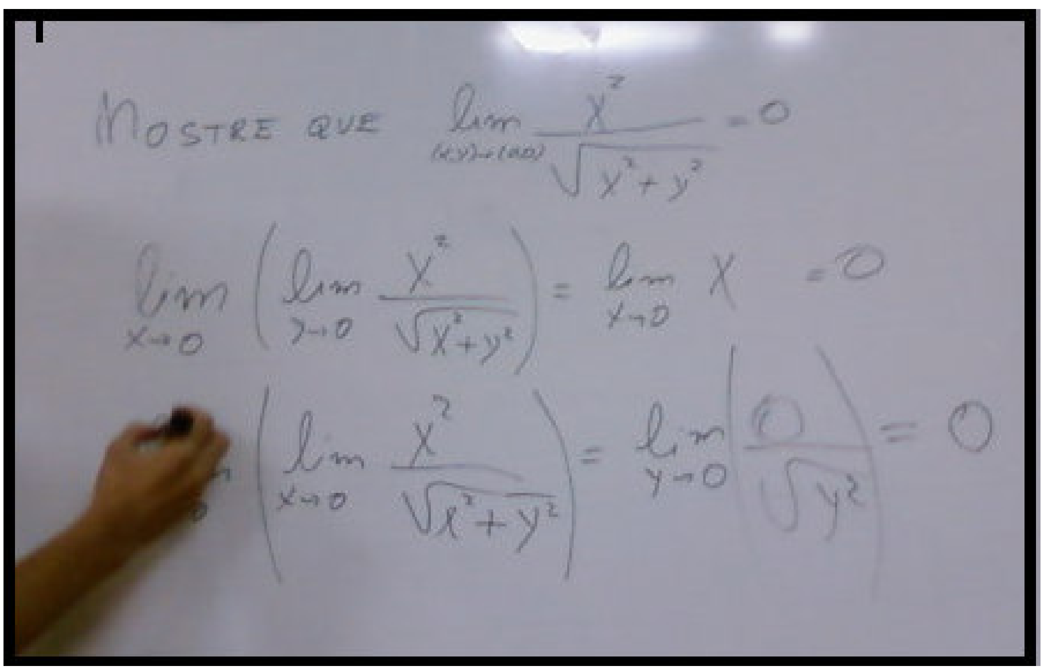
No *tratamento* dos *registros algébricos* para a resolução do limite $Lim_{(x,y)\to(0,0)}(\frac{x^4y^3}{x^4+y^8})$, o $x+y>0$ para não ter indeterminação, o **aluno 17** afirmou

> Eles não podem ser zero ao mesmo tempo, o x e o y, para não dar zero esta fração. Não tem nada a ver com limite... Porque o x ta tendendo para zero, por isso a gente majorou para cá...e tem que cortar pois o x e o y não vão para zero simultaneamente. Podia ir para zero... Todas as possíveis e imagináveis...Não acredito no epsilon e delta.

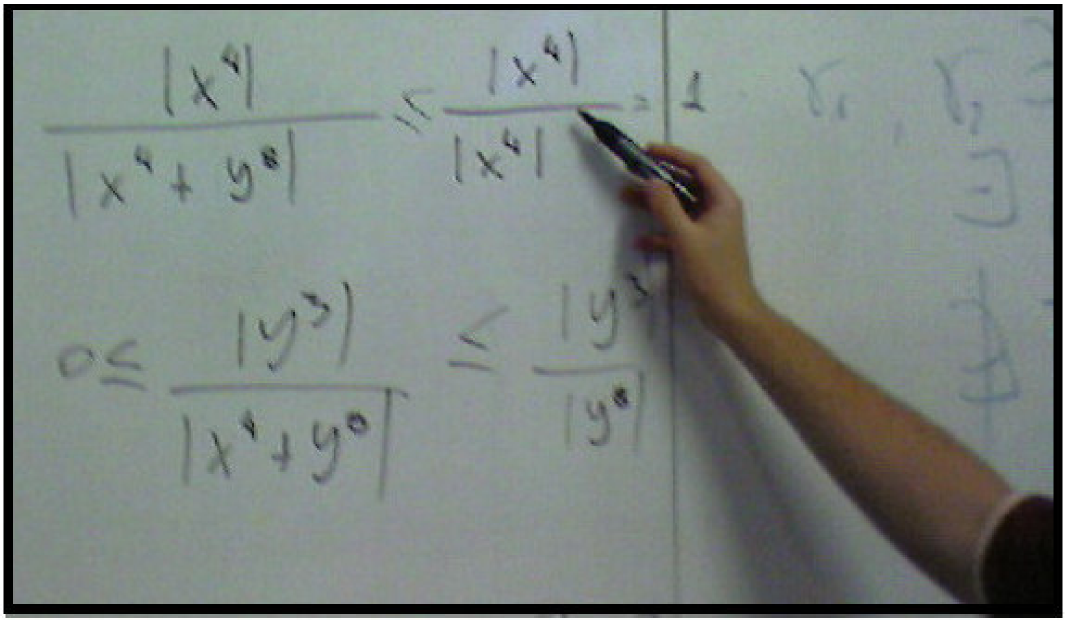
No trecho destacado acima, o **aluno 17** afirmou suas dificuldades e desconfianças relacionadas com o método de resolução de limites de funções. Por outro lado, desde que exploramos, por intermédio da *Sequência Fedathi*, a exploração das condições necessárias, e nem sempre suficientes para a *existência* de um limite.

Na imagem abaixo, o **aluno 17** efetuou, na fase de *solução* da SF, o tratamento relacionado com a verificação de *limites interados*, conceito pouco explorado pelos livros didáticos consultados neste estudo.

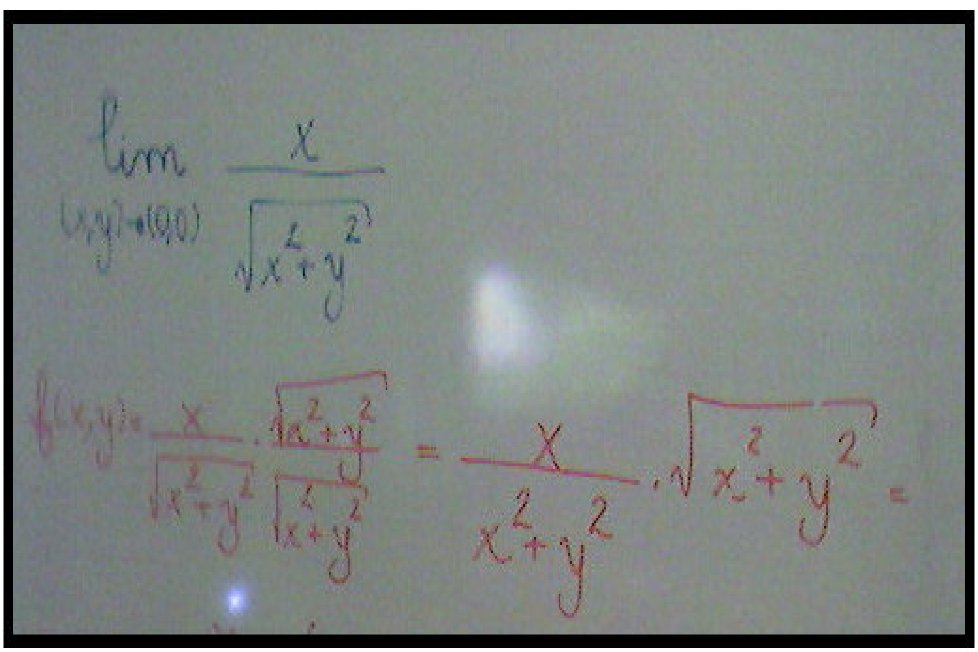
Pelo que evidenciamos na análise de livros do CVV, desenvolvida neste estudo, há uma deficiência na exploração didática de limites interados. Apoiados nos pressupostos da *Sequência Fedathi* exploramos esta noção que indica apenas condições necessárias para sua existência. Observamos o tratamento dos registros dispensado pelo aluno 23 na fase de solução da *Sequência Fedathi*.



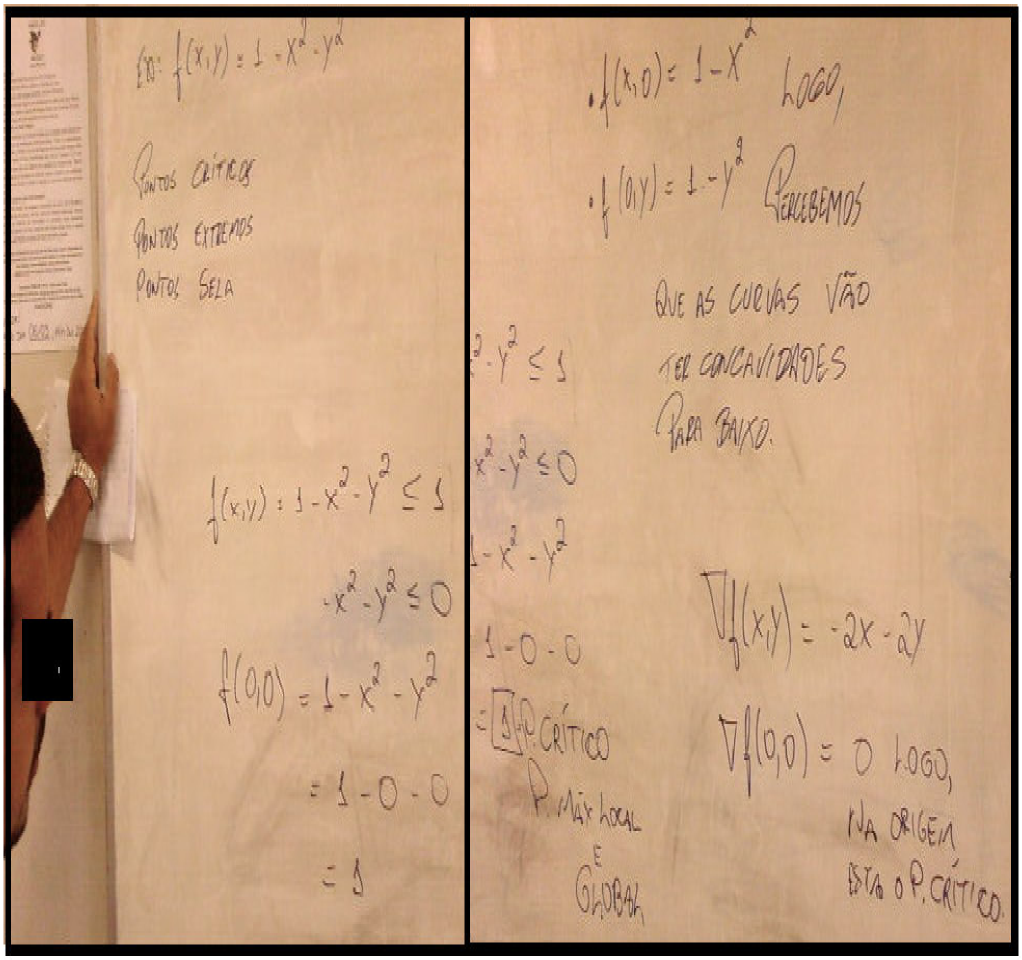
Em outra situação, o **aluno 23** efetuou o tratamento dos *registros algébricos* do CVV, com respeito à atividade 4. Mais uma vez, o sujeito investigou a possibilidade de majorar os termos envolvendo números reais.



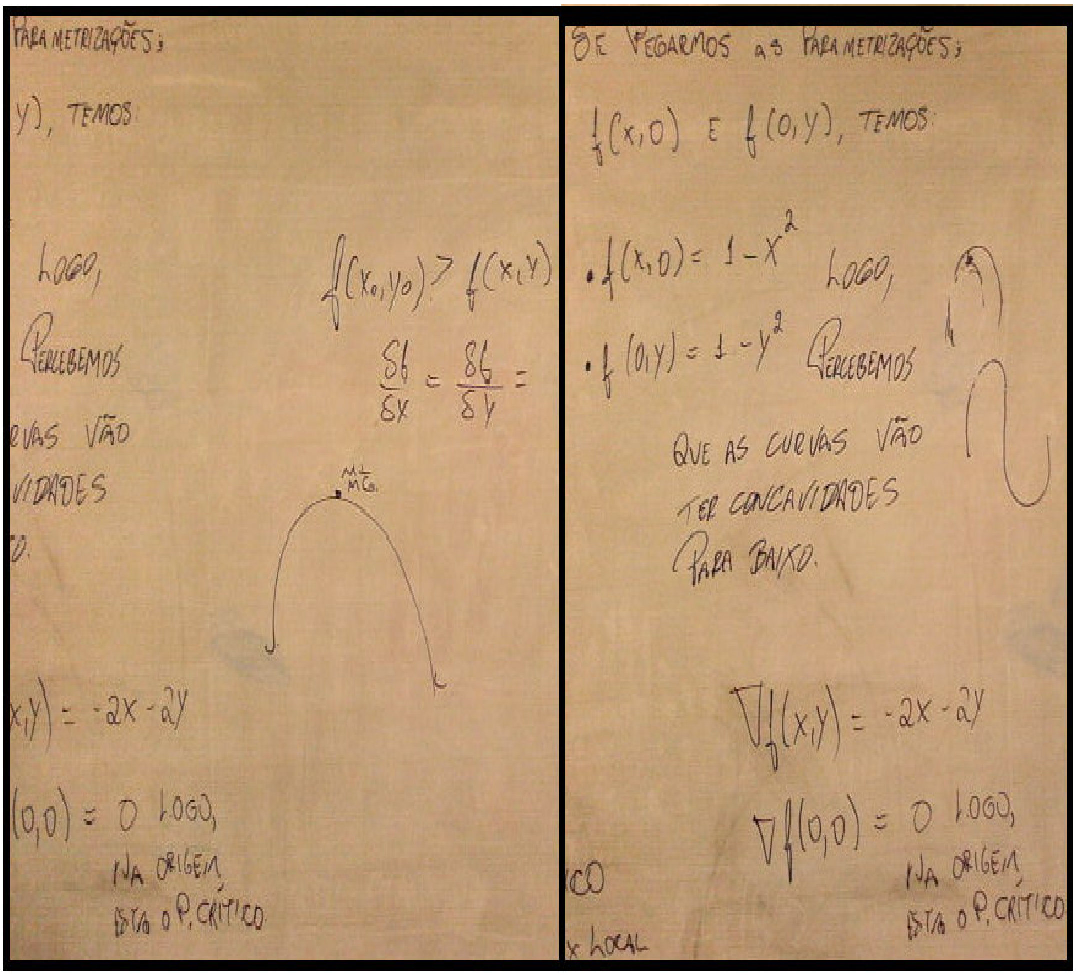
Em seguida, o **aluno 23**, tentou aplicar a noção de *limites interados* no sentido de verificar as condições necessárias para a existência do limite indicado na atividade 3, na *fase de solução* da *Sequência Fedathi*.



Na *fase de solução da Sequência Fedathi*, com relação à atividade 4, o **aluno** 8 desenvolveu o seguinte tratamento dos registros algébricos, como exibimos na imagem abaixo.

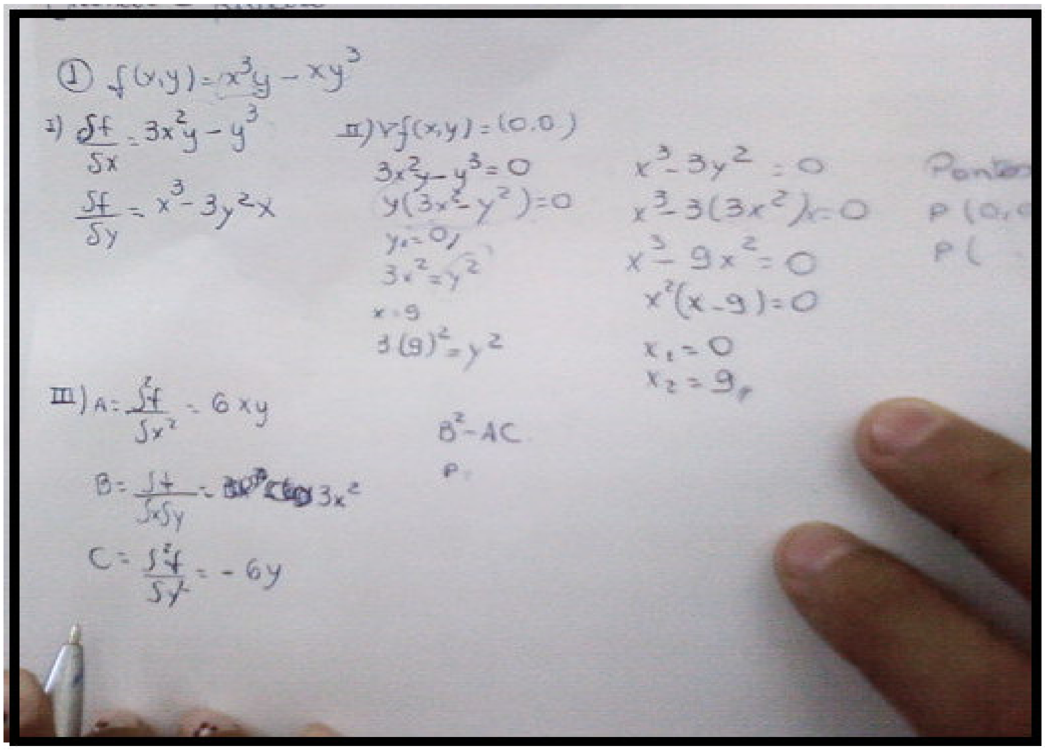


Na atividade 4, o **aluno 8** efetuou o tratamento dos *registros algébricos* no sentido de evidenciar e confrontar os dados obtidos por intermédio da visualização do registros gráficos em 3D, na *fase de maturação da Sequência Fedathi.*



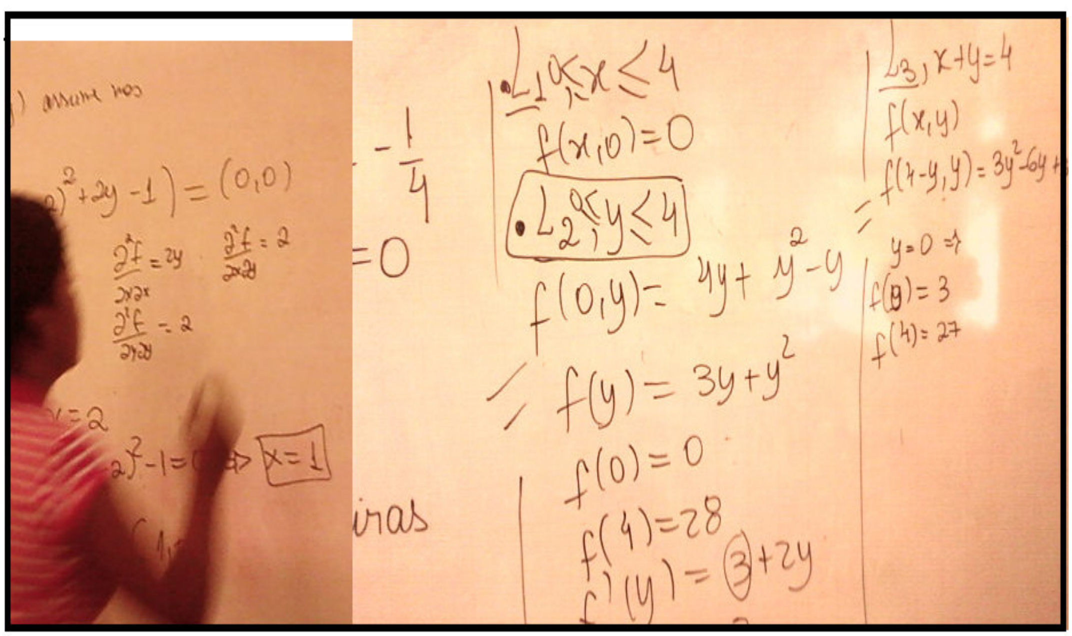
Observamos que os alunos admitem não recordar, por completo, das *definições formais* na *fase de solução da Sequência Fedathi*. Na imagem abaixo, reparamos que o **aluno 15**, buscou identificar a existência de pontos críticos. Observamos o *tratamento* dispensado pelo sujeito abaixo.

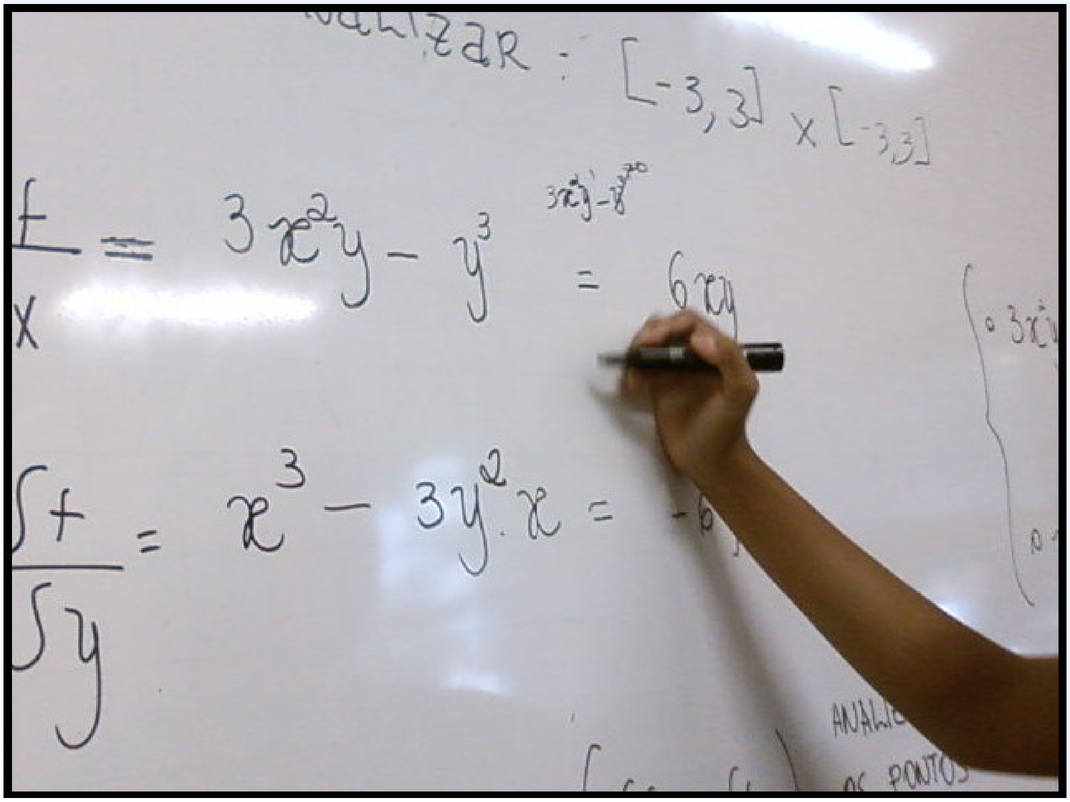
Sublinhamos que restrito ao tratamento de registros, o **aluno 15**, identificou apenas a origem $(0,0)$ como candidato ao ponto de aplicação e verificação do *teste da Hessiana*, todavia, com os dados colhidos com arrimo na visualização, na fase anterior, o aluno conjecturou a aplicação do referido teste em outros pontos.



Nos livros de CVV consultados e analisados, registramos a pouca exploração dos registros de representação semiótica do CUV no contexto do CVV, todavia, na fase de solução da *Sequência Fedathi*, estimulamos seu uso.

Na imagem abaixo o **aluno 17** desenvolveu o tratamento de *registros algébricos* no sentido de investigar a presença de pontos críticos e pontos de inflexão na fronteira da superfície no $\mathbb{R}^3$.





No próximo segmento, discutiremos os dados obtidos na *fase de prova* da *Sequência Fedathi*. Nesta fase, colocamos em evidência os argumentos formais envolvidos e, por meio da mediação apoiada nos recursos computacionais, provocamos a revisão das estratégias empregadas na fase de solução.

IV) *Prova*: relatos das entrevistas individuais e análise de resultados.

Nesta fase de ensino, a mediação envolveu a formalização e logicização dos argumentos empregados nas fases anteriores. Destacamos as dificuldades evidenciadas nos alunos ao lidarem com a necessidade de inferências do tipo "Se...então....", envolvendo a aplicação e a ideia dos teoremas estudados no CVV.

Observamos também o depoimento dos alunos participantes dando conta do fato de que não desenvolveram o hábito de estudar as *demonstrações formais*, desde os estudos iniciais de CUV. Assim, colhemos as impressões e a opinião a respeito do formalismo em questão à respeito dos principais conceitos estudados ao longo da disciplina.

Neste sentido, ao ser questionado sobre as dificuldades na disciplina Cálculo III e em relação específica ao conceito de limite, o **aluno 8** declarou que

> A maior dificuldade são as majorações. Do limite ainda to começando a entender.... Acredito mais ou menos em limites... No Cálculo I a gente aceita por que é a primeira idéia, mas aqui começa a modificar tudo...Por exemplo...o limite $Lim_{(x,y)\to(0,0)}(\frac{x^4y^3}{x^4+y^8})$ ..... Essa daí de cara eu colocaria que o limite existe. Não colocaria, pois existe um indeterminação em baixo. Aparentemente existe [...]

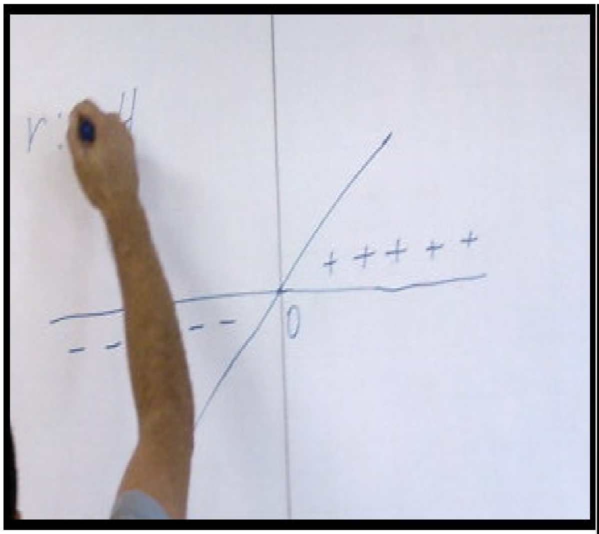
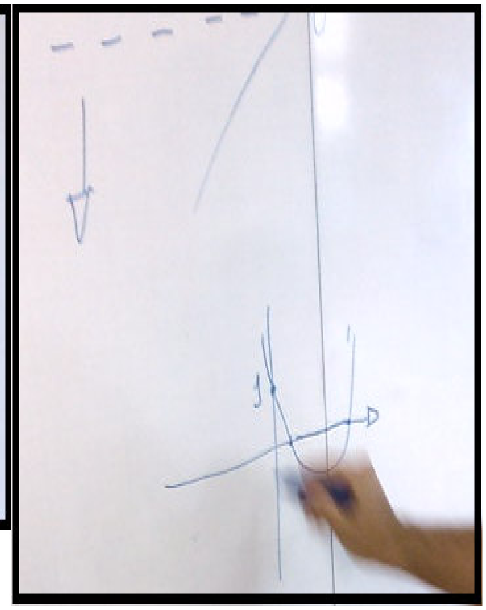
Nos trechos destacados acima, destacamos uma sentença proposicional ("Acredito mais ou menos em limites...") que caracteriza uma *intuição conjectural* registrada na *fase de prova*. Reparamos que nesta fase, nossa mediação proporcionou a revisão das estratégias empregadas na fase anterior. Tal opção se caracterizou pela exploração das condições necessárias e não apenas suficientes para a verificação das propriedades. Como conseqüência deste posicionamento didático, evidenciamos esta categoria de opinião.

O **aluno 15**, quando questionado sobre seus métodos de estudo do Cálculo CUV ou sobre o conceito de limite, usando *épsilon* e *delta* nos relatou que

> Eu estudava... Acreditava naquilo, mais não compreendia... dava para acreditar pelo que o professor provava em sala... Na verdade no calculo 1 não foi muito bem explorado. Pelo menos na minha opinião. No calculo 3 é muito explorado. Me fazem acreditar que isto é verdadeiro.

No excerto acima, registramos as dificuldades recorrentes dos estudantes ao lidarem com o formalismo envolvido com o conceito de limite. E não apenas em relação a este conceito e,também, em relação aos conceitos de *derivada* e *integra*l, obtivemos dados que atestam às inseguranças e incompreensões dos aprendentes.

Na fase de prova da SF, exploramos de modo sistemático, a revisão e generalização dos argumentos empregados nas fases anteriores. Assim, no caso do **aluno 17**, identificamos a comparação e revisão de suas estratégias tomadas nas fases iniciais da *Sequência Fedathi*. Na figura abaixo, o mesmo comparou o gráfico desenhado no quadro branco, obtidos por meio da aplicação do modelo matemático formal com os registros gráficos indicados pelo computador.

Mais adiante, ao ser questionado, o mesmo nos forneceu o extenso relato que descrevemos no segmento

> as dificuldades é pegar a equação e passar para os planos coordenados x,y e z. Fazer o gráfico é complicado. É quando... deixe fazer na lousa. Não tenho costume de desenhos no $\mathbb{R}^3$. Anteriormente, quando estudei Calculo III, não foi dessa forma. Aprendemos derivada de uma forma bem simples, calculando mesmo. Sem usar limites. Não vimos interpretações geométricas. Temos dificuldades nestes desenhos, calcular declividades. Nós vimos teoremas, definição, mas passamos por cima...Mais a coisa prática. Pouca coisa foi utilizada. Não consigo interpretar geometricamente não consigo. Pois o outro calculo foram mais números, mais prático. Dá para compreender algumas demonstrações, mas não é muito explicada, é só passada do jeito que ta no livro. Por exemplo, tem coisa aqui que a gente não sabe da onde veio, porque...Outra dificuldade é a visão geométrica....O hiperbolóide é elíptico...Não é uma elipse, como dou uma rotação e gera uma elipse? Mas qual dessas rotações eu vou dar...

Alguns trechos acima merecem uma atenção pormenorizada. De fato, ao declarar que "Anteriormente, quando estudei Calculo III, não foi dessa forma. Aprendemos derivada de uma forma bem simples, calculando mesmo. Sem usar limites. Não vimos interpretações geométricas..." o mesmo indicou ser a segunda vez que cursava a disciplina de Cálculo III e que a mudança de abordagem e interpretação dos conceitos estudados lhe parecia nítida. Observando o caráter geométrico explorado na mediação apoiada nos pressupostos da *Sequência Fedathi*.

Ademais, ao comentar que "Não consigo interpretar geometricamente não consigo. Pois o outro calculo foram mais números, mais prático....", revelou as dificuldades em superar ao treinamento e hábitos de aprendizagem nas disciplinas passadas que permanecem no estilo tradicional no IFCE, sem o uso da tecnologia.

Por fim, em seu discurso, registramos à incompreensões relativas à aprendizagem das demonstrações formais apresentadas pelos livros disponibilizados na disciplina e disponíveis no IFCE, quando acentuou que "Dá para compreender algumas demonstrações, mas não é muito explicada, é só passada do jeito que ta no livro....".

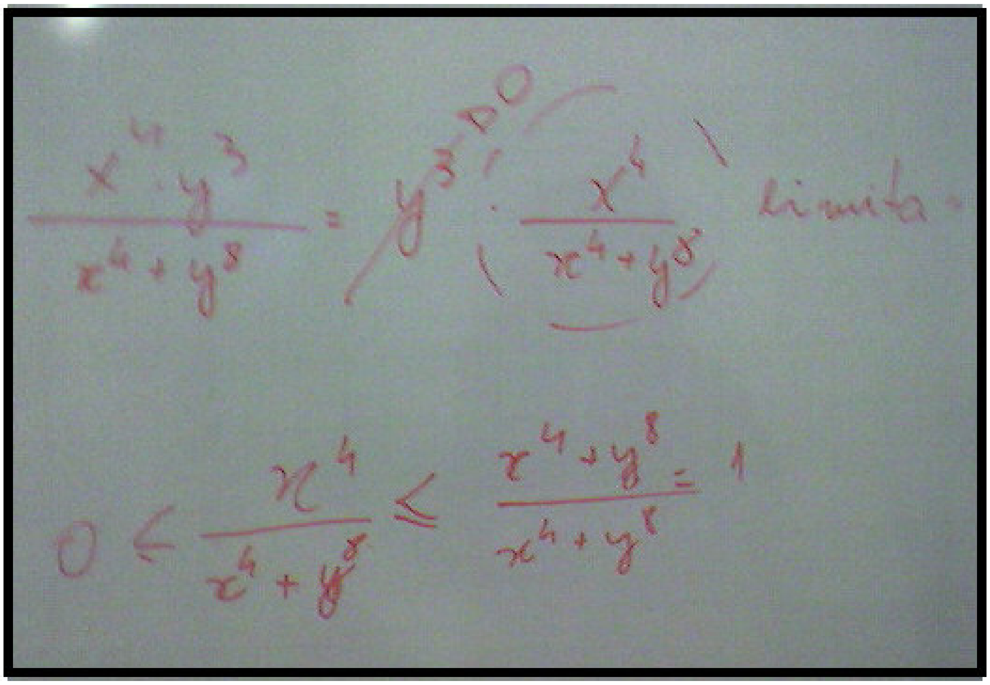
Acentuamos outros depoimento que mereceu atenção e que corrobora com os aspectos preocupantes indicados pelo **aluno 17** nos parágrafos há pouco discutidos. Neste sentido, o **aluno 23**, comentou que

> A passagem através dessa linguagem é um pouco estranha para quem começa estudar um pouco de Calculo III. Onde, porém deve-se correr atrás de alguns conceitos, onde o livro ultrapassa alguns detalhes simples onde quem não conhece acaba ficando difícil....Podemos avaliar o curso de Cálculo III, como sendo mais ou menos complicado. Neste temos algumas demonstrações de teoremas que exigem certa maturidade fundamental para compreendê-los. Temos notações complicadas que atrapalham o curso....Minha primeira dificuldade são os gráficos. As demonstrações e teoremas também geram dificuldades....Conteúdo muito extenso. Pouco entendimento das demonstrações e teoremas....As demonstrações e notações as vezes confundem. O pouco tempo para fazer mais exercícios....Uma das coisas que me deixou com dificuldade foram as notações. Achei também o livro adotado difícil, pois omite muita coisa.

Mais uma vez, o **aluno 23** acentou a diferenças e mudanças ocorridas no processo de *transição interna* do CUV para o CVV. Neste caso, observamos isto ao comentar que "A passagem através dessa linguagem é um pouco estranha para quem começa estudar um pouco de Calculo III....". Neste excerto, mais uma vez, o aluno 23 aponta às barreiras relativas à aprendizagem das demonstrações formais.

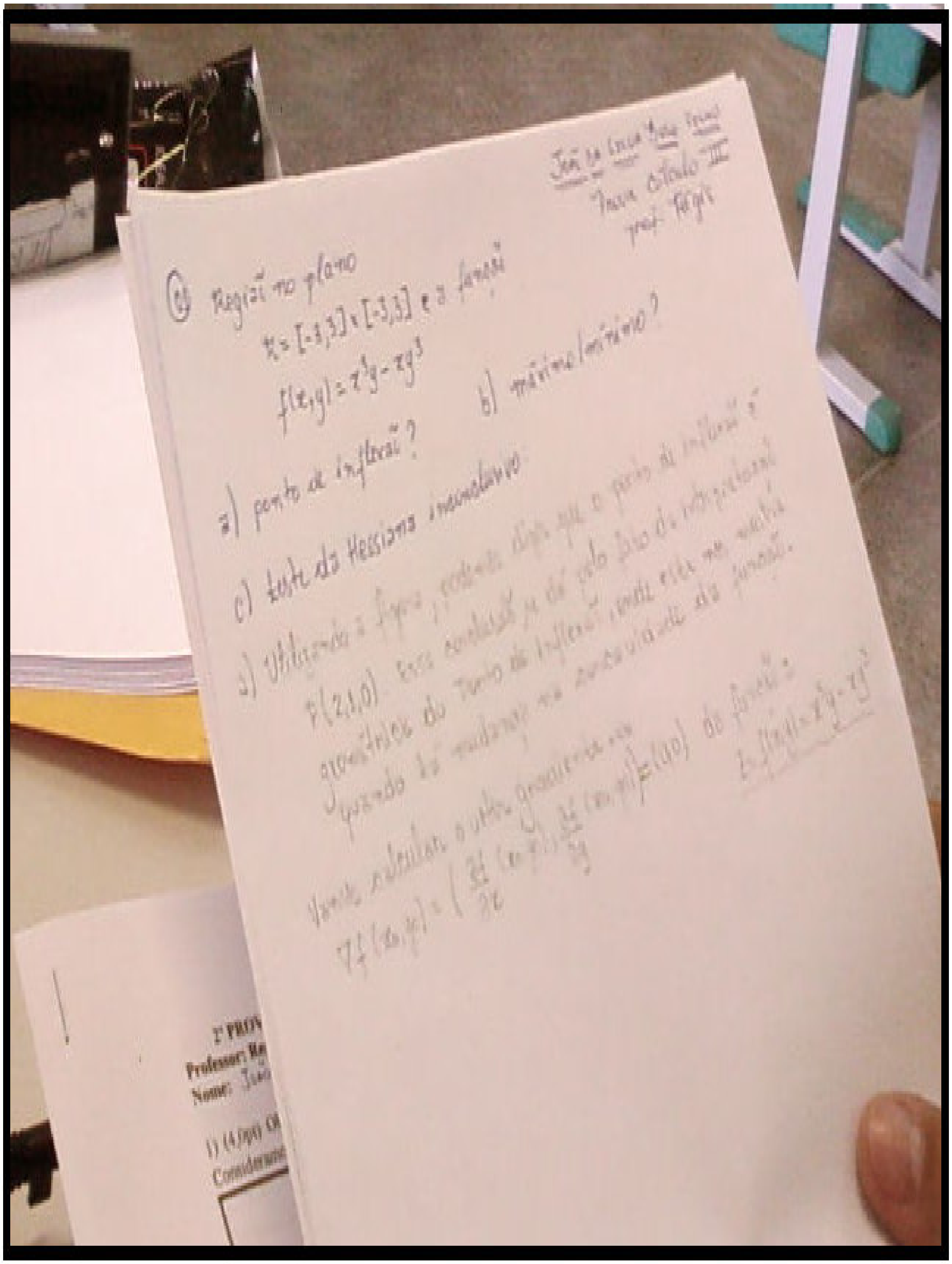
Notamos ainda suas indicações relacionadas ao tratamento das notações e mudanças notacionais. De fato, ao ser questionado, indicou que "Minha primeira dificuldade são os gráficos. As demonstrações e teoremas também geram dificuldades....". A mudança de abordagem e interpretação dos conceitos estudados no CVV lhe pareceu diferenciada ao que o mesmo estudou nas disciplinas anteriores.

Um pouco mais adiante, o **aluno 23**, forneceu alguns exemplos em que conseguia divisar com clareza a aplicação de teoremas do CVV que preservavam bastante semelhança com os teoremas estudados no CVV. Neste caso, o aluno 23 escreveu e explicou na lousa o que exibimos na figura abaixo.

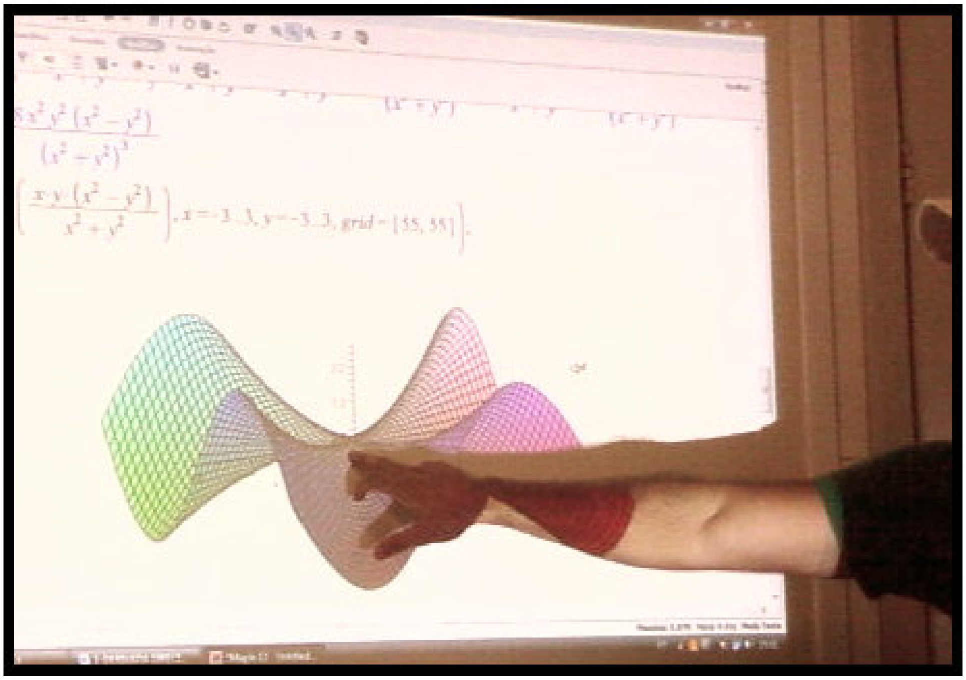


Na imagem acima, o aluno empregou o teorema $Lim_{(x,y)\to(a,b)} \underbrace{f(x,y)}_{\text{lim}itada} \cdot \overbrace{g(x,y)}^{\substack{\text{co}ngerge \\ para\ \text{zero}}}$. Aqui temos um exemplo de um conhecimento mobilizado e apoiado em uma intuição afirmativa, uma vez que, o mesmo admitiu desconhecer a demonstração formal deste teorema.

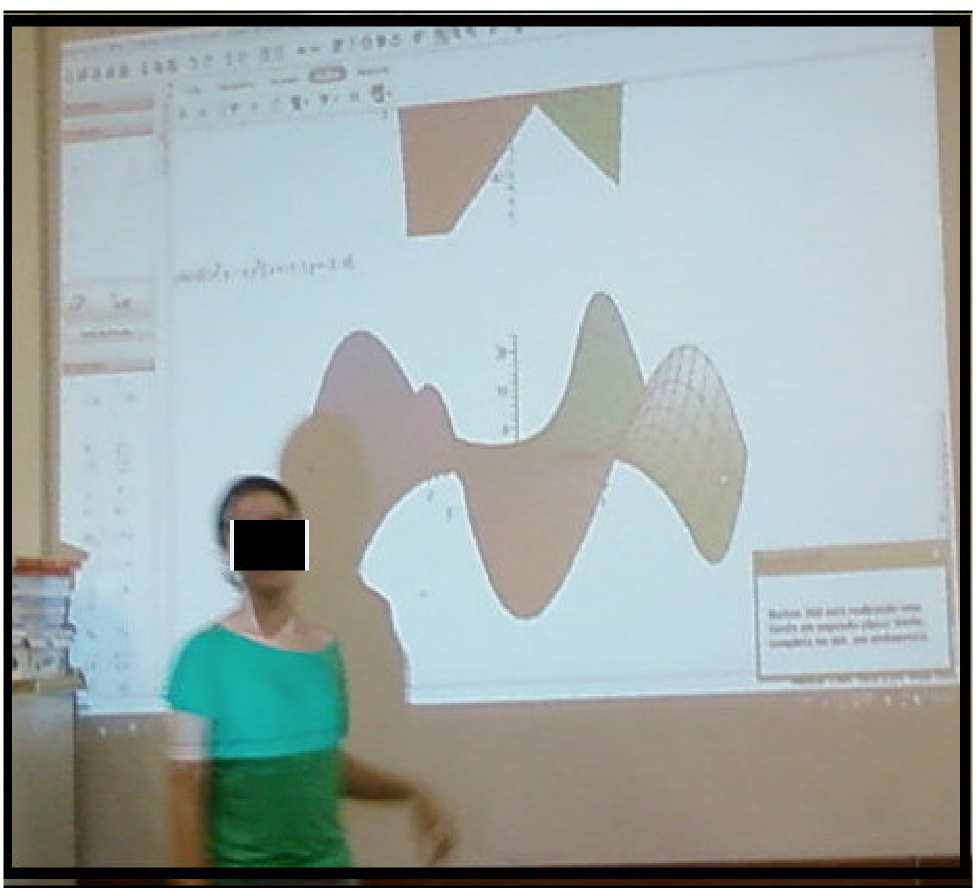
Por outro lado, resultados desta natureza, fortalecem o processo de *transição interna* do CUV para o CVV, que indicamos e descrevemos no capítulo 1.



O diferencial explorado em nossa mediação, ancorada nos pressupostos da *Sequência Fedathi*, proporcionou a revisão das estratégias, inclusive, a produção de conjecturas, baseadas na visualização, que geravam situações conflitavas com os resultados formais obtidos por intermédio do tratamento dos registros algébricos na fase anterior. Na imagem abaixo, vemos o **aluno 23** comparando e analisando os resultados obtidos na fase de solução da SF, com os seus resultados da fase de prova.



Nestas imagens os **alunos 24** e **29** compararam e confrontaram os dados obtidos na fase de *solução* da SF. Em muitos casos, a exploração de registros proporcionou a revisão das estratégias e respostas.

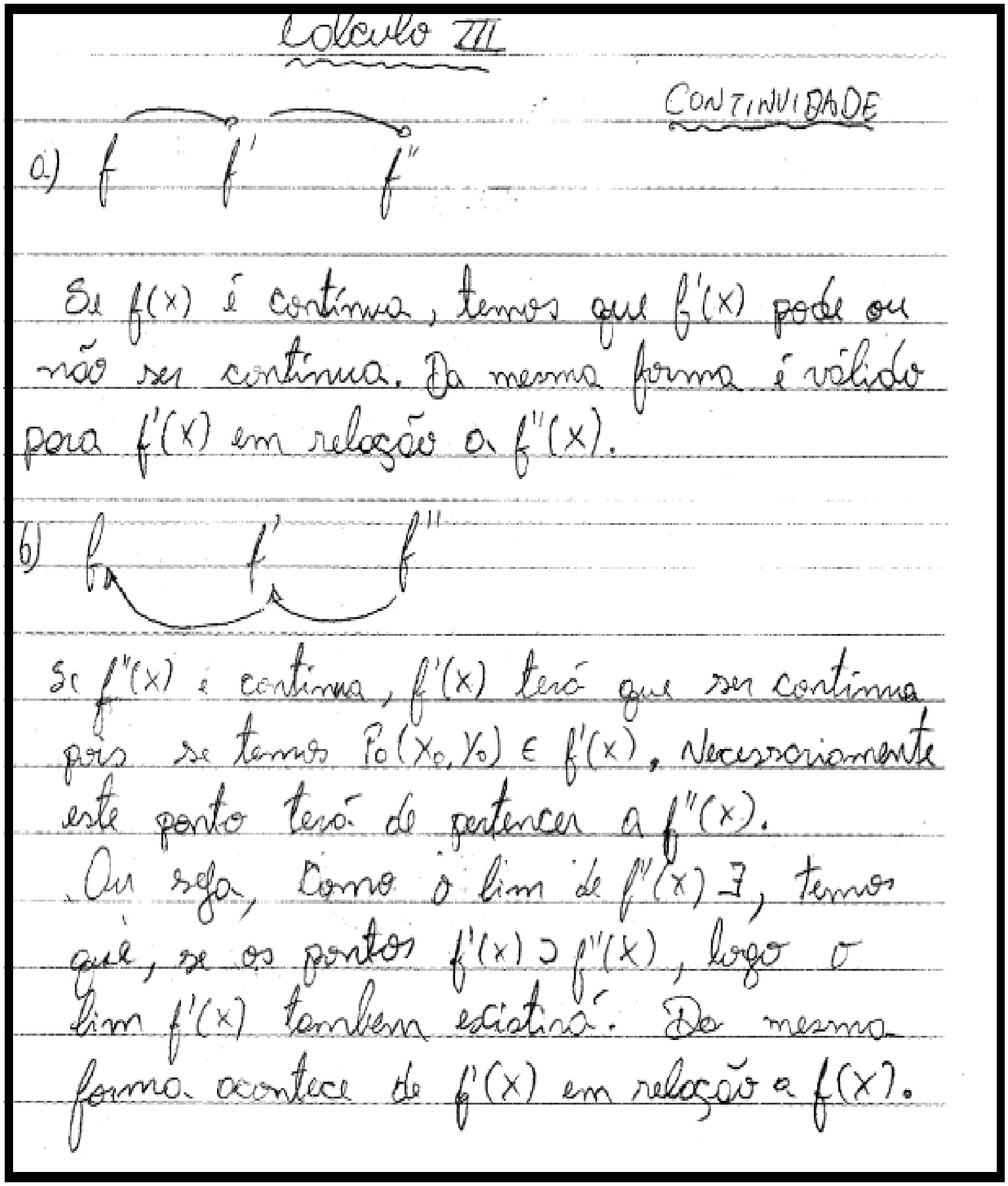


Os alunos participantes do estudo manifestaram, em várias ocasiões, suas impressões referentes às mudanças do CUV para o CVV. De fato, no estudo do CUV, os alunos aprendem a relações entre f, f' e f''. Neste caso, quando existe f', ou seja, a função é diferenciável, consequentemente, f é contínua. De modo similar ocorre com f' e f''.

Todavia, no caso do CVV, quando $f(x,y)$ é diferenciavel, sabemos que a função $f(x,y)$ é contínua, todavia, nada se sabe sobre a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Por outro lado, a análise no CVV, pode ser feita apenas em termos de $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y)$.

Questionamos aos alunos participantes as relações conceituais dessas derivadas, relacionando seus conhecimentos do CUV e do CVV. Na figura abaixo o **aluno 21** buscou relacionar e compreender as hipóteses do teorema de Clairut-Schawrz e os conhecimentos anteriores do CUV.

No CUV, dizer que $y = f(x)$ é *derivável* é o mesmo que declarar que a mesma é *diferenciável*. Enquanto que no contexto do CVV, quando declaramos que uma função do tipo $z = f(x,y)$ é *diferenciáve*l, como conseqüência, será *derivável* em relação às variáveis x e y, ou seja, existem suas *derivada parciais* e que podem ou não ser contínuas, entretanto, não tem sentido dizer que $z = f(x,y)$ é uma função *derivável*, a menos que mencionemos a quais das variáveis consideramos.



Cálculo III

CONTINUIDADE

a) f f' f''

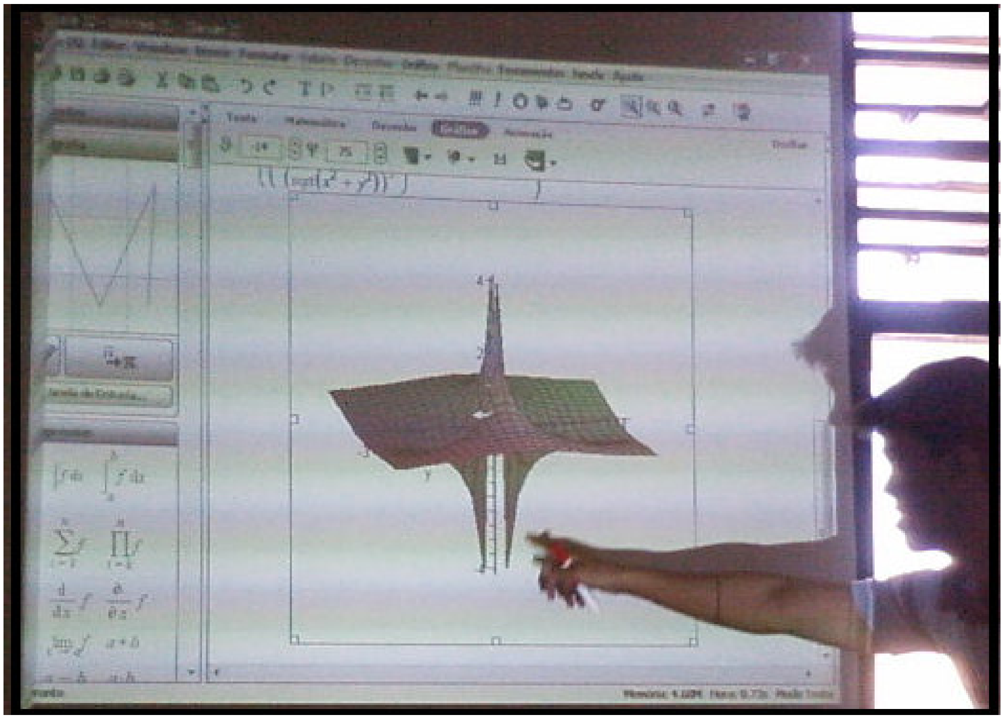
Se $f(x)$ é contínua, temos que $f'(x)$ pode ou não ser contínua. Da mesma forma é válido para $f'(x)$ em relação a $f''(x)$.

b) f f' f''

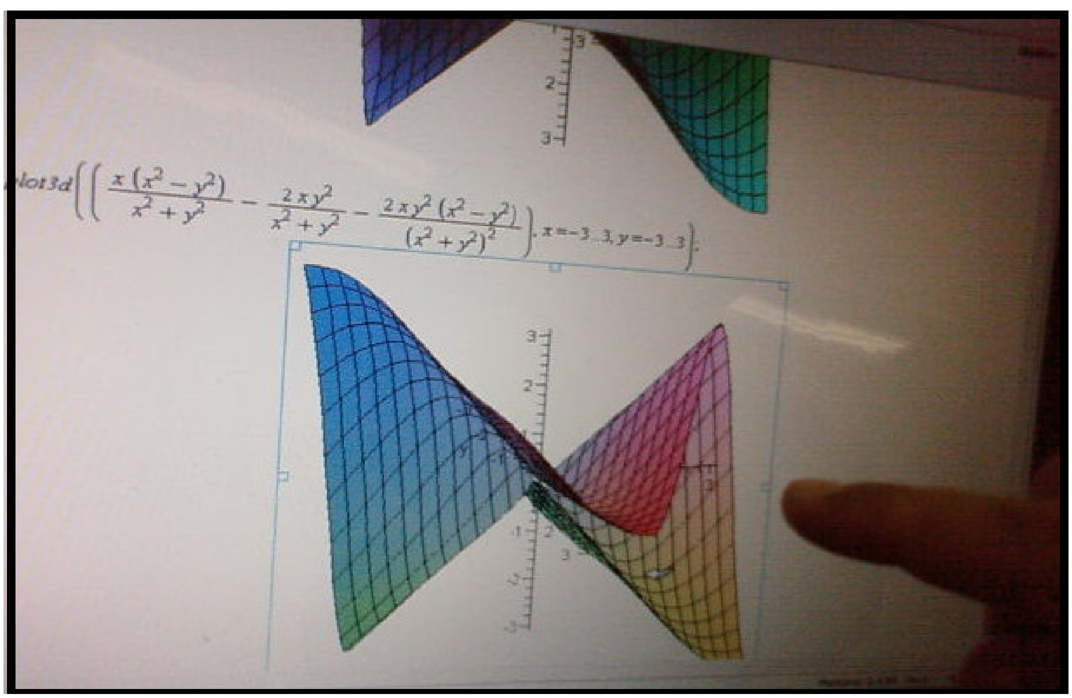
Se $f''(x)$ é contínua, $f'(x)$ terá que ser contínua pois se temos $P_0(X_0, Y_0) \in f'(x)$, Necessariamente este ponto terá de pertencer a $f''(x)$.

Ou seja, como o lim de $f''(x)$ $\exists$, temos que, se os pontos $f'(x) \supset f''(x)$, logo o lim $f'(x)$ tambem existirá. Da mesma forma acontece de $f'(x)$ em relação a $f(x)$.

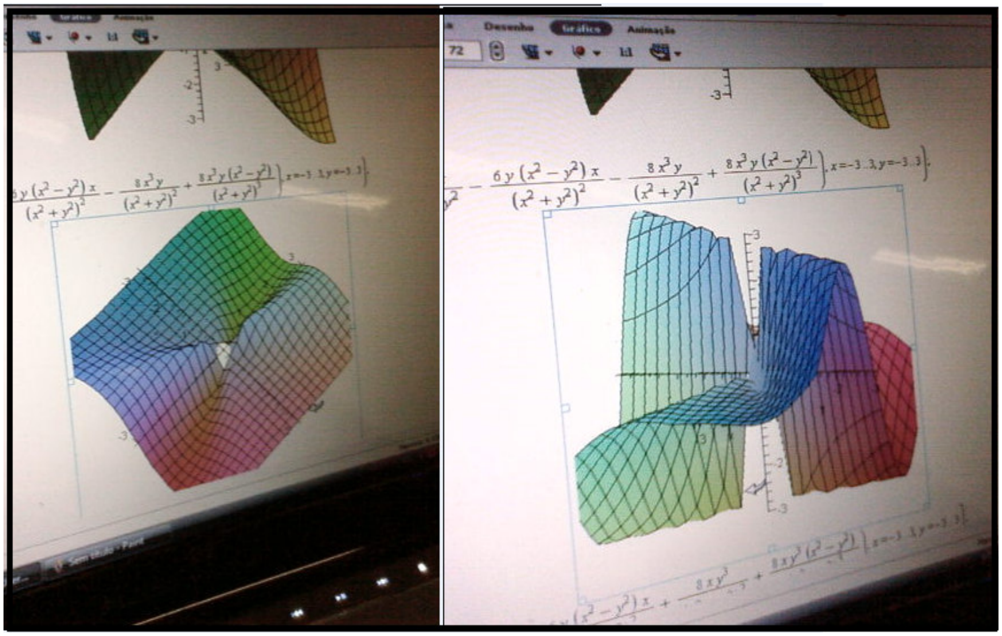
Na fase de prova da SF, o aluno 17 buscou compreender a definição formal de imagem de uma função ilimitada. Reparamos na figura abaixo sua análise visual do registro gráfico em 3D formado a partir do computador.



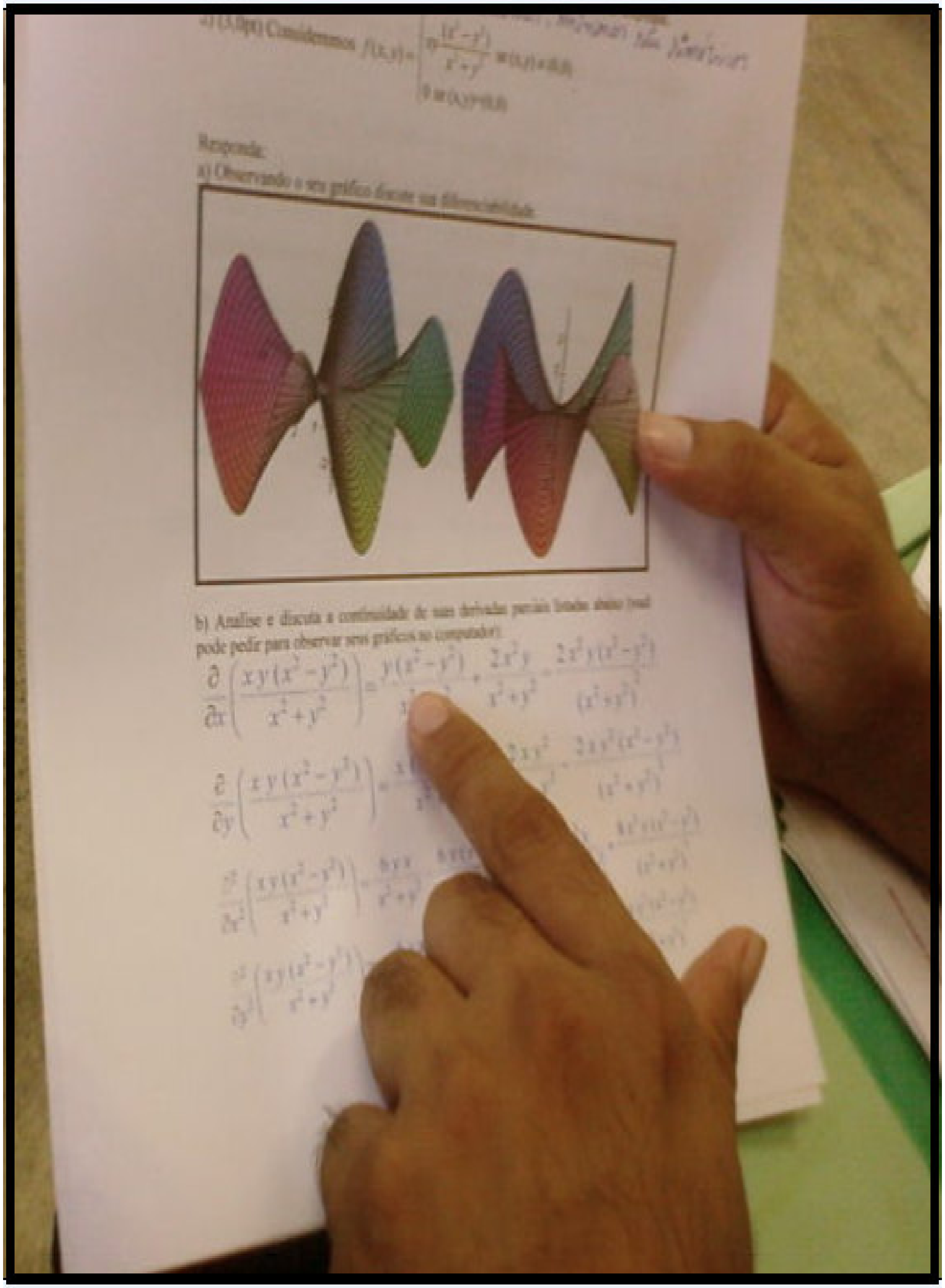
Na figura abaixo , o aluno 8 avalia o comportamento do registro gráfico em 3D, correspondente ao objeto derivadada parcial de 1ª ordem, na fase de maturação da SF.



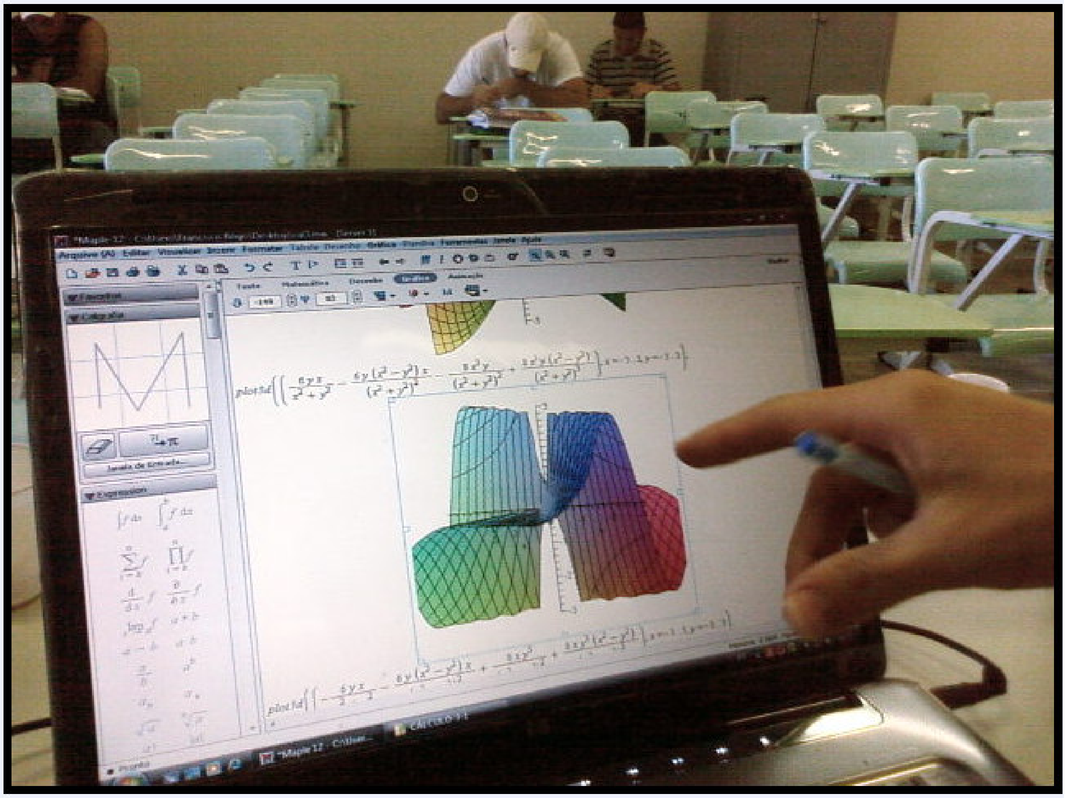
Depois, o aluno 8 investigou o comportamento das outras derivadas.

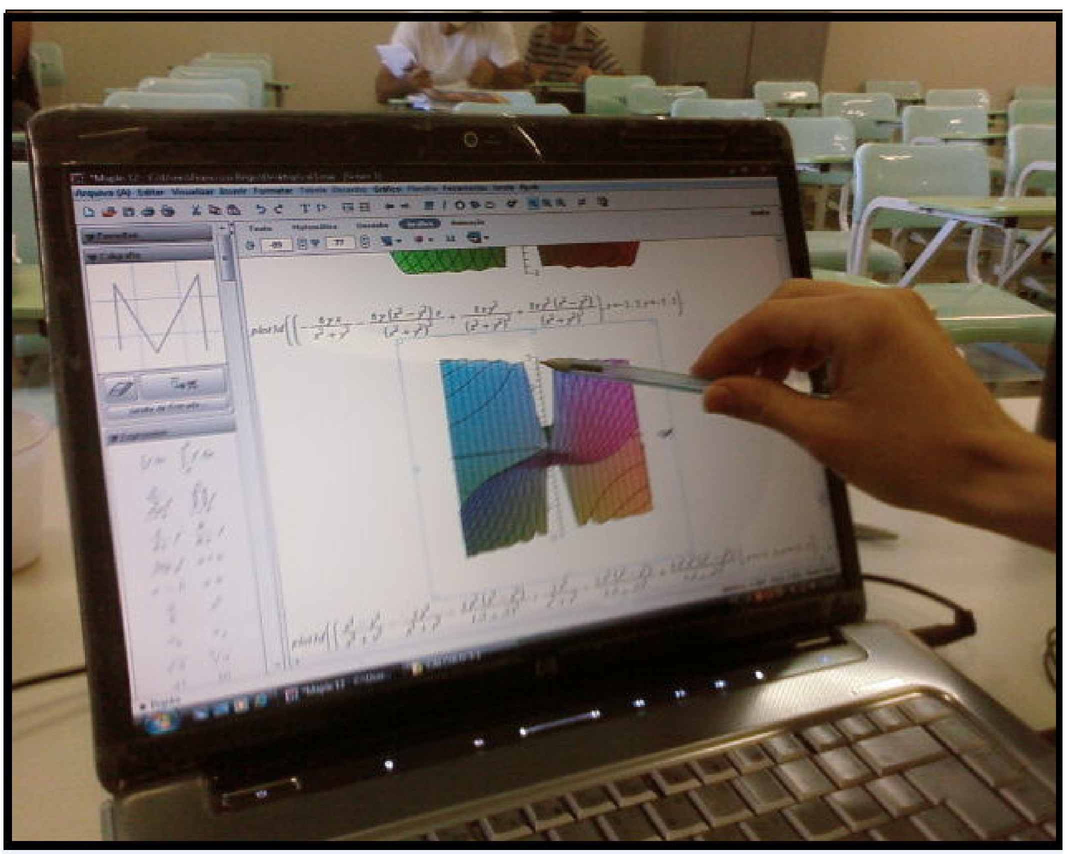


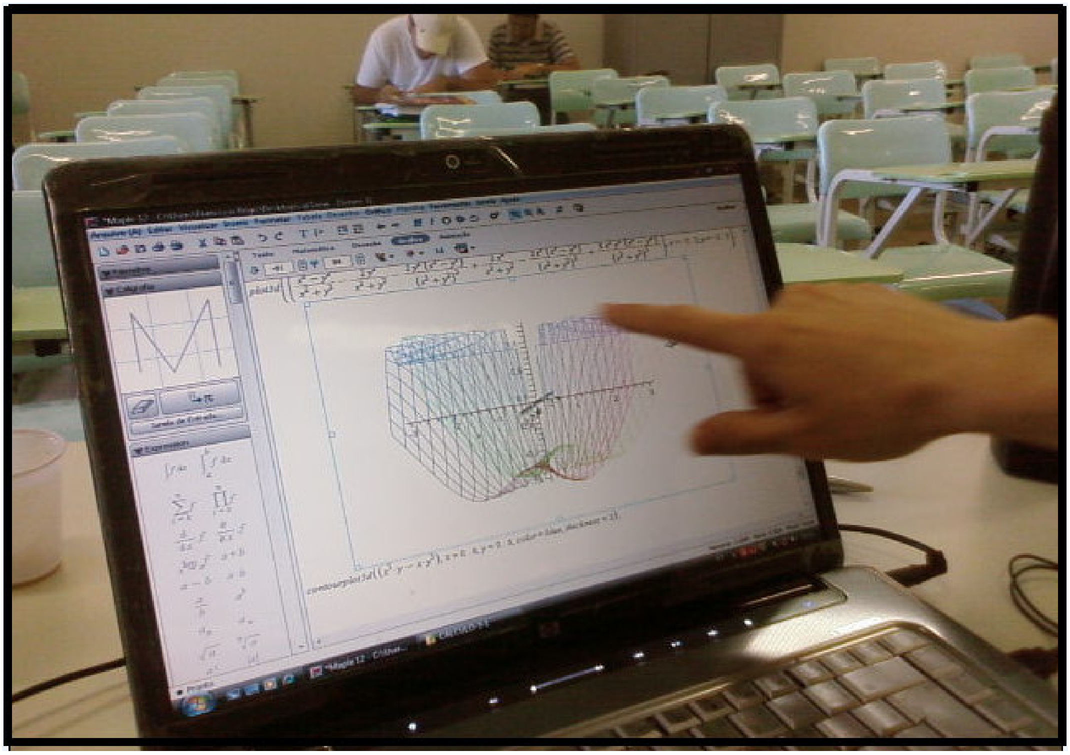
Na fase de tomada de posição, o aluno 8 comparou os registros gráficos em 2D exibidos nas atividades propostas ao decorrer do estudo. Na figura abaixo, o aluno 8 comparou os registros gráficos em 2D com os registros algébricos.

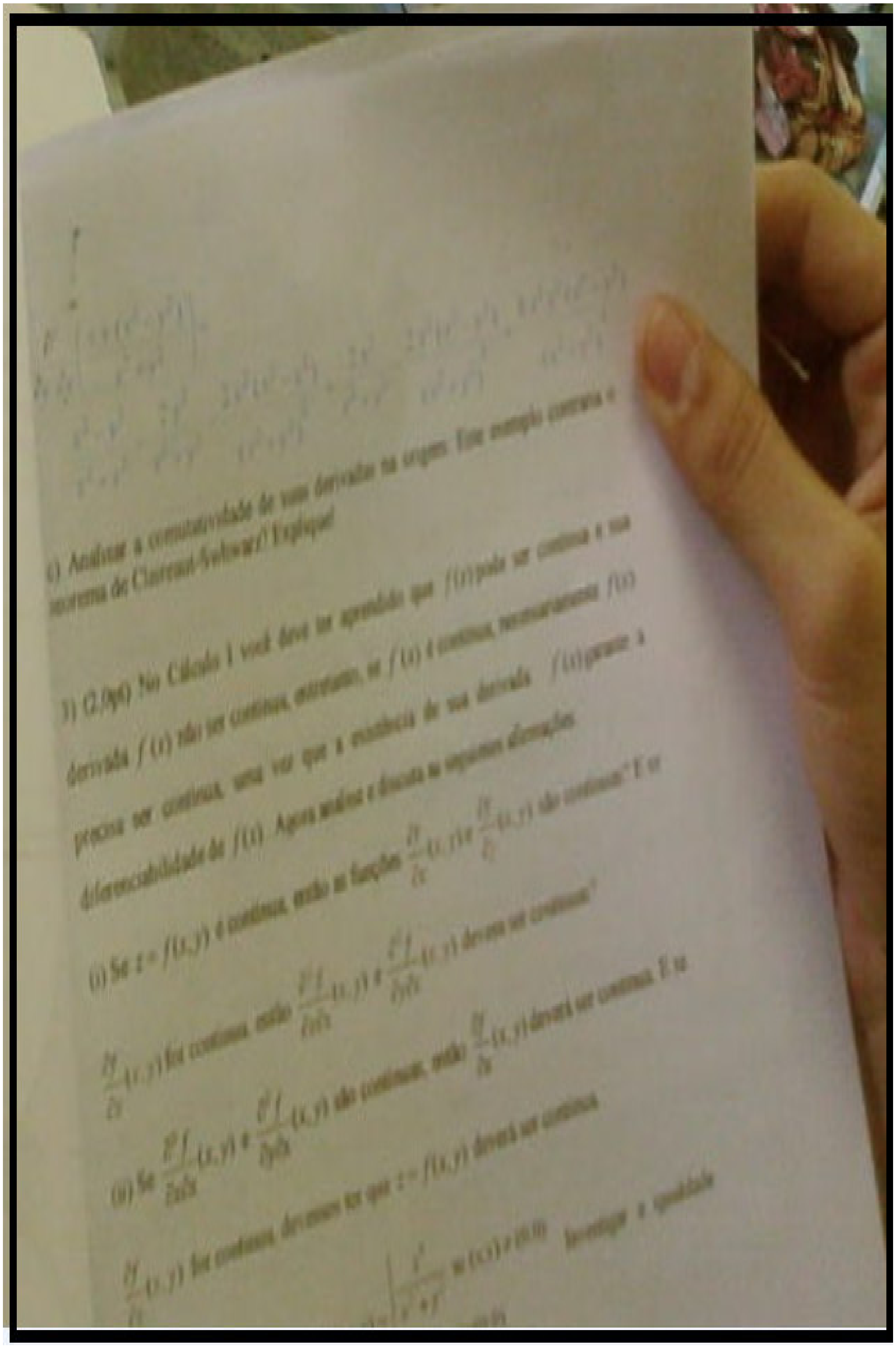


No que segue, destacamos no momento de aplicação das atividades. Neste momento, o aluno 8 requisitou a inspeção do comportamento dos *registros gráficos* na tela do computador com o intuitivo de aperfeiçoar e precisar a análise dos dados colhidos na fase anterior da SF.









Anexo III: Ementa da disciplina de Cálculo III

1 – Curvas parametrizadas no plano e no espaço $\mathbb{R}^3$.

1.1 Noção intuitiva de curvas parametrizadas no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$.

1.2 Continuidade e diferenciabilidade de curvas parametrizadas.

1.3 Construção de gráficos de curvas.

2 – Propriedades sobre o gráfico de funções do tipo $z = f(x, y)$ ou $w = f(x, y, z)$.

2.1 Domínio, imagem e gráfico.

3 – Propriedades sobre limites e continuidade de funções.

3.1 Limites por épsilon e delta.

3.2 Continuidade de funções.

4 – A noção de derivada parcial, derivada direcional e aplicações.

4.1 Construção da derivada parcial e direcional;

4.2 Propriedades da derivada parcial e direcional, Regra da Cadeia.

4.3 Aplicações, teorema de Clairaut-Schawrz.

5 – Identificação de pontos extremantes de uma função.

5.1 Interpretação geométrica de pontos extremantes.

5.2 Condições de existência de extremos da função.

5.3 Teorema da Hessiana ou teste da 2ª derivada.

5.4 Critério de identificação visual de pontos extremantes.

7 – A noção de integral Múltipla.

7.1 Interpretação geométrica da integral dupla.

7.2 Interpretação geométrica da integral tripla.

Anexo IV: Exemplos de intuições registradas nas fases da *Sequência Fedathi*.

Natureza da intuição	**Fase 1 – *tomada de posição***
Intuição afirmativa	Pelo gráfico, como não existe ruptura ou salto a função é contínua.
Intuição conjectural	Dá para ver que o gráfico possui uma "cratera" ou "buraco" aqui.

Natureza da intuição	**Fase 2 – *maturação***
Intuição afirmativa	
Intuição conjectural	Mas tem esse buraco aqui no gráfico, não é contínua... (aluno 7)
Intuição antecipatória	

Natureza da intuição	**Fase 3 – *solução***
Intuição afirmativa	É diferenciável, pois é uma função polinomial....
Intuição antecipatória	Como os limites laterais são iguais, podemos desconfiar que o limite existe...(aluno 7) Assim...podemos suspeitar que $Lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ...(aluno 21)

Natureza da intuição	**Fase 4 - *prova***
Intuição afirmativa	...que eu saiba...para aplicar o teste tem que estar no interior da superfície...(aluno 29).
Intuição conjectural	"...geometricamente como um ponto de sela...mas analiticamente, pelos cálculos...provei que não é...é um ponto qualquer...quando se aplica o teste da hessiana...logo..." (aluno 21).

Anexo V: Caracterização de alguns elementos da *transição interna* do CUV para o CVV

(i) um sistema de representação simbólica mais complexa do que o outro:

(ii) as argumentações envolvidas na demonstração dos teoremas são mais complexas, inclusive a natureza das *definições formais* envolvidas.

Podemos comparar as definições formais de derivadas para função do tipo $y = f(x)$ e $z = f(x, y)$.

(iii) a natureza geométrica diversa dos objetos envolvidos.

No CUV a integral pode ser interpretada como a área de uma região no $\mathbb{R}^2$, enquanto que no CVV, a integral múltipla pode ser interpretada como área ou volume no $\mathbb{R}^3$.

(iv) a mudança da significação conceitual interpretada em um novo *locus matemático*.

No CUV a noção de ponto critico condiciona as possibilidade de que $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ não existe. No caso do CVV, investigar os pontos críticos exigem a condição relacionada com o gradiente $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0)$.

(v) o surgimento de regras operatórias particulares.

No CUV temos regras operatórias de limites envolvendo indeterminações que se exige a *Regra de L´Hopital* e no CVV não há regras semelhantes.

(vi) regras operatórias válidas num contexto e inapropriadas em outro.

Na condição de se tomar f e calcular f' podemos obter os pontos críticos. N contexto do CVV, a obtenção dos pontos críticos é oriunda da investigação do gradiente ∇f.

(vii) teoremas do CUV sem interpretações semelhantes no CVV.

O Teorema de Bolzano no CUV sem interpretação semelhante no CVV, o Teorema de Rolle e Lagrange sem interpretação semelhante no CVV, etc.

(viii) definições formais que envolvem uma mudança de significado.

No CUV, do ponto de vista geométrico, uma função diferenciável ou derivável pode ser aproximada localmente por uma reta. No CVV uma função diferenciável, do ponto de vista geométrico, pode ser aproximada em um ponto por um plano tangente.

(ix) generalização de noções e *definições formais*.

A partir dos elementos acima, exibimos o quadro esquemático dos elementos presentes no contexto da *transição interna* do CUV para o CVV.

Noções e conceitos	CUV	CVV	Comentários
Modelo ou formulação por ε e δ	Sim	Sim	(Elemento de transição). Presente tanto no CUV como no CVV, todavia, as *regras operatórias* condicionadas por sua definição formal e as expressões algébricas tratadas são completamente distintas.
Limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ **e** $\lim_{x\to a^-} f(x)$	Sim	Não	(Elemento de ruptura). As simbologias e o significado geométrico no CUV perdem o sentido no CVV.
Limites interados $\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x)]]$ **e** $\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x)]]$	Não	Sim	(Elemento de transição). A aplicação de regras operatórias envolvidas com este conceito proporciona o tratamento de funções em uma variável real, semelhante ao caso do CUV.
Descontinuidade removível	Sim	Não	(Elemento de ruptura). Não há um conceito semelhante, que indica a generalização desta ideia, correspondente no CVV.
Derivabilidade	Sim	Não	(Elemento de ruptura). Esta noção formal possui sentido apenas no contexto do CUV
Diferenciabilidade	Sim	Sim	(Elemento de transição). Noção mais geral e admite sentido e descrição formal, tanto no CUV e no CVV.
Derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ **e** $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	Não	Sim	(Elemento de ruptura). Apesar de ser um conceito restrito ao CVV, o mesmo conceito poderia ser explorado, de modo intuitivo, no CUV.
Derivadas de ordem superior $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y)$ **e** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y)$	Sim	Sim	(Elemento de ruptura). Por outro lado, possuem significados completamente distintos em cada teoria de base. Os livros consultados apresentam uma diversidade de enunciados.
Comutatividade das derivadas	Não	Sim	(Elemento de ruptura). Podem ser descritas, em certos casos como *limites interados*.
Uso de metáforas na explicação/significação dos conceitos	Sim	Não	(Elemento de transição). Nos livros observamos a exploração de metáforas apenas no contexto do CUV. O uso deste recurso

			pedagógico no CVV pode ser intensificado com arrimo na tecnologia.

Fonte: Elaboração própria.