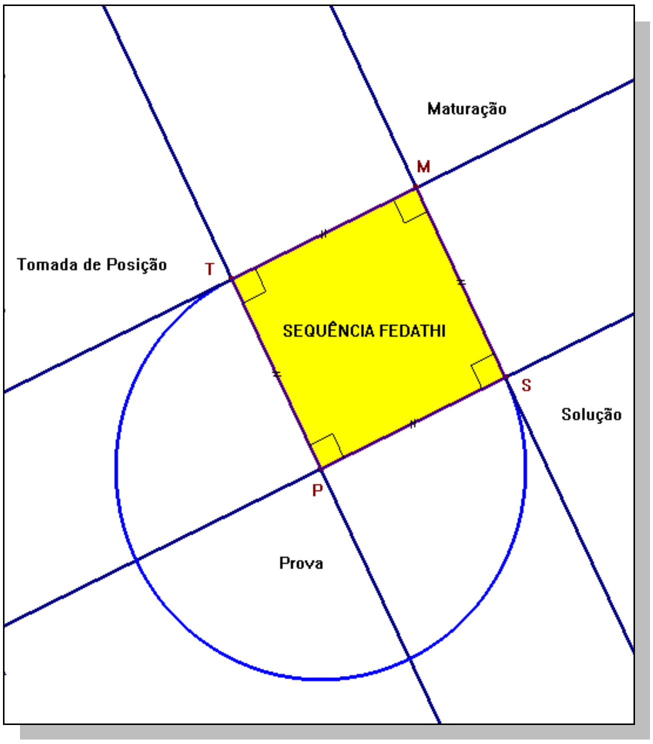
Universidade Federal do Ceará - UFC
Faculdade de Educação - FACED
Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira
Curso de Doutorado em Educação

APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA MEDIADO POR TECNOLOGIAS DIGITAIS



Maria José Araújo Souza

Fortaleza (CE), Brasil
Junho - 2010

Maria José Araújo Souza

Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediado por tecnologias digitais

Orientador:
Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

Fortaleza (CE), Brasil
Junho - 2010

Maria José Araújo Souza

Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediado por tecnologias digitais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Faculdade de Educação – FACED / Universidade Federal do Ceará – UFC, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor, tendo como orientador o Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

Linha de Pesquisa
Educação, Currículo e Ensino

Eixo
Ensino de Matemática

Fortaleza (CE), Brasil
- 2010 -

Bibliotecária Responsável: Ivete Costa CRB 3/998

S716a

Souza, Maria José Araújo.

Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediado por tecnologias digitais / Maria José Araújo Souza. -- Fortaleza: UFC / Faculdade de Educação, 2010.

230 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará / Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Faculdade de Educação, Fortaleza (CE), 2010.

1. Ensino de Geometria – Sequência Fedathi. 2. Matemática – tecnologias digitais. 3. Educação - didática. 4. Matemática - ensino. I. Borges Neto, Hermínio. II. Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação. III. Título.

CDD 371.3

Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediado por Tecnologias Digitais

Tese defendida em 14 de junho de 2010

Maria José Araújo Souza - Orientanda

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto - Orientador
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Paulo Meireles Barguil
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof.ª Dr.ª Natália Maria Cordeiro Barroso
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof.ª Dr.ª Marcília Chagas Barreto
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. Cláudio Carlos Dias
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Fortaleza (CE), Brasil
Junho - 2010

EM ESPECIAL

Aos meus filhos Andre e Alex, por alimentarem minha existência e significarem tudo de mais sagrado na minha vida.

Ao Prof. Francisco Wellington Ximenes de Menezes
companheiro, amigo e conselheiro,
pelo amor, dedicação e incentivo em todos os momentos,
para que eu pudesse chegar aqui.

Ao Professor e Orientador Doutor Hermínio Borges Neto,
pela confiança, sapiência e apoio dedicados
durante todo o percurso deste trabalho.

Aos meus ex e atuais alunos, os quais nutrem constantemente meu prazer em ensinar, pesquisar e sonhar com um mundo melhor.

Ao meu Pai Enéas Cezário (In memoriam),
Por tudo o que fizeste por mim.
À minha Mãe Francineide pelo amor e a vida de
doação em prol da família.

Dedico

AGRADECIMENTOS

- A Deus, pela vida e pela luz que guia e aponta-nos o caminho a seguir.

- À Professora Benedita Marta Gomes Costa - "Marta" - amiga exemplar, com seu jeito manso e guerreiro, com palavras, gestos, atitudes e conselhos sempre certos, nas horas certas.

- Ao Professor Francisco Jairo Gomes - "Jairo" - amigo ímpar, por seu jeito honesto, companheiro e bem-humorado, presente em todas as horas.

- Ao Professor Mário de Assis Oliveira, por sua amizade, profissionalismo, caráter exemplar e por ser um distinto "educador matemático ".

- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação da FACED - UFC, pelos ensinamentos.

- Aos Professores Examinadores Dr.ª Marcília Barreto, Dr. Paulo Barguil, Dr.ª Natália Maria Cordeiro Barroso e Dr. Cláudio Carlos Dias, por ofertarem seu precioso *tempo e saber* para contribuírem com este trabalho.

- Ao aluno do Curso de Licenciatura em Matemática da UVA - Juan Medeiros pelo apoio como monitor voluntário, na disciplina Novas Tecnologias no Ensino de Matemática.

- Aos alunos da disciplina Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela participação na parte experimental da pesquisa.

- A Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, por disponibilizar o ambiente para a pesquisa.

- À FUNCAP, que me concedeu auxílio financeiro com bolsa de estudo.

- À minha família, especialmente a meus pais e irmãos, por compartilharmos nossas vidas com fé, amizade e apoio.

- As funcionárias do lar que trabalharam em minha casa, pelos serviços prestados, dedicação e apoio a minha família nos momentos que mais precisei durante a trajetória deste trabalho.

- A todos os meus amigos, pela torcida e incentivos para que eu conseguisse chegar até aqui.

A diferença entre nós e os alunos que se encontram sob nossa responsabilidade está apenas no fato de que nós já percorremos um trecho mais comprido da parábola da vida. Se os alunos não entendem, a culpa é do professor que não sabe explicar. Também não vale culpar as escolas anteriores. Precisamos aceitar os alunos como são e fazer com que lembrem o que esqueceram, ou estudaram sob outra nomenclatura. Se o professor atormenta os seus alunos, e em lugar de conquistar o seu amor, estimula o ódio contra si mesmo e contra a ciência que ensina; não apenas o seu ensinamento será negativo, mas ter que conviver com tantos pequenos inimigos será para ele um tormento contínuo.

Giuseppe Peano (1858-1932) - matemático italiano
(D`AMORE, 2007)

RESUMO

Este trabalho trata do ensino e da aprendizagem da Matemática, tendo a Sequência Fedathi e as tecnologias digitais como eixos centrais das reflexões. Teve como objetivo geral analisar influências da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria, com o software Cabri-Géomètre. O estudo apresenta aspectos acerca: da Didática Geral e da Matemática, sequências didáticas e Sequência Fedathi, desenvolvimento da Geometria nos contextos histórico e educacional, tecnologias digitais na Educação Matemática. Entre os autores que nortearam o trabalho ressaltamos, Brousseau, Silvia Machado, Borges Neto, Pais, Nérici e Libâneo. A metodologia da pesquisa foi desenvolvida com base na Sequência Fedathi com apoio em elementos da Didática Geral e da Matemática. Os sujeitos pesquisados foram alunos da disciplina Novas Tecnologias no Ensino de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, em Sobral - Ceará. A pesquisa constou da exploração das etapas da Sequência Fedathi e da aplicação de sequências didáticas utilizando Fedathi como proposta metodológica no ensino e aprendizagem da Geometria, através da resolução de atividades com o software Cabri-Geómètre. Para complementar os dados obtidos das sequências didáticas, foram aplicadas fichas diagnósticas individuais, no início e no final do estudo. Pelos resultados obtidos, pode-se considerar que a Sequência Fedathi se adequa muito bem ao ensino de Matemática com as tecnologias digitais. Suas fases de desenvolvimento permitiram aos estudantes e ao professor a realização de interações que muito contribuíram para a discussão dos conceitos geométricos explorados nas atividades. As interações foram efetivadas, principalmente, nas fases da maturação e discussão das soluções, possibilitando aos alunos novas percepções relativas à elaboração do conhecimento matemático, entre elas a experimentação, a aplicação de conceitos matemáticos na própria Matemática e a visualização. No que concerne à transposição dos conceitos geométricos para o ambiente informático, verificamos que a metodologia trabalhada permitiu aos alunos a elaboração de concepções mais sólidas e mais abrangentes dos conceitos, além de haver sido, para os alunos, um modelo para a utilização das tecnologias digitais na docência em Matemática. Apesar de todos já possuírem alguma experiência em informática, foi a primeira vez que trabalharam com programas específicos para a Matemática. As dificuldades iniciais estiveram ligadas à validação dos conceitos matemáticos no ambiente informático, ou seja, nos primeiros contatos com o software, os alunos tendenciaram a reproduzir as mesmas regras de resolução do ambiente lápis e papel e aos poucos foram dando conta de que muitas delas não funcionavam, pois o novo dispositivo tem regras próprias para aplicação e validação dos conceitos. Mediante as experimentações e transformações imediatas dos objetos trabalhados, os alunos foram aos poucos apreendendo as regras de validação do ambiente (software Cabri-Géomètre), em especial no que diz respeito à estabilidade das formulações. Outra dificuldade vivenciada pelos alunos foi à aplicação de propriedades das construções geométricas, apesar do grupo pesquisado, já haver cursado a disciplina Desenho Geométrico, a maioria do grupo não aplicou inicialmente conceitos inerentes às construções geométricas na resolução das atividades. Somente no decorrer das interações realizadas entre o professor e alunos e alunos entre si, é que essas e outras dificuldades foram superadas. Ao final, podemos considerar que a Sequência Fedathi é um modelo de ensino que favorece a aprendizagem em matemática no ambiente informático, principalmente, pelas reflexões, compreensões e interações que propicia entre professor e alunos na elaboração deste saber.

Palavras-Chave: Didática. Matemática. Sequência Fedathi. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This work is about the teaching and learning of Mathematics, having the Fedathi Sequence and the digital technologies as central axes of the reflections. It's general objective was to analyze the influences of the Fedathi Sequence in the teaching and learning of Geometry, with the Cabri-Géomètre software. The study presents aspects about: General Didactic and Mathematics, didactic sequences and the Fedathi Sequence, Geometry development in historical and educational context and digital technologies in Mathematics Education. Within the writers that guided this work we emphasize the names Brosseau, Silvia Machado, Borges Neto, Pais, Nérici and Libanêo. The research methodology was developed based on the Fedathi Sequence with the support of the General Didactic and Mathematics. The subjects studied were students of the New Technologies in Mathematics Teaching course, of the Graduation course in Mathematics of the State University of Vale do Acaraú – UVA, in Sobral, Ceará. The research consisted in the exploration of the Fedathi Sequence stages and the application of didactic sequences using Fedathi as a methodological proposal in the teaching and learning of Geometry, through the activities resolution with the Cabri-Géomètre software. To complement the data obtained from the didactic sequences, individual diagnostic forms were applied, during the beginning and at the end of the study. From the results obtained, it can be considered that the Fedathi Sequence fits quite well to the Mathematics teaching with the digital technologies. It's development phases has allowed the students and the teacher to achieve interactions that have highly contributed to the discussion of geometrical concepts explored in the activities. The interactions took place, mainly, in the maturing and solutions discussion phases, enabling students to have new perceptions related to the elaboration of the mathematics knowledge, within them the experimentation, the application of mathematical concepts in Mathematics itself and the visualization of it. Regarding the transposition of the geometrical concepts or for the information systems environment, we verified that the methodology used allowed the students to elaborate more solid conceptions and more comprehensive concepts, a side of being for the students, a model for the use of the digital technologies in Mathematics teaching. Even though all already had some experience in information systems, it was the first time they had worked with specific programs for Mathematics. The initial difficulties were linked to the validation of the mathematical concepts in the information systems environment, in other words, in the first contacts with the software, the students were inclined to to apply the same rules of resolution used in the paper and pencil context and gradually found out that many of the did not work, since the new device has it's own rules for the application and validation of the concepts. Through the experimentation and immediate transformation of the objects worked, the students gradually started learning the validation rules of the enviroment (Cabri-Géomètre software), especially with regards to the stability of the formulations. Other difficulty experienced by the students was the application of the properties of the geometrical constructions, even though the researched group, had already attended the Geometrical Design course, a great part of the group did not initially apply inherent concepts to geometrical constructions in the activities resolution. Only during the course of the performed interactions between the teacher and students and between students, themselves, was that these difficulties were overcome. At the end, we can consider that the Fedathi Sequence is a teaching model that benefits mathematics learning in the information systems environment, mainly, through the reflections, comprehensions and interactions provided between teacher and students in the making of this knowledge.

Word-key: Didacticism. Mathematics. Sequence Fedathi. Digital technologies.

RÉSUMÉ

Ce travail est au sujet de l'enseignement et apprendre de Mathématiques, avoir les Fedathi Sequence et les technologies numériques comme haches du central des réflexions. C'est l'objectif général était analyser les influences du Fedathi Sequence dans l'enseignement et apprendre de Géométrie, avec le logiciel Cabri-Géomètre. L'étude présente des aspects au sujet de: Le général Didactique et Mathématiques, séquences didactiques et les Fedathi Sequence, développement de la Géométrie dans contexte historique et pédagogique et technologies numériques dans Éducation des Mathématiques. Dans les écrivains qui ont guidé ce travail nous accentuons les noms Brosseau, Silvia Machado, Borges Neto, Pais, Nérici et Libanêo. La méthodologie de la recherche a été développée basé sur la Séquence Fedathi avec le support du Général Didactique et Mathématiques. Les sujets étudiés étaient étudiants des Nouvelles Technologies dans Mathématiques qui Apprennent le cours, du cours de la Remise des diplômes dans Mathématiques de l'État l'Université de Vallée fait Acaraú - UVA, dans Sobral, Ceará. Les recherches ont consisté dans l'exploration des Fedathi Séquence étapes et la candidature de séquences didactiques utiliser Fedathi comme une proposition méthodologique dans l'enseignement et apprendre de Géométrie, à travers la résolution des activités avec le Cabri - Géomèter logiciel. Pour compléter le données obtenu des séquences didactiques, les formes diagnostiques individuelles ont été appliquées, pendant le commencement et à la fin de l'étude. Des résultats obtenus, il peut être considéré que le Fedathi Sequence va parfaitement tout à fait bien aux Mathématiques qui apprennent avec les technologies numériques. C'est des phases du développement a permis aux étudiants et le professeur d'accomplir interactions qui ont contribué à la discussion de concepts géométriques hautement exploré dans les activités. Les interactions ont eu lieu dans le mûrir et la discussion des solutions synchronise, étudiants habilitants avoir de nouvelles perceptions été en rapport avec l'élaboration de la connaissance des mathématiques, dans eux l'expérimentation, la candidature de concepts mathématiques dans les Mathématiques elle-même et la visualisation de lui. Concernant la transposition des concepts géométriques ou pour l'environnement des systèmes des renseignements, nous avons vérifié que la méthodologie utilisée autorisé les étudiants élaborer des conceptions plus solides et des concepts plus complets, un côté d'être pour les étudiants, un modèle pour l'usage des technologies numériques dans enseignement des Mathématiques. Bien que tout déjà eût quelque expérience dans les systèmes des renseignements, c'était la première fois qu'ils avaient travaillé avec les programmes spécifiques pour les Mathématiques. Les difficultés initiales ont été liées à la validation des concepts mathématiques dans l'environnement des systèmes des renseignements, en d'autres termes, dans les premiers contacts avec le logiciel, les étudiants ont été inclinés pour appliquer les mêmes règles de résolution utilisé dans le papier et contexte du crayon et ont trouvé progressivement que beaucoup du n'a pas travaillé, depuis que le nouvel appareil qu'il a est de propres règles pour la candidature et validation des concepts. À travers l'expérimentation et transformation immédiate des objets travaillées, les étudiants ont commencé apprendre les règles de la validation de l'enviroment progressivement (logiciel Cabri-Géomètre), surtout avec amitiés à la stabilité des formulations. L'autre difficulté éprouvée par les étudiants était la candidature des propriétés des constructions géométriques, bien que le groupe fait des recherches, avait déjà assisté au cours du Dessin Géométrique, une grande partie du groupe n'a pas appliqué de concepts initialement inhérents aux constructions géométriques dans la résolution des activités. Seulement pendant le cours des interactions exécutées entre le professeur et étudiants et entre étudiants, eux-mêmes, était que ces difficultés ont été vaincues. À la fin, nous pouvons considérer que la Séquence Fedathi est un modèle de l'enseignement qui bénéficie des mathématiques qui apprennent dans l'environnement des systèmes des renseignements, principalement, à travers les réflexions, les compréhensions et interactions ont fourni entre professeur et étudiants dans la fabrication de cette connaissance.

La mot clef: Didacticism. Mathématiques. Sequence Fedathi. Technologies Numériques.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CONTINUIDADE DA LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ANEXOS E APÊNDICES

APRESENTAÇÃO

Este texto resulta dos estudos que realizamos sobre fenômenos ligados ao ensino e aprendizagem da Matemática, com base na Didática da Matemática, Sequência Fedathi e das tecnologias digitais no ensino da Matemática. Por meio do aporte teórico explorado em torno dos temas supracitados buscamos compreender alguns fenômenos ligados ao ensino da Matemática, de modo mais específico da Geometria mediado por computador.

Para melhor compreensão e sequenciamento da problemática estudada, dividimos o texto em oito partes distintas e interligadas.

A *Introdução* apresenta uma visão geral do trabalho, ressaltando nosso envolvimento com o tema através da trajetória formativa e profissional, delimitação do problema, e objetivos.

O Capítulo 1 apresenta elementos ligados à Didática Geral e Didática da Matemática, composição, principais elementos e relação entre elas.

O *Capítulo 2* conceitua e discute princípios teóricos da Didática da Matemática francesa, entre eles: Teoria das Situações Didáticas, Obstáculo Epistemológico, Transposição Didática e Informática, Contrato Didático e Engenharia Didática.

O *Capítulo 3* apresenta na primeira parte uma discussão inicial, visando a conceituar e diferenciar Sequência Didática, Situação Didática e Sequência de Ensino, apresentando logo depois um histórico acerca do desenvolvimento de algumas sequências didáticas. Na segunda parte, apresentamos a Sequência Fedathi, descrevendo cada uma de suas fases, detalhando elementos da Sequência até então não especificados em outros trabalhos.

O *Capítulo 4* traz uma síntese histórica acerca do desenvolvimento da Geometria, sua fixação no currículo escolar e nos cursos de licenciatura.

O *Capítulo 5* discute a inserção das tecnologias digitais no ensino de Matemática, ressaltando aspectos da Geometria Dinâmica, e dos *softwares* Cabri-Géomètre e Geogebra.

O *Capítulo 6* exibe os procedimentos metodológicos da investigação e analisa os resultados obtidos, com base nas Sequências Didáticas aplicadas e na Sequência Fedathi.

Ao final apresentamos as principais *Conclusões* resultantes do trabalho e algumas *Perspectivas* dentro da temática pesquisada.

Esperamos que o trabalho seja uma contribuição, embora modesta, para profissionais da área da Educação Matemática, que, como nós, acreditam e vivem a buscar os caminhos que venham concorrer para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, e, conseqüentemente, com a melhor formação para nossos estudantes.

INTRODUÇÃO

Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.

Irene de Albuquerque

A ideia de que a Matemática oferece mais obstáculos à aprendizagem do que as demais disciplinas é certamente muito antiga e por isso mesmo tem merecido, nos últimos anos, especial atenção por parte dos educadores matemáticos, asserção comprovada pelo aumento de eventos, publicações e grupos de pesquisa em torno do tema. Apesar desta atenção, o ensino de Matemática continua sendo proposto de maneira pouco refletida, deixando muito a desejar nas práticas das salas de aula e no desempenho matemático dos estudantes, fatos facilmente visualizados juntos às escolas e relatórios acerca das avaliações nacionais e estaduais relacionadas à aprendizagem da Matemática.

As dificuldades para que transformações venham ocorrer no ensino desta ciência estão ligadas a vários fatores, entre os quais podemos ressaltar a prática docente, a qual é uma forte barreira para que mudanças significativas sejam produzidas no âmbito das salas de aula. Diversos fatores, mitos e crenças que muitos professores têm acerca da Matemática, o baixo domínio teórico-metodológico na área, utilização inadequada de instrumentos e materiais de apoio, falta de visão mais ampla e global acerca das transformações e mudanças sociais, entre outros fatores, são determinantes e estão intimamente relacionados ao baixo nível de aprendizagem da matéria.

Enquanto o ensino permanece com esse relativo imobilismo, a sociedade passa por múltiplas e rápidas transformações. Ressaltamos aqui dois fatores, ambos frutos do desenvolvimento tecnológico, associados a mudanças sociais radicais: *a comunicação e a informática*. Os satélites tornam o acesso à informação um fenômeno instantâneo e mundial. Se, até a pouco, os homens eram receptores passivos das informações, as redes de computadores dão a cada usuário inúmeras possibilidades de interação, principalmente através da Internet. Mudam os transportes e a telefonia, a vida diária é permeada pela presença da informática e das mídias digitais. As relações globais, entre os países, são objeto de alterações drásticas. O equilíbrio econômico é instável. As trocas de mercadorias e a convivência com outras culturas são cada vez mais intensas. O ritmo global de vida, incluindo as relações familiares e profissionais, torna-se outro. Os adultos adaptam-se a esse impacto, as crianças e os jovens crescem sob a influência dessa nova realidade.

Então, o papel do professor passa a ser determinante, tendo como função precípua elaborar saberes, que preparem os alunos para lidar de maneira satisfatória com esta nova sociedade, marcada por diferentes formas e estilos de vida, rápidas transformações e muita tecnologia. O raciocínio e o domínio do conhecimento matemático passam a ser ferramentas, cada vez mais úteis e necessárias, para interpretar e nortear ações e decisões neste universo, marcado por imagens, movimentos e informações, associadas às mais diversas tecnologias. Para obter êxito em seu trabalho, o professor precisará, cada vez mais, além do conhecimento específico (matemático), do amplo domínio das tecnologias informáticas e de novas formas de propor o ensino, buscando, por meio destes saberes, constituir de forma significativa os conhecimentos a serem dominados pelos alunos dentro desta nova sociedade.

O domínio das tecnologias e de suas implicações no contexto educacional deve fazer parte das discussões em torno da formação dos professores, buscando possibilitar a estes a superação de um modelo de ensino que pouco se harmoniza às necessidades atuais dos educandos.

É com base no cenário descrito, que buscaremos apresentar e discutir aspectos ligados ao ensino e à aprendizagem da Matemática, tendo como centro a Sequência Fedathi e as tecnologias digitais.

O envolvimento com a temática aqui explorada é decorrência de nossa trajetória profissional, a qual esteve constantemente ligada à educação matemática e à utilização das tecnologias digitais na educação. Logo na sequência, transcrevemos algumas destas experiências, as quais consideramos âncoras na feitura deste trabalho.

Em 1991, iniciamos nossa *Licenciatura em Matemática* na Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, em Sobral (CE), sendo uma opção que em nenhum instante pensamos mudar. Ao contrário, ficamos cada vez mais interessada e entusiasmada por tudo que pertencia à área. Fomos monitora durante dois anos e meio do Curso, na disciplina de Fundamentos da Matemática, participando de atividades de ensino junto à Universidade e ministrando minicursos em escolas estaduais. Esta experiência rendeu-nos uma grande aprendizagem para a prática docente que começamos a desenvolver antes mesmo de terminar a graduação. Durante dois anos, participamos também do Programa das Licenciaturas - PROLICEN, por meio da Pró-Reitoria de Extensão, onde tivemos a oportunidade de participar de um Projeto de Implantação de Oficinas Pedagógicas para o Ensino de Ciências e Matemática, desenvolvendo atividades em parceria com escolas municipais da região. Nestas duas experiências, tivemos a chance de apreciar, vivenciar e discutir aspectos importantes que envolviam a docência em Matemática, tanto em aspectos teóricos como práticos.

Ainda na graduação, fomos bolsista de iniciação científica (CNPq), durante um ano e meio, junto ao Setor de Informação e Análise de Dados – SIAD do Centro Nacional de Pesquisa de Caprinos - CNPC / EMBRAPA. Esta vivência foi de grande contribuição para nossa iniciação junto à informática e à pesquisa científica. Com as atividades desenvolvidas nesse estágio, tivemos oportunidade de acompanhar e participar da organização, análise de dados e elaboração de relatórios de pesquisa de vários projetos desenvolvidos junto ao CNPC. Foi também um momento em que se iniciou a popularização do Sistema Operacional Windows e Office em substituição aos antigos programas do ambiente DOS. O trabalho diário com estes novos programas, com *softwares* de análises de dados como o SAS (Statistical Analyses System, um sistema de programação voltado para análise estatística) e com os pesquisadores do Centro proporcionou-nos uma rica vivência e outra visão, sobre as possibilidades da informática junto a Educação e à Matemática, como também um despertar para as metodologias de desenvolvimento de um trabalho científico.

Em 1995, iniciamos o primeiro *Curso de Especialização em Ensino de Matemática* realizado em convênio entre a UVA e UFC, o qual funcionou apenas quatro meses, pois se tornou inviável para ambas as instituições em virtude do pequeno número de alunos, tendo sido cancelado. Apesar desse lapso, tivemos a oportunidade de realizar estudos e leituras, muito interessantes acerca dos fundamentos da Matemática. Como não havia outro Curso na área, em 1996, ingressamos no *Curso de Especialização em Metodologia da Pesquisa Social (UVA)*, o qual ampliou nossos conhecimentos acerca dos movimentos educacionais, sociais e da pesquisa científica. Ao final, apresentamos nossa primeira monografia, intitulada "*Questionando a formação dos professores de matemática da UVA*".

Em 1998, iniciamos nossa trajetória formativa junto ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da UFC, percurso este que marcou profundamente nossa formação e atuação profissionais. Neste mesmo ano, realizamos na FACED o *Curso de Especialização em Informática na Educação*, o primeiro oferecido nesta área no Estado do Ceará. O Curso foi montado para atender à formação dos professores-especialistas que iriam compor os núcleos de tecnologia educacionais – NTE, em decorrência do Programa Nacional de Informatização das Escolas Públicas – PROINFO. Por intermédio dele, fomos professora durante cinco anos, trabalhando na formação dos professores e no acompanhamento dos projetos desenvolvidos pelos LEI´s (Laboratórios Escolares de Informática).

Em 1999, ingressamos no *Mestrado em Educação*, no eixo de pesquisa em Educação

Matemática. Durante o mestrado tivemos a oportunidade de participar de várias atividades na área de Educação Matemática, Informática Educativa e Geometria Dinâmica, no Laboratório de Pesquisa Multimeios, coordenado pelo Prof. Dr.Hermínio Borges Neto, o qual tivemos a satisfação de ter como orientador desde a Especialização. No Laboratório Multimeios, participamos de algumas etapas de desenvolvimento *do "Projeto Tele - Ambiente: desenvolvimento de ferramentas adaptativas e colaborativas para o ensino à distância*", tendo a Sequência Fedathi como proposta pedagógica norteadora, através do qual realizamos nossa pesquisa de mestrado, junto ao subprojeto "Tele-Cabri". Nossa dissertação, intitulada *Informática na educação matemática: estudo de Geometria no ambiente do software Cabri-Géomètre*, apresentou aspectos relacionados ao ensino de geometria, com a utilização do *software* Cabri-Géomètre e da Sequência Fedathi.

Em 2005, ingressamos no Doutorado, na mesma linha de pesquisa do Mestrado, com o Projeto de Pesquisa: "*Contribuições da Didática e da Informática para o Ensino de Matemática",* o qual passou por algumas reformulações e culminou no trabalho de pesquisa ora apresentado. Os estudos e trabalhos desenvolvidos junto às disciplinas do Doutorado e as atividades que continuamos a realizar no Laboratório de Pesquisa Multimeios foram de grande contribuição para o aprofundamento teórico e metodológico desta pesquisa.

Alguns percalços e situações emocionais vivenciados de forma paralela ao Curso, como mudança de universidade onde trabalhávamos, nascimento de nosso segundo filho e doença grave e óbito de nosso pai, atrasaram o desenvolvimento de nossas atividades junto ao Doutorado. Estes acontecimentos, todavia, não impossibilitaram nossas constantes reflexões, esforços e empenho para o recorte e desenvolvimento de nosso objeto de pesquisa, que estiveram centralizados na utilização das tecnologias digitais no ensino de Matemática.

De forma paralela às atividades formativas, desenvolvemos nossa trajetória profissional, tendo iniciado em 1993 nossa carreira docente, lecionando Matemática nas séries terminais do Ensino Fundamental, em uma escola da rede particular, permanecendo até 1994. Em 1995, quando concluímos a graduação, fomos aprovada em concurso público estadual, passando a ensinar Matemática junto a duas escolas, uma da rede pública e outra particular, tendo permanecido em ambas até 1998. Essas experiências foram de grande importância para nossa formação continuada, como também para nossa iniciação à pesquisa em ensino de Matemática. Na escola privada, 50% de nossa carga horária era destinada a aulas de apoio, para tirar dúvidas dos alunos. Nas aulas de apoio, tivemos a oportunidade de nos deparar com as dúvidas mais frequentes dos alunos e também situações difíceis de explicar e justificar pelo professor, os itens que eram menos compreendidos na sala de aula, os desabafos dos alunos sobre suas aulas e seus professores de Matemática.

Em 1996, fomos responsável pela implementação e coordenação do primeiro Laboratório de Informática do Colégio Estadual onde lecionávamos. Em 1997/98, fomos instrutora de Informática do Centro Vocacional Tecnológico – CVT/Sobral, ministrando cursos de Informática Básica e Aplicada para professores e alunos de escolas públicas.

Em 1998, passamos a lecionar disciplinas voltadas para o ensino de Matemática e de tecnologias educacionais, em cursos de graduação e especialização da UVA, tendo participações também na UECE.

Em 2001, logo após o término do mestrado, fomos aprovada como professora substituta do Curso de Ciências da Computação da UVA, no setor de estudos de Informática Educativa, onde ficamos como docente durante um ano.

Apesar da importância profissional de todas as experiências citadas, para nós, uma das mais significativas conquistas profissionais se deu em 2002, quando fomos aprovada no *primeiro concurso oficial do Estado do Ceará na área de Educação Matemática*, tendo esta vaga sido proposta pelo Curso de Licenciatura em Matemática da URCA. Foi muito gratificante vermos despontar a área de conhecimento que tanto cultivamos, e que até então havia sido ignorada, como área oficial para concurso em todas as universidades do Estado. Acreditamos ter sido um grande impulso para o desenvolvimento e institucionalização da educação matemática no Ceará. Foi uma experiência rica e motivadora a que vivenciamos na URCA durante quatro anos, principalmente por lá encontrarmos professores que acreditaram e sedimentaram a Educação Matemática na formação de docentes da matemática na região (jamais poderemos deixar de citar nosso grande amigo e exímio educador matemático - Prof. Mário de Assis Oliveira, responsável por esta e outras iniciativas na Região do Cariri - Ceará).

Em 2006, por necessitarmos fixar residência em Sobral para acompanhar nosso pai, que se encontrava com grave enfermidade, fizemos novamente concurso na área de Educação Matemática na UVA, onde estamos até os dias atuais, trabalhando no Curso de Licenciatura em Matemática, no qual lecionamos disciplinas e desenvolvemos projetos na área de Matemática e Novas Tecnologias, Estágio Supervisionado e Prática de Ensino. O conjunto dessas experiências formativas e profissionais proporcionou muitas aprendizagens e estas conduziram-nos a reflexões e questionamentos, que originaram as discussões aqui apresentadas.

- **Delimitação do Problema**

Desde 1998, temos participado como docente em cursos de graduação e pós-graduação, voltados para o ensino de Matemática e novas tecnologias na educação, nestes, a maioria dos alunos já são professores, mesmo estando ainda em formação. No início dos cursos ou disciplinas, costumamos começar os trabalhos sondando os alunos sobre o que gostariam de estudar em nossas aulas. Em quase 100% das respostas, costumamos sempre ouvir: "*um jeito mais fácil de ensinar matemática*", "*uma forma mais prática e atrativa para se ensinar matemática*", "*novas metodologias para ensinar a matemática*" ou "*um jeito mais agradável para ensinar matemática*".

Ouvindo estas respostas com muita frequência, temos buscado compreender o que realmente estes alunos desejam e necessitam para desenvolver melhor suas aulas de Matemática.

Por intermédio dos próprios alunos, fomos verificando que, na maioria das vezes, eles fazem uma conexão direta entre formas de ensinar com recursos materiais para as aulas (jogos, calculadoras, computadores etc). No decorrer dos processos formativos, passamos a perceber que muitos deles careciam realmente de um conjunto de competências didáticas e matemáticas para melhorar suas práticas docentes.

Por meio das discussões e atividades vivenciadas nos grupos trabalhados, tornou-se cada vez mais evidente para nós o fato de que propor o ensino de Matemática, levando os alunos ao aprendizado, parece ainda uma missão muito difícil para os professores, fato que podemos confirmar com Cabral (2001, p.89):

> Quando assumimos compromissos relativos à sala de aula, não há dúvidas sobre a complexidade da tarefa de fazer com que o aluno produza um saber relativo ao saber instituído, à medida que pensamos, principalmente, como se aprendem conteúdos relacionados à matemática.

Esta dificuldade em relação ao ensino da matemática está presente em todos os níveis, tendo início na própria formação dos professores. Conforme veremos no Gráfico 1 a seguir, obtido do Relatório do ENADE - 2008, os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UVA (no qual realizamos a pesquisa) avaliam os procedimentos didáticos adotados pelos professores-formadores, como *parcialmente adequados* (50% dos ingressantes) e *pouco adequados* (39% dos concluintes).

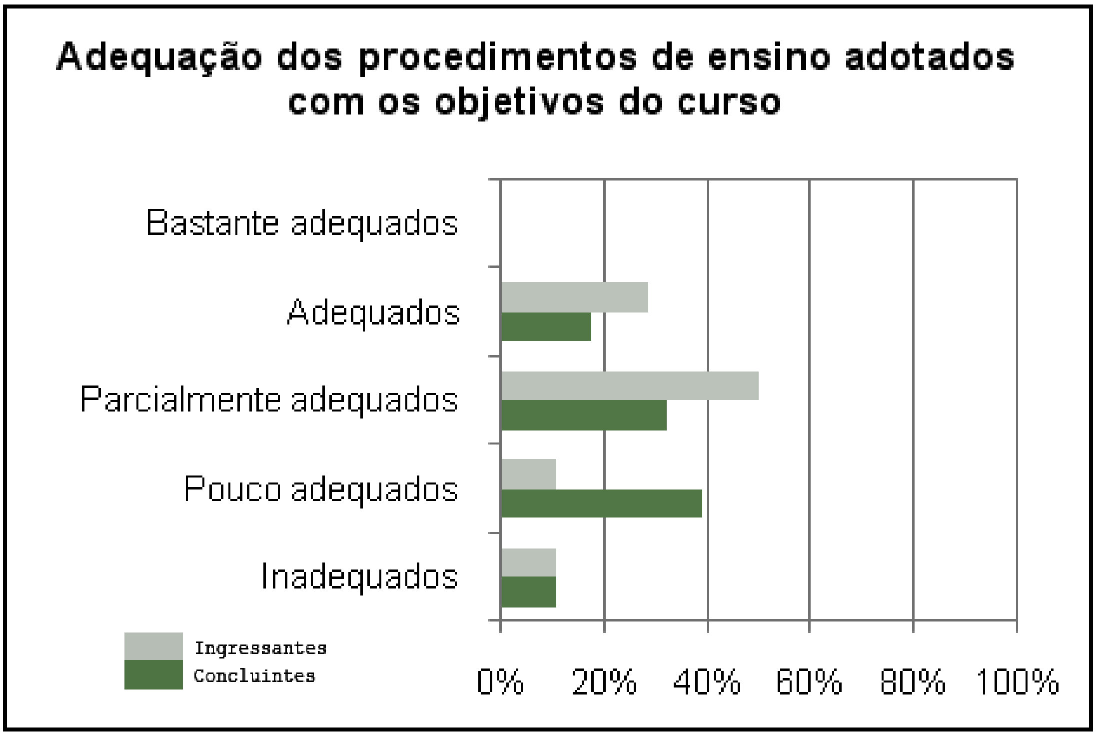


Figura 1: Gráfico 1 - Avaliação dos alunos do Curso de Matemática da UVA em relação aos procedimentos didáticos dos professores-formadores
Fonte: Relatório do Curso de Matemática - ENADE 2008 – INEP, p. 17

Os resultados obtidos por meio do ENADE, convergem para pesquisa realizada por Marques (2007), com alunos concluintes do mesmo Curso, na qual foram perguntados sobre como avaliavam a didática dos professores do Curso, em resposta, 40% dos alunos consideraram regular, 40% ruim, 10% péssima e apenas 10% consideraram boa.

Conforme Relatório do ENADE 2008 - Matemática, numa escala de 0 a 100 pontos, a média dos alunos concluintes no Curso de Licenciatura em Matemática da UVA foi de 26,1, sendo menor do que a nacional - 29,5. A nota média dos estudantes ingressantes foi de 24,2 na instituição e 25,9 no Brasil, havendo uma diferença de 1,6 pontos entre os dois.

Apesar da diferença da instituição pesquisada não ser tão grande em relação à média nacional, o que podemos concluir é que as médias foram muito baixas, mostrando que o licenciando de matemática encontra-se com fraco domínio matemático, menos de 30% dos conteúdos propostos na avaliação do ENADE.

Em relação à solicitação dos estudantes por novas e atraentes metodologias e materiais para o ensino da matemática, temos vislumbrado crescente interesse e utilização das tecnologias digitais. Além de ser uma tendência educacional que aufere amplo espaço em debates, discussões e investigações, em razão de sua inserção nos ambientes educacionais; sua utilização é também requisitada por documentos oficiais dos cursos de Formação de Professores, como podemos constatar no trecho das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura - Parecer Nº CNE/CES – 1302/2001:

> Os currículos dos cursos de Bacharelado/Licenciatura em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades:
> [...]
> c) capacidade de compreender, critica e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas. (p.3)
>
> Desde o início do curso o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para o ensino de matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino da matemática. (p.6)

De acordo com reflexões iniciais do texto, é quase impossível fugirmos do debate acerca das tecnologias na educação, a presença do computador na sociedade e na escola é crescente, o que carece de estudos e discussões para sua adequada utilização.

No que diz respeito ao ensino de matemática, o que vislumbramos é que muitos professores utilizam estas tecnologias, principalmente o computador, em atividades pessoais e profissionais, no entanto, quando este uso se refere a práticas de laboratório com seus alunos, pouquíssimos se encorajam e se propõem a explorá-las como ferramenta de apoio à constituição do saber matemático. Acreditamos que este obstáculo é, em parte, oriundo da necessidade de novas posturas pedagógicas, novas formas de ensinar e aprender. Ilustramos esta realidade partindo do Curso pesquisado, no qual os alunos informaram que raramente utilizam o laboratório de informática em aulas das disciplinas curriculares.

Levar os estudantes a constituírem o saber matemático, tendo as tecnologias digitais como ferramenta de apoio, não tem sido realmente uma tarefa fácil para alunos e professores; investigar e analisar caminhos que possam favorecer esta problemática tem sido um desafio para os pesquisadores e educadores matemáticos.

Com base neste contexto, é nas temáticas - Sequência Fedathi e tecnologias digitais no ensino de Matemática, que o presente trabalho se circunscreve, tendo como pergunta diretriz:

Como as tecnologias digitais e a Sequência Fedathi podem favorecer o ensino e a aprendizagem da Geometria, dos licenciandos em Matemática ?

Responder a esta pergunta será nosso desafio, buscaremos respostas nos autores estudados e na pesquisa de campo, as quais, unidas a reflexões e constatações, venham nos fornecer elementos elucidativos para a compreensão do problema pesquisado.

De acordo com o contexto ora apresentado, este trabalho justifica-se como uma nova possibilidade de obter resultados que possam ser reinvestidos, na formação dos professores, principalmente no que diz respeito aos processos de aprendizagem da Matemática.

A pesquisa resulta de nossas inquietações, reflexões e experiências vivenciadas ao longo de nossa trajetória profissional. A cada etapa de elaboração dos capítulos, revivemos em nossa mente momentos docentes relacionados ao que estávamos escrevendo. Consideramos que separar a vivência docente e os trabalhos de pesquisa é algo impossível, assim, na condição de professora, buscamos sempre manter o olhar de pesquisador sobre nossas salas de aula, tentando refletir, investigar e tirar conclusões acerca das ações docentes e discentes relacionadas ao ensino e aprendizagem da Matemática.

Somos fascinada pela pesquisa educacional, o seu poder de desvelar os acontecimentos da sala de aula, no entanto, temos encontrado dificuldades para realizá-la. O dia a dia da vida acadêmica acaba redirecionando o trabalho dos profissionais para atividades que muitas vezes são de baixo significado em relação aos trabalhos que deveríamos desenvolver no ensino, pesquisa e extensão, mesmo assim, buscamos investir os esforços possíveis para não desviar a atenção do foco de interesse da pesquisa realizada.

- **Objetivos**

O trabalho teve como objetivos:

- *Objetivo Geral*

- Investigar contribuições da Seqüência Fedathi e das tecnologias digitais, para o ensino e aprendizagem da Geometria na licenciatura em matemática.

- *Objetivos Específicos*

- Apresentar elementos da Didática Geral e da Matemática e suas contribuições para a pesquisa;
- Discutir e aprofundar aspectos teóricos e metodológicos da Seqüência Fedathi;
- Destacar características e influências das tecnologias digitais e da Geometria Dinâmica no ensino de Matemática;
- Analisar elementos da Sequência Fedathi que favoreçam a resolução de atividades com o *software* Cabri-Geómètre.

Para a consecução dos objetivos apresentados, buscamos discorrer sobre os subtemas a seguir listados, de acordo com a ideia dos autores relacionados.

- *Didática Geral (Imídeo Nérici)*
  Autor de vasta bibliografia na área de Didática Geral e Metodologias de Ensino, buscamos em Nérici uma compreensão mais detalhada acerca do que é a Didática, seus objetivos, desenvolvimento e suas relações com os métodos de ensino.

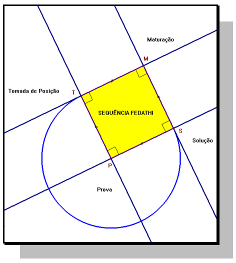
- *Sequência Didática e Engenharia Didática (Artigue)*
  Em Michele Artigue, buscamos compreender o que é uma Sequência Didática voltada para o ensino e pesquisa em Matemática, e elementos da Engenharia Didática, como apoio para nossa metodologia de pesquisa.

- *Sequência Fedathi (Borges Neto)*
  Tivemos a Sequência Fedathi como modelo teórico para a realização e análise do experimento. No intuito de promover uma maior compreensão e validação da Sequência Fedathi, buscamos nos autores como Bruno D`Amore, George Polya e Huete e Bravo, apresentar outras Sequências de ensino e suas relações com a Sequência Fedathi.

- *Transposição Didática (Chevallard) e Transposição Informática (Balacheff)*
  Com o intuito de compreender a influência das novas tecnologias no ensino de Matemática, sentimos necessidade de discutir aspectos da Transposição Didática e Informática que interferem na formulação do conhecimento matemático, quando mediado por estas tecnologias. Procuramos em Chevallard e Balacheff elucidar aspectos teóricos destas transposições e suas aplicações na compreensão de nosso objeto de estudo.

- *Teoria das Situações Didáticas (Brousseau)*
  Em Brousseau, tencionamos compreender o que é uma situação didática e sua tipologia, objetivando com esta compreensão, interpretar as manifestações dos alunos durante a aprendizagem.

Os autores ora citados embasam este trabalho, sendo este complementado com aportes teóricos de D´Amore (2007), Huete e Bravo (2006), Machado (1999) e Pais (2001). Todos eles contribuíram de forma significativa para nossa elaboração teórica e metodológica, como para as considerações finais apresentadas, conforme veremos nos capítulos a seguir.



1 Didática Geral e Didática da Matemática: principais elementos

1 DIDÁTICA GERAL E DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: PRINCIPAIS ELEMENTOS

[...] as organizações escolares, em seus currículos e métodos, devem abrir oportunidades de desenvolvimento do espírito criador, ao invés de inibi-lo, por meio de atividades estereotipadas, que mais prendem a um modelo preestabelecido, do que desenvolvem as forças criadoras do espírito. Atividades que dêem asas à imaginação e mesmo à fantasia e que estimulem a criatividade, eis de que estão precisando as escolas.

Imídeo Nérici

Comumente ouvimos falar da "falta de didática" por parte de muitos professores, principalmente quando se trata de professores da área das ciências exatas. Não são raros relatos do tipo: "*meu professor é um crânio, mas ele não sabe ensinar*". O que seria exatamente esse *saber ensinar* que tanto esperamos dos professores? Que tipo de ações docentes caracterizamos como *didáticas?* Ela é a mesma para todas as áreas de ensino? Como a Didática pode contribuir para uma melhoria do ensino de Matemática? Quais as características de um bom professor de Matemática?

Buscamos neste capítulo responder a estas e outras questões relacionadas à Didática Geral e à Didática da Matemática. Para tanto, achamos essencial iniciar o estudo apresentando e diferenciando estas duas áreas de conhecimento, fazendo a apresentação dos principais componentes de cada uma delas.

1.1 Didática Geral: alguns componentes

1.1.1 Conceito de Didática

Segundo Nérici (1966), Didática vem, etimologicamente, do grego *didaktiké* (ensinar) e *tékne* (arte), isto é, arte de ensinar, de instruir. É *ciência* quando pesquisa e experimenta novas técnicas de ensino. É *arte* quando estabelece normas de ação ou sugere formas de comportamento didático com base nos dados científicos e empíricos da educação, isto porque a Didática não pode separar teoria e prática. Ambas têm de fundir-se em um só corpo, visando a maior eficiência do ensino e ao seu melhor ajustamento às realidades humana e social do educando. Nérici define Didática, mais explicitamente, como:

> Conjunto de técnicas, através das quais se realiza o ensino [...], a fim de tornar este mesmo ensino mais eficiente. [...], logo, em última análise, didática é o conjunto de procedimentos e normas destinados a dirigir a aprendizagem da maneira mais eficiente possível. (NÉRICI, 1966, p. 50)

Para Nérici, a Didática não é um simples *repositório de regrinhas*, mas sim uma orientação segura da aprendizagem, quando nos propõe elementos de orientação de como devemos proceder, a fim de tornarmos o ensino mais proveitoso para o educando, para que este queira se educar, que a escola não seja uma camisa de força, mas uma indicadora de caminhos libertadores e de desenvolvimento da personalidade.

Segundo Nérici, duas tendências se defrontam no campo da Didática: *a primeira* refere-se à tentativa de reduzir a ação educativa à *pura técnica*, fria e calculada, transformando o ensino em um amontoado de regras, normas e esquemas, tornando os procedimentos excessivamente técnicos em um fim e não mais um meio; *a segunda* repudia todo o tecnicismo didático, procurando tão só a vivência dos fatos, na qual passa a ter preponderante importância a *figura do professor* e sua atuação pessoal, para empolgar e direcionar o educando nos estudos.

Concordamos com o autor, quando ressalta que há exageros nas duas posições, pois nenhum ensino se efetiva de procedimentos puramente técnicos, nem se efetiva também, somente por meio da personalidade do professor. Para se conseguirem verdadeiros resultados no ensino, as duas tendências devem atuar de forma complementar, conforme propõe Nérici, quando diz que "necessário se faz a fusão das duas posições: a atuação do professor, com a sua personalidade capaz de impressionar o aluno, aliada a técnicas que orientem, estimulem e tornem mais eficiente o estudo dos educandos".

Para Libâneo (1994) a Didática é uma das disciplinas da Pedagogia que estuda os processos de ensino por meio de seus componentes – os conteúdos escolares, o ensino e a aprendizagem – para, com embasamento em uma teoria da educação, formular as diretrizes orientadoras da atividade profissional dos professores. O autor define a *Didática* como

> A mediação escolar dos objetivos e conteúdos de ensino, sendo responsável pela investigação das condições e formas que vigoram no ensino e, ao mesmo tempo, os fatores reais (sociais, políticos, culturais, psico-sociais) condicionantes das relações entre a docência e a aprendizagem. (LIBÂNEO, 1994, p. .52).

Libâneo enfatiza a *instrução* e o *ensino* como elementos primordiais do processo pedagógico escolar, ressaltando que estes devem ser organizados de modo a prover o desenvolvimento físico e intelectual dos alunos, com vistas à sua preparação para a vida social.

Com suporte nas definições apresentadas por Nérici e Libâneo em relação ao que é a Didática, verificamos que podemos encontrar dois elementos centrais do processo didático: *a instrução e o ensino*. Para os autores, enquanto a *instrução* se refere ao processo e ao resultado da assimilação sólida de conhecimentos sistematizados e ao desenvolvimento de capacidades cognitivas, o *ensino* consiste no planejamento, organização, direção e avaliação da atividade didática, concretizando as tarefas de instrução. Além do trabalho do professor, o ensino inclui a direção da atividade de estudo dos alunos.

Para os autores, tanto a instrução como o ensino se modificam em decorrência da sua necessária ligação com a sociedade e com as condições em que ocorre o trabalho docente. Este elo fundamenta a Didática para formular diretrizes orientadoras do ensino.

- Importância da Didática para o ensino

Com a ampliação e desenvolvimento da educação formal, o estudo da Didática se faz cada vez mais necessário por parte dos profissionais da educação. É uma área que vem ganhando força e destaque nas formações de professores; parte significativa da carga horária dos cursos de magistério e licenciaturas é dedicada ao aperfeiçoamento das práticas de ensino por meio da Didática.

Durante muito tempo se generalizou a crença de que para ser um bom professor bastaria conhecer bem a disciplina a lecionar, ou seja, bastaria ser um especialista em determinada área para bem ensiná-la. Em nossas observações da prática de ex-professores nossos, colegas de trabalho e depoimentos de nossos alunos, ficou claro que não basta conhecer bem os conteúdos que se vai lecionar, é preciso que se tenha, também, um bom conhecimento acerca da didática. E que, além destes saberes, é essencial considerar o aluno e os meios com os quais se processará o ensino, ajustando-os em relação aos interesses, possibilidades e peculiaridades do estudante e da sociedade.

Se pensarmos em melhorar os resultados do ensino atual, será impossível conseguirmos êxito se os cursos de formação dos professores e as práticas de ensino escolares não propiciarem um aprofundamento teórico e prático sobre a Didática, seus elementos e aplicação.

1.1.2 Objeto de estudo da Didática

O objeto de estudo da Didática é o processo de ensino, campo principal da educação escolar. Na medida em que o ensino viabiliza as tarefas da instrução, ele contém a instrução. Podemos assim, delimitar como objeto da Didática o processo de ensino que, considerado no seu conjunto, inclui: os conteúdos dos programas e dos livros didáticos, os métodos e as formas organizativas do ensino, as atividades do professor e dos alunos e as diretrizes que regulam e orientam esse processo (NÉRICI, 1966, p. 50).

Sabemos que a educação escolar é uma tarefa eminentemente social, pois a sociedade necessita prover as gerações mais novas daqueles conhecimentos e habilidades que vão sendo acumulados pela experiência social da humanidade, e não é suficiente apenas dizer que os alunos precisam dominar os conhecimentos, é necessário dizer como fazê-lo, isto é, investigar objetivos e métodos seguros e eficazes para a assimilação dos saberes. Esta é a função da Didática, ao estudar o processo de ensino.

Para melhor compreensão do que seja seu objeto de estudo, buscamos em Libâneo reforçar a definição do que é o *processo de ensino,* definido pelo autor como:

> Uma sequência de atividades do professor e dos alunos, tendo em vista a assimilação de conhecimentos e o desenvolvimento de habilidades, através dos quais os alunos aprimoram capacidades cognitivas (pensamento independente, observação, análise-síntese e outras). (LIBÂNEO, 1994, p. 56)

Para o autor, quando afirma que a finalidade do ensino é proporcionar aos alunos os meios para que assimilem ativamente os conhecimentos, é porque a natureza do trabalho docente é a mediação da relação cognitiva entre o aluno e as matérias de ensino. Isto quer dizer que o ensino não é só transmissão de informações mas, também, o meio de organizar a atividade de estudo dos alunos.

O ensino somente é bem-sucedido quando os objetivos do professor coincidem com os objetivos de estudo do aluno e é praticado tendo em vista o desenvolvimento das suas forças intelectuais.

1.1.3 Elementos Didáticos

Segundo Nérici (1966, p. 51), a didática tem que levar em conta seis elementos fundamentais, em relação ao seu campo de atividade: *aluno, objetivos, professor, matéria, técnicas de ensino e o meio geográfico, econômico, cultural e social.*

1 Aluno. O aluno é quem aprende, aquele para quem existe a escola. Então, é necessário que haja uma adaptação recíproca que marche para a integração, isto é, para identificação entre aluno e escola. Imprescindível é que a escola esteja em condições de receber o aluno como ele é, segundo sua idade evolutiva e suas peculiaridades pessoais, a fim de levá-lo, sem choques excessivos nem frustrações profundas e desnecessárias, a modificar seu comportamento em termos de aceitação social e crescimento de personalidade. Para isto, a escola, de início, deve adaptar-se ao aluno e, com base na sua ação educativa, este, aos poucos, vai-se adaptando a ela.

2 Objetivos. Toda ação didática supõe objetivos. Não haveria razão de existir a escola, se não houvesse em mira conduzir o aluno a determinados pontos, como: modificação de comportamento, aquisição de conhecimentos, desenvolvimento da personalidade, encaminhamento para uma profissão etc. Assim, a escola existe para levar o aluno a atingir determinados objetivos que são os da educação, em geral, e do grau e tipo de escola em particular.

3 Professor. O professor é orientador do ensino. Deve ser fonte de estímulos que leve o aluno a reagir para que se processe a aprendizagem. É dever do professor procurar entender os seus alunos. O professor deve distribuir seus estímulos, adequadamente, entre seus alunos, de maneira que os leve a trabalhar segundo as suas peculiaridades e possibilidades. Cabe ter em mente o fato de que o professor se torna cada vez mais indispensável, à medida que mais complexa se vai tornando a vida social, como orientador e guia na formação da personalidade do educando.

4 Matéria. Esta é o conteúdo do ensino, mediante a qual serão atingidos os objetivos da escola. A matéria sofre duas transposições didáticas (descrita no capítulo posterior) para entrar no currículo:

1ª) A primeira transposição é para o currículo - saber quais as matérias mais apropriadas para se lançarem os objetivos da escola primária, secundária ou superior. Importante é o papel desempenhado pela Psicologia e Sociologia, neste particular, a fim de serem atendidos os interesses do educando e as necessidades sociais.

2ª) A segunda transposição é necessária para formar os programas das diversas matérias. Dentro de cada matéria, é preciso saber quais os tópicos ou atividades que devem ser selecionados, pelo seu valor funcional, informativo e formativo. A matéria que vai constituir um programa deve ser alvo de outra seleção, durante a elaboração do plano de curso, por parte do professor, tendo em vista as realidades educacionais e sociológicas de cada escola e as possibilidades de cada classe.

5 Métodos e Técnicas de Ensino. Estas são fundamentais no ensino e devem estar, o mais próximo possível, da maneira de aprender dos alunos. Devem todas elas propiciar a atividade dos educandos, priorizando métodos e técnicas em que estes se tornem sujeitos ativos no processo de ensino. Sabemos que o ensino de cada matéria requer técnicas específicas; mas devem todas ser orientadas no sentido de levarem o educando a participar nos trabalhos de classe, retirando-o daquela posição clássica de só ouvir, anotar e repetir. Pelo contrário, sejam quais forem os métodos ou técnicas aplicados, deve o professor fazer com que o educando siga o que esteja sendo objeto de ensino.

6 Meio Geográfico, Econômico, Cultural e Social. É necessário, para que a ação didática se processe de forma ajustada e eficiente, levar em conta o meio onde funciona a escola, pois só assim poderá ela estar voltada para as reais exigências econômicas, culturais e sociais. A escola poderá atender à sua função social se considerar o meio a que tem de servir, de maneira que habilite o educando a tomar consciência do ambiente que o envolve e do qual tem de participar.

Os elementos didáticos ora mencionados por Nérici vão ao encontro do que Comenius já apresentava em sua Didática Magna, ao afirmar que a Didática se divide em três importantes elementos: *matética*, *sistemática e metódica* (NÉRICI, 1966, p. 12).

1 Matética. refere-se a quem aprende, ao aluno. É fundamental saber a quem vai ser orientada a aprendizagem, a fim de poder haver adequação de ensino, uma vez que, mesmo contra o próprio Comenius, não se pode ensinar tudo a todos. Para o ensino ser eficiente, é preciso levar em conta a maturidade e possibilidade de quem aprende, os seus interesses, capacidade intelectual e aptidões. Logo, é indispensável ao professor conhecer a quem vai orientar a aprendizagem, a fim de promover as necessárias adequações de ensino.

2 Sistemática. refere-se a objetivos e a matérias de ensino. Assim, a Didática dá muita importância às metas a alcançar e ao veículo para alcançá-las, que são as matérias do currículo.

3 Metódica. refere-se à execução do trabalho didático: a arte de ensinar propriamente dita, a respeito da qual o mesmo autor deixou recomendações valiosas, algumas ainda muito longe de se considerar ultrapassadas.

2.1.4 Divisão da Didática

A Grande Didática de Comenius, na qual afirma que: “ (...) *um método único basta para ensinar todas as matérias… as artes, as ciências e as línguas*” (COMENIUS, 1657 apud D`AMORE, 2007, p.21) demorou a transformar-se. Segundo D’Amore, foram necessários séculos para conseguir estabelecer de maneira definitiva que as didáticas podem ser específicas; isso foi útil para a Didática (geral) se libertar do jugo total da Pedagogia e para as didáticas específicas (disciplinares).

Hoje, a Didática pode ser considerada em seus aspectos gerais e particulares, isto é, com relação ao ensino de todas as matérias ou com relação a uma só disciplina, o que dá margem a termos a didática geral e diversas didáticas especiais.

- Didática Geral

Para Nérici (1966, p. 53), a Didática Geral destina-se ao estudo de todos os princípios e técnicas válidos para o ensino de qualquer matéria ou disciplina. Estuda problemas de ensino, de maneira geral, sem descer às minúcias específicas que variam de disciplina para disciplina. Procura ver o ensino como um todo, estudando-lhe as condições gerais, a fim de indicar procedimentos aplicáveis em todas as disciplinas e que tornem o ensino mais eficiente. A Didática Geral, para ser válida, deve estar vinculada às circunstâncias reais do ensino e aos objetivos que a educação visa a concretizar no educando. Fora disso será uma didática de "receituário", de "regrinhas", sem vitalidade suficiente para suscitar atitudes e ideais no educando.

A Didática Geral compreende, por sua vez, no intuito de bem dirigir a aprendizagem, o *planejamento* (da escola, das disciplinas - de curso, de unidade e de aula - da orientação educacional, da orientação pedagógica e das atividades extraclasse); *a execução* (motivação, direção da aprendizagem - apresentação da matéria, elaboração, fixação e integração da aprendizagem - elementos de execução - linguagem, métodos e técnicas de ensino e material didático); e a *verificação* (sondagem, verificação propriamente dita, retificação e ampliação da aprendizagem), o que pode ser representado pelo seguinte quadro sinótico:

Quadro 1 – Níveis e abrangência da Didática Geral

DIDÁTICA GERAL

- **Planejamento**
  - Da escola
  - Das disciplinas
    - De curso
    - De unidade
    - De aula
  - Das atividades extra-classe
  - Da orientação educacional
  - Da orientação pedagógica
- **Execução**
  - Motivação
  - Direção da aprendizagem
    - Apresentação da matéria
    - Elaboração, fixação e integração da aprendizagem
  - Elementos de execução
    - Linguagem
    - Métodos e técnicas de ensino
    - Material Didático
- **Verificação**
  - Sondagem
  - Verificação propriamente dita
  - Retificação
  - Ampliação da aprendizagem

Fonte: Nérici (1966, p. 54)

Pode-se dizer, também, que a ação didática consta de três momentos:

1) **Planejamento**, visando aos planos de trabalho adaptados aos objetivos que se deseja alcançar, às possibilidades, aspirações e necessidades dos alunos e às necessidades sociais.
2) **Execução**, com vistas à prática efetiva do ensino, através das aulas, das atividades extra-classe e demais atividades discentes dentro e fora da escola.
3) **Verificação**, objetiva certificar-se dos resultados obtidos com a execução. Os objetivos foram alcançados e o planejamento esteve adequado à realidade dos alunos? Através da verificação, chega-se à conclusão se é preciso ou não levar a efeito retificações de aprendizagem, modificação de planejamento e qual o momento conveniente para promover novas aprendizagens.

- Didática Especial

Para Nérici (1966, p. 54) a Didática Especial pode ser encarada sob dois pontos de vista:

1) *Com relação ao nível de ensino*, tendo-se, então, Didática da escola primária, secundária ou superior.
2) *Com relação ao ensino de cada disciplina em particular*, como a Matemática, Geografia, História, Ciências Naturais etc. Principalmente sob este segundo aspecto, é considerada a Didática especial, destinando-se ao estudo da aplicação dos princípios gerais da Didática, no campo de ensino de cada disciplina.

O autor destaca que a Didática Especial estuda a aplicação dos princípios da Didática Geral no ensino das diversas disciplinas e de maneira específica. São suas mais prementes preocupações:

a) estudo dos problemas especiais no ensino de cada disciplina, como seleção de conteúdo, técnicas de ensino que se revelem mais eficientes, particularidades metodológicas, dificuldades de ensino de certos assuntos etc;

b) análise dos programas das diversas disciplinas em extensão e profundidade, e sua reestruturação, tendo em vista as possibilidades dos alunos, condições e necessidades do meio em que funciona a escola;

c) determinação dos objetivos de cada disciplina, considerando os objetivos de cada nível de ensino;

d) estudo de planos de aula adequados a cada disciplina e a cada fase de aprendizagem;
e) estudo de provas que se revelem mais eficientes na verificação da aprendizagem das diferentes disciplinas; e
f) pesquisa de meios para resolver as dificuldades de ensino no campo de cada disciplina.

1.2 Didática da Matemática: alguns componentes

No intuito de melhorar o ensino de Matemática, profissionais ligados a este campo buscam a Didática como meio para atingir tal objetivo, no entanto, como já vimos na discussão anterior, a didática geral, apesar de oferecer elementos fundamentais e significativos para o ensino de todas as áreas, não responde a problemas específicos de ensino, ligados ao ensino das diferentes áreas de conhecimento. É neste campo teórico e prático que a Didática da Matemática vem se desenvolvendo substancialmente, mas, do que realmente se ocupa a Didática da Matemática e como vem se desenvolvendo? Quais seus objetivos ? Qual o seu papel junto ao ensino de matemática ? Definir e responder esta e outras questões acerca da Didática da Matemática é algo essencial para os educadores matemáticos e profissionais interessados neste domínio científico, a fim de que possam apropriar-se adequadamente da área, propiciando assim uma compreensão e aplicação correta de seu quadro teórico em seus âmbitos profissionais.

1.2.1 De que trata a Didática da Matemática ?

Para obter um conceito sólido acerca do que é a Didática da Matemática, buscamos defini-la com base em diferentes pesquisadores da área como Régine Douady, Grécia Galvez e Collete Laborde. Vejamos abaixo.

> A didática da matemática estuda os processos de transmissão e de aquisição dos diferentes conteúdos desta ciência, particularmente numa situação escolar ou universitária. Ela se propõe a descrever e explicar os fenômenos relativos às relações entre seu ensino e aprendizagem. Não se reduz somente a buscar uma maneira de ensinar uma noção fixa, mesmo quando espera, ao finalizar, ser capaz de oferecer resultados que lhe permitam melhorar o funcionamento do ensino. (DOUADY, 1984 Enciclopaedia Universalis[1])

[1] Disponível em <http://www.universalis.fr/encyclopedie/mathematiques-didactique-des/>. Acesso em 28 de julho de 2009.

> O trabalho fundamental da didática da matemática é averiguar como funcionam as situações didáticas, quer dizer, quais das características de cada situação são determinantes para a evolução do comportamento dos alunos e, conseqüentemente, de seus conhecimentos. Isto não significa que só seja de interesse analisar as situações didáticas exitosas. Inclusive, se uma situação didática fracassa em seu propósito de ensinar alguma coisa, sua análise pode constituir um aporte à didática, se permitir identificar os aspectos da situação que se tornaram determinantes de seu fracasso. (GALVEZ, 1996, p.29)

> A didática da matemática não é mais aquilo que era no início do século passado, um conjunto de métodos de ensino da matemática, mas procura compreender melhor e criar modelos dos processos de aprendizagem e de ensino, em seus aspectos específicos, das noções matemáticas em jogo; ela procura identificar as relações, entre ensino e aprendizagem; leva em conta a dimensão epistemológica dos conceitos matemáticos e a transformação dos conteúdos do saber com objetivos de ensino, ela integra as características sociais ligadas a cada ensino, as regras implícitas que gerem as interações entre professores e aprendizes. (LABORDE apud D´AMORE, 2007, p. 96)

Os conceitos ora apresentados, apesar de amplos e abrangentes, se relacionam no princípio de que a Didática da Matemática estuda os fenômenos do ensino e da aprendizagem da Matemática e suas relações no triângulo didático, proposto por Brousseau, representado pelo *professor, aluno e saber* e suas relações do contrato didático e variáveis didáticas.

Partindo das definições apresentadas, podemos dizer que a Didática da Matemática é uma das didáticas específicas fundamentais para a aprendizagem dos alunos; o desenvolvimento e aplicação de seus princípios e métodos de trabalho são uma das maiores ferramentas de trabalho para o professor de Matemática. Muitas das dificuldades enfrentadas pelo professor e pelo aluno na formulação do conhecimento matemático poderiam ser superadas, mediante aplicação dos recursos teóricos por ela propostos

1.2.2 Objetivos da Didática da Matemática

Apesar de a definição e dos objetivos da Didática da Matemática serem bastante interligados, buscamos apresentá-los separadamente, a fim de ampliar a compreensão sobre seus significados. Tomamos como referência aspectos destacados por D’Amore (2007), para relacionarmos a seguir seus objetivos centrais:

- Delimitar e estudar os problemas que surgem durante os processos de organização, comunicação, transmissão, elaboração e valoração do conhecimento matemático e de sua própria fundamentação teórica;

- Criar situações (em forma de aulas, atividades, objetos, ambientes, jogos, etc,...) para um melhor ensino de Matemática.
- Indagar metódica e sistematicamente sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, assim como dos planos para a qualificação profissional dos educadores matemáticos.
- Compor, com base nas investigações científicas, novas categorias teóricas, que ajudem cada vez mais a desvelar os fenômenos didáticos, dentro dos processos de ensino.

1.2.3 Objeto de Estudo da Didática da Matemática

A Didática da Matemática, como área de pesquisa autônoma, possui seu objeto de pesquisa, que são as *situações didáticas*, ou seja, as situações de ensino estabelecidas em um sistema educativo (professor) com a finalidade de conseguir que os alunos se apropriem de um saber constituído ou em vias de constituição.

Pais (2001, p. 11), para diferenciar a didática aplicada ao ensino de Matemática e a Didática da Matemática em si, reforça a ideia de objeto de estudo da segunda:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (p. 11)

Para o autor, essa concepção visa a compreender as condições de produção, registro e comunicação do conteúdo escolar da Matemática e de suas consequências didáticas. O autor destaca o fato de que desta forma todos os conceitos didáticos se destinam a favorecer a compreensão das múltiplas conexões dessa área de estudo.

Podemos então concluir, das definições apresentadas, que, enquanto a Didática Geral tem como objeto de estudo *o processo de ensino*, a Didática da Matemática ocupa-se do estudo dos fatores que influenciam os processos de ensino da matemática e as condições que favoreçam sua aquisição pelo aluno, buscando interpretá-los, repensá-los e orientá-los para o desenvolvimento de situações didáticas eficazes em seu objetivo de ensinar.

1.3 Relações entre a Didática Geral e a Didática da Matemática

Enquanto o desenvolvimento teórico da Didática ocorre nos entornos do século XVII, por meio de Comenius, com a primeira obra clássica sobre a Didática, *A Didática Magna,* o desenvolvimento da Didática da Matemática tem início na década de setenta do século XX, no contexto da produção acadêmica francesa, principalmente com base nos questionamentos em torno do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Sua emergência refere-se diretamente a uma reação contra o privilégio da abordagem psicológica, essencialmente de inspiração piagetiana, no estudo dos fenômenos educativos, bastante difundidos nas pesquisas educacionais na França neste período. Além disso, as reformas curriculares no ensino, marcadamente a introdução da Matemática Moderna[2], instigaram uma ruptura com as abordagens muito vastas da Didática e, ao mesmo tempo, incitaram a busca de perspectivas para o ensino, desde a consideração dos saberes matemáticos a serem adquiridos pelos alunos.

As ideias principais das didáticas específicas, geradas principalmente na Didática da Matemática, centraram-se inicialmente no estudo das condições de transmissão e aprendizagem do conhecimento em contexto escolar, com base na consideração do sistema didático.

Enquanto a Didática Geral está centrada em orientar a aprendizagem, tendo em vista o método didático em ação, mediante as fases do planejamento, orientação e controle da aprendizagem, a Didática da Matemática toma como parâmetro o "Triângulo Didático" de Brousseau como suporte para o desenvolvimento de uma série de ferramentas teóricas para o ensino-aprendizagem da Matemática, mediante as investigações e reflexões acerca de como os três polos - *professor, aluno e saber* - se influenciam na dinâmica de elaboração do conhecimento.

Tanta a Didática Geral como a Didática da Matemática evoluíram em seus campos teóricos e práticos, no entanto, ainda é pequeno o grupo de estudiosos e pesquisadores na área da Didática da Matemática, encontrando-se esta com um vasto campo para o desenvolvimento de pesquisas e teorias que venham minimizar os baixos e persistentes resultados da aprendizagem matemática.

---

[2] O Movimento da **Matemática Moderna** foi um movimento internacional do ensino de Matemática que surgiu na década de 1960, nos Estados Unidos e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

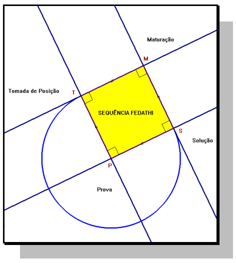
Concluindo

Buscamos neste capítulo propiciar uma compreensão do que é a Didática Geral e a Didática da Matemática, especificando elementos e objetivos que compõem cada uma delas. Podemos dizer então, que, a Didática Geral tem como objetivo central estudar princípios, técnicas e procedimentos que tornem o ensino mais eficiente. Considera como elementos didáticos fundamentais: *o aluno, os objetivos, o professor, a matéria, as técnicas de ensino e os meios geográfico, econômico, cultural e social*, buscando relacioná-los de forma adequada desde o *planejamento*, a *execução* e a *verificação* do ensino.

Enquanto a Didática Geral preocupa-se com princípios que sejam válidos para qualquer área de ensino, a Didática da Matemática tem como objetivo explorar fenômenos ligados ao ensino e aprendizagem da Matemática, e, suas relações no triângulo didático: *professor, aluno* e *saber.*

Buscando conhecer e detalhar especificidades do ensino, a Didática da Matemática vem desenvolvendo elementos teóricos como a transposição didática, situações didáticas, contrato didático, entre outros não menos importantes, que muito tem contribuído para reflexões, compreensões e novas perspectivas para a Educação Matemática.

No capítulo a seguir apresentaremos aspectos relevantes da Didática da Matemática e de conceitos que nos auxiliaram na compreensão da problemática e no desenvolvimento da pesquisa.



2 Desenvolvimento da Didática da Matemática e conceitos de apoio à Pesquisa

2 DESENVOLVIMENTO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E CONCEITOS DE APOIO A PESQUISA

Em que medida o sucesso da transmissão dos conhecimentos matemáticos depende das ciências da educação, da psicologia ou da própria matemática? Que lugar ocupam nessa difusão os conhecimentos de didática e, mais precisamente, de didática da matemática?

Guy Brousseau

2.1 Desenvolvimento do campo teórico e influência francesa

Nas últimas décadas, percebe-se o movimento de desenvolvimento das didáticas específicas, motivado pelo reconhecimento dos limites da Didática Geral em relação à transmissão e aquisição dos conhecimentos das diferentes áreas de ensino. O desenvolvimento de novas teorias educacionais relacionadas à aprendizagem tem impulsionado e dado suporte aos estudos e pesquisas nos vários setores do conhecimento.

Torna-se também cada vez mais evidente que os professores não podem exercer o seu papel com a devida competência e qualidade, sem uma formação adequada para lecionar as disciplinas e constituir junto aos discentes os saberes de que estão incumbidos. Sem um conjunto básico de conhecimentos e capacidades profissionais orientadas para a sua prática docente, o professor enfrentará dificuldades para processar o ensino, neste sentido, a Didática da Matemática será uma grande aliada para os docentes de matemática.

A Didática da Matemática tem se desenvolvido em vários países, porém é na ***França***, que grande parte de seu corpo teórico vem sendo formulado. Com tais estudos, é reconhecida como disciplina autônoma no campo científico. Este desenvolvimento teve origem com a criação dos Institutos de Investigação em Ensino da Matemática (IREM), criados logo após a Reforma Educativa do final dos anos 1960, com a qual se deu impulso ao “ensino da Matemática Moderna”. (GALVEZ, 1996).

Michèle Artigue (apud GALVEZ, 1996, p. 9) reforça a noção de que a Didática da Matemática nasceu em França, no contexto de um amplo movimento do ensino científico nos anos 1960, porém, de certo modo, rompendo com o ponto de vista que subjazia às reformas. Durante o período anterior aos anos 1960, o ensino havia sido marcado por uma focalização exclusiva sobre os conteúdos, relegando-se a um plano inferior o estudo dos processos que permitissem melhorar a transmissão dos conhecimentos. Reinava até então a ideia de que "*é suficiente saber matemática para saber ensiná-la*", considerando apenas alguns princípios da Didática Geral.

Com a persistência das dificuldades de aprendizagem, foi-se percebendo a insuficiência destes pontos de vista, verificando-se que a Matemática não havia sido transformada milagrosamente em algo fácil de aprender. Segundo Artigue, com tal compreensão, nasceu a Didática da Matemática, buscando distanciar-se ao mesmo tempo da Matemática e da Pedagogia, para desenvolver um campo teórico especificamente adaptado à sua problemática e aos métodos de pesquisa que estava em condições de utilizar.

Para Parra (1996), tanto na ***Argentina,*** como em outros países da América Latina, as reformas educacionais sucessivas provocaram mudanças profundas no ensino e na aprendizagem da Matemática. Segundo a autora, a ausência de políticas educativas coerentes a respeito do ensino, da pesquisa, capacitação, processos curriculares etc, provocou desenvolvimentos diferentes em diversos lugares do país e a coexistência de teorias ou concepções contraditórias e superadas umas pelas outras em suas gêneses históricas, mesmo assim, grupos de pesquisa têm se constituído, ainda que em condições difíceis e desfavoráveis.

As produções desses grupos e instituições, necessariamente heterogêneas, situam-se em diferentes níveis: prescritivos (documentos curriculares), propositivos (materiais de apoio, livros de texto), de difusão ou de pesquisa; porém, sua escassa ou instável inserção nas estruturas educativas impede uma difusão sistemática, que produza um melhoramento sensível e duradouro na qualidade da educação.

Outros países, como **Itália** e **Espanha,** apresentam contribuições significativas em publicações na área, com nomes de destaque, como Bruno D´Amore (italiano) e seu livro intitulado *Elementos da Didática da Matemática,* e Luis Rico Romero (Espanha), com trabalhos voltados principalmente para a formação dos professores de Matemática.

No ***Brasil***, a Didática da Matemática é uma área de estudo bastante requisitada pelos profissionais interessados em mudanças no ensino da Matemática. Mesmo com um crescente número de pesquisadores interessados na temática, as produções científicas ainda são poucas e ficam, na maioria das vezes, restritas aos grupos ligados a universidades, necessitando de maiores incentivos para chegarem às realidades escolares.

Com a expansão da Educação Matemática no país, são constituídos inúmeros grupos de pesquisa, e, por seu intermédio, têm se desenvolvido várias linhas de pesquisa, entre elas:

jogos, uso das tecnologias digitais, formação de professores, história da Matemática, teorias psicológicas e análise das representações matemáticas**;** no entanto, instituir novas categorias teóricas na Didática Matemática ainda representa pequena parcela, em relação ao universo das pesquisas desenvolvidas no país.

Acreditamos que esta situação decorre, em primeiro lugar, da baixa qualidade dos cursos de formação de professores, que trabalham basicamente com o ensino, ficando a pesquisa relegada a um plano inferior, e a falta de políticas e incentivos mais dirigidos a pesquisas na área do ensino. Apesar das dificuldades enfrentadas, alguns grupos, com pesquisadores dedicados, logram desenvolver importantes trabalhos relacionados à Didática da Matemática, além de novos grupos formados. Podemos ressaltar: Borges Neto - UFC (Sequência Fedathi), Luis Carlos Pais - UFMG, Saddo Ag Almouloud - PUC-SP (Interpretações e adaptações da Didática Francesa), Terezinha Carraher - UFPE (Didática das Séries Iniciais).

Se falarmos da pesquisa em outras tendências da Educação Matemática, encontraremos nomes como Ubiratan D´Ambrósio (Etnomatemática), Marcelo Borba e Maria Alice Gravina (Novas Tecnologias), John Fossa e Iran Abreu (História da Matemática), entre outros.

Reconhecemos que a Didática da Matemática é ainda um campo muito vasto, aberto e carente do desenvolvimento de pesquisas que investiguem elementos que venham favorecer a compreensão e o desenvolvimento do ensino da Matemática. Os trabalhos desenvolvidos na França ainda são seu principal marco teórico e uma grande luz para as novas pesquisas desenvolvidas. Destacam-se na área com relevantes trabalhos pesquisadores como: Guy Brousseau (Teoria das Situações Didáticas, Obstáculo Epistemológico), Michèle Artigue (Engenharia Didática), Yves Chevallard (Transposição Didática), Gérard Vergnaud (Campos Conceituais), Régine Douady (Dialética Ferramenta-Objeto) e Raymond Duval (Registros de Representação Semiótica).

Nos itens a seguir, apresentaremos alguns conceitos da Didática da Matemática francesa, os quais buscamos explorar em razão de sua importância junto ao ensino e a pesquisa em matemática, como também, por apoiarem o desenvolvimento deste trabalho, são eles: Situações Didáticas e Obstáculos Didáticos, Transposição Didática, Transposição Informática, Contrato Didático e Engenharia Didática.

2.2 Conceitos de apoio à compreensão do problema

2.2.1. Situações Didáticas

Figura 2: Guy Brousseau
O pai da Didática da Matemática

Guy Brousseau nasceu em 4 de fevereiro de 1933, em Taza, no Marrocos, filho de um soldado francês. Em 1953, começou a dar aulas no Ensino Fundamental numa aldeia da região de Lot et Garonne. Na única classe da escola local, Brousseau lecionava para crianças de 5 a 14 anos. No mesmo ano, casou-se com Nadine Labeque, que se tornou sua parceira de trabalho. No fim dos anos 1960, depois de se formar em Matemática, ele passou a lecionar na Universidade de Bordeaux, onde hoje é diretor do Laboratório de Didática das Ciências e das Tecnologias e professor emérito. Em 1991, tornou-se docente do Instituto Normal Superior local. Recebeu o título de doutor *honoris causa* das universidades de Montreal (Canadá), Genebra (Suíça) e Córdoba (Espanha). Seus estudos têm grande influência nos parâmetros do ensino público francês. Em 2003, foi o primeiro ganhador do prêmio Felix Klein do Comitê Internacional do Ensino da Matemática.

Fonte: Revista Nova Escola Nº 219 – Jan/Fev 2009, p.21.

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau com o objetivo de modelizar o ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos. Para ele, as situações didáticas deveriam ser o objeto de estudo da Didática da Matemática. Este modelo diferencia-se de outras teorias pedagógicas por privilegiar aspectos específicos do saber matemático. Brousseau (apud FREITAS, 2002, p.67) define uma *Situação Didática* da seguinte maneira:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição... o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes.

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida com base no princípio de que "cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação", entendida como ação entre duas ou mais pessoas. Para que ela seja solucionada, é preciso que os alunos mobilizem o conhecimento correspondente. Um jogo, por exemplo, pode levar o estudante a usar o que já sabe para criar uma estratégia adequada. Nesse caso, o professor adia a emissão do conhecimento ou as possíveis correções até que os alunos consigam chegar à regra e validá-la. Este deve propor um problema para que elas possam agir, refletir, falar e evoluir por iniciativa própria, criando assim condições para que tenham um papel ativo no processo de aprendizagem. Brousseau chama essa *situação de a-didática.*

A Teoria das Situações Didáticas trouxe uma concepção inovadora do erro, que deixa de ser um desvio imprevisível para se tornar um obstáculo valioso e parte da aquisição de saber. Ele é visto como o efeito de um conhecimento anterior, que já teve sua utilidade, mas agora se revela inadequado ou falso. Brousseau se vale de uma concepção do filósofo francês Gaston Bachelard (1884-1962), segundo a qual "só conhecemos contra um conhecimento anterior". No trabalho dentro dessa concepção, acontece também uma inversão do ensino tradicional de Matemática – que parte do saber institucionalizado e segue na tentativa de esmiuçá-lo para as crianças, permitindo que os alunos busquem por si mesmos as soluções, chegando aos conhecimentos necessários para isso.

O *contrato didático* (apresentado de forma detalhada no item 2.2.5), de maneira implícita ou explícita, define as regras de funcionamento dentro da situação didática, como, por exemplo: distribuição de responsabilidades, determinação de prazos temporais, proibição ou permissão do uso de determinados recursos, comportamentos consentidos, modelos de conteúdo, etc.

Segundo Brousseau, a aplicação da teoria das situações didáticas, como metodologia de ensino e pesquisa, deve ter como finalidade averiguar quais características são determinantes para a evolução do comportamento dos alunos e, consequentemente, de seus conhecimentos. Isto não significa que só seja de interesse analisar as situações didáticas de êxito, pois, se uma situação didática fracassa em seus propósitos de ensinar alguma coisa, sua análise pode constituir um aporte à didática, se permitir identificar os aspectos da situação que se tornaram determinantes de seu fracasso. Para a análise e investigação das situações didáticas, Brousseau sugere como fundamental as *análises a priori e a posteriori* das situações. As terminologias estão ligadas ao modelo da Engenharia Didática.

Nessas fases, o pesquisador deve ser capaz de prever os efeitos da situação que elaborou, antes de levá-la à prova (em aula ou em experimentos); só posteriormente comparar suas previsões com os comportamentos observados e as produções obtidas.

Além das análises *a priori* e *a posteriori*, Brousseau sugere para o professor/pesquisador uma "modelização" das situações didáticas, recomendando a identificação de um estádio inicial e de um conjunto de outros estádios possíveis, entre os quais se encontra a fase final que corresponde à solução do problema envolvido na situação.

Nos períodos, devem ser analisadas as decisões que podem ser tomadas pelo aluno a cada momento, as estratégias que poderá adotar para chegar ao plano final e o estabelecimento das regras que permitirão passar de uma fase para a outra.

Outro aspecto que facilita a análise das situações didáticas é sua classificação. Brousseau distingue, entre as situações que produz para seus estudos experimentais, em quatro tipos, cuja sequência, nos processos didáticos que organiza, são as seguintes: situações de ação, situações de formulação, situações de validação e situações de institucionalização (apresentadas de forma detalhada no capítulo 3).

Segundo Brousseau, existem casos em que organizar uma situação de ação para um problema criará um obstáculo para sua resolução. Não é necessário organizar ações sempre e para qualquer conhecimento. Uma situação de ação não é automaticamente benéfica para fazer avançar o raciocínio do aluno.

Uma importante parte na análise das situações é a identificação das variáveis didáticas e de seus efeitos. Outro fato importante para as análises de uma situação didática é a sua comparação com outras situações didáticas obtidas por meio de transformação da primeira. Assim, esforços podem ser concentrados no sentido de identificar os elementos que devem ser mudados para se conseguir efeitos didáticos diferentes dos que foram obtidos na situação primeira. Pretende-se que, assim, após a formulação de várias situações didáticas, se possa chegar a uma situação fundamental, ou seja, aquela que apresente as variáveis capazes de coincidir em qualquer situação na qual intervenha esse conhecimento.

- Situações a-didáticas

No desenrolar de uma situação didática, há diversos tipos de variáveis didáticas, sobre algumas das quais o professor não tem controle direto. Na maioria das vezes, essas cujo controle direto o professor não possui estão inseridas no que Brousseau denominou de *situações a-didáticas.* Segundo Brousseau apud Freitas (2002, p. 69).

> [...] quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer indicação intencional. Uma tal situação é chamada de situação a-didática.

A situação a-didática se caracteriza basicamente por momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de forma independente, não recebendo nenhum tipo de controle direto do professor. Segundo Brousseau, a-didática não significa negação da didática, mas aparente ausência do professor, numa determinada etapa do contrato didático, durante a qual o aluno trabalha individualmente, ou em grupo, para formular o novo conhecimento.

Para Brousseau, as situações a-didáticas representam os momentos importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nestas será de mérito próprio, ou seja, o que produziu é fruto do que conseguiu sintetizar de um conhecimento. O autor diferencia ainda situação a-didática de situação não-didática, assinalando que as chamadas situações não-didáticas são aquelas que não foram planejadas visando a uma aprendizagem, caso em que o problema surge de forma eventual na vivência pessoal do sujeito.

A situação a-didática, mesmo não possuindo o controle direto do professor, decorre de um planejamento anterior, numa pretensão de direcionar o aluno para o objetivo pretendido, enquanto nas situações não didáticas a aprendizagem decorre de problemas eventuais na vida do sujeito, sem planejamento prévio para aquela aprendizagem.

O trabalho realizado nas situações a-didáticas permite ao aluno agir de maneira reflexiva em relação aos problemas propostos pelo professor, propiciando maior tempo para as descobertas dos alunos, análises e deduções próprias. Nelas, o aluno deve ser sempre estimulado a superar, pelo seu próprio esforço, certas passagens que conduzem o raciocínio rumo à aprendizagem. Na Figura 3, sintetizamos as relações estabelecidas por Brousseau, entre os elementos que definem uma situação didática.

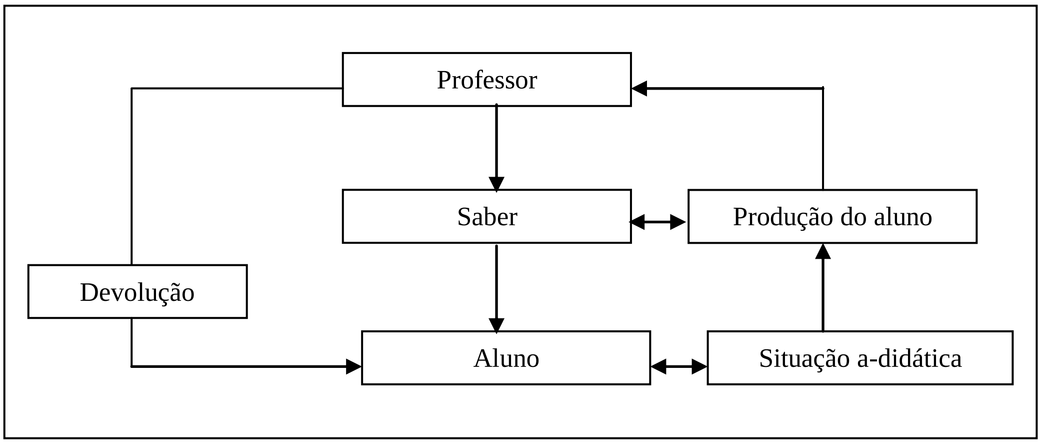


Figura 3: Elementos de uma Situação Didática
Fonte: Elaborado pela autora

Há, pois, uma situação didática, cada vez que se pode caracterizar uma intenção de ensinar por parte do professor; e esses mecanismos socialmente definidos são instituídos para este fim. É isso que caracteriza a perspectiva construtivista: colocar o aluno em situação de elaborar seus conhecimentos, com referência ao problema e não à intenção de ensinar. A presença e a funcionalidade da situação didática onde se tenta reproduzir, em menor escala, o contexto do trabalho científico, é que marcam e estabelecem a diferença das práticas pedagógicas tradicionais e esta teoria.

- Situação Fundamental

Segundo Galvez (1996, p. 30), a análise de uma situação didática passa por sua comparação com outras situações didáticas, obtidas por meio da transformação da primeira. A autora exemplifica a asserção, relatando que o esforço de modelização de uma situação didática está subordinado ao propósito de identificar os elementos que poderiam ser mudados para conseguir efeitos didáticos diferentes do que seriam obtidos com a situação original. Constitui-se, assim, toda uma família de situações didáticas, relativas ao conhecimento específico que se quer ensinar, na hipótese de que cada uma delas faça funcionar tal conhecimento sob uma modalidade diferente.

Partindo deste conjunto de situações didáticas, acredita-se existir uma, designada como ***situação fundamental,*** que é capaz de gerar todas as demais, mediante a distribuição de estágios diferentes de variação ou escalas de valores particulares às variáveis que a caracterizam.

> Uma situação é fundamental quanto ao conhecimento que interessa ser ensinado, quando é possível, por meio do jogo das variáveis nela presentes, fazê-la coincidir com qualquer situação na qual intervenha esse conhecimento. (GALVEZ, 1996, p. 31)

Brousseau salienta que é preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber, com base nos saberes definidos culturalmente nos programas escolares. Esta formulação apóia-se na tese de que o sujeito que aprende necessita constituir por si mesmo seus conhecimentos, por meio de um processo adaptativo, análogo ao que realizaram os produtores originais dos conhecimentos que se quer ensinar.

Podemos finalizar, destacando que, para viabilizar um ensino que contemple a Teoria das Situações Didáticas, são recomendáveis procedimentos metodológicos em que o professor motive o aluno a participar efetivamente da elaboração deste conhecimento. É importante ressaltar que a Teoria das Situações Didáticas permite organizar uma leitura dos fatos didáticos, aperfeiçoar as aulas e montar sequências didáticas adequadas para o ensino da Matemática.

2.2.2 Obstáculo Epistemológico

O que é um obstáculo epistemológico? Como surge?

A noção sobre o que é um *obstáculo epistemológico* foi apresentada pela primeira vez pelo filósofo Gaston Bachelard, em 1936, em seu livro *A formação do espírito científico*, onde o autor discute vários aspectos sobre a constituição, evolução e o progresso do pensamento científico. Para iniciar esse estudo, Bachelard começa apresentando noções acerca da influência do obstáculo epistemológico junto ao desenvolvimento do conhecimento científico, onde ressalta que

> Quando se procura as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculo que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculo externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (BACHELARD, 1996, p. 17)

Para Bachelard o conhecimento científico surge de perguntas e questionamentos e o esforço científico investido na busca da resposta pode desgastar-se, estagnar-se e/ou declinar, gerando, então um bloqueio da atividade espiritual. Surge, então, neste momento, um *obstáculo epistemológico no conhecimento não questionado*.

Em relação ao conhecimento matemático, Bachelard destaca a existência de sistemas desajeitados e infelizes, ressaltando que o falso rigor pode bloquear o pensamento, da mesma forma que o primeiro sistema matemático pode impedir a compreensão de um novo sistema (exemplo clarificado por Brousseau em relação à influência/interferência do conhecimento acerca dos números naturais, para a compreensão dos números decimais).

A concepção de obstáculo epistemológico proposta por Bachelard foi ampliada por Guy Brousseau para uma Teoria Geral dos Obstáculos. A Teoria dos Obstáculos por ele proposta serve para superar a atribuição de erros à subjetividade dos alunos. Para o autor

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza e do acaso (...), mas o efeito de um conhecimento anterior que tinha o seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, eles se constituem em obstáculos. Tanto no funcionamento do mestre como naquele do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido. (BROUSSEAU, 1996a, p. 171)

Com esteio nos pressupostos de Brousseau, podemos dizer que um obstáculo é uma ideia que, no momento da formação do conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas anteriores, mas se revela um fracasso quando se tenta aplicá-lo a um novo problema.

Para melhor compreensão da influência dos obstáculos nos processos didáticos, Brousseau divide-os em três origens fundamentais, conforme descreveremos.

1) Obstáculos epistemológicos - Residem na natureza do conhecimento matemático, razão pela qual não podem ser evitados, já que são constitutivos dos respectivos conhecimentos; eles podem ser encontrados e identificados na história dos conceitos; são aqueles dos quais não se pode nem se deve fugir. São obstáculos que tiveram papel importante no desenvolvimento histórico dos conhecimentos e cuja rejeição precisou ser integrada.

D´Amore (2007, p. 214) complementa esta noção, observando que cada assunto matemático possui estatuto epistemológico próprio, que depende da história de sua evolução no interior da Matemática, da sua aceitação crítica no âmbito da Matemática, das reservas que lhe são próprias, da linguagem em que se exprime ou da que é necessária para poder ser expresso. D´Amore relata que quando na história da evolução de um conceito se percebe uma não-continuidade, uma ruptura, mudanças radicais de concepções, então supõe-se que tal conceito possua em seu interior *obstáculos de caráter epistemológico,* tanto para ser concebido como para ser aceito pela comunidade dos matemáticos, como para ser aprendido. O obstáculo manifesta-se, por exemplo em erros recorrentes e típicos de vários estudantes.

2) Obstáculos didáticos - Traduzem-se em dificuldades resultantes das escolhas ligadas aos sistemas de ensino: concepções de aula, dos currículos, das estratégias de ensino, de conhecimentos errôneos ou incompletos, que se revelarão mais tarde como obstáculos ao desenvolvimento das conceituações. Compreende-se que estes são obstáculos praticamente inevitáveis, pois estão diretamente ligados às transposições didáticas. Desde o momento em que o professor reconhece a existência de um obstáculo didático, cabe a ele rever a compreensão que o aluno possui acerca do conceito em foco, para buscar explicitá-lo, de forma que leve o aluno a superar a dificuldade estabelecida.

3) Obstáculos ontogenéticos - Correspondem aos obstáculos ligados às limitações das capacidades cognitivas dos alunos envolvidos na aprendizagem.

Para Brousseau, quanto mais o professor ocupa o lugar dos alunos, mais contraria o seu projeto de ensino. Não pode dizer aos alunos o que quer deles, já que, se o diz e os alunos o fazem, não será porque o tenham pensado. Nesse caso, os alunos não se apropriaram da pergunta, simplesmente fazem o que o professor queria. O docente não pode se encarregar de uma série de decisões que deveriam ser tomadas pelo aluno. Tencionando que seus alunos obtenham bons resultados, o professor tende a facilitar-lhes a tarefa de variadas maneiras, como, por exemplo, fornecendo-lhes abundantes explicações, ensinando pequenos truques, algoritmos ou técnicas de memorização, ou mesmo indicando-lhes pequenos passos no problema. Atitudes como essas realizadas pelo professor foram denominadas por Brousseau como “Efeito Topázio”. Para o autor, as pistas e explicações excessivas impedem a compreensão do aluno acerca dos objetivos da aprendizagem.

Para o professor que vai fazer a comunicação de um conhecimento, Brousseau destaca importante momento no ensino, que denomina como *devolução do problema*. Para o autor, “devolução” é a atividade por intermédio da qual o professor tenta comunicar um problema ao aluno e fazer que ele se sinta responsável para resolvê-lo. Suas intervenções no processo de devolução devem ser direcionadas no sentido de tornar o saber em jogo como universal, livre de pressupostos subjetivos.

Se essa devolução ocorre, o aluno começa a participar do processo e, junto ao professor, solidifica sua aprendizagem. Isso é defendido como uma aprendizagem por adaptação, que Brousseau diz se opor à aprendizagem formal.

Para fazer funcionar um conhecimento no aluno, o professor busca uma situação apropriada; para que seja uma situação de aprendizagem, é necessário que a resposta inicial que o aluno pensa ante a pergunta formulada não seja a que desejamos ensinar-lhe, pois, se fosse necessário possuir o conhecimento ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem, ou seja, quanto mais profundas as modificações dos conhecimentos, mais significativa foi a situação no seu objetivo de ensinar.

Para Brousseau, uma situação de aprendizagem deve fazer que o aluno elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta e os faça funcionar ou os modifique às exigências do meio e não a um desejo do professor. Uma situação de aprendizagem é uma situação na qual o que se faz tem um caráter de necessidade em relação a obrigações, não são arbitrárias nem didáticas.

2.2.3 Transposição Didática

Em meados da década de 1980, começaram a emergir no campo educacional, no meio de uma reflexão de cunho mais epistemológico, conceitos como o de “transposição didática”, “mediação didática” ou ainda o de “recomposição didática”, que têm em comum o fato de se inscreverem no âmbito dos questionamentos suscitados pelo enfoque da epistemologia escolar.

Entre essas diferentes pesquisas, estudo desenvolvido por Chevallard no campo da Didática da Matemática, ao longo da década de 1980, merece destaque, não apenas pelo seu caráter pioneiro mas também pela sua fertilidade teórica expressa na elaboração de conceitos, como o de **transposição didática** e de **noosfera,** entre outros, cujos alcances para o entendimento da formulação dos saberes escolares no plano epistemológico não podem ser negados, a despeito das polêmicas introduzidas entre os didatas dos diferentes campos disciplinares.

Para uma melhor compreensão e avaliação da potencialidade explicativa dessas categorias analíticas, é preciso ter o cuidado de, no primeiro momento, compreendê-las como suporte no quadro teórico no qual elas são elaboradas e, em seguida, identificar os seus alcances e limites quando as mesmas são importadas do seu contexto de produção original e utilizadas como instrumentos de inteligibilidade de outra realidade.

A reflexão de Chevallard sobre os saberes escolares deve ser compreendida dentro de um quadro mais amplo de reflexão epistemológica, articulada à reflexão pedagógica, como anota o próprio autor:

> Uma outra orientação de pesquisa consiste em reconhecer a especificidade do projeto de construção didática dos saberes, a sua heterogeneidade a priori em relação às práticas acadêmicas dos saberes, a sua irredutibilidade imediata às gêneses socio-históricas correspondentes. (CHEVALLARD, 1991, p. 48)

Esse autor parte do princípio de que existe uma ciência chamada "Didática das Matemáticas", logo, da existência de um objeto real, preexistente à nossa vista e dotado de uma necessidade, de um determinismo próprio, o sistema didático que esse autor caracteriza como sendo um "objeto tecnocultural" (CHEVALLARD, 1991, p. 14). É esse objeto que, segundo Chevallard, é preciso explicar, elucidar os seus mecanismos de funcionamento, as suas especificidades, as relações que ele mesmo estabelece com o mundo exterior.

Para esse autor, o sistema didático é formado por três elementos (professor - saber aluno) que interagem com base em mecanismos que lhes são próprios, que ele denomina de "funcionamento didático". Essa concepção tem como mérito trazer para a discussão o terceiro elemento, curiosamente esquecido - o saber em análises do campo que tendem a privilegiar, nesse sistema, apenas a relação professor - aluno.

Para que esse sistema didático funcione, é preciso que esses três elementos satisfaçam algumas condições impostas pela própria prática pedagógica. É sobre a natureza e as condições impostas ao elemento "saber escolar" que se centram as reflexões de Chevallard dando origem à “Teoria da Transposição Didática”, na qual a reflexão epistemológica assume papel central.

A tese defendida por esse autor é a de que a condição essencial imposta pelos imperativos didáticos ao elemento saber consiste na sua transformação para que ele possa se tornar apto a ser ensinado. Assim, o autor define a transposição didática:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 39)

O conceito de transposição didática emerge assim para explicar esse processo obrigatório de transformação. Se, de um lado, o termo "transposição" não traduz bem a ideia de transformação, que ele pretende nomear, de outro, tem o mérito de pressupor, logo de saída, o reconhecimento de um distanciamento obrigatório entre os diferentes saberes, o que não deve, de forma alguma, ser minimizado.

Esse reconhecimento faz desse conceito um importante instrumento de inteligibilidade. No plano teórico, ao remeter a discussão para a passagem de um outro tipo de saber ele justifica a necessidade da introdução, no campo da Didática, de uma reflexão epistemológica que leve em conta a pluralidade de saberes.

No plano metodológico, esse conceito permite tomar distância, interrogar as evidências, desfamiliarizar-se da proximidade enganadora entre os saberes, oferecendo, assim, a possibilidade ao pesquisador de exercer uma constante vigilância epistemológica, indispensável a esse tipo de reflexão.

- Elementos da Transposição Didática

Antes de apresentar aspectos metodológicos acerca da transposição didática, não podemos deixar de ressaltar as especificidades do saber matemático, caracterizado pelo tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático diante de seu objeto de pesquisa, o qual é constituído pelas noções matemáticas e inter-relaciona os trabalhos do matemático, do professor de Matemática e do aluno.

É importante destacar o fato de que, enquanto o matemático procura apresentar o saber científico na maior generalidade possível, o professor de matemática deve recontextualizá-lo o máximo possível, buscando inseri-lo em situações significativas para o aluno.

1) Noosfera

O estudo da trajetória percorrida pelo saber escolar permite visualizar as diversas influências recebidas, tanto do saber científico, como de outras fontes. São influências que moldam não só o aspecto conceitual como também o metodológico. O conjunto das fontes que influenciam na seleção dos conteúdos, que deverão compor os programas escolares e que determinam todo o funcionamento do processo didático, recebeu de Chevallard o nome de *noosfera.* Fazem parte da noosfera: cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação (PAIS, 2001, p.19).

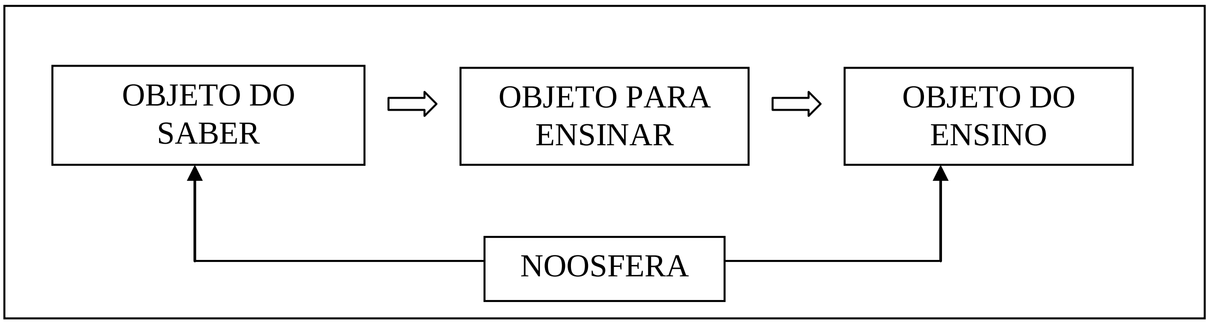


Figura 4: Elementos da Transposição Didática
Fonte: Elaborada pela autora

Enquanto o *objeto do saber* se refere ao conhecimento científico na forma em que foi concebido pelos cientistas, *o objeto para ensinar* é apenas uma parte deste saber, que será modificado e adaptado para tornar-se *objeto de ensino*, ou seja, conteúdo do currículo escolar, acrescido de objetivos e pressupostos de como se ensina ou como se aprende. A Matemática escolar, por exemplo, não se confunde com a matemática ciência, mas é uma parte dela, que foi previamente selecionada e lapidada, de acordo com propostas pedagógicas, para o contexto educacional em que será ensinada.

Comporão a noosfera todos os profissionais envolvidos na transformação do *objeto do saber* em *objeto de ensino*, ou seja, os profissionais envolvidos na elaboração dos livros didáticos, propostas pedagógicas, projetos político-pedagógicos, docência, entre outros.

2) O Tempo Didático

É aquele marcado nos programas escolares e nos livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal. Ele prevê um caráter cumulativo e irreversível para o saber, implicando enquadramento do saber num determinado espaço em certo tempo.

3) O Tempo de Aprendizagem

É o tempo necessário para o aluno superar os bloqueios e atingir uma nova posição de equilíbrio. Trata-se de um tempo que não é sequencial nem pode ser linear, na medida em que muitas vezes se faz necessário retomar as antigas concepções para poder transformá-las. Cada sujeito tem o próprio tempo de aprendizagem. Enquanto alguns aprendem rapidamente, outros necessitam de um tempo bem maior.

4) As noções paramatemáticas e protomatemáticas

Segundo Pais (2002), as *noções paramatemáticas* são idéias que se caracterizam como ferramentas auxiliares à atividade matemática, mas que normalmente não se constituem em objetos de um estudo específico. Ao contrário dos conceitos matemáticos, tais noções normalmente não são ensinadas de uma forma explícita e também não são excluídas de uma avaliação direta. Elas são concebidas como ideias possíveis de serem aprendidas no transcorrer da própria aprendizagem, entretanto, são necessárias tanto ao ensino como à aprendizagem em Matemática - noções de parâmetro, equação, definição, demonstração, fatoração, constituem exemplos de noções paramatemáticas.

As *noções protomatemáticas* formam uma categoria de habilidades que não se referem diretamente às noções matemáticas em si, mas que são exigidas de uma forma implícita na sua aprendizagem escolar, são competências anteriores ao próprio conhecimento matemático, tais como *habilidade de raciocínio, percepção de modelos, identificação e formulação de questões* (PAIS, 2002).

2.2.4 A Transposição Informática

A noção de *transposição informática* baseia-se no fundamento de que a passagem de determinada representação de um conhecimento a outra implica uma transformação. Dessa forma, é necessário compreendermos o que resulta desse esforço de representação e transformação, quando, com suporte em um modelo matemático de referência, seja ele aritmético, algébrico ou geométrico, tentamos criar um modelo informático, um modelo a ser manipulado por um dispositivo artificial. Como passar das transformações a que estamos habituados a lidar nos livros, sobre o papel, ou no decorrer das interações verbais junto aos quadros negros, para representações simbólicas e manipuláveis em um dispositivo informático? Como apresentar os conhecimentos matemáticos aos alunos utilizando estes novos dispositivos? Quais as influências e consequências das transformações do saber matemático nos ambientes digitais?

Com base nestas reflexões, buscamos aqui explicitar algumas compreensões acerca da transposição informática no ensino da Matemática.

Balacheff (1994) introduz a ideia de *transposição informática* para falar do tratamento do conhecimento que permite representá-lo e implementá-lo num dispositivo informático. Partindo da ideia do autor, podemos perceber que a transposição informática designa o trabalho sobre o conhecimento, que permite sua representação simbólica e operacional num dispositivo informático, nos aspectos de apresentação, manipulação e visualização deste conhecimento.

Segundo Balacheff, além dos entraves de ensino ligados à transposição didática, temos aqueles da modelização e implementação informática: entraves da modelização compatível, entraves ligados à linguagem informática e à capacidade das máquinas. O autor destaca que os ambientes informáticos da aprendizagem resultam da idéia de construção que são lugares de *novas transformações* dos objetos de ensino, propondo que os professores levem em consideração esse fato, quando pensarem em utilizar as tecnologias digitais em suas aulas. (ALMOULOUD, 2000).

No âmbito do desenvolvimento do *software* educativo, essa transposição é importante e significa, de fato, uma contextualização do conhecimento, que pode ter consequências sobre os resultados da aprendizagem. Para minimizar os obstáculos didáticos junto a transposição informática, é necessário que os *softwares* sejam propostos de modo a aproximar a representação matemática das representações e linguagens habituais do ambiente lápis e papel, propiciando, além disso, constatações matemáticas, praticamente impossíveis de se visualizar nos ambientes de ensino convencionais.

- A transposição informática no contexto da transposição didática

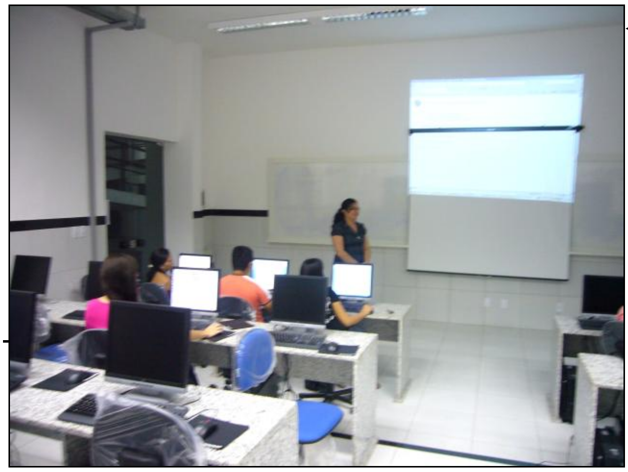
Balacheff propõe a Teoria da Transposição Informática para analisar as transformações do saber, dentro da transposição didática. O autor propõe que os docentes repensem o uso do computador, para que ele não seja mais um elemento na educação e sim um diferencial que deve ser muito bem estudado e avaliado para seu correto uso.

O desenvolvimento das tecnologias informáticas, a introdução dessas tecnologias na escola e os ambientes de formação geralmente são acompanhados de fenômenos do mesmo tipo aos relacionados à transposição didática, ampliando-se, com efeito, os elementos que influenciarão na formação do saber pelos alunos, surgindo a necessidade do estudo de novas categorias resultantes destes elementos.

A Teoria da Transposição Informática questiona o uso do computador como habitualmente é denominado sob o termo de "informatização", porém Balacheff (1994) diz que isto não constitui simples transposição. Os ambientes digitais de aprendizado resultam de uma formulação na qual há novas e variadas transformações dos objetos de ensino. O autor ressalta que o desenvolvimento da transposição informática explicita o uso do computador no ambiente educacional, esteado em três aspectos, por ele denominados de: *universo interno, universo externo e interface*.

- O *universo externo* é o contexto onde o dispositivo vai ter lugar, num jogo de interações que implicam outros dispositivos materiais e agentes sociais (professor e alunos) dentro das limitações do sistema didático.
- O *universo interno* é constituído por diversos elementos físicos, notadamente os componentes eletrônicos, cuja articulação e operacionalização permitem o funcionamento de um dispositivo informático.
- A *interface* é o lugar da comunicação entre o operador humano e o dispositivo informático, permitindo a visualização das representações dos conhecimentos.

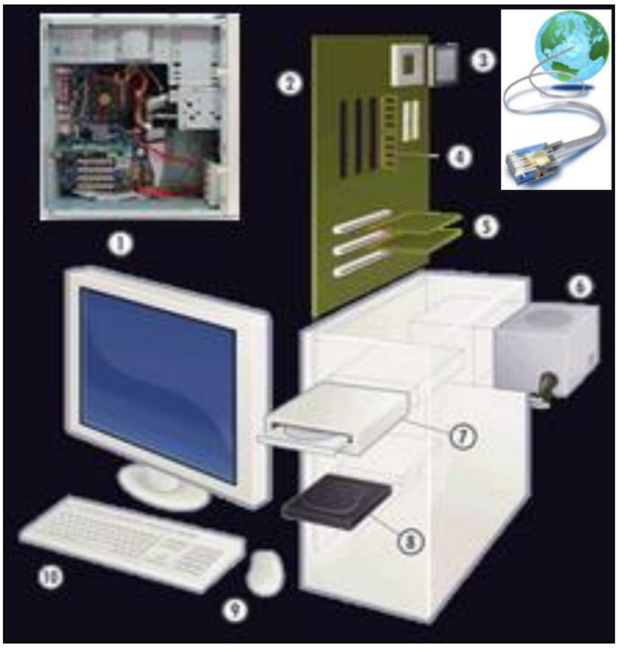
Exemplos de elementos ligados ao universo interno, externo e interface.



Elementos do universo externo

- Número de máquinas e de alunos;
- disposição das bancadas e dos computadores;
- materiais de apoio do professor: *data-show*, quadro, etc.
- *hardwares* complementares: caixa de som, webcam, mídias de gravação (cd, *pendrive*), entre outros; e
- propostas e métodos de ensino.

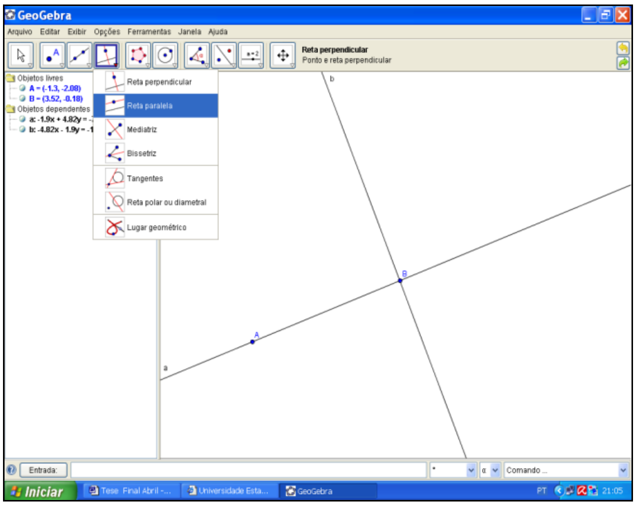
Figura 5: Transposição Informática - universo externo
Fonte: Elaborado pela autora



Elementos do universo interno

- Componentes de composição do computador: placas, *drives*, memórias;
- Conexões a Internet: capacidade, velocidade, tipos de conexão; e
- Opções de redes, compartilhamento das máquinas, entre outros.

Figura 6: Transposição Informática - universo interno
Fonte: Elaborado pela autora



Elementos da interface

- Formas de apresentação, movimentação e transformação dos objetos matemáticos;
- Formas de acesso das ferramentas disponíveis;
- Sistemas operacionais; e
- Aspectos ergonômicos e de usabilidade dos *softwares*.

Figura 7: Transposição Informática - Interface
Fonte: Elaborado pela autora

Os elementos da transposição informática influenciam de forma direta a transposição didática dos saberes matemáticos, uma vez que os objetos de ensino terão que ser implementados e trabalhados pelo professor, junto ao ambiente informático, levando em consideração as características destes universos (internos, externos e interface), agregando assim, essas novas categorias ao espaço da noosfera.

Desta forma, temos que, além das transformações pelas quais o saber científico passará através dos livros, propostas curriculares, metodologias de ensino e concepções do professor, sua implementação junto aos dispositivos informáticos e sua devida organização e apresentação por meio dos equipamentos eletrônicos, ampliarão de forma significativa as transformações já ocorridas em decorrência da transposição didática.

A Figura 8, proposta por Almouloud (2000, p. 203), nos mostra em que nível a transposição informática está situada no processo da transposição didática.

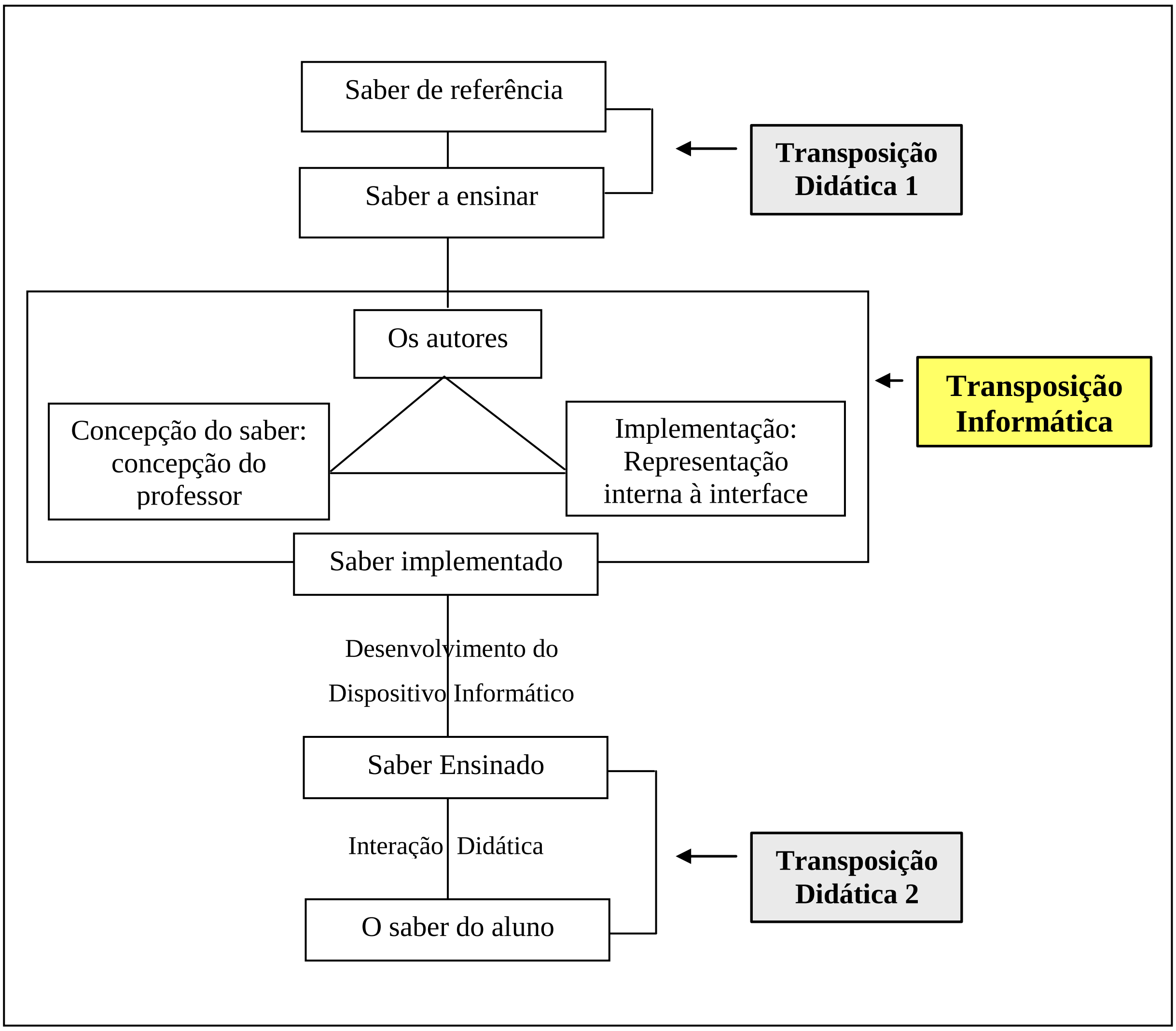


Figura 8: Esquema da transposição informática no processo da transposição didática
Fonte: Almouloud (2000, p. 203)

Na figura, vemos que, uma vez que o conhecimento a ensinar é identificado (transposição didática 1), resta especificar a arquitetura do ambiente informático de aprendizagem, o que engaja as concepções dos autores sobre o conhecimento, e os meios de ensino. Além disso, deve-se realizar a implementação do conhecimento, levando em consideração as exigências e os entraves ligados às características do dispositivo informático (transposição informática). Após a formatação e operacionalização do saber a ensinar junto ao contexto informático, outros elementos didáticos continuarão em cena na transposição deste saber junto ao aluno (transposição didática 2).

Podemos concluir que estas duas esferas de transposição do saber - didática e informática - tornam-se interdependentes, necessitando, inclusive, da formação de grupos de trabalhos com profissionais que tenham diferentes domínios (informáticos, pedagógicos, matemáticos, entre outros) para uma melhor adaptação deste saber dentro dos contextos educacionais que utilizem estas novas tecnologias como instrumentos de ensino.

- Os objetos de ensino e os impactos epistemológicos do ambiente informático

De acordo com Balacheff (1994), um dos problemas da transposição informática é o do domínio de validade epistemológica dos dispositivos informáticos, concebidos para a aprendizagem humana.

A noção de *domínio de validade epistemológica* em um ambiente informático é apontada pelo autor como o impacto epistemológico, criado pela introdução da tecnologia, no processo didático. Assim, esta noção se refere essencialmente à natureza do conhecimento e das relações por ele disponibilizadas, a partir de um ambiente informático (BALACHEFF, 1994).

A aplicação do conceito de domínio de validade epistemológica possibilita a criação de um conjunto de ferramentas conceituais que permitem analisar as características de um ambiente informático em relação a um determinado domínio de conhecimento matemático, visando a desenvolver mecanismos que possibilitem a distinção entre vários ambientes, no que diz respeito aos potenciais específicos nos quais cada um deles pode contribuir nas diferentes etapas do processo de ensino e aprendizagem.

Outra questão suscitada por Balacheff é o d*omínio de validade didática* que, em termos, explora a margem de controle que o professor pode ter sobre o ambiente informático, posto à disposição de seus alunos. Podemos dizer que há diferença entre o que ocorre e o que se espera que ocorra nas interações didáticas relacionadas ao ambiente informático.

As diferenças entre o que se espera e o que realmente sucede nas interações junto ao ambiente informático tornam delicada a gestão das situações de aprendizagem, fazendo com que o professor perca uma parte da capacidade de controle na condução das atividades junto à classe. Dessa forma, a questão levantada sobre o *domínio de validade didática* centra-se na antecipação das complexidades didáticas inerentes à escolha de um ambiente informático de aprendizagem e em como descrever os limites de sua utilização eficaz no âmbito da prática em sala de aula (BALACHEFF, 1994).

- Efeitos da transposição informática

Partindo da discussão do tópico anterior, acerca dos domínios de validade epistemológica e didática, os professores devem analisar em que aspectos se distinguem os conhecimentos formulados pelo aluno mediante um determinado dispositivo informático, em relação aos que seriam constituídos em outros contextos, desta forma, podem se indagar:

- Qual é o ambiente informático mais adequado aos objetivos de ensino propostos?
- O uso do ambiente permitirá alcançar os objetivos didáticos fixados?
- Quais são as limitações que o *software* impõe ao usuário e ao saber?
- Quais são os efeitos do ensino e da aprendizagem com um *software* educativo em relação aos conhecimentos formulados em sala de aula?
- Que tipo de atividades são mais eficazes para o aprendizado nestes ambientes?
- Quais são as ações didáticas mais significativas para a aprendizagem nesses ambientes?
- Que propostas didáticas mais se harmonizam ao ensino com as tecnologias digitais?
- Como validar o conhecimento matemático nos ambientes informáticos?

A busca da resposta a estes e outros questionamentos pertinentes à transposição Informática no ensino de Matemática, permitirá aos professores a organização de situações didáticas que contribuam para o aprendizado desta disciplina, possibilitando aos alunos novas formas de compreender, experimentar e mesmo recriar a Matemática trabalhada nas escolas e universidades, proporcionando-lhes uma visão mais abrangente dos saberes escolares e científicos.

2.2.5 Contrato Didático

Todas as relações que acontecem na sala de aula entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino *apresentam algumas regras, implícitas e explícitas,* que aos poucos definem e estabelecem as responsabilidades que cada um tem perante o outro, em um contexto histórico e social ligado a fatores internos e externos, a fim de viabilizar práticas que possibilitem a apropriação do conhecimento pelo aluno, estas regras fazem parte de uma negociação a qual Brousseau (1986 apud SILVA, p. 43) denomina *contrato didático*:

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

No início do ano, logo nas primeiras aulas, há um jogo de expectativas entre professor e alunos. Existe um período em que um estuda o outro, tentando descobrir seus interesses, estratégias e intenções. Embora todos tenham relações pessoais com os saberes, o professor é o portador de um saber paradigmático (Matemática, Física, Química, Biologia) resultado de uma transposição didática. O aluno ainda não tem relação com esse tipo de saber e depende da mediação do professor, estando sujeito a um alto grau de controle por parte deste. Isso implica uma *assimetria entre professor e alunos* na relação didática que se estabelece no espaço e no tempo escolar (RICARDO et alii, 2004).

Para os autores, essa assimetria inclui ainda um certo grau de confiança que o aluno deposita no professor, ao supor que este tem a chave para a resolução dos problemas que propõe para a classe. O aluno confia em que o professor fará as escolhas adequadas e dentro de um grau de exigência cognitiva compatível com o nível de ensino em questão. Outro fator presente nessa assimetria é o fato de que o professor detém uma perspectiva do que se supõe que o aluno irá aprender, já que conhece todo o programa, ao passo que o aluno tem apenas a noção do tempo presente. Essa confiança é uma das bases que sustentam a relação didática, sem a qual haverá uma ruptura. Tal assimetria entre professor e aluno, apoiada principalmente nas distintas relações com os saberes, é a razão da existência da relação didática.

Os alunos que percebem as regras do jogo logo se tornam "competentes" e se saem bem diante das atividades a eles propostas, bem como das exigências cognitivas implícitas. Eles logo identificam, por exemplo, o que será exigido na avaliação e o que não será avaliado. O problema é conseguir identificar o que é importante para a disciplina que está sendo ensinada e o que é irrelevante. Quando o aluno compreende isso, ele "entrou no jogo". Alguns alunos não conseguem fazer essa distinção e não se encontram no interior da relação didática. Esses passam a apresentar dificuldades de aprendizagem e podem não aderir ao projeto escolar. Sentir-se-ão deslocados na relação didática. Em alguns casos, em que o professor possui certa sensibilidade e percebe que alguns alunos estão fora do jogo, até se consegue incluí-los, por intermédio de orientações e atividades que possibilitem um cuidado especial.

Por outro lado, também aquele aluno que adquire a percepção dos assuntos exigidos nas avaliações, ou seja, aquele que joga o jogo, também corre riscos. Ao mesmo tempo em que ele se sai bem na relação didática, livra-se bem das avaliações, pode estar engessado em um processo padronizado, fechado a qualquer tipo de inovações. Qualquer pequena mudança nesse jogo pode colocar também esse aluno para fora da relação. Aliado a isso, não há garantias de aprendizagem nesse aluno, pois ele pode muito bem seguir duas lógicas: aquela da sala de aula, ou seja, em dar as respostas que o professor quer; e aquela lógica de fora da escola, na qual se mantêm suas concepções alternativas sobre a leitura que faz da “realidade”. Esse engessamento dificulta essa relação, que não é apenas entre professor e aluno, mas também entre os saberes.

Como mediar esses dois mundos? Ou seja, o mundo das disciplinas científicas e o mundo dos alunos? Como por o aluno em jogo na relação com os saberes científicos? Esse assunto é muito importante no processo de aprendizagem e deveria ser tratado também na formação inicial dos professores, pois confiar na sensibilidade individual de cada profissional não parece ser boa estratégia. Além disso, metodologias padronizadas dificultam situar a relação didática em perspectiva, ou seja, o professor, ao ser o mediador entre o aluno e o saber, põe o aluno em jogo na relação didática e espera que, em situações fora do ambiente escolar ele continue suas relações com os saberes, a fim de enfrentar situações novas e, com a leitura de seu entorno social, buscar soluções mais adequadas. Desse modo, torna-se necessário buscar opções pedagógicas que viabilizem ao aluno entrar no jogo da relação didática, sem engessá-lo em atividades padronizadas, a fim de proporcionar-lhe oportunidades de abrir-se a inovações.

- **As relações e negociações no âmbito do contrato didático**

A prática pedagógica mais comum em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre seu contrato dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos. Apesar de este modelo ser ainda o mais comum, existem diferentes formas de propor o ensino de Matemática. Cada uma delas se apoia em diferentes regras e relações que compõem o contrato didático em jogo. Há casos em que o professor de Matemática resume o ensino em apresentação de definições e proposição de exercícios idênticos aos exemplos dados. Neste tipo de contrato resta aos alunos memorizarem e reproduzirem nos trabalhos e provas, os modelos apresentados pelo professor. De maneira diferente, há professores que se apoiam nas produções pessoais individuais ou coletivas dos alunos, no intuito de fazer progredir o aprendizado de toda a sala, levando os alunos a analisarem, experimentarem e buscarem soluções de problemas e questões. Este é um outro modelo de contrato didático, onde os alunos assumem posições ativa e reflexiva em relação à formação de seus conhecimentos.

De acordo com Silva (2002, p.47), o contrato didático manifesta-se principalmente quando é transgredido por um dos parceiros da relação didática. Em muitos casos, é preciso existirem a ruptura e a negociação para o avanço do aprendizado. Os alunos, em geral, encontram muita dificuldade em se adaptar a uma mudança de contrato. É certo que a renovação e a renegociação, bem como a transmissão deles, dependem não só do tipo de trabalho, como também do meio onde se dá a prática pedagógica.

As características de um contrato didático não são definidas apenas da natureza da área ou especificamente pelo tema objeto de estudo mas, também, em decorrência da concepção de mundo, ideia de ciência e ensino de ciência, de que o professor é portador. Tais concepções se materializam no contexto da sala de aula, influenciando os objetivos do curso e as decisões didáticas tomadas pelo professor.

2.2.6 Engenharia Didática

Apresentaremos aqui características da Engenharia Didática, que é uma importante metodologia de pesquisa e tem como principal finalidade analisar situações didáticas que constituam objeto de estudo da Didática da Matemática.

A pesquisa em Didática da Matemática deve se empenhar em extrair dados da realidade e os comparar as hipóteses. Podemos nos perguntar onde devem ser realizadas as pesquisas didáticas e concluir que vários são os espaços de realização, desde o escritório de trabalho, a sala de aula, a escola ou a sociedade, ou mesmo a história; o laboratório de realização destas pesquisas deve ser um lugar onde possamos juntar os dados e colocar à prova as hipóteses. Nesta perspectiva, a Engenharia Didática nos propõe elementos teóricos que possibilitam a organização, experimentação e testagem de nossos pressupostos e hipóteses de pesquisa.

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia nos acontecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos do que os objetos depurados da ciência.

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996 apud PAIS, 2001, p.104).

Para um melhor entendimento da realização da Engenharia Didática, apresentamos as fases de desenvolvimento de sua aplicação.

- Fases da Metodologia da Engenharia Didática

Uma engenharia didática se faz pela execução de quatro fases consecutivas (MACHADO, 2002):

- 1) análises prévias ou preliminares;
- 2) concepção e análise a *priori*;
- 3) experimentação; e
- 4) análise a *posteriori* e validação

Para melhor organizar a **análise preliminar**, deve-se proceder à descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como:

- análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- análise do ensino usual e seus efeitos;
- análise da concepção dos alunos, dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução;
- análise das condições e entraves nos quais vai se situar a construção didática efetiva;
- consideração dos objetivos específicos da pesquisa; e
- estudo da transposição didática do saber para a situação de ensino em conformidade com o programa escolar.

Tudo isso levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa. As análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia, porém elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. É evidente que cada uma delas ocorrerá ou não, dependendo do objetivo da pesquisa, e é esse objetivo também que determinará o grau de profundidade dessas análises.

Na fase da **concepção e análise a *priori***, o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita um certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, as quais são chamadas de variáveis de comando. Essas variáveis serão articuladas e devidamente analisadas no transcorrer da pesquisa.

A análise a *priori* comporta uma parte de descrição e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação a-didática que se quis criar e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação. Na análise a priori deve-se:

- descrever cada escolha local feita e as características da situação a-didática decorrentes de cada escolha;
- analisar qual o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, decisão, controle e validação de que ele disporá durante a experimentação;
- prever os comportamentos possíveis e mostrar que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso deve-se assegurar que, se tais ocorrem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

A fase da **experimentação** é clássica. É a etapa da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que ocorre o contato pesquisador / professor / observador com a população de alunos-objeto da investigação.

A experimentação supõe:

- a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação dos instrumentos da pesquisa;
- o registro das observações feitas durante as experimentações (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais etc.)

Geralmente, quando a experimentação prevê mais do que uma sessão, é aconselhável fazer um análise *a posteriori* local após uma ou algumas sessões, confrontando com as análises *a priori* feitas, para eventuais correções da rota prevista.

Durante a experimentação deve-se respeitar, na medida do possível, as escolhas e deliberações feitas nas análises a priori, a fim de evitar o malogro da engenharia.

A fase da **análise a *posteriori*** refere-se ao tratamento das informações obtidas quando da aplicação da sequência didática, que é da parte efetivamente experimental da pesquisa. O importante é que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio. A análise a *posteriori* tende a enriquecer, complementar os dados obtidos por meio de outras técnicas, questionários, entrevistas, gravações, diálogos, entre outras.

- A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e de ensino

A Engenharia Didática apresenta-se como relevante metodologia de pesquisa, por interligar o aspecto científico com a prática pedagógica. Optar pelo uso da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa significa levar em consideração suas etapas de realização e a análise detalhada de cada uma delas.

Além da pesquisa, a Engenharia Didática constitui um referencial metodológico importante e viável também para o processo de ensino e de aprendizagem, já que permite a compreensão dos efeitos causados pelas práticas docentes desenvolvidas em sala de aula.

A Engenharia Didática apresenta-se como abordagem formadora da prática educativa do professor, na medida em que permite investigar a sua ação na sala de aula. Esse processo de investigação da própria prática é de fundamental importância para a formação do professor, por lhe possibilitar uma ampliação dos saberes que ensina, já que necessita agir criticamente sobre este, buscando sua verdadeira compreensão.

O professor é peça fundamental na constituição e emprego de novas abordagens metodológicas para o ensino, pois cabe a ele conduzir o ensino e aprendizagem motivando os alunos a desenvolverem um fazer matemático consciente dado o objeto em estudo. Portanto, é perante a necessidade de se redimensionar a forma como o ensino de Matemática é desenvolvido que a Engenharia Didática se apresenta como um referencial metodológico que proporciona a elaboração do saber matemático via processo de reflexão sobre as práticas educativas implementadas.

Concluindo

Através do capítulo buscou-se mostrar o desenvolvimento da Didática da Matemática, deixando evidente que, enquanto ciência, esta ainda é recente, tendo sido impulsionada nos anos 70, em decorrência das reformas educativas e do ensino da Matemática Moderna. Teve sua origem na França, através do Institutos de Investigação em Ensino da Matemática (IREM) e hoje, vem sendo explorada e ampliada através de estudos e pesquisas realizadas em países como Argentina, Itália, Espanha e Brasil.

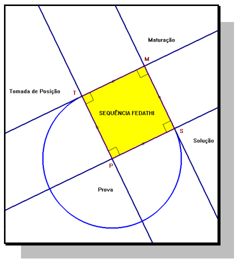
Destacou-se como pesquisadores da área:

- **França:** Guy Brousseau, Michèle Artigue, Yves Chevallard, Nicolas Balacheff, Gérard Vergnaud, Régine Douady e Raymond Duval.
- **Itália:** Bruno D´Amore
- **Espanha:** Luis Rico Romero
- **Brasil:** Hermínio Borges Neto, Luis Carlos Pais, Saddo Ag Almouloud, Terezinha Carraher, Ubiratan D´Ambrósio, entre outros.

Apresentou-se aspectos relevantes de conceitos da Didática da Matemática que nos ajudaram na construção da pesquisa, sendo eles: *situações didáticas, obstáculo epistemológico, transposição didática e informática, contrato didático e engenharia didática.* Ressaltou-se a conceituação e os principais elementos de análise de cada um.

A estruturação dos conceitos apresentados e a compreensão acerca das idéias contidas em cada um deles, possibilitaram-nos um olhar mais abrangente do universo pesquisado, uma visualização mais clara das variáveis envolvidas na problemática e acima de tudo, uma contribuição para a sistematização da Sequência Fedathi, que foi o fio condutor do nosso trabalho.

No capítulo a seguir faremos a apresentação da Sequência Fedathi, iniciando-o com uma síntese histórica acerca de sequências no ensino e suas relações com a Sequência Fedathi.



3 Sequências Didáticas no Ensino da Matemática e o desenvolvimento da Sequência Fedathi

3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: RETROSPECTIVA HISTÓRICA DE DEWEY A FEDATHI

Reproduzir o trabalho do matemático em sala de aula significa abordar uma situação de ensino, levando em consideração as fases de trabalho vivenciadas por esse profissional, no desenvolvimento de suas experimentações e produções técnicas.

Hermínio Borges Neto

3.1 O que é uma sequência didática?

Nos estudos que vimos realizando observamos que os termos ***sequência didática, situação didática*** e ***sequência de ensino*** aparecem com muita freqüência nos trabalhos relacionados à Didática da Matemática, e, algumas vezes são empregados com sentidos tão próximos, que chegam a confundir quanto aos seus significados. Por esta razão, achamos importante diferenciá-los, para ensejar maior compreensão sobre sua significação e seus contextos de aplicação.

A expressão *sequência didática é* empregada desde a década de 1980, nas pesquisas em Didática da Matemática que incluem pesquisa experimental. É amplamente utilizada pelos pesquisadores e estudiosos da Didática da Matemática francesa. Por estar relacionado a uma *Sequência de experimentos,* é bastante aplicado nos trabalhos baseados na *Engenharia Didática*. Artigue (1996 apud PAIS, 2001, p.157) assim a define:

> Sequência Didática é um conjunto de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. (...) tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento durante as sessões ao maior número de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado.

Já a expressão *situação didática* é mais aplicada quando faz referência a situações de ensino. Geralmente aparece no contexto de trabalhos ligados a Teoria das Situações Didáticas, a qual se trata de um modelo teórico desenvolvido por Brousseau, na França, em 1986. Esta teoria representa uma referência para a compreensão da aprendizagem matemática na sala de aula e foi definida no capítulo anterior.

Quanto aos vocábulos **sequência de ensino** não encontramos uma definição formal, pelo fato de ser uma expressão desagregada de modelos teóricos e utilizada em diversas áreas e situações educativas, principalmente quando estas se referem à organização do ensino. Geralmente são empregados em contextos que se referem à forma de organização do ensino de uma determinada área, em etapas sequenciadas, a fim de se obter a aprendizagem de um conteúdo específico.

Buscando clarificar e diferenciar os três conceitos, apresentamos uma síntese de cada um deles no quadro abaixo:

Quadro 2 – Síntese das definições e objetivos acerca de sequência didática, situação didática e sequência de ensino

	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	**SITUAÇÃO DIDÁTICA**	**SEQUÊNCIA DE ENSINO**
Definição	Refere-se à organização de uma sequência de aulas, geralmente planejadas para *pesquisas* relacionadas à Didática, podendo ser também uma produção para o próprio ensino.	Refere-se ao conjunto das relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, dentro de uma situação organizada para um fim específico de ensino.	Refere-se à organização de um determinado saber, em etapas seqüenciais, como forma de produzir um conhecimento específico.
Objetivos	- Desenvolver pesquisas - Organizar e orientar produções voltadas para o ensino	- Caracterizar processos de ensino-aprendizagem - Estabelecer situações reprodutíveis para fins específicos de ensino e de pesquisa	- Orientar o processo de ensino, através de métodos ou propostas metodológicas

Fonte: Elaborado pela autora

Com esta tentativa de estabelecer diferenças entre os conceitos ora explicitados, pudemos perceber que eles se referem basicamente a dois contextos: o *ensino* e a *pesquisa*. Apesar de possuírem uma inter-relação e por estarem associados a contextos educacionais, podem ser trabalhados separadamente ou de forma conjunta, de acordo com os objetivos da proposta em que estiverem inseridos.

Tivemos a preocupação de buscar a compreensão dos termos há pouco mencionados, a fim de propiciar uma melhor compreensão do desenvolvimento deste capítulo, que tem como objetivo principal trazer algumas Sequências ligadas a contextos de pesquisa e de ensino, e mesmo de criação do pensamento, buscando, mediante essas propostas, fundamentar elementos da Sequência Fedathi.

3.2 Sequências de ensino e de pesquisa: de John Dewey a Fedathi

No intuito de contribuir com o desenvolvimento dos processos de ensino e pesquisa, estudiosos e pesquisadores da Educação e do ensino de Matemática desenvolveram recursos teóricos por meio de sequências e modelos preestabelecidos, com a finalidade de *investigar, interpretar, delinear e direcionar ações relacionadas e implicadas nos atos de ensinar e de aprender*.

Buscando reconhecer os principais elementos e pontos em comum de algumas destas sequências e modelos teóricos, realizamos um levantamento com base em autores como Barnnet Rich (1971), Nérici (1973), Polya (1978), Crowley (1994), Borges Neto et alii (2001), Machado (2002), Huete e Bravo (2006) e Brousseau (2008), com apoio nos quais selecionamos e apresentamos algumas propostas teóricas já conhecidas no universo da Didática da Matemática, como a Engenharia Didática, a Teoria das Situações Didáticas, o Modelo van Hiele, o modelo de Resolução de Problemas de Polya, juntamente com outras sequências menos conhecidas. Iniciaremos este apanhado histórico com a sequência apresentada por Dewey em 1910, perpassando por várias outras, até a Sequência Fedathi, proposta por Borges Neto em 1998.

➯ **Dewey - 1910** (HUETE e BRAVO, 2006, p. 159)

John Dewey oferece-nos a primeira análise lógica dos atos do pensamento. O fato de apresentar o *pensamento* como um *processo* vai abrir portas para sucessivos estudos, separando as diferentes potencialidades. Ele descreve cinco níveis para o desenvolvimento do pensamento:

1) o encontro com uma dificuldade;

2) ter consciência de que existe;

3) localização e precisão dela;

4) apresentação de uma possível solução; e

5) desenvolvimento lógico das consequências derivadas.

➯ **Graham Wallas - 1926** (HUETE e BRAVO, 2006, p. 160)

Em 1926, Wallas sugeriu quatro etapas no processo criador do ser humano:

1) preparação - coleta de informações e tentativas preliminares de solução;

2) Incubação - deixar o problema de lado para realizar outras atividades ou dormir;

3) Iluminação - aparece a chave para a solução (aqui é onde se produz o estalo, o *insight*, o eureka); e

4) verificação - comprova-se a solução para estar seguro de que "funciona".

➾ **Joseph Rossman - 1931** (HUETE e BRAVO, 2006, p. 160)

Em 1931, Joseph Rossman considerou algumas fases que caracterizam a invenção. É uma proposição particular da criatividade, organizada sobre o processo do pensamento racional. Aponta sete fases:

1) observa-se uma dificuldade ou sente-se uma necessidade;

2) análise de dita dificuldade ou necessidade;

3) formula-se o problema;

4) busca e coleta da informação necessária;

5) adiantam-se possíveis soluções;

6) realiza-se um exame crítico das soluções propostas com suas vantagens e desvantagens; e

7) expõem-se novas ideias - invenção.

➾ **Duncker - 1945** (HUETE e BRAVO, 2006, p. 161)

Duncker, da mesma forma que Polya, observou fenômenos básicos no processo de resolução de problemas, entre os quais enfatizou:

1) solução funcional ou valor - os elementos do problema devem ser considerados conforme sua utilidade geral ou funcional no problema, e as soluções gerais ou funcionais precedem às soluções específicas.

2) reformulação ou reorganização - a solução do problema inclui estádios sucessivos de reformulação ou reestruturação do problema, e com cada solução parcial se cria outro problema mais específico;

3) sugestão de cima - reformular o objetivo para torná-lo o mais próximo dos dados; e

4) sugestão de baixo - reformular os dados de modo que estejam mais estreitamente relacionados com o objetivo, sendo o restante da exploração similar à proposta de Polya.

↬ **George Polya - 1957** (POLYA, 1978, p.4)

George Polya introduziu quatro passos na resolução de problemas baseados em observações que realizou como professor de Matemática:

1) compreensão do problema - aquele que deve resolver o problema reúne informação acerca do problema e pergunta: "o que quer (ou o que é que se desconhece)? O que há (ou quais são os dados e condições)?".

2) elaboração de um plano - o sujeito tenta utilizar a experiência para encontrar um método de solução, e pergunta: "conheço um problema relacionado? Posso reformular o objetivo de uma nova forma utilizando minha experiência passada (trabalhando para trás) ou posso reordenar os dados de uma nova forma que se relacione com minha experiência passada (trabalhando para a frente)?" (É aqui que surge o *insight*).

3) colocando o plano em ação - o sujeito põe em prática seu plano de solução, comprovando cada passo; e

4) Reflexão - o sujeito tenta comprovar o resultado utilizando outro método ou vendo como tudo se encaixa, e se pergunta: "posso utilizar este resultado ou este método para resolver outros problemas?". Ensaio e erro, analogia, semelhança, redução ao absurdo. Desenvolvimento da estratégia. Aplicação da estratégia selecionada. Revisão do processo. Como chegamos à solução? Por que não a alcançamos? Podemos obter outros resultados pelo mesmo método?

↬ **Dina e Pierre: Modelo van Hiele - 1957** (CROWLEY, p.6)

O modelo considera "fases de aprendizagem" as etapas na gradação e na organização das atividades que um estudante deve realizar, a fim de adquirir as experiências que o levem a um nível superior de raciocínio, com relação a um assunto bem determinado. Ao longo dessas fases, o professor deve fazer com que os seus alunos estabeleçam a rede mental de relações do nível de raciocínio que devem atingir, criando, em primeiro lugar, os nós da rede (os "objetos") e depois as conexões entre eles. Dito de outra maneira é necessário conseguir, em primeiro lugar, que os estudantes adquiram, de maneira, significativa, os conceitos básicos necessários (novos conceitos, propriedades, termos etc.) com os quais deverão trabalhar, de modo que possam depois concentrar sua atividade em aprender a utilizá-los e combiná-los entre si.

As fases da aprendizagem propostas por van Hiele são cinco:

Fase 1 - informação - trata-se de uma fase de contato inicial. O professor deve informar seus alunos sobre o campo de estudo no qual começarão a trabalhar, que tipos de problemas serão colocados, que material será utilizado etc;

Fase 2 - orientação rígida - nessa fase, os estudantes começam a explorar o campo de estudos por meio de investigações baseadas no material proposto;

Fase 3 - explicitação - uma das principais finalidades da terceira fase é a de fazer com que os estudantes troquem as próprias experiências, comentem as regularidades que observaram e expliquem como enfrentaram a atividade;

Fase 4 - orientação livre **-** agora que os alunos devem aplicar os conhecimentos e a linguagem que estão adquirindo em outras investigações, diferentes das anteriores. O campo de estudo é, nesse momento, em grande parte conhecido pelos alunos, mas eles ainda devem aperfeiçoar os próprios conhecimentos sobre ele; e

Fase 5 - integração - ao longo das fases 1, 2, 3 e 4, os estudantes adquiriram novos conhecimentos e habilidades, mas devem ainda atingir uma visão geral dos conteúdos e métodos que têm à disposição, com relação aos novos conhecimentos em outros campos que estudaram.

➯ **Barnett Rich - 1971** (RICH, 1971, p.216)

Barnett Rich, em seu livro *Álgebra Elementar*, segue a mesma tendência dos autores anteriores, propondo para a resolução de problemas quatro etapas básicas, sendo elas:

1) *representação* das incógnitas por letras;

2) *tradução* das inter-relações pertinentes às incógnitas em equações;

3) *solução* das equações para achar o valor das incógnitas; e

4) *verificação ou prova* com os valores encontrados, a fim de saber se estes satisfazem ao problema original.

➯ **Nérici - 1973** (NÉRICI, 1973, p.190)

Para Nérici, os métodos de ensino precisam acompanhar o desenvolvimento de um ciclo docente, que compreende fundamentalmente três fases: planejamento, execução e avaliação.

1) planejamento - a fase do planejamento pode estar ligada ao professor, ao professor e educandos e, em momento mais avançado, aos educandos.

2) execução - esta fase pode apresentar três subfases:

- *apresentação,* em que a matéria a ser estudada é apresentada de forma motivadora a classe e as normas de estudo são esclarecidas;
- *elaboração,* em que se estuda sistematicamente o tema em foco, com exercícios, aplicações etc., em função do próprio tema tratado; e
- *síntese* em que são tiradas conclusões, feitas aplicações ou esquematizados conjuntos, em função, também, do tema tratado.

3) avaliação - esta fase consta de provas de verificação ou de outros quaisquer recursos que fonerçam dados ao professor para propiciar uma avaliação do estudo efetuado pela classe e pelos educandos separadamente, a fim de providenciar, sempre que necessário, retificação ou recuperação da aprendizagem.

➷ **Schoenfeld - 1985** (HUETE e BRAVO, 2006, p.162)

Schoenfeld entende que o processo de resolução de problemas não é linear, como propõe Polya; supõe caminhos em ziguezague, com andanças para trás e para frente. Propõe quatro fases para a resolução de problemas:

1) análise - examinar casos particulares, simplificar o problema;

2) exploração - substituir as condições, introduzir elementos auxiliares, considerar o raciocínio por contradição, examinar problemas modificados;

3) execução - aplicar a estratégia escolhida; e

4) comprovação - utiliza todos os dados pertinentes? Está de acordo com previsões ou estimativas razoáveis? É possível obter a mesma solução por outro método?

➷ **Brousseau: Teoria das Situações Didáticas - 1988** (BROUSSEAU, 2008, p.24)

Brousseau distingue quatro tipos de situações nos processos didáticos que organiza, são as seguintes: 1) situações de ação, 2) situações de formulação, 3) situações de validação e 4) situações de institucionalização.

1) Situação de ação: determinado contexto de aprendizagem é uma situação de ação quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional.
2) Situação de formulação: o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda usar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria.
3) Situação de Validação: aquelas em que o aluno já emprega mecanismos de prova e onde o saber é usado com esta finalidade. Essas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade.
4) Situações de institucionalização: visam a estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. O saber tem assim uma função de referência cultural que extrapola o contexto pessoal e localizado; o professor seleciona questões essenciais para a apropriação de um saber formal a ser incorporado como patrimônio cultural.

➷ **Michele Artigue - 1988** (MACHADO, 1988, p. 201-208)

Conforme apresentamos em capítulo anterior, uma *engenharia didática* se faz pela execução de quatro fases consecutivas:

1ª) análises prévias ou preliminares - deve-se proceder à descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino.
2ª) concepção e análise a priori - comporta uma parte de descrição e outra de previsão, está centrada nas características de uma situação a-didática que se quis criar e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação.
3ª) experimentação - e a fase da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que se dá o contato pesquisador / professor / observador com a população de alunos-objeto da investigação
4ª) análise a posteriori e validação - refere-se ao tratamento das informações obtidas quando da aplicação da sequência didática, que é da parte efetivamente experimental da pesquisa. O importante é que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio.

➩ **Gusmán - 1991** (HUETE e BRAVO, 2006, p.162)

Gusmán sugere que a resolução de problemas passe por quatro fases.

1) Familiarização com o problema. Compreender o problema: de que se trata? Quais são os dados? Os dados têm relação em si?

2) Busca de estratégias. Simplificação, particularização, ensaio e erro, analogia, semelhança, redução ao absurdo.

3) Desenvolvimento da estratégia. Aplicação da estratégia selecionada.

4) Revisão do processo. Como chegamos à solução? Por que não a alcançamos? Podemos obter outros resultados pelo mesmo método? O mesmo resultado por outros métodos?

➩ **Borges Neto: Sequência Fedathi - 1996** (BORGES NETO et all, 2001, p.7)

Borges Neto propõe uma sequência metodológica para o ensino e pesquisa em Matemática, denominada Sequência Fedathi. O modelo pressupõe a realização de quatro fases sequenciais e interdependentes, denominadas:

1) Tomada de posição - apresentação do problema. Nesta etapa é feita abordagem inicial através de contextualização da situação-problema apresentada.

2) Maturação - compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema.

3) Solução - representação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema. Nesta ocorre a discussão das soluções elaboradas pelos alunos, buscando identificar os possíveis erros e qual solução mais indicada para o problema.

4) Prova - formalização do modelo matemático a ser ensinado.

A Sequência Fedathi vem sendo estudada e experimentada por estudantes e pesquisadores, principalmente da área do ensino da Matemática.

Algumas seqüências apresentadas acima estão detalhadas no capítulo 2, no entanto, foram aqui apresentadas de forma objetiva, com intuito de comporem o conjunto das sequências pesquisadas.

3.3 Pontos de convergência das sequências

Buscando os principais pontos de convergência das sequências apresentadas, corroboramos a idéia de Huet e Bravo (2006), quando ressaltam que elementos comuns são encontrados entre a maioria das sequências, sejam elas voltadas para o ensino ou a pesquisa, podendo estes pontos ser resumidos nos cinco itens seguintes:

Quadro 3 - Pontos de Convergência das Sequências e relação com a Sequência Fedathi

1 A COMPREENSÃO DO ENUNCIADO (Tomada de Posição) Versão da linguagem verbal para a linguagem matemática.
2 A COMPREENSÃO DO PROBLEMA (Tomada de Posição) Consciência das relações lógicas conceituais e matemáticas que intervêm.
3 A BUSCA DE VÁRIAS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO (Maturação)
4 A APLICAÇÃO DAS ESTRATÉGIAS (Solução)
5 A REVISÃO E A COMPROVAÇÃO DO PROCESSO SEGUIDO (Prova)

Fonte: Huet e Bravo (2006), complementado pela autora em relação as etapas da Sequência Fedathi

Apesar das sequências apresentadas terem sido constituídas com objetivos distintos, em diferentes lugares, tempos e contextos educacionais, elas possuem vários pontos comuns (Quadro 3). Estas intersecções das sequências são "a espinha dorsal", o sustentáculo de seus arcabouços teóricos, elementos essenciais a serem considerados em suas aplicações.

Os pontos de convergência apresentados estão intensivamente expressos na Sequência Fedathi, vindo reforçar seu potencial teórico e de aplicação junto ao ensino de Matemática. Além de contemplar estes elementos na constituição do pensamento e do raciocínio matemático, a Sequência Fedathi apresenta importantes categorias relacionadas à atuação do professor durante a aula, conforme veremos no próximo tópico.

O levantamento histórico apresentado proporcionou-nos uma visão mais ampla dos esforços já empreendidos por vários estudiosos, na busca de compreender, interpretar e direcionar os processos de ensino e de aprendizagem, mediante elaboração de sequências e etapas que facilitassem e possibilitassem o desvelamento das ações relacionadas ao ensino.

O *status* científico alcançado pelas sequências apresentadas mostrou-nos que, independentemente do contexto histórico e social onde foram concebidas, encontram-se fortemente alicerçadas em argumentos sólidos e atuais, cumprindo o seu papel de grandes contribuições para o melhoramento e aperfeiçoamento dos sistemas de ensino em vigor.

3.4 Sequência Fedathi: apresentação e caracterização

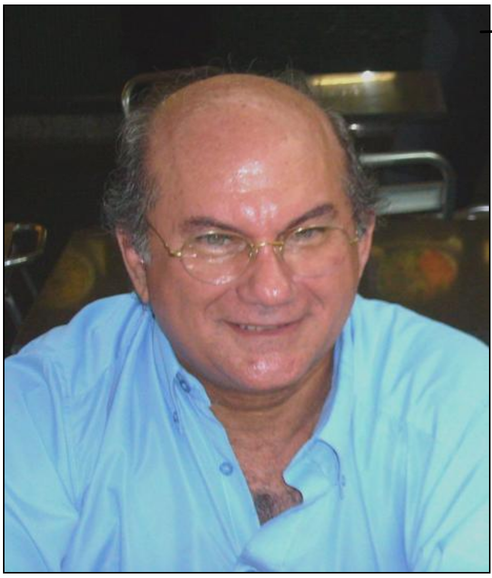


Figura 9: Prof. Hermínio Borges Neto

Precursor dos Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática no Ceará

Hermínio Borges Neto nasceu em Fortaleza-Ceará, em 08 de abril de 1948. Filho de oficial aviador da Força Aérea Brasileira e de uma professora, ficou órfão de pai com menos de dois anos de idade, em consequência de um desastre aéreo. Cursou os estudos da Educação Básica no Colégio Militar de Fortaleza, concluindo-os em 1966, quando foi selecionado para seguir carreira militar e optou graduar-se em Matemática, concluindo o bacharelado em 1970 pela Universidade Federal do Ceará-UFC. Lecionou Matemática e Física no Colégio Estadual Arminda de Araújo, em Fortaleza. Em 1971 foi aprovado em concurso público para professor do Departamento de Matemática da UFC, permanecendo até 1996. Junto ao Departamento, iniciou sua carreira de pesquisador do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico – CNPq. Em 1972 casou-se com Suzana Capelo, psicóloga e professora universitária, com quem teve três filhos: **FE**lipe, **DA**niel e **THI**ago, os quais inspiraram a denominação para o ensino de Matemática, chamada “Sequência FEDATHI”. Concluiu mestrado na UFC em 1973 e Doutorado em Matemática pelo IMPA em 1979. Em 1996, realizou Pós-Doutorado na Universite de Paris VII - Université Denis Diderot, U.P. VII, França, na área de Ensino de Matemática, formalizando a partir daí a “Sequência Fedathi”. Desde 1997, é professor adjunto concursado da Faculdade de Educação - UFC, através da qual fundou e coordena o Laboratório de Pesquisa Multimeios e o Grupo de Pesquisa Fedathi. Recebeu 2 prêmios em 2004 por Projetos ligados ao Ensino de Matemática e Inclusão Digital. Seus trabalhos centralizam-se nas áreas de Ensino de Matemática e Tecnologias Digitais na Educação. O Prof. Hermínio Borges oficializou, no Ceará, os estudos e pesquisas na área de Educação Matemática por meio do Programa de Pós-Graduação da FACED-UFC, formando profissionais, realizando pesquisas, propondo parcerias com outras instituições educacionais, orientando trabalhos e projetos na área de educação matemática, trajetória que, sem dúvida, lhe confere o *status* de Precursor da Didática da Matemática no Ceará.

Fonte: A biografia foi por nós estruturada, com dados obtidos do Curriculum Lattes, informações obtidas de amigos e familiares do Prof. Hermínio, por ele confirmadas e complementadas.

Segundo Borges Neto, nas etapas de aplicação da Sequência Fedathi, ao deparar um problema novo, o aluno deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos para constituir à solução, testa os resultados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo.

Tomando como referência as etapas do trabalho científico do matemático, a Sequência Fedathi foi composta por quatro etapas sequenciais e interdependentes, assim denominadas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova. Para Borges Neto e Dias (1999), o aluno reproduz ativamente os estádios que a humanidade percorreu para compreender os ensinamentos matemáticos, sem que, para isso, necessite dos mesmos milênios que a história consumiu para chegar ao momento atual.

Entendemos que a importância da reprodução desse ambiente na sala de aula ocorra pelo fato de possibilitar ao aluno a elaboração significativa de conceitos, mediante a solução de problemas, cujas produções serão o objeto sobre o qual o professor vai conduzir a mediação, a fim de levá-lo a constituir o conhecimento em jogo; nesse processo, o docente deve levar em conta as experiências vivenciadas pelos alunos e seus conhecimentos anteriores acerca das atividades desenvolvidas. Apresentamos na Figura 7, uma síntese da relação professor-saber-aluno na formulação de um conhecimento em Fedathi.

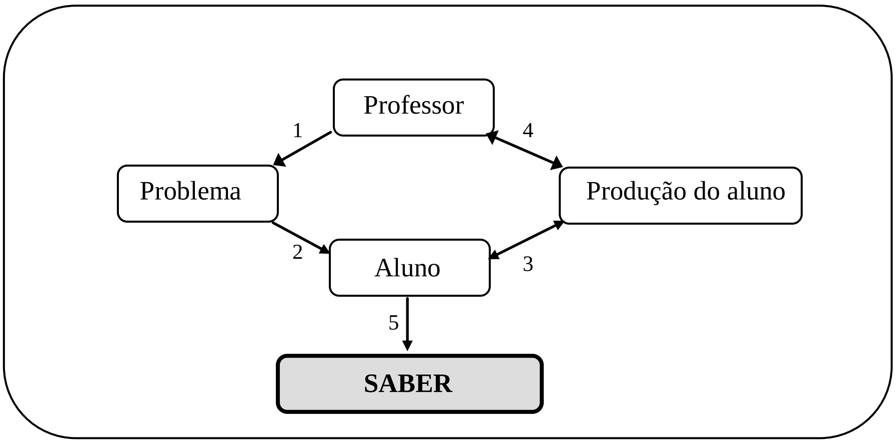


Figura 10: Relação professor-aluno-saber na Sequência Fedathi
Fonte: Borges Neto et all (2001)

De acordo com o esquema proposto na Figura 10, o ensino é iniciado pelo professor que deverá selecionar um problema relacionado ao conhecimento que pretende ensinar, podendo também ser começado por uma situação proposta pelo aluno (1); a seguir o professor deverá apresentar o problema aos alunos por intermédio de uma linguagem adequada (2); com o problema apresentado, os alunos irão explorá-lo na busca de uma solução (3); a solução encontrada deverá ser analisada pelo professor junto ao grupo (4). Os passos 3 e 4 correspondem ao debate acerca da solução, visando à formulação do saber pelo aluno (5). Esse momento corresponde à mediação entre o professor-saber-aluno.

Apresentamos a seguir a Sequência Fedathi, de maneira detalhada, onde ressaltamos categorias da Sequência, enunciadas pela primeira vez, neste trabalho.

1 Tomada de posição: apresentação do problema

Nessa etapa, o professor exibe o problema para o aluno, partindo de uma situação generalizável, ou seja, de uma circunstância possível de ser abstraída de seu contexto particular, para um modelo matemático genérico.

A situação-problema deve ter relação com o conhecimento a ser ensinado e que deverá ser apreendido pelo aluno ao final do processo; é importante que o problema tenha como um dos meios de resolução a aplicação do saber em jogo. A abordagem do problema poderá ser feita de variadas formas, seja mediada por uma situação-problema escrita ou verbal, de um jogo, de uma pergunta, da manipulação de material concreto; de experimentações em algum *software*, podendo os alunos trabalharem sobre o problema de maneira individual e/ ou em grupo.

Antes de apresentar o problema, o docente há de realizar um **diagnóstico** acerca dos prerrequisitos que os alunos necessitam ter referente ao saber que pretende ensinar. O professor será um investigador de sua sala de aula, buscando reconhecer os pontos fortes e fracos de seus alunos. Neste sentido, destacamos que o diagnóstico pode ser realizado por meio de dois momentos, *o primeiro em que o professor define quais conhecimentos prévios os alunos deveriam ter para a apreensão do novo conhecimento, e o segundo, a realização da investigação junto aos alunos a fim de averiguar se os estudantes são detentores destes conceitos. Os resultados obtidos através do diagnóstico são determinantes para a organização e processamento das realizações didáticas do professor.*

Após o diagnóstico, o professor iniciará seu trabalho docente tendo consciência do nível de seus alunos e deverá planejar-se de acordo com esta realidade. Para começar sua proposta de ensino junto ao grupo, deverá fazer uma contextualização inicial acerca do problema a ser trabalhado, a fim de situar os alunos sobre o universo matemático que será explorado. Para isto, será necessário apresentar informações matemáticas iniciais, acerca do(s) conceito (s) relacionados ao problema e a partir daí, envolver a classe com o trabalho matemático que irão executar.

Na tomada de posição, o professor deverá estabelecer regras para nortear o trabalho dos alunos. Essas regras devem ir desde as realizações esperadas ante o problema proposto, como as interações desejadas entre alunos e professor, propiciando o desenvolvimento do trabalho interativo, integrando-se ao grupo, a fim de estabelecer uma ***interação multilateral*** (BORDANAVE, 1983), ou seja, aquela em que o professor, apesar de ser o detentor do conhecimento a ser apreendido pelos alunos, insere-se no grupo com as funções de refletir, ouvir, indagar e levantar hipóteses acerca deste conhecimento, bem como suscitar estes questionamentos entre os alunos.

A **interação multilateral** é um sério desafio a professores e alunos acostumados ao ensino tradicional, pois, se por um lado os alunos participam e problematizam o saber em jogo, o hábito de receber de professor saberes previamente elaborados pode levá-los a conceber os questionamentos, discussões e debates como uma perda de tempo. Inicialmente, o professor também ficará se indagando em relação a algumas questões como: - *De que modo às discussões ajudarão na estruturação e feitura dos conceitos?* - *Como resolver o problema da eventual indisciplina que venha surgir neste ambiente de liberdade?* - *O trabalho em grupo não tomará tempo excessivo para estudar um tema que mediante uma boa exposição oral seria coberto na metade do tempo?* Estas e outras indagações vão sendo respondidas à proporção que o professor se apropria da teoria que implementará e de sua aplicação como uma nova metodologia de trabalho. O planejamento será uma condição *sine qua non* para que se consiga produzir os resultados esperados nas próximas etapas da Sequência.

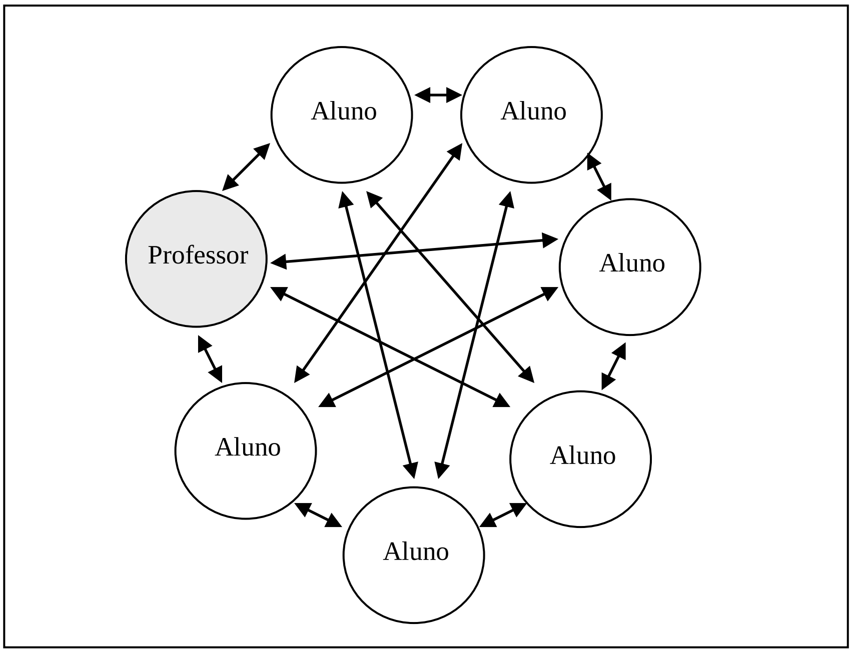


Figura 11: *Interação Multilateral* entre professor e alunos
Fonte: Bordanave (1983)

A Figura 11 mostra como se relacionam professor e alunos na interação multilateral, neste momento o debate deixa de ser centrado no professor e a participação de todos passa a ter o mesmo *status* e importância durante a discussão.

Para ampliar a compreensão dos alunos, é importante que o professor adote uma linguagem acessível, sem deixar de lado as especificidades da comunicação matemática. Para alcançar seus objetivos de ensino, é tarefa docente preparar o ambiente, conquistar, orientar e preparar os alunos. Deste modo, reforçamos mais uma vez a importância do planejamento como um grande aliado para conduzir a gestão das aulas, que necessitarão ter flexibilidade para possíveis adaptações, a fim de garantir a participação da classe como um todo, de vez que o professor deve tentar elevar os alunos para o mesmo nível de conhecimento.

2 Maturação: compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema

Esta etapa é destinada à discussão entre o professor e os alunos a respeito da situação-problema apresentada; os alunos devem buscar compreender o problema e tentar identificar os possíveis caminhos que possam levá-lo a uma solução. Feitas suas interpretações, deverão identificar quais os dados contidos no problema, qual a relação entre eles e o que está sendo solicitado pela atividade.

Na segunda etapa, destacamos que um dos momentos de grande relevância na formulação do raciocínio matemático são os ***questionamentos,*** pois, além de promoverem o desenvolvimento intelectual dos alunos, proporcionam ao professor o *feedback* necessário para certificar se estes estão acompanhando-o no desenvolvimento dos conteúdos ensinados. Os questionamentos podem surgir dos alunos ou ser propostos pelo professor, de formas variadas. *Em sua maioria, surgem por parte dos alunos no momento em que se debruçam sobre os dados do problema, originando-se a partir daí as reflexões, hipóteses e formulações, na busca de caminhos que conduzam à solução do problema. Os questionamentos também podem partir do professor através de perguntas estimuladoras, esclarecedoras e orientadoras.*

Os questionamentos afloram de maneira natural entre os alunos, sejam nas atividades individuais ou em grupo. Na busca de certificarem-se em relação às hipóteses levantadas, os alunos buscam o professor para validar o caminho que estão começando a percorrer. Este, por sua vez, deve aproveitar o momento dos questionamentos para potencializar e conduzir o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, apropriando-se deste momento para também fazer perguntas com diferentes objetivos, conforme estruturamos e apresentamos na Figura 12, a qual sintetiza alguns tipos de questionamentos que podem surgir durante a maturação do problema; logo a seguir os questionamentos serão exemplificados, com frases comuns às aulas de matemática.

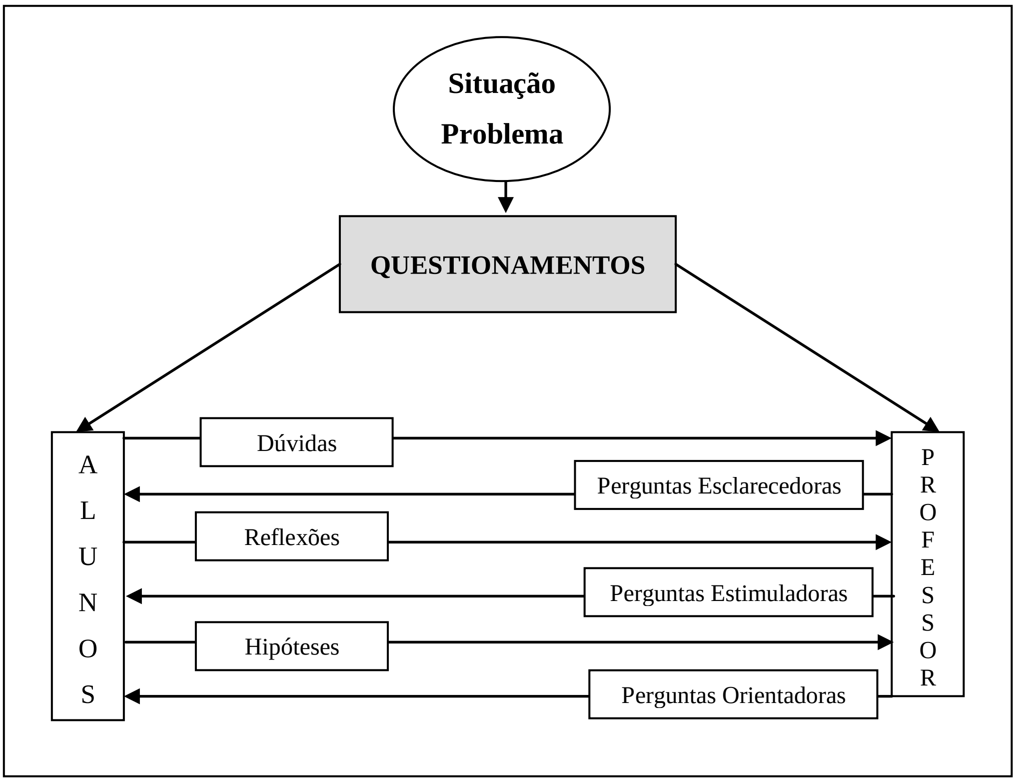


Figura 12: Tipos de questionamentos em relação à situação-problema
Fonte: Elaborado pela autora

- Questionamentos dos alunos

➪ ***Dúvidas***: manifestam-se por parte dos alunos, geralmente no início da resolução, acerca da definição sobre a forma de representação da resposta, ou dos conceitos aplicáveis à resolução do problema, ou mesmo a solicitação de que o professor aponte o caminho inicial da resolução ou resolva um problema similar. Exemplos:

- *Professor, eu posso resolver fazendo um desenho ou preciso usar fórmula?*
- *Professor, o problema pode ser resolvido usando a propriedade do ponto médio ou o senhor quer que faça de outro jeito?*
- *Professor, o senhor nunca passou um problema igual a este. Dá para resolver uma questão parecida?*
- *Professor, qual é a operação que eu uso para resolver este problema?*

Indagações deste tipo são muito comuns quando os alunos começam a buscar os caminhos que solucionem o problema. Para respondê-las, é preciso que o docente adote respostas por meio da postura, denominada por Borges Neto et alii (2001), de *mão-no-bolso,* ou seja, aquela em que o professor induz o aluno a pensar sobre a resposta, sem apresentar-lhe uma resposta direta sobre o questionamento. Seguem alguns:

- *Releia o problema com atenção e veja o que ele está solicitando.*
- *O seu desenho ajuda a chegar à resposta?*
- *Veja em seu caderno se já resolvemos alguma questão parecida.*
- *Por que utilizou este conceito na resolução?*
- *É isto mesmo que o problema está procurando?*

➪ ***Reflexões*****:** as reflexões, na maioria das vezes, surgem quando os alunos já conseguiram elaborar algum tipo de solução e passam a indagar-se se esta está correta, se atende às condições propostas pelo problema, se existem outras formas de resolver a questão. Exemplos.

- *Professor, me diga se esta resposta está certa?*
- *Professor, resolvi do meu jeito. Era assim* mesmo*?*
- *Professor, existe outra forma de resolver o problema ?*

➪ ***Hipóteses***: as hipóteses aparecem quando os alunos buscam os caminhos para constatar ou testar se suas respostas estão realmente corretas. Estas tentativas geralmente são feitas por intermédio da própria linguagem matemática ou de uma explicação, seja ela oral ou escrita em linguagem comum. Exemplos.

- *Professor, como faço para verificar se minha resposta está certa?*
- *Professor, medi os lados e eram todos iguais e os ângulos mediram 90º.. Então, está correto, não é?*
- *Professor, substitui o número e deu certo. Minha resposta está certa?*

- Questionamentos dos professores.

➪ ***Perguntas esclarecedoras*****:** são as que têm por objetivo verificar o que e como os alunos estão entendendo sobre o que está sendo apresentado, levando os alunos a reformular o que estão aprendendo e a relacionar o assunto atual com outro já tratado; sua principal função é proporcionar *feed-back* ao professor. Exemplos:

- *O que o problema está pedindo? Qual sua pergunta principal?*
- *Será que todo quadrilátero é quadrado?*
- *Quem se lembra das propriedades de soma das potências, estudadas na semana passada?*
- *Vocês ainda se recordam de alguma propriedade das construções geométricas?*

➪ ***Perguntas estimuladoras*:** têm como objetivo levar o aluno a fazer descobertas. Devem estimular o pensamento criativo, podendo suscitar uma cadeia de outros questionamentos, com suporte a partir de uma primeira pergunta, a fim de se conduzir a uma determinada conclusão. Exemplos.

- *Será que todo quadrado é um losango?*
- *Quais as propriedades do quadrado? E do losango?*
- *Como podemos representar geometricamente o Teorema de Pitágoras?*
- *Por que o sinal apareceu negativo do outro lado da igualdade?*

➪ ***Perguntas orientadoras*:** são aquelas em que o professor leva o aluno a tentar estabelecer compreensões e relações entre o problema e o caminho a seguir para chegar à solução. Exemplos.

- *Será que o problema pode ser resolvido por meio da Aritmética?*
- *Será que fazer uma tabela com os dados do problema pode ajudar na solução?*
- *Aí vocês me perguntam: professor, e se eu fizesse assim... daria certo?* (este é um estilo típico de pergunta de alguns professores, quando os alunos têm dificuldade de manifestar seus questionamentos).

Conforme visualizamos há pouco, os questionamentos serão fundamentais para os alunos organizarem o pensamento e levantarem suas hipóteses, análises e reflexões acerca da solução. As perguntas e questionamentos do professor terão também papel essencial na orientação do raciocínio dos estudantes.

Durante a *maturação* do problema, *o professor deve estar atento aos alunos, observando e acompanhando seus comportamentos, interesses, medos, atitudes, raciocínios, opiniões e estratégias aplicadas na análise e busca da solução da atividade, bem como suas interpretações e modos de pensar, a fim de perceber quando e como mediar o trabalho que os alunos estão desenvolvendo.*

O trabalho do aluno na fase da maturação é imprescindível para o desenvolvimento de seu raciocínio e da aprendizagem final. Sem esta participação, eles absorverão apenas informações temporárias e passageiras, tendo, conseqüentemente, uma aprendizagem superficial e volátil. Alguns professores consideram as discussões como perda de tempo e atraso no cumprimento de seus planos de aula. No entanto, de nada adianta, correr com a apresentação dos conteúdos, quando a aprendizagem da maioria dos alunos não foi desenvolvida. A maturação do problema requer um tempo significativo da aula para o trabalho dos alunos em relação ao problema. Apesar de os alunos possuírem ritmos diferentes no desenvolvimento de suas atividades, o professor deverá tentar ajustar a duração deste tempo de acordo com o tipo de problema estudado, ao rendimento dos alunos em relação à exploração do problema e ao que pretende realizar no tempo total da aula.

3 Solução: representação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema

Nessa etapa, os alunos deverão organizar e apresentar modelos que possam conduzi-los a encontrar o que está sendo solicitado pelo problema; esses modelos podem ser escritos em linguagem escrita / matemática, ou simplesmente por intermédio de desenhos, gráficos, esquemas e até mesmo de verbalizações.

É importante que, durante a realização dessa etapa, aconteçam as trocas de ideias, opiniões e discussões dos pontos de vista e modelos propostos entre os alunos. O professor deverá estimular e solicitar que estudantes expliquem seus modelos e justifiquem a escolha de determinados caminhos, indagando-os sobre a completude dos modelos criados, ou seja, se eles abrangem todas as variáveis do problema e se são suficientes para encaminhá-los à resposta procurada. Nesse momento, faz-se necessário dar tempo aos alunos para que pensem e reflitam acerca dessas realizações, avaliem suas respostas, por meio de ensaios, erros e tentativas, para, junto ao professor, validar os modelos criados. Esse é um importante momento para que os alunos exercitem a autonomia e percebam a importância da participação de cada um na elaboração de sua aprendizagem.

Na feitura da solução, é imprescindível que o professor analise junto aos alunos as diferentes formas de representação por eles apresentadas, para, com apoio nelas, buscar a constituição do novo conceito matemático implicado.

Na montagem do modelo por parte dos alunos, o professor tem papel fundamental como mediador, pois deverá discutir junto com o grupo as resoluções encontradas, a fim de juntos concluírem qual delas é mais adequada para representar e responder o problema proposto. É essencial que, nessas discussões, fique claro para o grupo quais são as lacunas e falhas dos modelos que não satisfizeram a solução. O *status* de atuação do professor durante a discussão da solução ocorre, então, mediante **interações bilaterais**, ou seja, o professor, em razão de ser em princípio, o detentor do conhecimento, fica à frente da organização, discussão e análise das soluções, para conduzir a elaboração e apresentação da solução final, e, consequentemente, do saber em jogo.

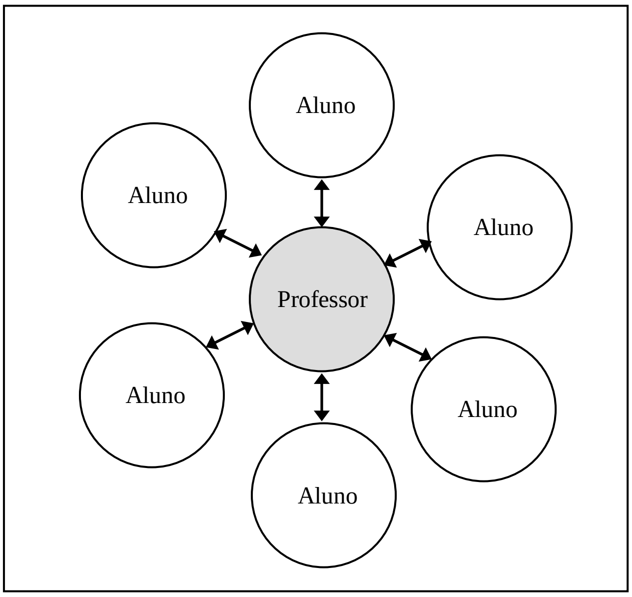


Figura 13: *Interação Bilateral* entre professor e alunos durante a discussão e análise das soluções (BORDANAVE, 1983)

É importante que o professor motive os alunos a buscarem algumas formas de verificação dos resultados. A refutação dos modelos inadequados poderá ser realizada mediante verificações e contraexemplos. O professor deverá mostrar para os alunos que a solução ideal deve satisfazer não só o problema em questão ou somente determinadas situações, mas sim o número maior possível de situações que necessitem desse conhecimento com vistas a sua resolução. Assim, é interessante que se apresentem situações-problema diferentes da inicial para mostrar a limitação de modelos específicos na resolução.

É normal que, nesse estádio, apenas alguns alunos, os mais afeitos à Matemática, cheguem a respostas corretas, mediante soluções variadas, utilizando muitas vezes modelos matemáticos incompletos em relação ao que se pretende ensinar, isto porque, se o objetivo da sequência é formular um conhecimento novo para o aluno, dificilmente este já fará uso deste saber, pois, na maioria das situações, este saber, em sua forma científica ainda é desconhecido pelo grupo, e será nesse momento que o professor começará a delineá-lo para apresentação na etapa da prova.

Destacamos nesta fase a importância da discussão das soluções, para o aluno perceber as diferentes compreensões e representações do grupo em relação aos problemas matemáticos. O trabalho do professor, na identificação, interpretação e discussão das soluções e erros apresentados pelos alunos, é um momento determinante no estabelecimento da aprendizagem matemática, por possibilitar aos alunos a visualização e reflexão das várias soluções apresentadas pelo grupo e a validação de cada uma delas. *A análise das soluções e seus possíveis erros***,** *permitem o aluno conhecer as diferentes formas de interpretação das questões trabalhadas, tornando-os conscientes da resolução correta, além de ajudar a não reincidirem em raciocínios equivocados na resolução de questões semelhantes, é também um momento decisivo para compreenderem e desenvolverem raciocínios matematicamente corretos.*

Podemos dizer que grande parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos, decorre do fato das representações e lógicas constituídas em suas soluções, não serem valorizadas e nem exploradas junto ao grupo e ao professor .

No que concerne em relação a atuação do professor na etapa de solução, frisamos que a ***competência didático-matemática*** docente é fundamental para a interpretação e discussão das representações dos alunos, para levá-los à constituição do novo saber. Esta competência resulta da formação do professor desde os conhecimentos inicialmente adquiridos na educação básica, até os saberes consolidados na educação superior pela formação inicial e continuada, experimentação e aperfeiçoamento destes saberes por intermédio do exercício da docência e da pesquisa. A competência didático-matemática é, neste contexto, *definida como o conjunto dos conhecimentos matemáticos e didáticos incorporados pelo professor e sua habilidade em acioná-los de forma conjunta durante as etapas do ensino, de modo a atingir os objetivos previamente definidos, em relação aos saberes matemáticos a serem construídos pelos alunos.*

É imprescindível que o professor seja detentor de uma base sólida acerca dos conceitos matemáticos que vai ensinar, como também de outros conceitos matemáticos a ele interligados. Paralelamente ao domínio matemático, o professor precisa dominar e aplicar em suas aulas elementos da Didática Geral e da Didática da Matemática, desde o planejamento, desenvolvimento e avaliação de todo o processo de ensino. Estes domínios são determinantes para a atenção, a compreensão e a participação dos alunos na estruturação das soluções, bem como, na motivação para participarem de forma ativa durante a aula .

4. Prova: apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado

Após as discussões realizadas a respeito das soluções dos alunos, o professor deverá apresentar o novo conhecimento como meio prático e otimizado para conduzir a resposta do problema. Nessa fase, a didática do professor será determinante para aquisição do conhecimento por parte dos alunos, pois, além de ter que manter a atenção e motivação do grupo, o professor precisará fazer uma conexão entre os modelos apresentados e o modelo matemático científico a ser apreendido; deverá introduzir o novo saber mediante sua notação simbólica em linguagem matemática, juntamente com as novas regras inerentes a esse conhecimento. É nessa etapa final que o novo saber deverá ser compreendido e assimilado pelo aluno, levando-o a perceber que, com base neste, será possível deduzir outros modelos simples e específicos. É importante que o aluno perceba a importância de se trabalhar com modelos gerais, pois estes irão instrumentar-lhe para a resolução de outros problemas e situações, contribuindo também para o desenvolvimento de seu raciocínio lógico-dedutivo, tipo de pensamento desejado e necessário para resolver, de maneira eficiente e lógica, problemas matemáticos do dia a dia, além de ser o tipo de raciocínio relevante para o desenvolvimento científico.

Na Sequência Fedathi, a *prova* constitui a finalização do processo, levando o aluno a elaborar o ***modelo geral*** do conhecimento em jogo. Podemos dizer que *o modelo geral refere-se ao conceito final, representação genérica ou fórmula a ser apreendido pelo aluno, a qual será um objeto de conhecimento tanto para a resolução do problema em questão, como para sua aplicação na resolução de outras situações-problema.*

Estruturamos a Figura 14, mostrando o desenvolvimento da Sequência Fedathi, desde a *Tomada de Posição*, até a última etapa, à *Prova*.

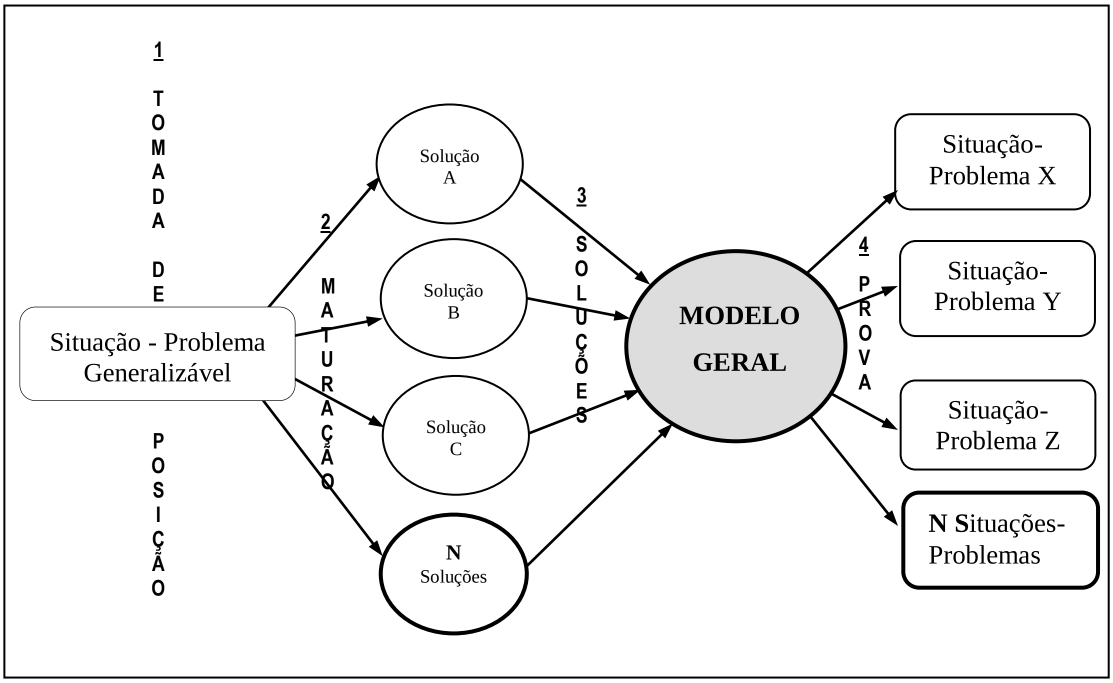


Figura 14: Desenvolvimento da Sequência Fedathi
Fonte: Elaborado pela autora

Até chegar à etapa final da Sequência Fedathi - *Prova,* o estudante já deve ter vivenciado as três fases anteriores, para que possa ter a clara compreensão acerca do desenvolvimento da prova. Na Figura 11, podemos ter uma visão mais ampla da situação como um todo, observando que foi percorrido o seguinte caminho: (1) o professor apresenta a situação-problema generalizável; (2) os alunos se debruçam sobre a questão na busca de uma solução; (3) Professor e alunos discutem as n-soluções apresentadas, quando o professor identifica os erros e acertos para o encaminhamento da solução final; (4) Após as soluções discutidas, o professor exibirá a solução correta, enfatizando o conhecimento que planejou ensinar. Nesta fase, os alunos passam a conhecer o modelo geral (formal), aplicável à resolução desta e de outras situações-problema. O professor apresentará o novo conhecimento, suas propriedades e formas de verificação, ressaltando para os alunos a importância da aquisição dos modelos gerais da Matemática por instrumentalizá-los para a resolução de **n** situações-problema e por potencializar-lhes o desenvolvimento do raciocínio matemático.

A avaliação da aprendizagem do aluno deve ser realizada nesta última etapa, podendo ser realizada por vários meios (exercícios orais, escritos, no computador, jogos etc), desde que estes permitam o professor verificar se realmente houve a apreensão do modelo geral pelos alunos.

3.5 A Sequência Fedathi e o ensino tradicional

A Sequência Fedathi é uma teoria nova, tendo sido apresentada formalmente em 1996, no trabalho de Pós-Doutorado do Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, da UFC, na Universidade de Paris VI. Desde sua apresentação formal a referida Sequência vem sendo experimentada e aperfeiçoada com base nos estudos de Borges Neto, juntamente com o Grupo Fedathi - FACED/UFC.

Borges Neto ressalta que uma das características importantes na aplicação da Sequência Fedathi é a realização, de forma sequencial, de todas as suas etapas, destacando que só assim se pode produzir os resultados esperados na aprendizagem. O autor é crítico em relação ao modelo do ensino tradicional, por centralizar-se apenas em duas das etapas da Sequência, *a tomada de posição e a prova,* conforme mostramos na Figura 15.

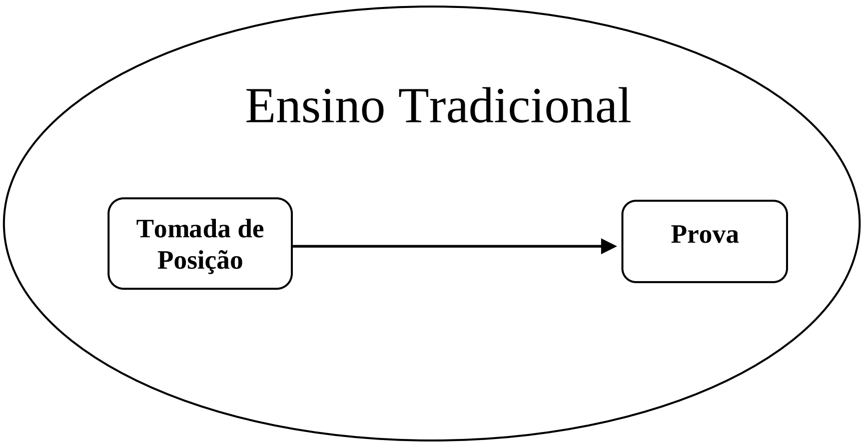


Figura 15: Etapas de desenvolvimento do Ensino Tradicional
Fonte: Elaborado pela autora

No modelo de ensino tradicional, observa-se grande lacuna em relação à participação dos alunos na elaboração do conhecimento, diminuindo consideravelmente a chance destes desenvolverem suas capacidades de compreensão, interpretação, dedução e o próprio raciocínio matemático. Em consequência deste estilo de ensino, grande parte do trabalho nas aulas é realizado apenas pelo professor, prevalecendo o modelo de **comunicação unilateral** (Figura 16), ou seja, do professor para os alunos.

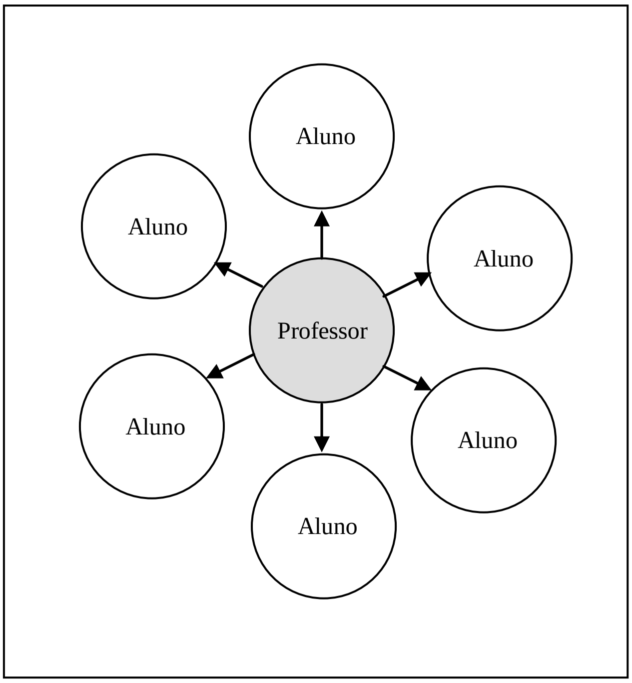


Figura 16: Ensino Tradicional – *Interação Unilateral* do professor com os alunos
Fonte: Bordanave (1983)

O ensino tradicional, além de sobrecarregar o professor antes, durante e depois das aulas, subtrai do aluno a possibilidade de participar e contribuir com o desenvolvimento de sua aprendizagem e dos outros alunos, pois, ao ficar na condição de “mero espectador”, deixará de expor suas dúvidas, reflexões e hipóteses, as quais poderiam ser de grande valia para todo grupo, no decorrer do assunto estudado.

A Sequência Fedathi busca diferenciar-se positivamente em relação ao ensino tradicional, valorizando igualmente as ações do professor e do aluno durante o ensino. Além desta valorização, ela quebra o mito, que ainda persiste na cabeça de muitos alunos, de que seus professores de matemática são verdadeiros gênios, com capacidades extremas e com um nível de conhecimento que eles jamais alcançarão, justificando, com essa idéia, que não aprendem Matemática por ela ser uma disciplina para poucos, por possuir capacidade intelectual inferior, pela falta de base de conhecimentos anteriores, gerando em si sentimentos de baixa autoestima em relação à disciplina e a capacidade de aprender, deixando marcas negativas em sua aprendizagem, muitas das quais perdurarão por sua vida inteira.

Paralelamente a esta visão de muitos alunos, alguns professores, com formações deficitárias, deixam muito a desejar em sua atuação docente, e pouco ou nada fazem para melhorá-la. Aproveitam-se deste modo de ver dos alunos para esconder seus medos, falhas formativas, dificuldades e acomodação, por trás de métodos de ensino tradicionais que pouco contribuem para o desenvolvimento do aluno, atribuindo os baixos resultados somente aos estudantes, os quais de forma passiva baixam a cabeça, dizendo apenas que precisam estudar mais, mesmo quando reconhecem que o professor pouco fez para que conseguissem aprender, reforçando o mito já relatado, com frases como:

- *Meu professor é um monstro, mas infelizmente não consigo aprender.*
- *Meu professor é um crânio, mas a turma é muito fraca.*
- *O professor é fera, mas nosso nível é muito baixo e a gente não consegue alcançá-lo.*
- *O professor explica bem, mas o problema é nosso, que não conseguimos entender, porque ele tem um nível muito elevado.*

Muitas vezes, professores e instituições formadoras deparam com obstáculos quando param para questionar e repensar os métodos de ensino da Matemática, principalmente por desconhecerem ou terem dificuldades para mudarem suas práticas de ensino. Deste modo, tendem a atribuir o baixo rendimento dos alunos a fatores como falta de material didático, baixa condição econômica, indisciplina, falta de participação da família, baixos salários, etc. Sabemos que tais fatores têm sua parcela de influência, mas não são apenas eles que efetivamente determinam a aprendizagem dos alunos, a competência do professor em relação aos conteúdos, métodos de ensino e contextos sociais em que estão inseridos, têm bem mais influência e determinação nos resultados finais.

A Sequência Fedathi contrapõe-se ao ensino tradicional, ensejando aos professores a apropriação de um modelo de ensino em que docente e discente se achem motivados e engajados nas situações de aprendizagem, e, ao final, ambos possam dizer que valeu a pena todo o esforço e a dedicação por sentirem em suas vidas o resultado das aprendizagens.

Borges Neto considera as segunda e terceira etapas da Sequência Fedathi, respectivamente, a *maturação* e a *solução* (Figura 17), como as mais importantes para a superação do modelo tradicional.

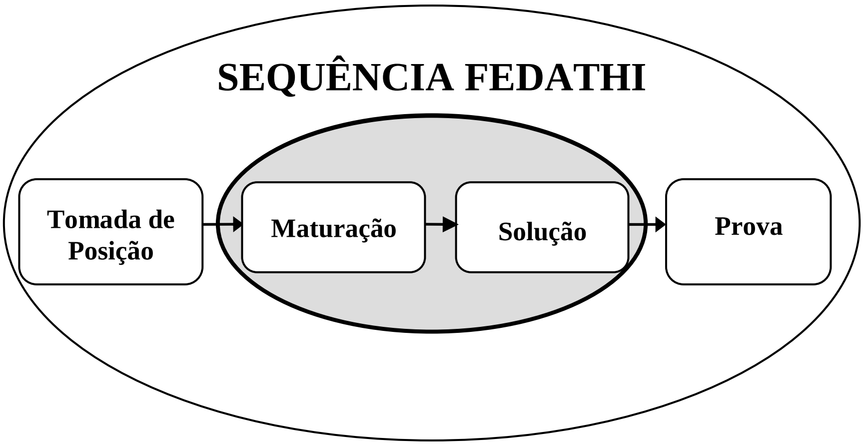


Figura 17 – Etapas da Sequência Fedathi
Fonte: Elaborada pela autora

Sabemos que é fora de propósito querer que os alunos passem a dominar o conhecimento matemático sem oferecer-lhes as condições necessárias. As ações e interações desenvolvidas entre professor e alunos, nas etapas da maturação e da solução em torno do saber a ser constituído são o grande diferencial em relação ao que ocorre na maioria das aulas de Matemática, que, além de não conseguirem fazer os alunos aprender, em pouco concorrem para o desenvolvimento intelectual e social do aluno, e, consequentemente, da própria Matemática.

3.6 Objetivos, aspectos fundamentais e aplicações da Sequência Fedathi

- Objetivos

- Apresentar um modelo de ensino, que inclua a investigação científica como uma das etapas na elaboração do conhecimento.
- Oferecer elementos que contribuam para as ações e intervenções do professor no processo de ensino da Matemática.
- Levar o professor a conduzir de maneira didática e eficaz a sua prática.
- Propiciar a participação ativa do aluno durante todo o processo de ensino.
- Contribuir para o desenvolvimento da autonomia do estudante durante a aprendizagem.
- Possibilitar aos alunos ampliarem sua rede de conhecimento pelas interações com o grupo e o professor.
- Contribuir com o desenvolvimento e aperfeiçoamento de métodos e técnicas de ensino e da pesquisa da Matemática e áreas afins.

- Aspectos fundamentais na aplicação da Sequência Fedathi

A eficácia nos resultados de aprendizagem, em decorrência da aplicação da Sequência Fedathi, requer em sua execução a vivência de aspectos fundamentais, pelo professor e pelo aluno, sendo os mais importantes:

Professor	Aluno
• Sequência das etapas • Planejamento • Diagnóstico • Interação • Experimentação • Generalização • Avaliação	• Atividade • Participação • Interação • Questionamentos • Experimentação • Aquisição do novo saber

Figura 18: Aspectos fundamentais na aplicação da Sequência Fedathi
Fonte: Elaborado pela autora

- Aplicações

Apesar de a Sequência Fedathi ter sido concebida no âmbito de ensino da Matemática, professores e pesquisadores de outras áreas demonstram interesse em estudá-la, principalmente profissionais da área das ciências exatas, pela escassez de teorias que contribuam para o ensino-aprendizagem dessas disciplinas.

Logo abaixo, apresentamos alguns trabalhos que utilizaram a Sequência Fedathi, como apoio teórico e/ou metodológico. Em sua maioria, estão ligados ao ensino de Matemática e utilização de tecnologias digitais. A maioria dos trabalhos, além de apresentarem uma síntese da Sequência Fedathi, destacam importantes aspectos teóricos e metodológicos e suas relações com objeto pesquisado.

Estes trabalhos e outros acerca da Sequência Fedathi, encontram-se disponíveis no *site* do Laboratório Multimeios da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará -

UFC, no endereço: <http://www.multimeios.ufc.br/teses.php>.

Quadro 4 - Teses e dissertações abordando a Sequência Fedathi

Tese: Um modelo de ensino dos conceitos de cálculo para os cursos de Engenharia fundamentado em uma epistemologia histórica e baseado na metodologia da engenharia didática: validação por meio do conceito de integral **Autora:** Natália Maria Cordeiro Barroso **Ano:** 2009 **Instituição:** UFC
Tese. Tecnologias digitais e ensino de matemática: compreender para realizar **Autora:** Elizabeth Matos Rocha **Ano:** 2008 **Instituição:** UFC
Tese: A matemática na formação do pedagogo: oficinas pedagógicas e a plataforma TelEduc na elaboração dos conceitos **Autora:** Ivoneide Pinheiro de Lima **Ano:** 2007 **Instituição:** UFC
Tese: Educação Matemática: favorecendo investigações matemáticas através do computador **Autor:** José Rogério Santana **Ano:** 2006 **Instituição:** UFC
Tese: Análise do Nível de Raciocínio Matemático e da Conceitualização de Conteúdos Aritméticos e Algébricos no Ensino Fundamental: Considerações Acerca de Alunos do Sistema Telensino Cearense. **Autora:** Marcília Chagas Barreto **Ano:** 2002 **Instituição:** UFC
Dissertação: Uso de instrumentos de medição no estudo da grandeza comprimento a partir de sessões didáticas **Autor:** Elizabeth Matos Rocha **Ano:** 2006 **Instituição:** UFC
Dissertação: O computador como ferramenta para mediação de atividades à distância de reforço escolar em matemática **Autor:** Adelmir de Menezes Jucá **Ano:** 2004 **Instituição:** UFC
Dissertação: Do Novo PC ao Velho PC **Autor:** José Rogério Santana **Ano:** 2001 **Instituição:** UFC

Dissertação: Informática na Educação Matemática: estudo de geometria no ambiente do software Cabri-Géomètre **Autor:** Maria José Araújo Souza **Ano:** 2001 **Instituição:** UFC
Dissertação: Cabri-Géomètre: uma aventura epistemológica **Autor:** Márcia Oliveira Cavalcante Campos **Ano:** 1998 **Instituição:** UFC

Fonte: Site: http://www.multimeios.ufc.br/teses.php.

Concluindo

Consideramos o capítulo 3 o mais importante deste trabalho, buscamos através dele expressar a essência da Sequência Fedathi.

Na primeira parte do capítulo é apresentado um histórico de sequências, que vão desde John Dewey em 1910 a Sequência Fedathi em 1996. Através das sequências apresentadas, ficou claro que apesar de terem sido constituídas em diferentes contextos e objetivos, elas possuem pontos em comum com a Sequência Fedathi, que foram sintetizados nos cinco itens abaixo:

1 A COMPREENSÃO DO ENUNCIADO (Tomada de Posição – Sequência Fedathi)
Versão da linguagem verbal para a linguagem matemática.

2 A COMPREENSÃO DO PROBLEMA (Tomada de Posição – Sequência Fedathi)
Consciência das relações lógicas conceituais e matemáticas que intervêm.

3 A BUSCA DE VÁRIAS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO (Maturação – Sequência Fedathi)

4 A APLICAÇÃO DAS ESTRATÉGIAS (Solução – Sequência Fedathi)

5 A REVISÃO E A COMPROVAÇÃO DO PROCESSO SEGUIDO (Prova – Sequência Fedathi)

A intersecção das idéias centrais das sequências apresentadas, resumidas nos itens 1 a 5, nos mostra que elas precisam, de fato, serem considerados no ensino da matemática, e que, a Sequência Fedathi é realmente uma proposta significativa, de vez que contempla todas elas, e, se diferencia da maioria, quando tenta apresentar de forma mais detalhada aspectos a serem considerados no processo de ensino.

A segunda parte do capítulo é dedicada a descrever as etapas da Sequência Fedathi, ressaltando importantes variáveis a serem analisadas em sua aplicação. Houve nesta descrição, um esforço no sentido de detalhar e relacionar aspectos relevantes inerentes à Sequência Fedathi, até então não especificadas em outros trabalhos que a utilizaram, são eles:

1 TOMADA DE POSIÇÃO
O Diagnóstico
A interação multilateral

2 MATURAÇÃO
Os Questionamentos

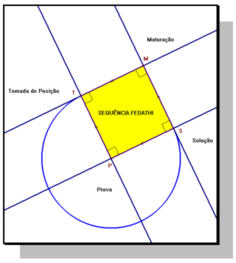
3 SOLUÇÃO
As interações bilaterais
Competência didático-matemática

4 Prova
O modelo geral

Foram destacados ainda os objetivos Sequência Fedathi, que têm como idéia central apresentar a Sequência como *modelo de ensino centrado na discussão, investigação, compreensão e formulação dos conceitos, visando conduzir o aluno a uma aprendizagem significativa.*

Entre os aspectos fundamentais esperados em relação ao professor e ao aluno, a ênfase se dá na *interação,* sendo considerada o elo principal para que seja constituído o saber em jogo.

No capítulo a seguir será apresentado um aporte acerca da Geometria, abordando aspectos relacionados à sua história e sua inserção no currículo escolar. A proposição desta seção surgiu da necessidade de conhecermos um pouco mais esta importante parte da matemática, que, além de ser abordada nas atividades de nossa pesquisa de campo, tem sido alvo de muitos softwares e aplicativos voltados para o ensino de matemática com as tecnologias digitais.



4 O desenvolvimento da Geometria: na História e na Escola

4 O DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA NA HISTÓRIA E NA ESCOLA

Não há estradas reais para chegar a Geometria.

Euclides de Alexandria

Apresentamos neste capítulo aspectos relacionados ao desenvolvimento da Geometria, tanto na história quanto na educação. Conhecer aspectos de sua composição científica e inserção no contexto escolar atual nos permitirá melhor compreensão de sua transposição para os ambientes de Geometria Dinâmica (geometria do computador).

Conforme veremos no capítulo posterior, os *softwares* Cabri-Géomètre e Geogebra (e a maioria dos outros *softwares* voltados para a Geometria) possuem como base para a resolução de problemas a aplicação de propriedades das construções geométricas e princípios da Geometria euclidiana. Os objetos e teoremas definidos por Euclides são hoje facilmente formulados neste ambiente informático.

A superação de marcas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna, em relação à Geometria no currículo escolar e as ricas possibilidades de experimentação da Geometria dinâmica, aos poucos recupera esta importante área da Matemática para as salas de aula.

A Geometria é considerada hoje ferramenta muito importante para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço onde vivemos. A importância de desenvolvê-la na escola pode ser ressaltada por várias causas, uma das quais é que, sem estudar Geometria, os alunos não desenvolvem bem o pensamento geométrico e o raciocínio visual e, sem essa habilidade, terão algumas dificuldades para resolver situações de vida ou do trabalho que forem geometrizadas; também não poderão utilizar a Geometria como instrumento facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano.

Podemos dizer que sem conhecer a Geometria, a leitura interpretativa do mundo se torna incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão acerca da Matemática torna-se diminuta.

Elementos da Geometria estão em toda parte. Lidamos no cotidiano com ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria, seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria, sendo esta parte importante e significativa da matemática para a formação dos indivíduos.

4.1 Na História

Afirmações sobre a origem da Matemática, seja da Aritmética, seja da Geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos do que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita.

> Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a Geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a Geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade da prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do Rio Nilo. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria. (BOYER, 1996, p.4).

De acordo com Boyer, as ideias de Heródoto e Aristóteles representavam teorias opostas quanto às origens da Matemática: um acreditando que a origem foi a necessidade prática, outro que a origem está no lazer sacerdotal e ritual. O autor considera que o fato de os geômetras egípcios serem às vezes chamados "estiradores de corda" (medidores de terra) pode ser tomado como apoio de qualquer das teorias, pois cordas eram usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras.

Boyer ressalta que não podemos contradizer nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a Matemática, mas admite que ambos subestimaram a idade do assunto, quando assinala que

> O Homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a Geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da Geometria elementar. Para o período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução da Matemática desde um desenho específico até em teorema familiar. Mas ideias são como sementes resistentes, e às vezes a origem presumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma ideia muito mais antiga que ficara esquecida. (BOYER, 1996, p. 5).

A preocupação do homem pré-histórico com relações e configurações pode ter origem no seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, razões que muitas vezes motivam também a Matemática de hoje.

Resultados geométricos muito antigos foram encontrados na Índia e chamados de sulvasutras, ou “regras de corda”. Eram relações simples, que aparentemente se aplicavam à construção de templos e altares. Pensa-se, atualmente, que a motivação geométrica dos “estiradores de corda” no Egito era mais prática do que a dos seus colegas na Índia; mas sugeriu-se que tanto a Geometria da Índia como a egípcia podem provir de fonte comum uma Geometria relacionada com ritos primitivos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu, com base na Mitologia, Filosofia e Teologia.

O autor conclui que a teoria da origem da Geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. Para ele o desenvolvimento da Geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem.

De acordo com Boyer, a Matemática começou a ganhar contornos de ciência com os gregos da Antiguidade Clássica, nos séculos VII a III a.C. O conhecimento acumulado até então não passava de regras práticas para resolver problemas concretos. Foram os gregos que sistematizaram a Aritmética e a Geometria empíricas das civilizações do Mediterrâneo, principalmente a Egípcia e da Mesopotâmia. Privilegiaram a Geometria como fio condutor de suas investigações. Vivendo não em grandes impérios, mas em cidades-estados, e integrantes da primeira civilização que desenvolve o conceito de cidadão, os gregos valorizam o indivíduo e a razão e são os primeiros a relacionar as obras ao nome de seus autores (BOYER, 1996).

Os gregos perceberam o que os egípcios eram capazes de fazer e assimilaram seus princípios empíricos. Ao contrário dos egípcios, apreciaram a Geometria, não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas também em razão de seu interesse teórico, tencionando compreender a matéria por ela mesma, e não em termos de sua utilidade. A eles não bastou o critério empírico; procuraram encontrar demonstrações dedutivas rigorosas das leis acerca do espaço que governavam as aplicações práticas da Geometria.

4.1.1 A Geometria Euclidiana

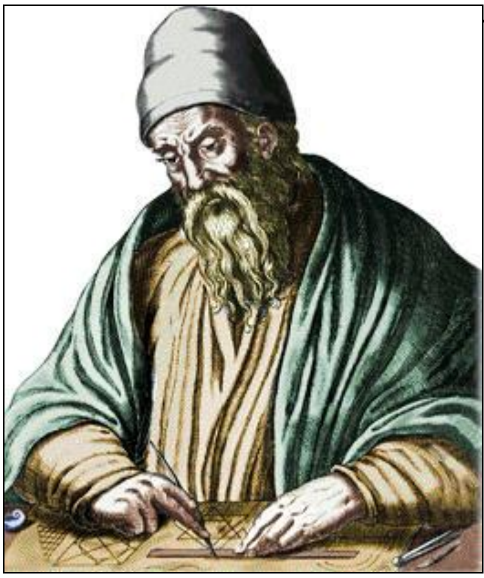


Figura 19: Representação artística de Euclides de Alexandria[3]

Pai da Geometria

Têm-se pouca informação sobre Euclides, que teria vivido por volta do ano 300 a.C. E esse pouco que dele sabemos nos vem dos comentários de Proclus (410-485), um autor que viveu há mais de 700 anos depois de Euclides. Mesmo Proclus tem dificuldade em determinar a época em que viveu Euclides. Euclides escreveu várias obras científicas, a mais famosa das quais, conhecida com o nome de *Elementos*, reúne quase todo o conhecimento matemático daquele tempo. Em parte por causa disso, e também por tratar-se de uma obra que reunia a maior parte da Matemática conhecida, as obras anteriores aos *Elementos* desapareceram. A única exceção são alguns dos fragmentos atribuídos a Hipócrates de Quio, que viveu no século V a.C. Assim, os Elementos de Euclides são praticamente tudo o que temos da Matemática grega que se desenvolveu desde seu início com Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C., até o tempo de Euclides, um período de cerca de 250 anos, aliás, muito pouco tempo para que a Matemática, logicamente organizada, evoluísse do estádio embrionário em que se encontrava com Tales, até o alto grau de sofisticação que transparece nos *Elementos*.

Revista do Professor de Matemática – RPM, 1º Quadrimestre – 2001, nº 45, p.1-2.

Segundo Gálvez (1996), a Geometria euclidiana constituiu, durante muitos séculos, um paradigma para o resto da Matemática e outras ciências. De fato, foi a primeira “axiomatização” na história da Matemática, além de constituir um patrimônio cultural da humanidade.

Foi no período entre 600 e 300 a.C. que a Geometria se firmou como um sistema organizado, e muito disso se deve a *Euclides*, mestre na escola de Alexandria, que publicou, por volta de 325 a.C., *Os Elementos*, uma obra com treze volumes, propondo um sistema inédito no estudo da Geometria.

Esse trabalho de Euclides é tão vasto que alguns historiadores não acreditaram que fosse obra de um só homem. Essas desconfianças, no entanto, não foram suficientes para tirar o mérito de *Euclides,* o primeiro a propor um método para um estudo lógico da Matemática.

[3] Disponível em: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>. Acesso em 07 jan. 2010.

Esta obra é um dos clássicos que exerceu grande influência no pensamento ocidental, no que diz respeito ao desenvolvimento do método dedutivo e da Matemática.

Figura 20: Folha de Rosto da Primeira versão Inglesa de Os Elementos de Euclides - 1570[4]

Euclides sistematizou em *Os Elementos* quase tudo o que a humanidade sabe até hoje sobre pontos, retas, planos, figuras geométricas elementares. Apresentou a Geometria como uma ciência na qual todas as proposições (expressões com que se afirma ou se nega alguma coisa) podem ser logicamente demonstradas com apoio em algumas afirmações básicas chamadas postulados e axiomas. A obra de Euclides sintetiza também a Aritmética até então conhecida, estabelece as primeiras relações algébricas e a primeira teoria dos números.

[4] Disponível em <http://www.diaadia.pr.gov.br/tvpendrive/arquivos/Image/conteudos/imagens/matematica/2oseleme.jpg.>. Acesso em: 07 jan. 2010.

Dos tempos antigos até o século XIX, os *Elementos* de Euclides foram não apenas o livro-texto da Geometria, mas também o modelo daquilo que o pensamento científico devia ser.

4.1.2 Euclides e os princípios da Geometria

Euclides apresenta alguns traços característicos nas técnicas adotadas para desenvolver seus sistemas. Em primeiro lugar, ele anuncia as suas leis em forma universal, não examina as propriedades de uma determinada linha ou figura; pelo contrário, observa as propriedades que todas as linhas ou figuras de uma espécie devem ter. Formula as leis de modo a torná-las rigorosas e absolutas, nunca como simples aproximações. Por exemplo: diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos; não fala que se trata de um valor aproximado, mas propõe como algo rigoroso e absolutamente verdadeiro.

O interessante é que Euclides não teve a preocupação de enunciar um grande número de leis geométricas; mas sim em demonstrá-las. Sabe-se que seu livro consiste em demonstrações. Por exemplo, ele não propõe jamais que efetuemos a soma de ângulos de triângulos reais para verificarmos se a soma é igual à soma de dois ângulos retos. Em seus trabalhos, não aparecem preocupações com experimentos ou observações desse gênero. Em vez disso, apresenta demonstrações, procurando estabelecer as suas conclusões com o rigor da absoluta necessidade lógica (BARKER, 1969, p.29).

Euclides resumiu suas leis em dez premissas básicas: cinco postulados e cinco axiomas (*axiomas* são premissas evidentes, que se admitem como verdadeiras sem exigência de demonstração; *postulados* são proposições não evidentes e não demonstráveis que se admitem como princípio de um sistema lógico).

De acordo com Barker (1969), para os gregos, a diferença entre axiomas e postulados, sob o prisma da credibilidade, está nisto: se uma pessoa duvidasse dos postulados da Geometria, estaria, de fato, cometendo um erro, tornando-se, pois, incapaz para o estudo dessa disciplina, sem, no, entanto, se tornar incapaz para outros tipos de estudo (Aritmética, Biologia, Música); se, porém, duvidasse dos axiomas, estaria evidenciando incapacidade para qualquer tarefa intelectual, já que a noção de grandeza é indispensável para quase todas as disciplinas (áreas de conhecimento). Os Axiomas e Postulados de Euclides são os seguintes (BARKER, 1969, p. 30):

- Os Axiomas (ou noções comuns)

1 Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2 Se parcelas iguais foram adicionadas a quantias iguais, os resultados ficarão sendo iguais.
3 Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.
4 Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
5 O todo é maior do que as partes.

- Os Postulados

1 Pode-se traçar uma linha reta de qualquer ponto para qualquer ponto.
2 Qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para constituir uma reta.
3 Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer se pode traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à dada distância.
4 Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5 Se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor do que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas.

Podemos ver que as ideias de Euclides diferem muito das concepções indutivas e empíricas adotadas pelos egípcios, pois apresentam rigor científico.

Barker (1969), analisando os postulados de Euclides, ressalta que os três primeiros revelam que ele não está, de maneira direta, discutindo nenhum problema concreto de mensuração de terras. Observa, com efeito que, em condições reais, não é sempre possível traçar uma reta que passe por dois pontos dados, pois obstáculos vários (montanhas, lagos, edifícios) impedem, muita vez, o traçado. Também não é verdade, nas condições reais, que um segmento seja indefinidamente prolongável. É obvio, por exemplo, que um segmento só pode ser prolongado um pouco para cima e para baixo; mesmo um segmento horizontal só pode ser prolongado até a primeira barreira impenetrável. Não se pode, igualmente, desenhar um círculo cujo centro tenha sido arbitrariamente selecionado e cujo raio seja apreciavelmente grande, pois os obstáculos impedirão, por certo, o traçado. Diz que Euclides sabia de tudo isso, é claro, mas as condições práticas simplesmente não o interessavam.

A concepção de Euclides era de que, em princípio, uma reta poderia ser traçada de modo a ligar dois pontos quaisquer, fosse ou não possível traçá-la em realidade; imaginava que um segmento de reta sempre poderia, em princípio, ser prolongado para constituir uma reta, fosse ou não fosse possível realizá-lo concretamente, e admitia que um círculo sempre seria configurado por um centro e uma distância dada, fosse ou não fosse possível concretizá-lo. Para Euclides, havia um espaço em que inexistiam obstáculos absolutos e em volta do qual inexistiam fronteiras exteriores absolutas.

Analisando o quarto postulado, Barker diz que, a princípio, parece que poderia ser dispensado, tão trivialmente verdadeiro é aquilo que assegura. Se dois ângulos retos parece óbvio que são iguais, por que postulá-lo? Segundo Barker, se Euclides tivesse dito que todos os ângulos retos são ângulos retos, teria, de fato, afirmado algo tão trivial que o postulado seria dispensável. Com efeito, a observação seria verdadeira apenas em virtude de sua forma lógica, pois tratar-se-ia de uma verdade lógica, não de uma verdade geométrica. Segundo as concepções de Euclides, entretanto, um ângulo reto pode ser obtido sobrepondo-se duas retas de tal maneira que os ângulos adjacentes sejam iguais. Dessa definição não se deduz, com auxílio da lógica apenas, que os ângulos obtidos dessa maneira sejam sempre iguais. O quarto postulado, por conseguinte, tal como Euclides o exprime não descreve uma verdade dependente apenas da forma lógica; uma vez que ele será necessário para demonstrações futuras, o geômetra precisou, de fato, enunciá-lo explicitamente, na qualidade de postulado.

Sobre o quinto postulado de Euclides, Barker assinala que este encerra uma lei mais complicada do que as fixadas nos postulados precedentes. Diz que seu significado pode ser compreendido e interpretado pela figura abaixo:

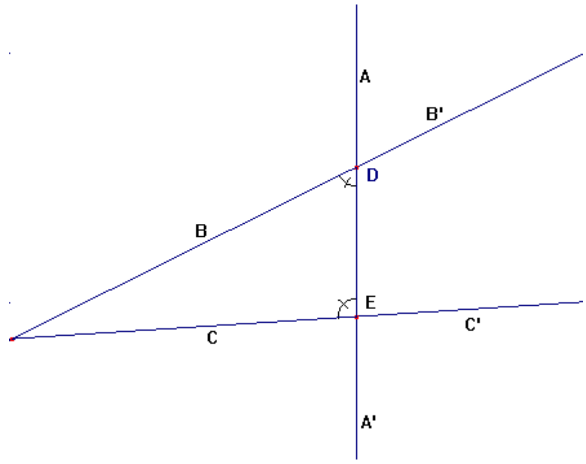


Figura 21 - Suponhamos que temos três retas AA’, BB’ e CC’, o postulado diz que se AA’ cortar BB’ e CC’ de modo que os ângulos CEA e BDA’, somados, sejam um ângulo menor do que dois ângulos retos, então BB’ e CC’ hão de cortar-se, desde que sejam suficientemente prolongadas.
Fonte: Barker (1969)

De fato, o quinto postulado foi alvo de muitas discussões. Segundo Barker, esse postulado parece anômalo e fora do contexto, dada a sua complicada forma. Ressalta que a formulação desse postulado requer uma sentença muito mais complexa do que as sentenças necessárias para a enunciação dos demais. Diz que a complexidade do quinto postulado assemelha-se à de alguns teoremas demonstrados por Euclides, não possuindo o caráter de óbvia verdade autoevidente, que caracteriza os outros postulados, sendo muito mais intricado e menos claramente compreensível do que os outros.

Comentadores de Euclides, gregos e árabes, procuraram diversas vezes eliminar o quinto postulado. Buscavam mostrar que este não era independente dos demais; tencionavam mostrar que era um teorema dedutível dos quatro primeiros postulados; tentaram mostrar que poderia ser substituído por algum princípio mais simples e mais evidente, princípio esse que passaria a ocupar o quinto postulado. As tentativas não resultaram satisfatórias. Outras iniciativas revelaram, no entanto, que existem numerosos princípios geométricos capazes de substituir o quinto postulado de Euclides: princípios que, associados aos outros postulados, permitiam a demonstração dos teoremas euclidianos. Assim, o princípio a asseverar que *por um ponto situado fora de uma reta só se pode traçar uma paralela à reta dada* é um princípio que pode substituir o quinto postulado de Euclides. Esse princípio ocupou o lugar do quinto postulado em uma versão da Geometria que esteve em voga no século XVIII. O fato de o princípio poder substituir o quinto postulado é responsável pelo nome de “Postulado das Paralelas".

- As Definições

Segundo Barker, para garantir que os postulados e axiomas fossem interpretados corretamente por via do significado das palavras, Euclides apresentou as definições de vários termos que utilizava.

Vejamos algumas importantes definições, citadas por Barker (1969, p.6) e extraídas do *Livro Primeiro dos Elementos*:

1 Um ponto é aquilo que não tem partes.

2 Uma linha é um comprimento sem largura.

4 Uma linha reta é uma linha traçada uniformemente com os pontos sobre si.

5 Uma superfície é aquilo que só tem comprimento e largura.

7 Uma superfície plana é uma superfície traçada uniformemente com suas retas sobre si.

8 Um ângulo plano é a inclinação, em relação uma com a outra de duas retas de um plano que se cruzam entre si e não estão na mesma reta.

10 Quando uma reta é colocada sobre outra reta de maneira que os ângulos adjacentes sejam iguais, cada um dos ângulos é chamado reto, e a reta superposta diz-se perpendicular à primeira.

14 Uma figura é tudo aquilo que fica delimitado por qualquer fronteira ou fronteiras.

15 Um círculo é uma figura plana fechada por uma linha tal que todos os segmentos que sobre elas estejam e que passem por um ponto determinado do interior da figura sejam iguais entre si.

23 Retas paralelas são linhas retas que, estando no mesmo plano, prolongadas indefinidamente nos dois sentidos, não se cruzam.

Para o autor, os postulados, axiomas e definições constituem os pontos de partida para as demonstrações de Euclides. Destaca que o objetivo de Euclides era demonstrar todos os princípios geométricos, revelando que são decorrências necessárias dos princípios. Outras asserções demonstradas por Euclides não tomaram a forma de leis universais. Essas asserções exprimem tarefas a executar. A rotina apresentada por Euclides torna possível demonstrar que segui-la é executar a tarefa.

A Figura 22 refere-se ao tratamento dado por Euclides à proposição I, do *Livro Primeiro dos Elementos.*

Construir um triângulo equilátero, dado um de seus lados.

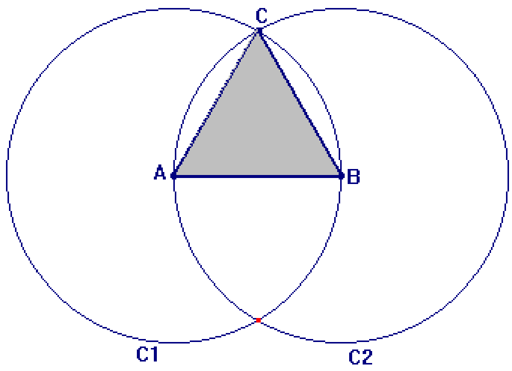


Figura 22 - Seja AB o segmento dado. Pede-se um triângulo equilátero, construído sobre AB. Trace-se uma circunferência de centro em A e distância (raio) AB; seja C1 essa circunferência (Postulado 3). Repita-se o processo, tomando-se o centro em B e a distância BA; obtém-se a circunferência C2 (Postulado 3). Sejam traçadas as retas CA e CB, unindo o ponto C, em que as circunferências se cortam, aos pontos A e B (Postulado 1). Ora, sendo A o centro da circunferência C1, segue-se que AC é igual a AB (pela definição 15). De modo análogo, sendo B o centro de C2, BC é igual a BA (pela definição 15). Como já se mostrou que CA era igual a AB; logo, os segmentos CA e CB são também iguais a AB. Mas (Axioma 1) CA é igual a CB. Em conSequência, os segmentos CA, AB e BC são iguais entre si. Segue-se que o triângulo ABC é equilátero e foi construído sobre um segmento dado, AB.

Fonte: Barker (1969)

A demonstração é uma ilustração de como Euclides usava os postulados, axiomas e definições, nas demonstrações de teoremas.

Uma das maiores contribuições da Geometria euclidiana é o uso da demonstração, que se refere às propriedades de um espaço puro e formal.

O sistema geométrico de Euclides foi uma importante *conquista intelectual.* Seu trabalho propôs sérias questões para os filósofos a respeito das verdades tratadas em seus postulados, apesar de Euclides ter escrito sobre a Geometria, sem preocupações filosóficas.

4.1.3 O surgimento de outras geometrias

Por cerca de dois mil anos, a Geometria de Euclides foi considerada como a única possível. A obra *Os Elementos* era inquestionável. Tão famosa que, depois da Bíblia, é o livro de maior número de edições. De fato, a Geometria euclidiana não contraria os nossos sentidos, pois os seus axiomas, por exemplo, são noções facilmente aceitas pela nossa intuição (COUTINHO, 2001, p.35).

Outros pensadores, no entanto, como Lobachevski, Gauss e Riemann, também levantaram argumentos sobre a validade do quinto postulado, chegando inclusive a dar origem a outras geometrias, denominadas geometrias não-euclidianas.

> A Geometria Euclidiana, transmitida de geração a geração por mais de dois mil anos, não era a única. As mentes criativas dos matemáticos Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann lançaram as bases de outras geometrias tão logicamente aceitas quanto a Euclidiana. Uma dessas geometrias não-euclidianas encontra aplicação na Teoria da Relatividade, o que se justifica, pois sendo curvo o Universo einsteiniano, a Geometria Euclidiana não é adequada. (COUTINHO, 2001, p. 26).

Apesar do surgimento das outras geometrias, a euclidiana sempre foi apreciada por sua organização lógica e formal, orientada por teoremas que tinham como fundamento os axiomas, postulados e definições apresentados por Euclides. Mesmo com os estudos e questionamentos acerca de sua consistência, especificamente, do 5º postulado, a geometria euclidiana favoreceu o surgimento de outras geometrias, servindo também como parâmetro, para o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, sendo até hoje ensinada e aplicada em diversas áreas de conhecimento.

Lendo sua história, podemos concluir que a Geometria foi constituída inicialmente por questões práticas, relacionadas principalmente à terra, tendo sido posteriormente organizada com rigor teórico e formal. A Geometria euclidiana tornou-se referência não só para o desenvolvimento da Matemática, como também para outras ciências, como a Filosofia, propiciando discussões sobre os princípios lógicos e o rigor no desenvolvimento das ciências.

O sistema desenvolvido por Euclides foi tão bem elaborado, que, mesmo com o surgimento de outras geometrias, a Geometria euclidiana continua sendo uma das referências para o estudo, compreensão e organização das formas e espaços que nos cercam, estando presente nos currículos escolares de todo o mundo desde a pré-escola.

4.2 A Geometria na escola

Sabemos que os conteúdos escolares são propostos no currículo sob a influência dos cenários político e social do meio onde estão inseridos. Nesta realidade, a Matemática que temos hoje na escola decorre da influência de movimentos sociais e educacionais, nacionais e internacionais, os quais determinam o que os alunos devem estudar.

Em relação à Geometria, mesmo com sua notável importância prática e intelectual, sua presença foi praticamente abolida dos currículos escolares nas décadas de 1960 a 1980, em decorrência do Movimento da Matemática Moderna, conhecido como MMM, que primou pelo ensino da Álgebra e outras áreas da Matemática, em detrimento da Geometria.

5.2.1 A Geometria e o Movimento da Matemática Moderna

Já era consenso na época em que iniciou-se o Movimento da Matemática Moderna que o ensino da Matemática ia mal. As notas dos estudantes já eram muito baixas em relação às demais disciplinas e, quando os Estados Unidos entraram na Segunda Guerra Mundial, os militares logo descobriram que seus homens eram bastante deficientes em Matemática e tiveram que instituir cursos especiais para elevar-lhes o nível de eficiência. Detectada esta realidade, propuseram ao Governo do país americano que realizasse reformas nos currículos escolares, que viessem atualizar o ensino deste componente escolar. (KLINE, 1976, p.32).

Em 1957, os russos lançaram o primeiro foguete: o Sputnik. O acontecimento convenceu e reforçou cada vez mais para o país (Estados Unidos) e seu povo, que estes estavam em desvantagem em relação aos russos no que diz respeito à Matemática e à Ciência. O fato teve grande efeito sob a criação de programas, comissões e grupos para a elaboração de um novo currículo escolar para a Matemática.

Era consenso destes grupos o fato de que uma nova Matemática deveria ser ensinada nas escolas. As comissões alegavam que deveriam largar o tradicional em favor de novos campos como o da Álgebra abstrata, da Topologia, da Lógica simbólica e da Álgebra de Boole. O *slogan* da reforma passou a ser "Matemática Moderna". A palavra *moderna* foi muito útil, sob o pretexto de que a Matemática estudada referenciava-se aos anos de 1700 e que era preciso renovar os currículos em decorrência do avanço da ciência e da tecnologia; novos grupos que foram aparecendo recomendavam uma reforma radical nas propostas de ensino, conforme destaca Kline:

> [...] um grupo internacional que se reuniu em Royaumont, na França, em 1959, recomendou que se abandonassem completamente todos os cursos conhecidos da matemática secundária, inclusive a geometria euclidiana. Na conferência, declarou-se que estas matérias haviam sido suplantadas pela eletrônica, relatividade e pelos computadores e a crescente importância da matemática abstrata como base da ciência moderna. (KLINE, 1976, p. 35).

As propostas apresentadas junto ao MMM, privilegiavam as áreas da Álgebra e propunham para a Geometria um ensino baseado nas transformações geométricas, enfoque que os professores basicamente desconheciam, o que levou ao abandono da Geometria nas salas de aula, conforme destaca Pavanello:

> A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela maioria os professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra – mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância. A Lei 5692/71, por sua vez, facilita este procedimento ao permitir que cada professor adote seu próprio programa de acordo com as necessidades da clientela. (PAVANELLO, 1989, p. 164-165).

A insatisfação com o ensino de Matemática vigente naquela época fez com que muitos países aderissem à reforma iniciada pelos Estados Unidos. Sua disseminação foi realizada por intermédio de conferências, bolsas de estudo, formação de grupos e materiais publicados em torno da nova Matemática, inclusive no Brasil.

> Ao que tudo indica a MM foi oficializada em alguns estados do Brasil por intermédio de grupos de professores de Matemática que foram constituídos entre as décadas de 1960 e 1980. A alguns desses grupos foram atribuídas siglas, como GEEM de São Paulo, NEDEM do Paraná, GEEMPA do Rio Grande do Sul e GEPEMAT do Mato Grosso. Uma característica comum a esses grupos é o interesse e a necessidade de mudar o ensino de Matemática desenvolvido na época. Muitos desses grupos foram organizados por iniciativas individuais dos professores e outros

> aproveitaram a abertura de editais de programas ou projetos disponibilizados por órgãos governamentais para se constituírem como grupos. (WIELEWSKI, 2009, p.2).

Analisando a nova Matemática proposta aos estudantes em decorrência do MMM, Kline ressalta que julgar se é correto ou não o currículo proposto não levaria a nada, pois a qualidade de ser correto não garante que os estudantes se apeguem à matéria, possam absorvê-la ou que esta Matemática particular é a que deva ser ensinada. Perguntar se ela desenvolveria matemáticos, também, não satisfaria, pois esta nova Matemática foi proposta para estudantes das escolas elementar e secundária, que, ao final, ingressariam em uma variedade de profissões, negócios, empregos técnicos e comércio ou se tornariam primariamente esposas e mães. Relata ainda que, das crianças de escola elementar, nenhuma em mil será um matemático; e dos estudantes da escola secundária, nenhum em cem o será também, concluindo que um currículo que poderia ser ideal para o treinamento de matemáticos ainda não estaria certo para esses níveis de educação (KLINE, 1976, p.39).

Concordamos com o autor, quando acentua que um currículo adequado para formar matemáticos não é apropriado para os estudantes da Educação Básica, em razão de seus diferentes objetivos de estudo. Enquanto o matemático anseia pela resolução de problemas, na maioria das vezes, internos à própria Matemática, os estudantes da escola básica almejam instrumentalizar-se com ela, para resolver problemas de seu cotidiano. Neste sentido, podemos afirmar que as mudanças propostas aos currículos em decorrência do MMM, centralizaram-se nos conteúdos, esquecendo-se de que, para melhorar o nível dos estudantes, deveriam ter priorizado também a formação dos professores, tanto para o domínio matemático, como para um repensar das questões pedagógicas ligadas ao ensino, seja quanto a seleção dos conteúdos, métodos de ensino, avaliação e contextos, conforme Kline:

> Certamente não temos professores suficientemente habilitados; portanto, o ensino em muitas partes do país se apresenta lamentavelmente fraco. Existissem mais bons professores e há muito teriam podido, agindo em conjunto, remediar as falhas do currículo tradicional. Como o professor é, pelo menos, tão importante quanto o currículo, o dinheiro, o tempo e energia dedicados à reforma do currículo poderiam muito bem ter sido dedicados à melhoria do professorado. É verdade que, em 1958, a Fundação de Ciência Nacional inaugurou e tem mantido vários institutos para a educação de professores. Esses institutos deveriam ter sido usados para melhorar o ambiente matemático dos professores de escola elementar e secundária de modo que eles pudessem formar um juízo mais independente sobre o que é importante na matemática. Infelizmente, foram usados, em grande parte, para ensinar os professores como ensinar matemática de valor não provado. (1976, p.40).

4.2.2 A Geometria no currículo escolar

O insucesso do Movimento da Matemática Moderna propiciou, no final dos anos 1980, a reorientação dos currículos de Matemática. As redes escolares do mundo inteiro e, do Brasil, buscaram discutir e implementar novas propostas ligadas à prática curricular, as ações docentes, as formas de aprendizagem discente e novas opções avaliativas para o ensino de Matemática. Grupos de pesquisa ligados a universidades e instituições educacionais passaram a trabalhar com o objetivo de orientar os professores neste processo de mudança. Estas reformas tiveram como motivação maior à superação de ideias lançadas pelo Movimento da Matemática Moderna, que, apesar das críticas às suas orientações, há de se considerar que a proposta a ele vinculada explicitava seus compromissos com o progresso técnico, situando a Matemática como base de uma cultura voltada para a ciência e a tecnologia, tendo ainda como meta ensinar o aluno mais a abstrair do que se preocupar com aplicações práticas, ainda que esse não fosse o ideal dos estudantes.

Com o insucesso do Movimento da Matemática Moderna, a Geometria aos poucos reapareceu no currículo escolar, sempre no final dos livros didáticos, dentro do modelo que primava pelo trabalho com figuras e não mais das transformações geométricas.

Para Usiskin (1994), os maiores problemas da Geometria escolar passaram a decorrer então de duas questões principais: o fraco desempenho dos alunos e um currículo ultrapassado, precisando de ajustes e atualizações. Para o autor, esses problemas conduzem os alunos da escola fundamental e média a um conhecimento geométrico irregular e bastante limitado. Os problemas apontados pelo autor, acabam sendo reforçados por aspectos como metodologias de ensino inadequadas e a inexistência de disciplinas obrigatórias de Geometria nas escolas de Educação Básica.

Em seu artigo intitulado “Os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar”, Usiskim (1994, p.37) assevera que, para se melhorar o desempenho dos alunos, é preciso em primeiro lugar ampliar o grupo de pessoas que querem estudar Geometria, e, para ampliar esse grupo, é preciso que haja um número maior de alunos com bom desempenho em seus estudos de Geometria. O autor diz que esses fatos constituem um dilema do tipo “o ovo ou a galinha” e, na tentativa de sua superação, propõe alguns passos a serem considerados pelas instituições e profissionais interessados na temática:

1 especificar um currículo de Geometria para o ensino fundamental e médio, por série;
2 não afastar os alunos da Geometria por eles serem fracos em Aritmética ou Álgebra;

3 exigir do aluno um grau significativo de competência em Geometria;
4 exigir que todos os futuros professores de Matemática, do Ensino Fundamental ou Médio, estudem Geometria na faculdade;
5 tornar clara a semântica usada nas discussões de Geometria;
6 elevar o nível, a qualidade e a quantidade das discussões sobre o ensino da Geometria; e
7 analisar, de uma perspectiva curricular, as várias maneiras de formar conceitos em Geometria.

Entre as sugestões apresentadas pelo autor, algumas já são implementadas, como por exemplo, as sugestões de número 1 e 4, acima citadas, que tratam da definição de currículos que abordem sistematicamente a Geometria, tanto nas escolas como na formação dos professores, bem definidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e Diretrizes Curriculares para os Cursos de Licenciatura em Matemática. Em relação aos cursos de Magistério e Pedagogia, o estudo da Geometria não aparece como componente curricular obrigatório, ficando a critério de cada curso propiciar ou não seu estudo na formação dos professores das séries iniciais.

Podemos dizer que as sugestões de Usiskim são de certo modo interdependentes, tendo como eixo central o desenvolvimento de uma boa formação matemática e geométrica para os professores, ideia também ressaltada por Klein. Somente com professores bem formados e comprometidos, poderemos superar equívocos decorrentes do Movimento da Matemática Moderna, bem como outros subjacentes ao próprio ensino da Matemática.

4.2.3 A Geometria nos Cursos de Matemática

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (Parecer nº CNE/CES 1.302/2001, aprovado em 06/11/2001) dedica à Geometria parte considerável dos conteúdos matemáticos obrigatórios, principalmente para as licenciaturas. Propõe dois dos seus seis blocos de conteúdo, além de indicar que, na parte comum, sejam explorados conteúdos da Aritmética, Geometria e Álgebra estudados na Educação Básica. Já no Bacharelado, há menos ênfase para os tópicos geométricos, tendo prioridade a Álgebra, o Cálculo e a Análise, conforme nos mostra o quadro.

Quadro 5 – Conteúdos para os Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no Brasil

CURSOS	**CONTEÚDOS MATEMÁTICOS OBRIGATÓRIOS NOS CURSOS DE MATEMÁTICA**
Licenciatura em Matemática	1. Cálculo Diferencial e Integral 2. Álgebra Linear 3. Fundamentos de Análise 4. Fundamentos de Álgebra 5. Fundamentos de Geometria 6. Geometria Analítica - A parte comum deve ainda incluir: a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.
Bacharelado em Matemática	1. Cálculo Diferencial e Integral 2. Álgebra Linear 3. Topologia 4. Análise Matemática 5. Álgebra 6. Análise Complexa 7. Geometria Diferencial - A parte comum deve ainda incluir o estudo de Probabilidade e Estatística. - É necessário um conhecimento de Física Geral e noções de Física Moderna.

Fonte: Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática - Parecer nº CNE/CES-1.302/2001-MEC

O Curso de Licenciatura em Matemática da UVA, no qual realizamos a pesquisa, apresenta em sua grade curricular 80 créditos direcionados aos conteúdos matemáticos obrigatórios, onde 20 deles são dedicados à Geometria. Na parte comum, são propostas 2 disciplinas (de seis créditos cada uma) para exploração de conteúdos da Educação Básica, onde se inclui também a Geometria (Projeto Político-Pedagógico do Curso de Matemática – UVA - 2005). Vejamos quais são elas no quadro 6:

Quadro 6 – Disciplinas na área de Geometria – Curso de Licenciatura em Matemática da UVA – Grade 2006.1

A GEOMETRIA NO CURSO PESQUISADO	DISCIPLINAS
Disciplinas Obrigatórias de Geometria	Geometria Euclidiana - 06 Créditos Geometria Analítica Vetorial - 06 Créditos Desenho Geométrico - 04 Créditos Geometria Descritiva - 04 Créditos
Disciplinas Obrigatórias da parte comum, que abordam conteúdos da Educação Básica, incluindo a Geometria	A Matemática no Ensino Fundamental - 06 Créditos A Matemática no Ensino Médio - 06 Créditos

Fonte – Projeto Político-Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática - UVA - 2005

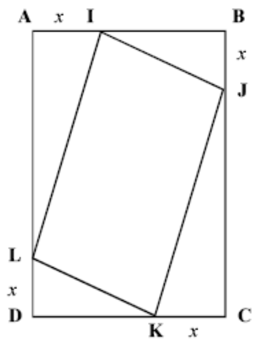
Em relação ao desempenho dos alunos do Curso na área da Geometria, este ainda deixa a desejar. Por exemplo o quesito a seguir apresentado refere-se a uma das questões discursivas da Prova de Matemática para os licenciandos no ENADE 2008. A questão valia dez pontos e a pontuação média dos alunos concluintes do Curso de Matemática da UVA foi de **5,2,** enquanto a média nacional foi **7,8** pontos. Os alunos da Instituição tiveram um rendimento inferior de aproximadamente **2,6** pontos em relação à média de desempenho nacional.

ENADE 2008

EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

QUESTÃO 40 – DISCURSIVA

No retângulo ABCD ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

a) Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.

b) Escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo de mínimo

c) Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com alunos do ensino fundamental e do ensino médio?

Figura 23 - Questão discursiva para os alunos da Licenciatura em Matemática
Fonte: Prova de Matemática - ENADE 2008

Fazendo análise da questão, observamos que ela explora conceitos matemáticos de Paralelismo, Perpendicularismo, Teorema de Pitágoras, Produtos Notáveis e Função Quadrática, conceitos propostos no currículo do Ensino Fundamental e Médio, sobre os quais os licenciandos deveriam ter conhecimento. Pelo resultado, percebemos que os alunos não possuem o conhecimento que deveriam ter acerca da Geometria da Educação Básica, sendo outro agravante, a dificuldade na interpretação e resolução dos problemas, o que acreditamos ter contribuído para a nota média (5,2) obtida na questão.

Apesar das propostas curriculares dos Cursos de Licenciatura e da Educação Básica apresentarem a Geometria como componente essencial para os currículos de Matemática, ainda se faz necessária melhor adequação das propostas de ensino, no que diz respeito à seleção dos conteúdos, metodologias e às práticas de ensino desta importante componente da matemática, tendo atualmente, os softwares de Geometria Dinâmica com ferramentas que muito potencializam seu ensino, quando utilizadas de forma pedagógica adequada.

Concluindo

A primeira parte do capítulo mostrou importantes fatos da história da Geometria, desde a criação de seus princípios básicos por Euclides, apresentando axiomas, postulados e definições de seu sistema lógico, até o aparecimento de geometrias não-euclidianas. É mostrado também como Euclides aplicava este sistema lógico em suas demonstrações, apresentando-se como exemplo a construção geométrica do triângulo equilátero. Vale ressaltar, que as construções estiveram por muito tempo, fora dos currículos escolares mas, com o desenvolvimento da geometria dinâmica (geometria no computador), seu ensino tem sido retomado, inclusive nos livros didáticos.

Em relação à geometria no currículo escolar, destacamos a influência do Movimento da Matemática Moderna, que preteria as transformações álgebricas em detrimento a geometria figurativa. Este movimento deixou uma profunda marca nos currículos escolares e na formação dos alunos em relação a aprendizagem da geometria, que basicamente deixou de ser ensinada nas escolas e só aparecia somente no final dos livros didáticos, o que fazia com que os professores não chegassem a alcança-la até o final do ano letivo.

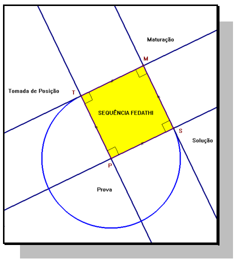
O insucesso da Matemática Moderna impulsionou no final dos anos 80, o retorno da geometria aos currículos escolares e novas organizações dos conteúdos nos livros didáticos.

As novas propostas de livros didáticos, passaram a organizar os capítulos alternando os conteúdos de aritmética, álgebra e geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, lançados em 1996 e as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Licenciatura em Matemática propostas em 2001 (Parecer nº CNE/CES 1.302/2001), também dedicaram grande atenção a geometria, propondo seu estudo de forma bastante abrangente.

Apesar dos avanços citados, o ensino da geometria ainda precisa ser melhorado, principalmente na formação dos professores, que necessitam reforçar os aspectos referentes ao domínio dos conceitos e metodologias de ensino.

O próximo capítulo propõe reflexões acerca das tecnologias digitais no ensino de matemática, incluindo a geometria dinâmica. Apresenta detalhes do softwares Cabri-Géomètre e Geogebra, apesar do Cabri ter sido o software utilizado na pesquisa, o geogebra também foi apresentado aos alunos pesquisados.



5 Tecnologias Digitais e Geometria Dinâmica no ensino da Matemática

5 TECNOLOGIAS DIGITAIS E GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

É necessário que professores e alunos conheçam, interpretem, utilizem, reflitam e dominem criticamente a tecnologia para não serem por ela dominados.

Sampaio e Leite

5.1 O professor e a utilização das tecnologias digitais na sala de aula

Com a grande disseminação da tecnologia digital em todos os segmentos sociais, entre eles a educação, torna-se necessário repensar o papel do professor. Embora a tecnologia seja um elemento da cultura bastante expressivo, precisa ser devidamente compreendida em termos das implicações de seu uso no processo de ensino e de aprendizagem. Essa compreensão é que permite ao professor integrá-la à prática pedagógica. Esta integração, no entanto tem sido, muitas vezes, feita de forma equivocada, pouco contribuindo para a consecução da aprendizagem dos conhecimentos específicos que os alunos precisam aprender (português, matemática, história, ciências, etc). Em muitos casos, as escolas chegam apenas a propor uma disciplina para instrumentalizar os alunos na área da informática.

Diferentemente dessa perspectiva, é importante que a tecnologia seja incorporada as situações de ensino, de modo a propiciar aos estudantes novas possibilidades e perspectivas para uma melhor e maior aprendizagem dos conteúdos específicos e, para uma formação mais ampla e abrangente em relação a sociedade em que vivem. No entanto, para propiciar esta formação, se faz necessário investir na formação dos professores. Kenski (2003) destaca a importância da formação dos professores para a utilização das inovações tecnológicas na educação:

> A formação de qualidade dos docentes deve ser vista em um amplo quadro de complementação às tradicionais disciplinas pedagógicas e que inclui algum conhecimento sobre o uso crítico das novas tecnologias de informação e comunicação (não apenas o computador e as redes, mas também os demais suportes midiáticos, como o rádio, a televisão, o vídeo, etc.) em variadas e diferenciadas atividades de ensino. É preciso que o professor saiba utilizar adequadamente, no ensino, essas mídias, para poder melhor explorar suas especificidades e garantir o alcance dos objetivos de ensino oferecido. (KENSKI, 2003, p.88-89)

Para isso, é fundamental que o professor, independentemente de sua área de atuação, possa conhecer potencialidades e limitações pedagógicas relacionadas a diferentes tecnologias, seja o vídeo, a Internet, o computador, entre outras. É preciso perceber que cada uma delas carrega suas especificidades, que podem ser complementadas entre si e com outros recursos não tecnológicos. Por sua vez, uma determinada tecnologia se configura por uma multiplicidade de recursos distintos, os quais devem ser considerados para que seu uso seja significativo para os envolvidos e pertinente ao contexto.

Devemos considerar também as barreiras do professor no trato com a informática, Borba e Penteado (2001) nos alertam para o fato de que professores atuais foram formados em um contexto social e tecnológico diferente, são da geração “rádio/TV”, em que a interação sujeito e tecnologia era restrita. Eles são hoje obrigados a atuar profissionalmente na formação de alunos da geração “Internet” acostumados a interagir com a tecnologia.

É preciso rever e compreender melhor, então, a formação desses professores, contribuindo para o seu crescimento. Não basta, no entanto, preparar os professores para o uso de computadores, é preciso também que estes vençam as barreiras impostas sobre o uso da máquina. Uma formação em informática deve estar integrada ao centro de interesses do professor, indo além de contribuir na formação continuada em informática, mas possibilitando reflexões importantes sobre conteúdos e práticas pedagógicas, contribuindo efetivamente para a formação integral do professor.

Criar ambientes de aprendizagem com a presença das tecnologias informáticas significa utilizá-la para a representação, a articulação entre pensamentos, a realização de ações, o desenvolvimento de reflexões que questionem constantemente as ações e as submetam a uma avaliação contínua.

O professor que associa as tecnologias informáticas aos métodos ativos de aprendizagem desenvolve a habilidade técnica relacionada ao domínio da tecnologia e, sobretudo, articula esse domínio com a prática pedagógica e com as teorias educacionais que o auxiliem a refletir sobre a própria prática e a transformá-la, visando a explorar as potencialidades pedagógicas das tecnologias em relação à aprendizagem.

A aprendizagem é um processo de preparação do aluno, mas neste, o professor, além de criar ambientes que favoreçam a participação, a comunicação, a interação e o confronto de ideias do aluno, deve conduzir o estudante à aquisição do saber em jogo. Cabe ao professor promover o desenvolvimento de atividades que provoquem o envolvimento e a livre participação do aluno, assim como a interação que produz a articulação entre informação e conhecimentos conducentes à compreensão do mundo e à atuação crítica no contexto.

O professor atua como mediador, facilitador, incentivador, desafiador, investigador do conhecimento, da própria prática e da aprendizagem individual e grupal, situando-se como parceiro dos alunos, respeitando os caminhos adotados em sua evolução. Os alunos elaboram o conhecimento por meio de exploração, da navegação, da comunicação, da troca, da representação, da criação/recriação, organização/reorganização, ligação/religação, transformação e elaboração/reelaboração.

Para incorporar as tecnologias na escola, é preciso ousar, vencer desafios, articular saberes, criando e desatando os nós que se relacionam com a integração de diferentes tecnologias, as teorias educacionais, a aprendizagem do aluno, a prática do educador e a mudança em sua prática, na escola e na sociedade. Essa mudança torna-se possível ao se propiciar ao educador o domínio das tecnologias e seu uso para inserir-se no seu âmbito e no mundo.

5.2 A Geometria Dinâmica

A expressão **Geometria Dinâmica** (**GD**) hoje é largamente utilizada para especificar a Geometria implementada no computador, a qual permite que objetos sejam movidos, mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente. Este nome pode ser melhor entendido como oposição à Geometria tradicional de régua e compasso, que é "estática" e que após o aprendiz realizar a construção, se ele quiser analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição, terá que fazer outro desenho. Em função desta possibilidade de alterar objetos preservando-se a construção, pode-se dizer que a GD é uma Geometria do tipo 1-construção, N-testes, enquanto a tradicional de régua e compasso é do tipo 1-construção, 1-teste (ISOTANI e BRANDÃO, 2001). Esta é, para nós, uma das grandes vantagens da GD sobre a Geometria do lápis e papel, pois permite que o aluno teste conjecturas e procure descobrir propriedades.

Nesta situação, o aspecto dinâmico desencadeia um processo desafiador e interessante de ensino e aprendizagem. As explorações e estratégias que vão se delineando ao longo das tentativas de solucionar o problema são similares às que acontecem no ambiente de pesquisa de um matemático profissional. Esta postura investigativa contribui para formar uma concepção sobre Matemática diferente daquela constituída, ao longo da vida escolar (GRAVINA, 1996).

A discussão sobre vantagens / desvantagens pedagógicas entre as duas formas de se “fazer” Geometria pode ser conduzida sob diferentes pontos de vista. Destacamos aqui a *interatividade* e a *visualização* como mecanismos facilitadores da aprendizagem na GD.

O uso da GD no ensino da Geometria traz boas possibilidades de mudança em uma área que durante muito tempo foi relegada ao segundo plano no ensino da Matemática.

> Os livros escolares iniciam o ensino de Geometria com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos. Por exemplo, quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, altura em triângulos sempre acutângulos, entre outros. Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação. E mais, os alunos passam a acreditar que a posição relativa do desenho ou seu traçado particular façam parte das características do objeto, o que os leva a estabelecer desequilíbrios na formação dos conceitos. O aspecto de construção de objetos geométricos raramente é abordado. Dificilmente encontramos no livro escolar a instrução "construa", e, no entanto, esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos. (GRAVINA, 1996, p. 9)

Conforme assinala a autora, o modo como os conceitos de Geometria são ensinados nas salas de aula leva os alunos a adquirirem noções errôneas e particulares sobre as propriedades dos objetos geométricos. Esta é também uma dificuldade didática do professor, que, muitas vezes, além de possuir também um conhecimento limitado sobre o assunto que vai ensinar, ainda enfrenta as limitações das ferramentas de ensino (geralmente quadro e giz), sendo estas reforçadas ainda pelos livros didáticos, que, em sua maioria, apresentam os conteúdos dentro dos formatos destacados por Gravina.

De outro lado, temos visto a expansão do potencial interativo e aberto proporcionados pelos programas de GD, como nota Valente (2001). Discutindo a linguagem LOGO, ele acentua que uma “característica relevante da visão do computador como ferramenta é o ambiente aberto, ou seja, o aprendiz é livre para propor e resolver qualquer projeto que tenha interesse”.

No ensino tradicional, geralmente o aprendiz não é incentivado a ter atitude investigativa (ativa), não sendo desafiado a elaborar seu conhecimento. Em uma aula de Matemática tradicional, o professor enuncia conceitos, definições e propriedades que, muitas vezes, são apenas memorizados e futuramente reproduzidos pelo aluno sem sua devida compreensão. Segundo Melo et all apud Brandão e Isotani (2003), se o aluno agir ativamente, modificando características de vários objetos matemáticos, ele aprenderá pesquisando, relacionando as modificações feitas, analisando e verificando o que ocorre genericamente.

Com efeito, a Geometria dinâmica nos oferece uma nova proposta que visa a explorar os mesmos conceitos da Geometria clássica, porém, por meio de um programa interativo. Assim é possível disponibilizar representações gráficas de objetos geométricos que aproximam o objeto material da tela do computador (desenho) ao objeto teórico (figura), favorecendo o desenvolvimento de uma leitura geométrica dos desenhos por parte do aprendiz, contornando, assim, uma das dificuldades do ensino da Geometria.

Segundo King e Schattshneider (1997) apud Isotoni e Brandão (2001), destacam-se como principais benefícios e aplicações de um sistema computacional de Geometria Dinâmica: a prova de teoremas, a precisão e visualização, as explorações e descobertas, as transformações e lugares geométricos e, por fim, a simulação de micromundos:

• **Prova de teoremas:** embora a Geometria Dinâmica não possa provar teoremas, a capacidade de experimentação de hipóteses pode motivar a busca pela prova de um teorema, pois induz à convicção de sua validade. Da mesma forma, pode ajudar e sugerir caminhos para a prova formal.

• **Precisão e visualização:** a Geometria é feita pelo estabelecimento de relações geométricas entre os elementos (perpendicularismo, paralelismo, pertinência, ângulo etc). Pode-se medir ângulos e distâncias e calcular relações com precisão, permitindo facilmente a verificação empírica de hipóteses e teoremas. Os conceitos de um teorema podem ser compreendidos por visualização. Adicionalmente, a precisão também é importante porque construções imprecisas podem conduzir o aluno a conclusões errôneas.

• **Explorações e descobertas:** a manipulação de construções permite que se explore a Geometria e que "novas" relações e propriedades sejam descobertas. Muitas vezes, os próprios alunos "re-descobrem" teoremas em sala de aula.

• **Transformações e lugares geométricos:** pela sua capacidade de realizar transformações em figuras geométricas, programas de Geometria Dinâmica são ideais para o estudo de isometrias, similaridades e outras funções. Animando figuras e traçando lugares geométricos de pontos predefinidos, estes aplicativos também podem explicitar problemas e propriedades normalmente não abordadas na literatura por sua inerente dificuldade.

• **Simulação de micromundos:** indo muito além da abstração da Geometria, as simulações que podem ser construídas com programas de Geometria Dinâmica permitem ilustrar conceitos de Cinemática e Óptica, entre outros. Por outro lado, oferecem também a possibilidade de criação de micromundos geométricos, a exemplo daqueles concebidos no âmbito da linguagem **LOGO** (PAPERT, 1994). Neles, o aluno pode vivenciar experiências geométricas, algumas preconcebidas pelo professor e muitas outras descobertas ao acaso, mediante a exploração interativa e de sua criatividade.

Souza (2001) ressalta que, por meio da “prova de teoremas”, podemos acrescentar outra razão para o uso da GD: os contraexemplos. Com a GD o estudante pode mais facilmente encontrar uma configuração que sirva de contraexemplo a uma conjectura em estudo. Esta observação também pode servir como resposta a uma das críticas mais comuns contra a GD: a visualização dispensaria, ou desestimularia, a necessidade de prova matemática.

Em resumo, como a GD possibilita visualizar uma mesma construção de várias formas, e, dessa maneira, facilita a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos, podemos utilizar um programa de GD para revelar relações geométricas intrínsecas que poderiam passar despercebidas numa representação estática. Com isso, podemos incentivar o espírito investigativo do estudante, solicitando ao final uma justificativa para as relações encontradas (a prova matemática).

5.3 Softwares de geometria dinâmica explorados com os alunos: *Cabri-Géomètre* e *Geogebra*

Apesar de termos trabalhado as atividades da pesquisa com o Cabri, fizemos também uma apresentação do Geogebra a fim de que os alunos conhecessem um outro software de geometria dinâmica. Os alunos exploraram, também no Geogebra, algumas das atividades da pesquisa realizadas com o Cabri.

Estes softwares permitem ao usuário explorar e elaborar diferentes conceitos matemáticos. Apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o pensar matematicamente, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas.

São particularidades desses programas:

a) conter características e aspectos do conhecimento matemático;

b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático;

c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; e

d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Para o aprendizado da Geometria, os programas dispõem de régua e compasso virtuais e objetos de construção em linguagem clássica de Geometria – reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz etc. Feita uma construção, pode-se aplicar movimento aos seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura – daí serem denominados programas de Geometria Dinâmica.

Esses também enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas. Por exemplo: para o Teorema de Pitágoras, partindo do triangulo retângulo e dos quadrados construídos sobre seus lados, podemos construir uma família de "paralelogramos e movimento" que, conservando a área, mostra por que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas construídas sobre os seus catetos.

A seguir faremos apresentação do Cabri e Geogebra e funções que foram exploradas com os alunos durante a aplicação das sequências didáticas.

5.4 Conhecendo o software Cabri-Géomètre

O Cabri-Géomètre é um *software* didático para o estudo da Geometria. Foi desenvolvido na França, a partir da década de 1980, no Instituto de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Joseph Fourier - UJF, em Grenoble (a UJF é registrada como proprietária do software Cabri). A sigla Cabri vem do francês Cahier de Brouillon Informatique, que significa Caderno de Rascunho Informático. Um grupo de especialistas trabalhou durante quatro anos na elaboração desse *software*, sob a coordenação de Jean Marie Laborde[5] e de Frank Bellemain[6]. (BONGIOVANNI, 1997). Atualmente, o Cabri é utilizado em cerca de 40 países, traduzido em mais de 20 idiomas.

O Cabri permite a criação de objetos matemáticos na tela do computador e a manipulação direta sobre eles. Tudo o que se faz com um lápis, régua e compasso em um papel pode ser feito no Cabri, com o grande diferencial do movimento, diferencial que permite ao professor desmistificar determinados conceitos que na maioria das vezes são complicados para o aluno.

Em questão de segundos, com suporte em um só desenho, pode-se ter inúmeros triângulos desenhados na tela do computador (diferentes visualizações de um triângulo

[5] Fundador e Diretor de Investigação do Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática (LSD2) do Instituto de Informática e Matemática Aplicada de Grenoble (IMAG). Graduou-se em Matemática (1969) na Escola Normal Superior de Paris. Obteve doutorado em Ciência Computacional (1977) pela Universidade de Grenoble - França.

[6] Doutor em Ciência Computacional (1992) pela Universidade de Joseph Fourier -França.

desenhado inicialmente e modificado de forma dinâmica), portanto pode-se explorar o que é imutável nas figuras. Não basta apenas desenhar uma figura, sendo preciso preservar as relações geométricas. Por exemplo, pode-se desenhar um quadrado fazendo um traçado cuidadoso, verificando suas medidas, porém só será de fato um quadrado se, ao ser movimentado, continuar com as propriedades de um quadrado.

As figuras nele construídas podem ser deformadas desde o deslocamento de seus elementos de base ou, ainda, com opções de animação, conservando-se suas propriedades. É possível marcar e medir ângulos, distâncias, áreas de superfícies e observar as alterações em tempo real, durante a manipulação dinâmica das figuras.As possibilidades oferecidas pelo Cabri demonstram a preocupação fundamental que originou a sua concepção: auxiliar o aluno na conquista do seu conhecimento.

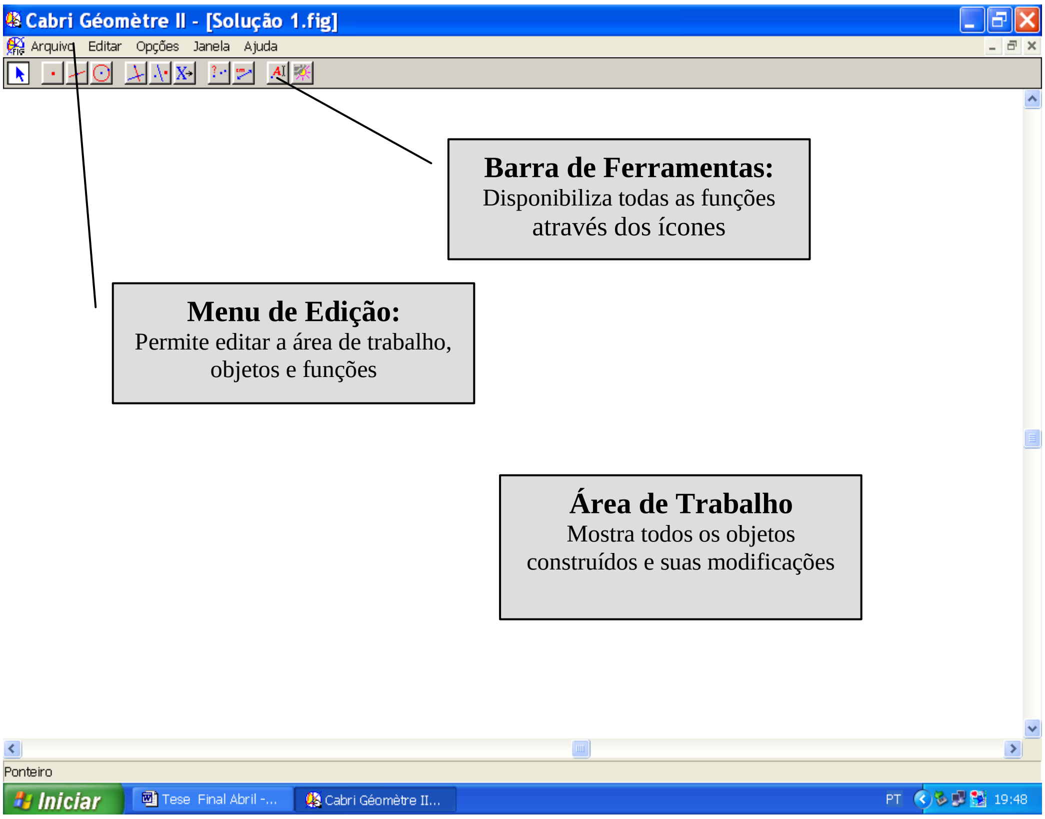


Figura 24 – Interface do *software Cabri-Géomètre II*

O *Cabri-Géomètre* é um programa que estimula e dinamiza o ensino de Geometria. Consiste em um “pacote” para a construção geométrica das figuras; lida com pontos, linhas, círculos e suas relações Vejamos no Quadro 7 as evoluções do programa.

Quadro 7 - Evoluções do software *Cabri-Géomètre*

1981-1985	Trabalho sobre o Cabri em teoria dos grafos.
1985	Especificações informais para a criação de um caderno de rascunho informático.
1986	Protótipo de Cabri (três teses de doutoramento).
1987	Pré-produto e experimentações em classes.
1988	Troféu Apple pela melhor software para o ensino de Geometria. 1ª demonstração pública (ICME-Budapeste).
1989	Primeira edição do Cabri na França. Adoção generalizada na Suíça.
1990	Habilitação do projeto IMAG Cabri-Géomètre.
1992	Criação do grupo de pesquisa internacional Cabri.
1993	Cabri é traduzido em 25 línguas e comercializado em 40 países. No Brasil, o software é comercializado pela PUC-SP[7].
1999	Difusão do software Cabri-Geómètre II
2003	Criação do Cabri-Geómètre II - Plus
2005	Surge o Cabri 3D v2 para exploração do espaço tridimensional

Fontes: Site www.cabri.com.br

O *Cabri-Géomètre* é um *software* matemático muito utilizado. É um programa aberto e interativo, que permite ao aluno ampla possibilidade para elaborar o próprio conhecimento por meio das construções geométricas dinâmicas possibilitadas pelo *software*. O CG[8] é útil também para se trabalhar com Álgebra, Trigonometria, Física, Geometria Espacial, Geometria Descritiva e Educação Artística. Atualmente, está na sua segunda versão, que é o CG II. Vejamos algumas de suas características.

- Inclui Geometria Analítica, Transformacional e Euclidiana;
- permite a construção intuitiva de pontos, retas, triângulos, polígonos, círculos e outros objetos básicos;
- translada, amplia (ou reduz) e gira os objetos geométricos em relação aos seus centros geométricos e a pontos especificados, além de possibilitar a simetria axial, central e a inversão dos objetos;
- constrói facilmente cônicas, entre as que incluem elipses e hipérboles;
- explora conceitos avançados em Geometria Descritiva e Hiperbólica;
- constrói e mede figuras, com atualização automática dos valores quando são movimentadas;
- utiliza coordenadas cartesianas e polares;

[7] O Cabri é disponível através das mídias de CD-ROM e disquete. Para sua instalação, basta que o computador tenha, no mínimo, a seguinte configuração: 486/ Windows 3.1/ 8MB RAM/ SVGA/ Mouse. Maiores informações sobre o programa no site: www.cabri.com.br.

- proporciona a apresentação das equações de objetos geométricos, incluindo retas, circunferências, elipses e coordenadas de pontos;
- permite aos usuários a criação de macros para as construções que se repetem com frequência;
- permite ao professor configurar os menus das ferramentas para "disponibilizar" somente as funções que achar necessárias, de acordo com o nível dos estudantes;
- comprova as propriedades geométricas para provar hipóteses baseadas nos cinco postulados de Euclides;
- oculta objetos utilizados nas construções para melhor organização da tela;
- permite diferenciar os objetos mediante o uso de cores e linhas variadas;
- calcula lugares geométricos;
- ilustra as características dinâmicas das figuras por meio de animações;
- permite ao usuário guardar arquivos e macros em disco; e
- possibilita rever, passo a passo, o histórico da última construção efetivada.

5.4.1 Explorando funções do *Cabri-Géomètre II*

As várias características do CG II, quando bem exploradas pelo professor, poderão contribuir significativamente para a aprendizagem da Geometria e para a investigação Matemática. Vejamos na sequência explorações que realizamos acerca de funções do *software* com os alunos pesquisados:

- O CG possibilita a criação de pontos com diferentes relações entre os objetos. É essencial que, nos primeiros contatos com o programa, o aluno seja esclarecido sobre as diferentes funções do ponto. No ícone do ponto, podemos encontrar as opções: ponto, ponto sobre objeto e ponto de intersecção. É importante que o professor leve o aluno a fazer construções idênticas, utilizando os diferentes tipos de pontos para que ele possa observar a diferença de cada um quando a figura é movimentada. No exemplo, a figura 25 - a é resultante da construção de retas perpendiculares, onde os pontos A e B foram marcados como ponto de intersecção dos círculos de centros C e D. Já na figura 25 - b, apenas o ponto A foi marcado como ponto de intersecção, o ponto B foi marcado como ponto sobre objeto, ficando aparentemente sobre a intersecção dos círculos, mas sendo fixado

[8] Daqui por diante, adotaremos a notação CG para o nome *Cabri-Géomètre*.

sobre o círculo de centro C. Se movimentarmos, para qualquer direção, a reta AB da Figura 25 - a, ela continuará perpendicular a CD, pois foi construída a partir dos pontos A e B; no caso de movimentarmos a reta AB da Figura 25 - b, ela não continuará perpendicular a CD, pois, como o ponto B foi marcado sobre o círculo de centro C, a reta se deslocará junto com ele sobre o mesmo objeto, nesse caso, sobre o círculo de centro C. Por isso, é essencial que se conheça a função do ponto para que se possa fazer construções estáveis e que mantenham suas propriedades iniciais.

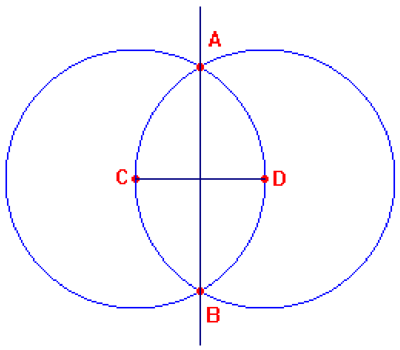


Figura 25 - a

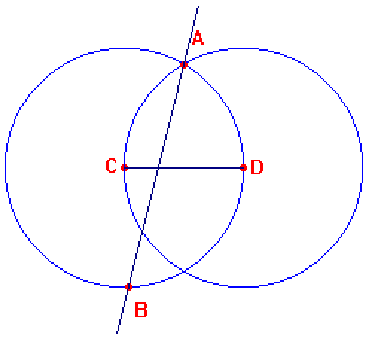


Figura 25 - b

- Verificação de propriedades: o CG possui opções que permitem verificar a existência de propriedades geométricas entre objetos. A utilização dessa verificação é muito importante para que o aluno possa analisar os possíveis erros em uma construção que tenha realizado, levando-o a refletir sobre outras formas de fazer a mesma construção de maneira a garantir as propriedades. É importante também a exploração de atividades do tipo *caixa-preta*, sobre as quais o aluno deverá levantar hipóteses sobre as possíveis relações entre os objetos de uma figura, podendo então utilizar os comandos de verificação para investigar a existência de determinadas propriedades que tenham dado origem à construção que está analisando. Apesar de, no plano visual, as propriedades parecerem verdadeiras, verificamos na figura 26 - a que as retas r e s são paralelas e na figura 26 - b que os pontos A, B e C não são colineares.

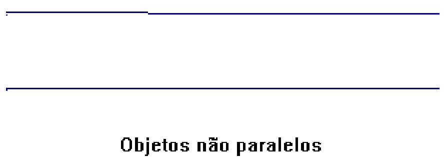


Figura 26 - a

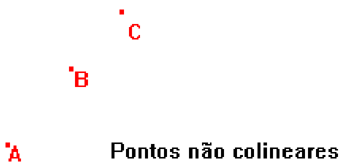


Figura 26 - b

- *O uso do compasso no CG.* Para se fazer construções geométricas no ambiente lápis e papel, utilizamos o compasso como instrumento auxiliar para transferência de medidas. No CG a transferência de medidas poderá ser realizada com a construção de uma circunferência de raio igual a um segmento dado. Nesse caso, a circunferência inicial deve ser construída com centro em uma das extremidades do segmento, determinando seu raio na outra extremidade do segmento dado, podendo essa medida ser transportada através da intersecção de várias circunferências de mesmo raio. Esse tipo de transporte de medida muitas vezes não é o ideal, principalmente quando a transferência deve ser feita para um local determinado. Para casos como este, se faz necessária a utilização do compasso, pois este possibilita o transporte da medida para qualquer ponto determinado. Para utilizarmos o compasso do CG, basta selecionar a opção compasso, clicar sobre um segmento dado ou sobre suas extremidades e darmos um segundo clique no ponto que deverá ser o centro da circunferência criada. A dinâmica do CG mantém as relações entre a medida inicial e a medida transportada, de maneira que, se o segmento inicial for alterado, o segmento criado pelo compasso também passará pela mesma alteração. A medida do segmento AB (figura 27- a) foi transferida pela opção compasso para o círculo de centro C (figura 27- b); ao se aumentar o segmento AB (figura 27- c), o raio do círculo também passa pela mesma alteração (figura 27- d).

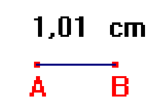


Figura 27 - a

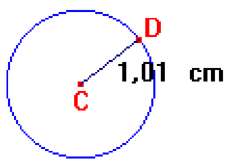


Figura 27 - b

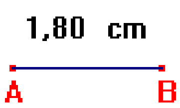


Figura 27 - c

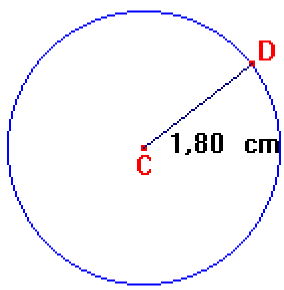


Figura 27 - d

- Uma vez construídas sob princípios geométricos, as figuras podem ser movimentadas, conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas, permitindo observar modificações em tempo real durante o uso do *software*: o professor pode solicitar aos alunos que construam a figura 28-a, pedir que movimentem o vértice B e observem como se comporta a medida do ângulo B (figura 28-b); após observarem, poderá solicitar que tentem justificar, por meio de propriedades geométricas, os resultados da observação.

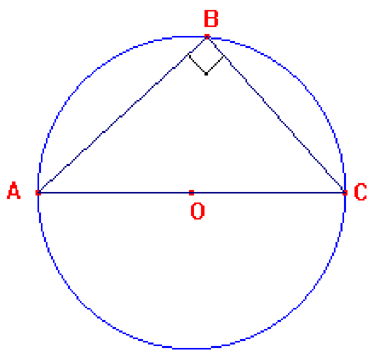


Figura 28 - a

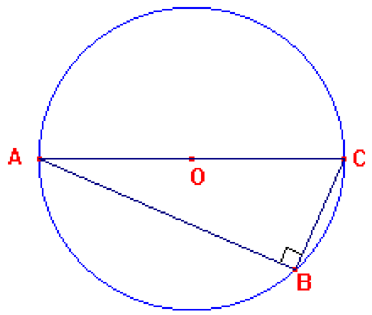


Figura 28 - b

- O professor pode suprimir ou adicionar recursos dos menus: na figura 29 - a, o menu inclui todas as opções permitidas pelo programa. Digamos que o professor tenciona trabalhar com construções de retas perpendiculares, de maneira que os alunos façam suas construções sem utilizar a opção Reta Perpendicular que já traz a construção pronta. O professor poderá suprimir a opção do menu, conforme vemos na figura 29 - b.

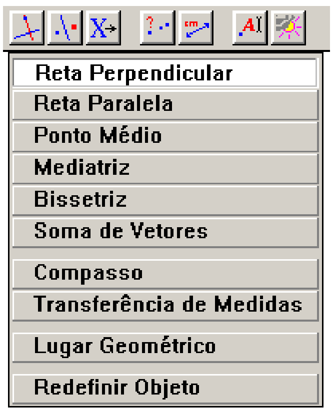


Figura 29 - a

Figura 29 - b

- Possibilita a investigação de propriedades geométricas e a formulação de conjecturas (hipóteses, suposições): o professor poderá solicitar que os alunos construam a figura 30 - a e movimentem as retas r e s, observando as relações entre os valores dos ângulos opostos e adjacentes (figura 30 - b). Após as observações, o professor poderá fazer intervenções junto aos alunos mediante questionamentos, subsidiando-os com as informações necessárias para que possam levantar hipóteses sobre as relações estabelecidas entre os ângulos e valores observados.

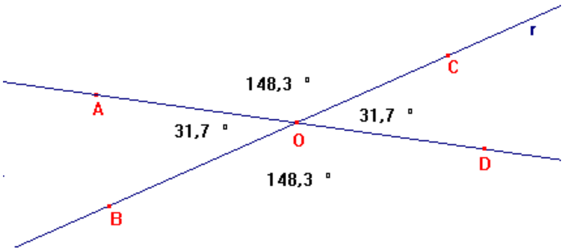


Figura 30 - a

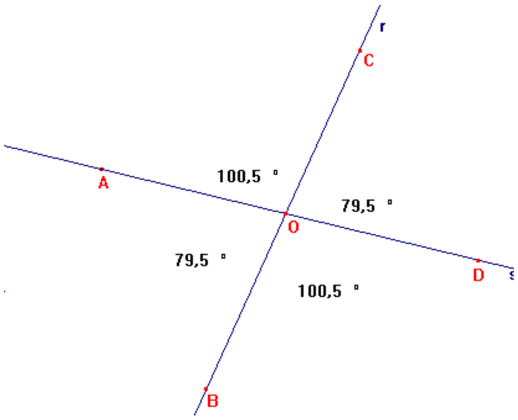


Figura 30 - b

- *Permite construir figuras geométricas e estabelecer relações entre os seus componentes:* dado um triângulo retângulo (figura 31 - a), o professor poderá solicitar aos alunos que, com base nele, construam geometricamente o Teorema de Pitágoras (31 - b); se a construção estiver correta (do ponto de vista geométrico e das condições de fixação dos objetos no programa), quando os alunos movimentarem os lados do triângulo, perceberão que as propriedades do Teorema serão mantidas, apenas as áreas dos quadrados serão alteradas de acordo com as medidas dos lados do triângulo.

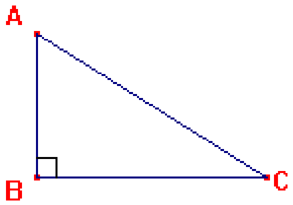


Figura 31 - a

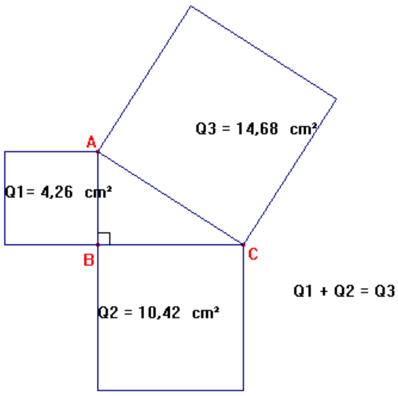


Figura 31 - b

- *Permite reproduzir etapas utilizadas na construção de uma figura:* mediante a reprodução dos passos utilizados em uma macroconstrução, é possível o aluno entender e visualizar cada passo necessário ou desnecessário para a construção de determinada figura; permite também ao professor verificar as passagens percorridas pelo aluno na resolução das atividades propostas. Assim, dada uma figura, é possível vermos cada etapa de sua construção. No exemplo abaixo (figura 32 - a), apresentamos duas etapas de sua construção (figuras 32 - b e 32 - c).

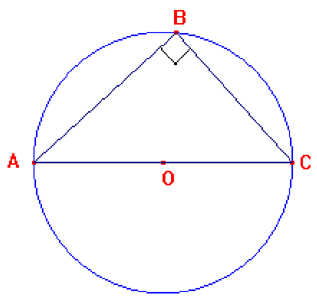


Figura 32 - a

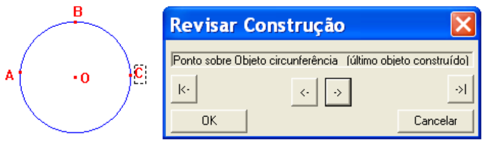


Figura 32 - b

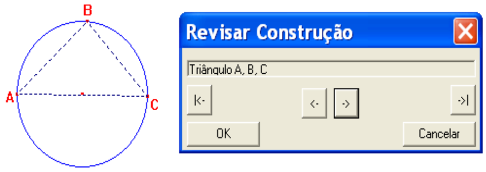


Figura 32 - c

- *Permite ocultar linhas dos objetos auxiliares de uma construção:* na construção de qualquer figura, é possível esconder os objetos que lhe deram origem. Podemos verificar essa característica na construção do quadrado ABCD (figura 33 - a). Para garantirmos as propriedades do quadrado, sua construção foi obtida a partir da circunferência e no traçado de retas perpendiculares. Assim, as retas e a circunferência poderão ser ocultadas (figura 33 - b), para que apenas o quadrado fique visível (figura 33 - c). O professor poderá utilizar esse artifício a fim de levar os alunos a explorarem e descobrirem as propriedades de figuras apresentadas. Esse tipo de atividade foi denominado pelos pesquisadores franceses de *situação caixa-preta*, com vistas à investigação, à descoberta e à compreensão das propriedades geométricas da figura.

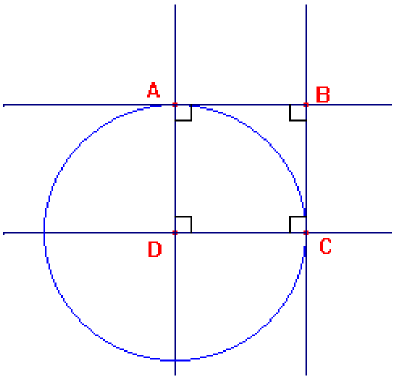


Figura 33 - a

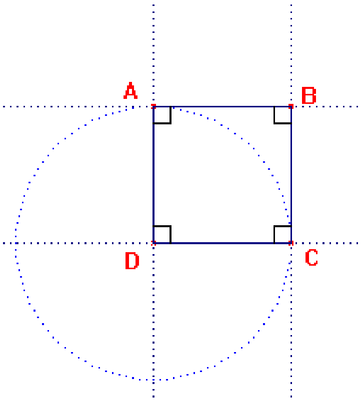


Figura 33 - b

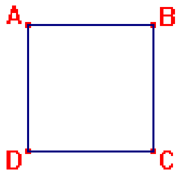


Figura 33 - c

Esses exemplos são apenas algumas ilustrações sobre possibilidades de exploração do programa. Com base na exploração que realizamos, constatamos que o software permitiu aos alunos explorar e verificar o que ocorre em diversas situações, proporcionando-lhes oportunidades de fazer conjecturas, testar suas convicções, melhorar sua visualização espacial, observar e confirmar as propriedades das figuras e buscar demonstrações, aponta características essenciais e determinantes na aprendizagem Matemática. Para que, no entanto a aprendizagem se torne eficaz, é necessário que elas sejam acompanhadas de reflexões Matemáticas, a fim de que o estudante compreenda passo a passo o que está sendo realizado. É importante que o aluno seja capaz de reproduzir no papel as propriedades que identificou na tela do computador, decorrentes de suas realizações. Nos trabalhos desenvolvidos com o uso do computador, o professor deverá ter o papel de mediador e orientador do aluno, enquanto este procura fazer suas descobertas por intermédio das atividades propostas e de possíveis experimentações.

O CG é um *software* que apresenta as características que permitem utilizar o computador como ferramenta auxiliar para investigação de como se dá a construção de conceitos geométricos. Ele é definido como um conjunto de objetos elementares (ponto, reta etc.) e por ações elementares (traça uma reta paralela a uma reta dada, determina o ponto médio de um segmento, etc.). Dessa forma, esse *software* permite certa interatividade do aluno com o meio e possibilita fazer, por comandos bem definidos em linguagem geométrica, as construções que se fazem no ambiente com papel e lápis.

O CG permite explorar a Geometria, com a manipulação de objetos geométricos de base e preserva as propriedades geométricas dos objetos construídos com ações elementares.

Essas características, segundo Laborde e Capponi (1994), ajudam o aluno a diferenciar a relação desenho (reprodução da imagem) e figura (construção da imagem de acordo com as propriedades geométricas). Segundo esses autores, essa relação se torna muito mais difícil no ambiente com papel e lápis, pois, em razão do caráter estático do desenho, não facilita a identificação das propriedades.

A manipulação de objetos geométricos de base, no ambiente CG, flexibiliza a interação do aluno com esse meio, numa situação de ação, na medida em que o obriga a fazer escolhas e tomar decisões. Como resultado dessa ação, o ambiente CG retorna informações (*feedback*) que permitem ao aluno julgar o resultado de sua produção e, se necessário, tomar novas decisões que o levem a mudá-la ou melhorá-la.

Através das explorações que fizemos junto ao software, acreditamos que este promove processos de aprendizagem específicos de alcance difícil por outras mídias. É um ambiente desafiador para o professor e para o aluno. Além de ser voltado para o ensino da Matemática, é também propício a pesquisas e experimentações matemáticas.

5.5 Conhecendo o software *Geogebra*

O *GeoGebra* é um *software* de matemática dinâmica que combina Geometria, Álgebra e Cálculo com o mesmo grau de importância. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores com a finalidade de aprender e ensinar Matemática nas escolas. É um *software* gratuito, de fácil instalação, possui linguagem clara, comando simples e está disponível em 22 idiomas.

O software pode ser acessado diretamente do *site* www.geogebra.org ou através da instalação por meio de *download* disponível no próprio *site*. Possui código aberto e funciona em qualquer plataforma (Windows, Linux, Macintosh etc). Durante todo o trabalho, podemos acessar a Ajuda do GeoGebra (http://www.geogebra.org/help/docupt_br.pdf) ou simplesmente teclando F1 no teclado. Nele podem ser feitas construções geométricas (pontos, vetores, segmentos, seções cônicas, linhas e funções em geral), permitindo a manipulação dinamicamente com a alteração de suas coordenadas (BRANDÃO, 2009).

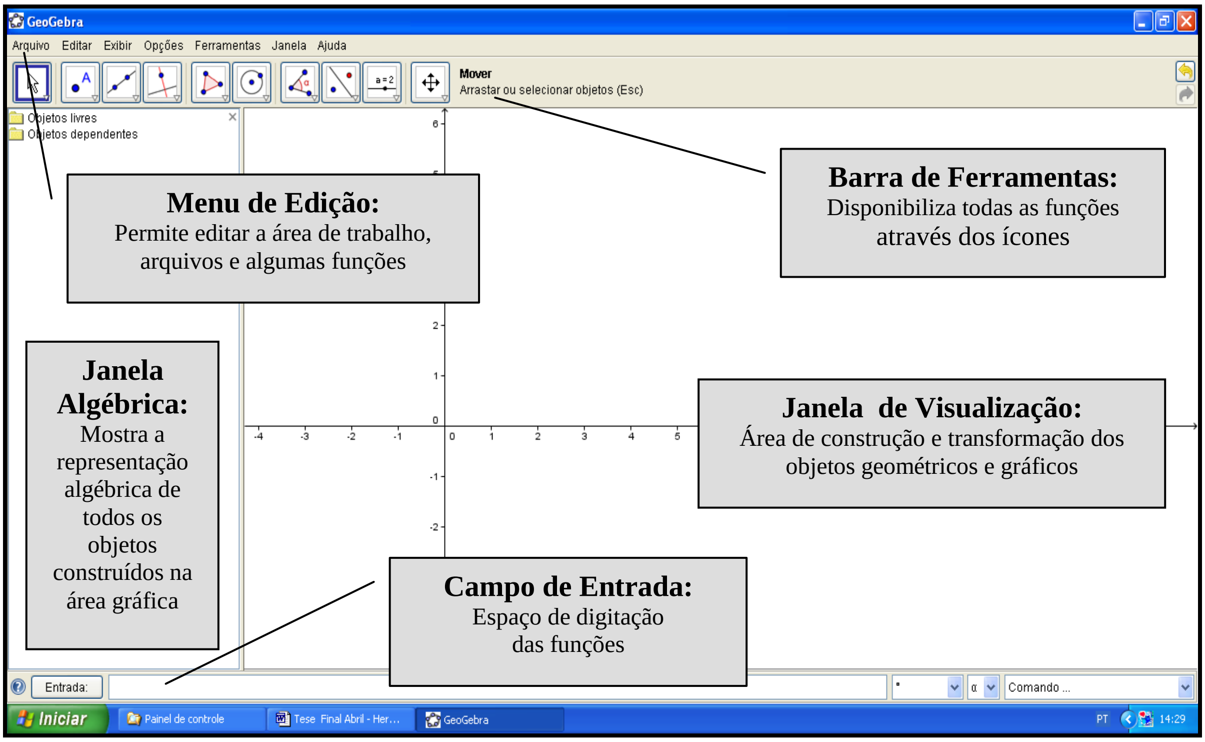


Figura 34: Interface do *software* Geogebra

O GeoGebra 3.0 fornece duas diferentes vistas dos objetos matemáticos: a **zona algébrica** e a **zona gráfica ou área de trabalho** Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em duas diferentes representações: algebricamente e graficamente. Todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer uma delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Na zona gráfica, são feitas construções geométricas das figuras ou os gráficos das funções representadas. Pode-se construir na zona gráfica com auxílio do *mouse* usando as ferramentas disponíveis na barra de ferramentas ou mediante comandos na entrada de comandos. Para cada representação gráfica ou geométrica, aparece sua relação correspondente na zona algébrica. Para inserir expressões diretamente na zona algébrica, devem ser digitadas na entrada de comandos e em seguida se tecla “Enter”. A expressão algébrica digitada aparece na zona algébrica e sua respectiva representação gráfica se mostra na zona gráfica. (BRANDÃO, 2009).

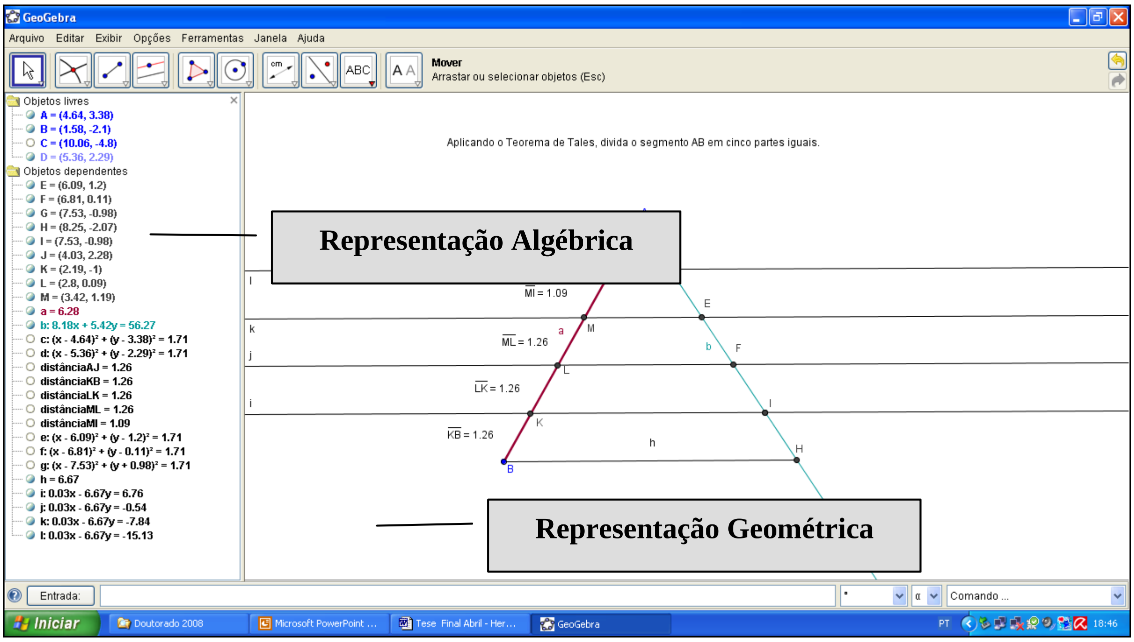


Figura 35: Representações Algébrica e Geométrica de uma Aplicação do Teorema de Tales

5.5.1 Explorando funções do *Geogebra*

- *Permite reproduzir todos os comandos utilizados na construção:* mediante um protocolo, possibilita ao aluno revisar passo a passo toda a construção, permitindo assim uma análise e possíveis correções no caminho percorrido; permite também ao professor verificar como o aluno resolveu a atividade proposta e se sua solução corresponde ao esperado. Vejamos o exemplo abaixo:

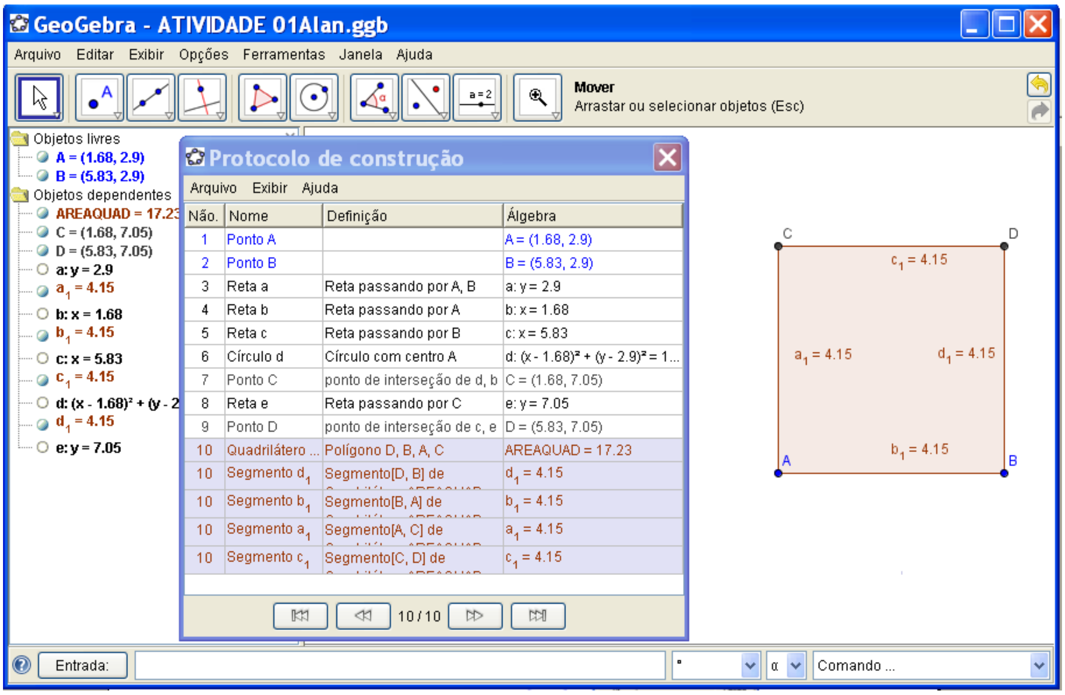


Figura 36: Protocolo de revisão de uma construção geométrica no Geogebra

- *Permite ocultar linhas dos objetos auxiliares de uma construção:* da mesma forma que o *Cabri*, o *Geogebra* também permite ocultar objetos auxiliares das construções. As figuras 37 - a e 37 - b, mostram os objetos que auxiliaram a construção do quadrado ACED – figura 37 - c.

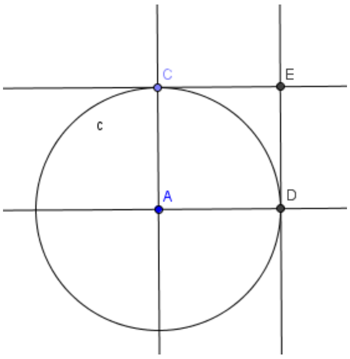


Figura 37 - a

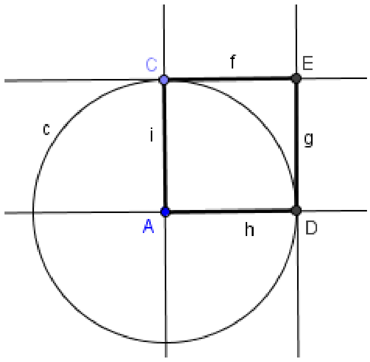


Figura 37 - b

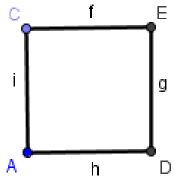


Figura 37 - c

- *Permite verificar a relação entre dois objetos:* esta função, similar a uma existente no Cabri, possibilita a verificação da relação entre dois objetos. Na figura abaixo, a mensagem ressalta que as retas j e k são paralelas. A função permite a verificação de vários tipos de relações que possam existir entre objetos geométricos como: perpendicularidade, igualdade, simetria etc.

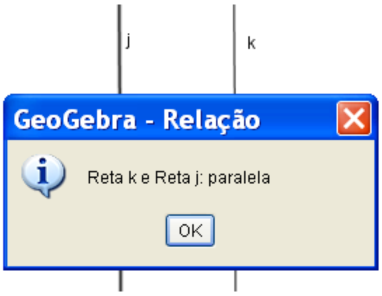


Figura 38 - a

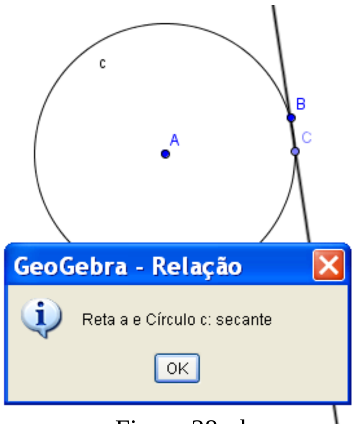


Figura 38 - b

- *Permite realizar a medição de ângulos internos e externos:* a ferramenta para medir os ângulos internos e externos é a mesma, o que irá diferenciar na hora da medição é a ordem de escolha dos pontos do ângulo. Por exemplo, na figura 39 - a, a medida do ângulo interno foi obtida clicando nos pontos na ordem CÂB e na figura 39 - b, a medida do ângulo externo foi obtida clicando nos pontos na ordem BÂC.

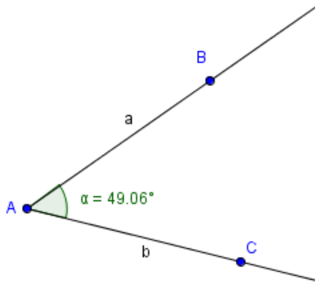


Figura 39 - a

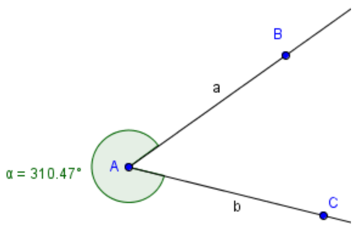


Figura 39 - b

- *Permite a criação de objetos simétricos através da simetria axial e central:* na figura 40 - a obtivemos o ponto A' simétrico de A em relação à reta a (simetria axial) e na figura 40 - b, obtivemos o ponto A' simétrico de A em relação ao ponto C (simetria central). No Geogebra, a ferramenta que determina a *simetria axial* aparece nomeada como *reflexão com relação a uma reta* e a *simetria central* aparece nomeada como *reflexão em relação a um ponto.*

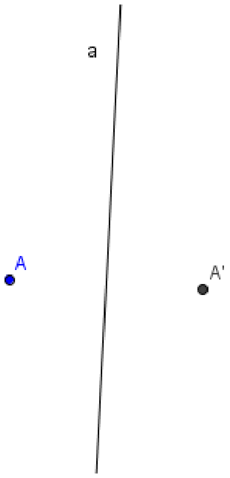


Figura 40 - a

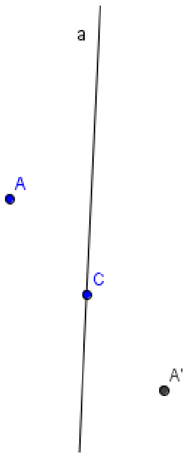


Figura 40 - b

Apresentamos aqui algumas funções básicas do Geogebra, todas elas também fazem parte do software Cabri-Géomètre. Uma das funções que amplia a dinâmica das construções no Cabri é a animação das figuras, função esta não presente no Geogebra, no entanto, vale relembrar que este é gratuito, sendo disponível para todos que tiverem interesse em trabalhar com a Geometria Dinâmica.

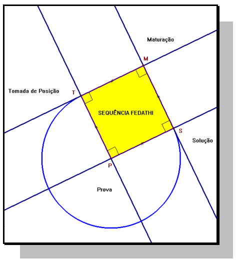
Concluindo

O capítulo ressalta inicialmente a importância da formação do professor para o uso das tecnologias digitais na educação, como complemento pedagógico na aquisição dos objetivos educacionais. Para tanto, se faz necessário que o professor faça uma inter-relação entre as teorias de ensino, os conteúdos a serem ensinados e as ferramentas tecnológicas.

Em relação a matemática, as tecnologias digitais e seus recursos atuais podem fazer um grande diferencial no ensino e na aprendizagem desta disciplina, propiciando experimentações, visualizações e demonstrações, praticamente impossíveis de serem feitas no ambiente lápis e papel.

Foram apresentadas funções dos softwares Cabri- Géomètre e Geogebra, através de exemplos que procuraram demonstrar a importância destas funções no desenvolvimento de atividades matemáticas.

A incrementação dos conceitos matemáticos nos ambientes computacionais, aliados a uma proposta de ensino adequada, propiciam aos alunos novas e consistentes visões acerca da matemática, assemelhando o processo de aprendizagem ao do trabalho do matemático. Pensando neste ambiente e suas possibilidades, buscamos inspiração para desenvolver a pesquisa de campo que será apresentada no capítulo a seguir, que tem como base a aplicação a aplicação aplicação



6 Desenvolvimento da Pesquisa

6 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

É fazendo que se aprende a fazer aquilo que se deve aprender a fazer.

Aristóteles

6.1 Metodologia de realização do experimento

Os procedimentos metodológicos do experimento tiveram como fundamento teórico a *Sequência Fedathi*, com apoio em elementos da Didática da Matemática.

A opção metodológica ocorreu em virtude da adequação do modelo ao nosso objeto de estudo, o qual está diretamente ligado à sala de aula.

A escolha é resultante do estudo que vimos realizando com a Sequência Fedathi desde nosso trabalho de mestrado, como, também, por considerá-la um modelo de ensino que muito tem a contribuir com o aprendizado da matemática. Além disso, tivemos o intuito de identificar, elementos que pudessem enriquecer e aprimorar a utilização da Sequência no ensino da Matemática mediado por computador.

6.2 Ambiente da pesquisa

A pesquisa de campo foi desenvolvida com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, situado no *Campus* da Cidao, na cidade de Sobral, região norte do Estado do Ceará. O Curso é noturno e atende alunos de cerca de 30 municípios circunvizinhos a Sobral.

O curso foi criado em 1973, inicialmente como Ciências - Licenciatura de 1º grau, formando professores para o ensino de Matemática, Ciências Físicas e Biológicas para o Ensino Fundamental II, passando em 1987 para Ciências - Habilitação Plena em Matemática, ampliando a formação dos professores para o ensino da matemática no nível médio.

Desde sua criação, passou por algumas reformulações e atualizações (dados obtidos dos Projetos Políticos-Pedagógicos do Curso dos anos de 1993, 1999 e 2005).

QUADRO 8 - Reformulações do Curso de Licenciatura em Matemática – UVA

ANO	NOMENCLATURA	INTEGRAL. CURRICULAR
1973	Ciências – Licenciatura de 1º Grau Implantação do Curso para formação de professores de Ciências e Matemática para o Ensino Fundamental II	6 semestres
1987	Ciências – Habilitação Plena em Matemática Ampliação para formar professores de Matemática para o Ensino Médio	9 semestres
2000	Licenciatura Plena em Matemática Mudança na estrutura curricular para formar apenas professores de Matemática para o Ensino Fundamental II e Ensino Médio	8 semestres
2003	Licenciatura Plena em Matemática Pequenas alterações – inclusão de disciplinas na grade curricular de 2000	9 semestres
2006	Licenciatura em Matemática Mudanças objetivando atender, principalmente, as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em relação a regulamentação das disciplinas de Estágio, Prática de Ensino e Atividades Científico-Culturais.	8 semestres

Fonte: Projetos Políticos-Pedagógicos do Curso de Licenciatura em Matemática - UVA

Conforme Projetos do Curso, observamos que as reformulações foram, em sua maioria, realizadas para atender legislações de âmbito institucional e/ou nacional.

O Curso possui atualmente em seu corpo docente: 13 professores efetivos, três substitutos e cinco colaboradores, totalizando 21, os quais se revezam para atender sua demanda e as demandas em Matemática de outras graduações da Universidade. Em relação à titulação dos professores o quadro se apresenta da seguinte forma: 2 doutores, 6 mestres, 10 especialistas e 3 graduados.

O Curso é noturno e oferece anualmente 100 vagas no processo seletivo do vestibular, 50 em cada semestre. Apesar do número de admissões, formam-se anualmente aproximadamente 30 alunos, número um pouco maior do que a média nacional das universidades estaduais, que é de aproximadamente 27 alunos/ano (SBM, 2001, p.7).

O Curso funciona vinculado ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET e ainda é a única Licenciatura em Matemática da região norte em regime regular (com aulas diárias, durante todo o semestre letivo), sendo responsável pela formação de grande parte dos professores de Matemática da região.

6.3 Desenvolvimento da disciplina Novas Tecnologias no Ensino da Matemática

A disciplina *Novas Tecnologias no Ensino da Matemática*, junto a qual realizamos a pesquisa, foi inserida no Curso na reforma curricular de 2000, junto às disciplinas do último semestre, sendo atualmente uma disciplina do penúltimo período. Inicialmente possuía quatro créditos, passando a seis créditos na reforma curricular de 2006 (Anexo 1). Consideramos importante contextualizar a criação da disciplina, justificando sua importância e necessidade junto ao Curso, uma vez que esta era uma discussão que vinha sendo feita em âmbito nacional e mundial, em razão do desenvolvimento tecnológico e suas aplicações nos vários setores e segmentos sociais, inclusive na educação. Nossa asserção vai ao encontro do que ressaltam Cláudio e Cunha:

> Os programas oficiais das diferentes disciplinas dos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática começam a fazer referência à utilização de ferramentas computacionais que possibilitam um melhor entendimento de fórmulas e conceitos permitindo um raciocínio mais realista dos problemas matemáticos que ocorrem cotidianamente. A informatização dos currículos é, hoje, uma realidade dos países desenvolvidos e em desenvolvimento. Ela busca um acesso mais rápido ao conhecimento, moeda de transação do próximo milênio. (CLAÚDIO e CUNHA, 2001, p. 167).

A implementação do Proinfo – Programa Nacional de Informática na Educação[9], potente projeto lançado pelo MEC em 1997, também demandou discussões, parcerias e programas de formação junto a escolas, secretarias e universidades, tendo como foco não só a montagem de laboratórios de Informática, como também a formação dos professores, conforme Cysneiros:

> Pela primeira vez – antes de mandar artefatos para as escolas - o Estado alocou somas consideráveis para a formação de recursos humanos, montou um sistema de suporte nos estados, exigiu instalações adequadas nas escolas, preocupou-se com questões pedagógicas, discutiu o Programa com os Estados e com alguns setores da academia e procurou, mesmo timidamente, uma regionalização. (CYSNEIROS, 2001, p.142)

Acreditamos que a criação da disciplina para ser ministrada no Curso de Matemática da UVA e nos cursos de graduação de outras universidades, tenha tido também um grande reflexo decorrente do Proinfo, mediante o qual inúmeras escolas haviam recebido laboratórios de informática, ensejando uma grande demanda de profissionais preparados para utilizar os computadores no ensino das disciplinas específicas.

Apesar de a crescente discussão nas instituições educacionais acerca das novas tecnologias na educação não ser tão recente, a chegada do aparato tecnológico não tem ocorrido com a mesma rapidez. Para exemplificar, até 2006 a própria Universidade pesquisada possuía apenas dois laboratórios, um no Campus Principal e outro no Curso de

[9] O Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo) é um programa educacional criado pela Portaria nº 522/MEC, de 9 de abril de 1997, para promover o uso pedagógico de Tecnologias de Informática e Comunicações (TICs) na rede pública de ensino fundamental e médio.

Computação, sem falar que ambos eram dotados de máquinas muitas antigas e enfrentavam muitas dificuldades concernentes à manutenção, o que nos deixa ciente sobre as dificuldades para a formação dos profissionais para o uso educacional destas tecnologias. O Curso de Matemática, apesar de haver inserido a disciplina em seu currículo em 2000, só conseguiu implantar seu Laboratório de Informática em agosto de 2008.

Ao ingressar no Curso, em 2006, assumimos a disciplina Novas Tecnologias no Ensino de Matemática, lecionando-a até os dias atuais. Antes da chegada do Laboratório, tivemos muitas dificuldades no desenvolvimento das aulas, pois as atividades ficavam mais restritas à exploração da calculadora, DVD ou, na maioria das vezes, com a projeção de slides, ficando os alunos apenas como espectadores.

A disciplina sempre teve um grande número de alunos matriculados, em se tratando de uma disciplina já do final Curso, conforme visualizamos no gráfico abaixo.

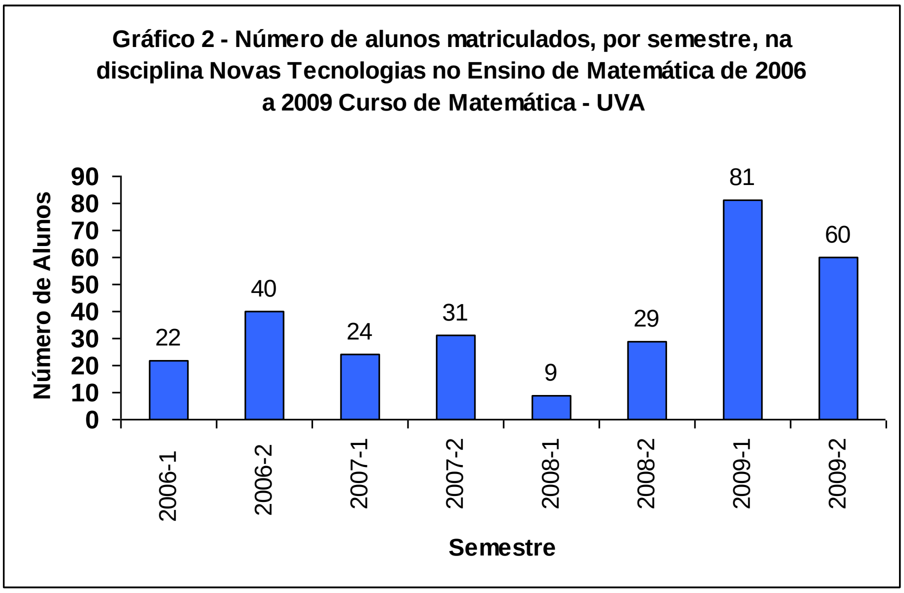


Figura 41: Gráfico 2 - Número de alunos matriculados na disciplina, por semestre
Fonte: Diários da disciplina Novas Tecnologias no Ensino de Matemática – UVA

Os semestres 2008-1 e 2009-1 foram atípicos em relação aos demais, por situações intrínsecas ao Curso, relacionadas a grades curriculares e oferta de disciplinas; para melhor explicitar, em 2008.1, a disciplina possuía Cálculo Numérico como prerrequisito. Como muitos alunos ficaram reprovados no Cálculo, apenas nove se matricularam. Discutindo junto ao Curso chegamos à compreensão de que este era um prerrequisito desnecessário para a disciplina Novas Tecnologias e a exigência foi retirada. Já no semestre 2009.1, houve duas turmas matriculadas em razão da concomitância de duas grades curriculares; daí o grande número de estudantes matriculados.

Além do quantitativo de matriculados, o índice de frequência dos alunos também é muito bom, geralmente acima de 90%. Os trancamentos ficam em torno de 6% a 8%, enquanto a evasão do Curso representa em torno de 30 a 40 % (Relatório Anual de Avaliação dos Cursos de Graduação - UVA, 2008).

Apesar de darem preferência às práticas de laboratório, os alunos são bastante participativos nas aulas direcionadas aos estudos teóricos relacionados às tecnologias no ensino de Matemática, ainda que muitos deles se mostrem resistentes às leituras, em razão desta ser uma cultura pouco estimulada nos cursos das áreas de ciências exatas, mesmo nas licenciaturas (Apêndice 1 - Programa da disciplina).

Tentando superar estas dificuldades acerca da leitura e escrita, levamos os alunos a escrever resenhas e realizarem discussões coletivas dos materiais estudados, como forma de conduzi-los à exploração dos textos e compreenderem sua importância, para o entendimento dos fenômenos que nos cercam e sua contribuição para nossa formação profissional.

Durante a pesquisa tivemos um aluno que foi monitor voluntário em toda a disciplina, o qual acompanhou o desenvolvimento do experimento, observando os alunos e realizando interações durante a resolução das atividades. As interações e atitudes do monitor foram realizadas conforme os estudos que fizemos acerca das teorias de apoio e, das regras e orientações para aplicação das sequências didáticas.

- O Laboratório de Informática

As atividades da pesquisa foram desenvolvidas no Laboratório de Informática do Curso de Matemática, o qual possui boa infraestrutura, contando com um total de 32 computadores conectados a Internet, um *datashow* com tela de projeção, um quadro branco, um servidor e duas centrais de ar-condicionado. Os computadores são dispostos em oito bancadas, cada uma com quatro computadores, conforme Figura 42.

Figura 42 - Laboratório de Informática do Curso de Matemática da UVA[10]

6.4 Instrumentos de coleta dos dados

Os dados foram coletados por meio de

- Ficha Diagnóstica - Inicial e Final (Apêndice 2 e 3).

  As fichas foram aplicadas para preenchimento individual, na primeira e última aula da disciplina, para todos os alunos.

- Ficha de Observação das Sessões (Apêndice 4)

  As fichas de observação eram preenchidas pela pesquisadora após cada sessão, baseada em observações e interações da pesquisadora e do monitor com os estudantes.

- Aplicação das Sequências Didáticas.

6.5 Sujeitos Pesquisados

- 76 alunos do penúltimo semestre (sétimo) do Curso de Licenciatura em Matemática da UVA, matriculados na disciplina *Novas Tecnologias no Ensino de Matemática*.

  - Semestre 2009.1 : Turma 1 - 38 alunos

    Turma 2 - 38 alunos

Ao todo, foram matriculados nas duas turmas 81 alunos, mas só 76 concluíram a disciplina.

[10] Disponível em <http://www.matematicauva.org/lima/index.php>. Acesso em: 20 jan. 2010.

- Os sujeitos tinham em média 24 anos.

- Do grupo pesquisado, 46,81% já lecionavam e 53,19% ainda não.

- 100% dos alunos relataram já possuir experiência em Informática, sendo que apenas 60,6% possuem computador em casa. Os 39,4% que não possuem computador utilizam-no em diferentes lugares: 26,6% - Cyber, 6,4 - trabalho, 3,2% - na casa de amigos e parentes e 3,2% - Laboratório de Informática do Curso de Matemática.

- 19% do grupo já fez algum curso a distância, utilizando principalmente a Internet.

- Perguntados para qual atividade mais utilizam o computador, destacaram.

QUADRO 9 – Atividades em que mais utilizam o computador

ATIVIDADE	%
1. Trabalhos da faculdade	30,06
2. Pesquisas em geral	25,77
3. E-mails, bate-papos e contatos com amigos e parentes	15,34
4. Atividades do trabalho	9,20
5. Lazer e entretenimento	7,36
6. Estudar	4,91
7. Ver fotos e vídeos	2,45
8. Ouvir música	1,84
9. Publicar informações - blog e orkut	1,23
10. Jogar	1,23
11. Fazer compras	0,61

Fonte: Dados das Fichas Diagnósticas

6.6 Etapas de realização do experimento

O experimento foi estruturado com suporte em quatro etapas.

1ª) Etapa

- Estudos teóricos realizados acerca da problemática, tendo como foco principal as fases de desenvolvimento da Sequência Fedathi e a sua aplicação na transposição informática de conceitos geométricos.

- Realização de um pré-experimento aplicando 4 atividades de geometria para serem resolvidas no software Cabri-Geómètre, para 29 alunos da disciplina Novas Tecnologias no Ensino de Matemática, do semestre 2008.2.

2ª) Etapa

- Com base nas informações obtidas no pré-experimento, foram elaboradas as sequências didáticas referentes às atividades de 1 a 4 (Apêndice 5).

3ª) Etapa

- Aplicação das sequências 1 a 4 com os dois grupos pesquisados. (Apêndice 6)

4ª) Etapa

- Análise das sequências didáticas.

6.7 Sequências didáticas aplicadas

A parte experimental da pesquisa foi desenvolvida em 14 sessões de trabalho, conforme apresentamos no quadro.

Quadro 10: Organização das sessões experimentais

Sessões	Duração	Objetivo (s)
1ª	3 horas	Apresentação do grupo - professor e alunos Apresentação da pesquisa - Aplicação de Ficha Diagnóstica Inicial
2ª	3 horas	Apresentação e exploração inicial do software Cabri-Géomètre
3ª	2 horas	Continuação da exploração das funções do Cabri
4ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 01
5ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 01
6ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 02
7ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 02
8ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 03
9ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 03
10ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 04
11ª	2 horas	Aplicação da Sequência Didática – Atividade 04
12ª	2 horas	Apresentação e exploração do software Geogebra
13ª	2 horas	Resolução de atividades no software Geogebra
14ª	3 horas	Discussão avaliativa junto ao grupo, em relação às atividades na pesquisa Aplicação de Ficha Diagnóstica Final

Fonte: Elaboração própria com dados da pesquisa

Apresentaremos a seguir as sequências didáticas das quatro atividades desenvolvidas junto ao *software Cabri-Géomètre*, e logo após cada sequência, nossa interpretação e análise dos resultados de suas aplicações.

6.7.1 Sequência Didática da Atividade 01

Quadro 11: Sequência didática referente à aplicação da atividade nº 01

SEQUÊNCIA DIDÁTICA – ATIVIDADE 01
ATIVIDADE
Construa um quadrado ABCD.
OBJETIVOS
- Com o *software*: - manusear ferramentas de retas paralelas e perpendiculares; - identificar objetos dependentes e independentes; - diferenciar desenho e objeto geométrico; - medir segmentos e ângulos; - observar a estabilidade das construções. - Com a Geometria: Aplicar propriedades referentes a: - paralelismo e perpendicularismo de retas; - ângulo; - reconhecer as propriedades do quadrado no plano - lados iguais, ângulos retos – em diferentes posições; - circunferência e transferência de medida; e - noções das construções geométricas.
ANÁLISE PRELIMINAR
Sendo esta a primeira atividade formal realizada pelo grupo, ainda com pouca familiarização em relação ao *software*, a resolução mais comum é a de reproduzir a forma de resolução do ambiente lápis e papel, ou seja, o desenho de um quadrado a partir da união de quatro segmentos de reta com a mesma medida, sem preocupação com a movimentação / deformação da figura. Em razão da forma como é tradicionalmente proposto o ensino da Geometria, em que os alunos assimilam as figuras geométricas mais como desenhos, com menor percepção acerca das propriedades, espera-se que, mesmo reconhecendo a existência das propriedades referentes aos lados iguais e ângulos retos, a validação de construção do quadrado, na figura construída, se dê apenas pelos quatro lados iguais. É esperado que muitos dos alunos construam figuras não estáveis, pela pouca familiaridade com o *sofware.*
CONTROLE DA ATIVIDADE
O controle da atividade será realizado com suporte nas interações realizadas, durante as fases da *maturação* e *discussão das soluções*, mediante questionamentos direcionados à consecução dos objetivos da atividade, conduzindo e orientando o processo da resolução com as dúvidas e erros manifestados pelos alunos, tendo como norteadores princípios das construções geométricas, do paralelismo e perpendicularismo.
ANÁLISE DIDÁTICA
• Em relação ao *software*: - observar que ferramentas os alunos mobilizaram para a construção do quadrado; - verificar como perceberam a relação de dependência dos objetos na construção; - observar a percepção dos alunos em relação à estabilidade das construções. • Em relação à Geometria: - observar que procedimentos os alunos utilizaram para compor o quadrado; - verificar que propriedades geométricas foram mobilizadas pelos alunos para validar a existência do quadrado; - verificar qual a compreensão dos alunos em relação às propriedades geométricas de uma figura, em diferentes posições no plano.

AVALIAÇÃO
Avaliar a evolução das resoluções, em relação aos objetivos propostos, por meio de: - observações do trabalho desenvolvido pelos alunos durante as aulas; - verificação do avanço nas resoluções a partir das interações individuais e coletivas entre: aluno-aluno, aluno-monitor, aluno-professor e monitor-professor; - arquivo com resolução final; - dados obtidos das respostas na ficha diagnóstica final.

Fonte: Elaboração própria com dados da pesquisa

- Análise da Sequência Didática Nº 01

Conforme esperávamos, praticamente 100% dos alunos tiveram como critério inicial de resolução a construção do quadrado com base na união de quatro segmentos de reta com medidas iguais. Conforme figuras 43 - a e 43 - b.

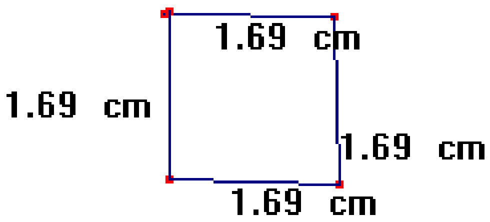


Figura 43 - a: Resolução *no Cabri*

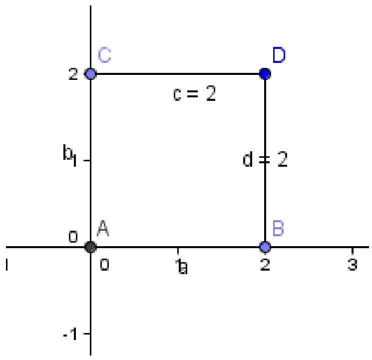


Figura 43 - b: Resolução no *Geogebra*

- Análise didática em relação ao *software*

Não houve, neste momento, preocupação por parte dos alunos em construir o ângulo reto da figura; alguns apenas verbalizaram a existência da propriedade e outros tiveram a preocupação apenas de mostrar sua existência por intermédio da notação simbólica, conforme comentários dos alunos ora transcritos.

"Pra ser quadrado professora, ele também tem que ter os quatro ângulos retos"

"Professora como faço para colocar aquele quadradinho do ângulo reto?"

"Ele fica quadrado, mas se puxar um ponto não fica mais"

"Professora os lados ficaram iguais, mas os ângulos não ficam retinhos."

No acompanhamento das resoluções, confirmamos a hipótese de que o aspecto visual das figuras geométricas prevalece em relação às propriedades. Um dos momentos em que isto fica bem claro é quando apresentamos o quadrado da figura 44 - a, rotacionamos para a posição da figura 44 - b e perguntamos:

-*"E agora, que figura temos?"*

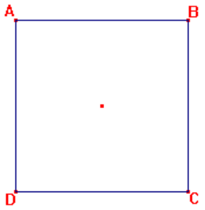


Figura 44 - a

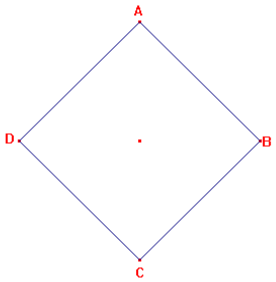


Figura 44 - b

Os alunos olham, observam, a maioria permanece calada (acham que ficam pensando que é alguma "pegadinha") e outros se apressam a responder:

- *"Agora é um losango."*

Perguntamos:

- *"Por quê?"*

Após a pergunta, eles começam a refletir e agora já parecem duvidosos em relação à resposta. Medimos lados e ângulos e pedimos para eles observarem o que acontece com estas medidas enquanto movimentamos a figura. Neste momento temos uma grande contribuição das possibilidades da Geometria Dinâmica no *software*, pois, pelo movimento permitido, obtemos de forma imediata várias posições da figura e a atualização das medidas, levando os alunos a constatar que as propriedades permanecem, independentemente da posição.

Em *relação ao software*, verificamos que uma das dificuldades iniciais foi tornar as figuras estáveis. Só depois das intervenções, quando mostramos a importância e as formas de relacionar os objetos por meio dos pontos de intercessão foi que os alunos começaram a ficar atentos a este detalhe. Propusemos que, sempre que tivessem dúvidas em relação a dependência dos objetos, movimentassem as construções para verificar se estas permaneciam estáveis ou se deformavam.

Outra dificuldade prevista e constatada é quanto às propriedades das construções geométricas. Inicialmente, os alunos têm dificuldades em aplicá-las nas resoluções, mesmo já as tendo estudado no ambiente lápis e papel. A transposição dos modelos para o ambiente informático possui alguns obstáculos iniciais, que são aos poucos superados na medida em que os alunos vão se familiarizando com as ferramentas do *software* e sua forma de implementar os objetos geométricos, nesta nova ferramenta.

A principal intervenção no avanço da resolução desta atividade foi o direcionamento dado pelo professor, quando propôs que os alunos relembrassem qual era a ferramenta de transferência de medida que mais utilizavam no ambiente lápis e papel. Responderam que era o compasso, induzidos a perceber que a circunferência poderia fazer a mesma função, através do raio. Inicialmente alguns alunos se preocuparam com a medida numérica do raio, sendo levados a notar que este valor não era importante, pois ele iria variar de acordo com as movimentações da figura, e que o mais importante era considerar o raio como referência para a construção do quadrado, independentemente de seu valor numérico.

Constatamos que os alunos trazem este pensamento em consequência das regras implícitas do contrato didático na Matemática, ou seja, a necessidade de operar com valores numéricos.

Os *softwares* de Geometria Dinâmica ajudam na superação deste obstáculo didático, levando os alunos a trabalhar com generalidades, fixando-se nas propriedades e conceitos em jogo, propiciando a superação de noções equivocadas ou particulares adquiridas nas salas de aula, em virtude da limitação das ferramentas de ensino, associadas, muitas vezes, ao nível de conhecimento do professor (GRAVINA, 1996).

- Análise didática em relação à *Geometria*

A discussão das soluções (nível 3 da Sequência Fedathi) foi essencial na compreensão das várias formas de se chegar à solução, por meio de diferentes modelos apresentados pelos grupos. As soluções por eles propostas, estiveram ligadas aos quatro modelos seguintes:

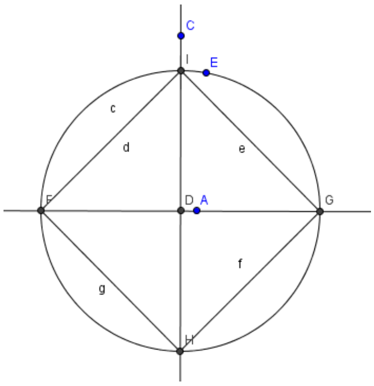


Figura 45 - a: Solução (a)
Princípio utilizado:
Propriedade das diagonais

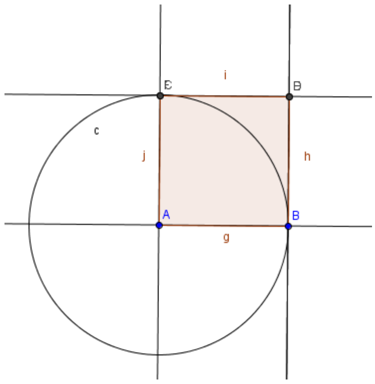


Figura 45 - b: Solução (b)
Princípio utilizado:
Construções geométricas

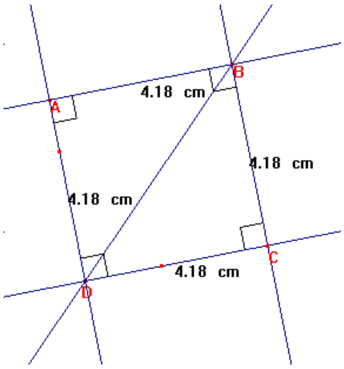


Figura 45 - c: Solução (c)
Princípios utilizados:
Propriedades das diagonais e
bissetriz

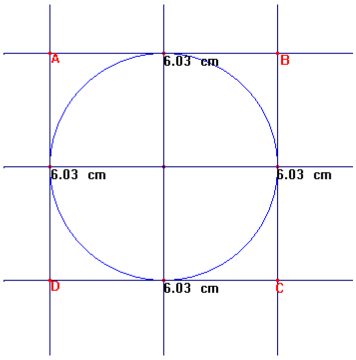


Figura 45 - d: Solução (d)
Princípios utilizados:
Construções geométricas e
polígonos inscritíveis

A diversidade das respostas possibilitou a inclusão e a discussão de conceitos não previstos para a solução da atividade, como os de diagonal e bissetriz. É importante acrescentar estas resoluções em uma nova aplicação da sequência didática da atividade 1.

Conforme esperávamos, a construção de figuras estáveis foi uma das maiores dificuldades vivenciadas pelos alunos em relação ao *software*, o que é bastante comum quando ainda não têm muita familiarização com o ambiente. Por meio das intervenções, nas quais buscamos sempre chamar a atenção dos alunos em relação à dependência dos objetos e sua estabilidade, obtivemos, ao final da aplicação da sequência didática, que 89,4% dos alunos conseguiram construir o quadrado, de acordo com as propriedades geométricas, mediante construções estáveis (provavelmente em decorrência de nossas orientações durante as interações), sendo a **solução *b*** a mais recorrente. As soluções *a*, *c* e *d* por eles apresentadas também satisfizeram a questão e foram consideradas corretas.

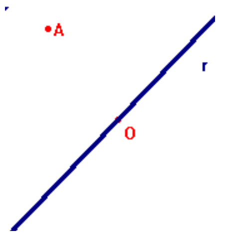
6.7.2 Sequência Didática da Atividade 02

Quadro 12: Sequência didática referente a aplicação da atividade nº 02

SEQUÊNCIA DIDÁTICA – ATIVIDADE 02

ATIVIDADE

Dada a figura abaixo, construa um triângulo △ABC isósceles, de modo que:



a) B seja simétrico de A em relação à r;

b) Sua base seja $\overline{AB}$;

c) △ABC seja inscrito no círculo C centrado em O.

OBJETIVOS

- Em relação ao *software*: - obter pontos simétricos em relação a um ponto ou uma reta;
  - graus de liberdade de um ponto;
  - diferenciar polígonos prontos e construídos nos softwares de Cabri e Geogebra;
  - explorar as possibilidades de animação das figuras;
  - verificar a estabilidade da construção.
- Em relação à Geometria: Aplicar propriedades referentes a:
  - simetria;
  - classificação de triângulos; e
  - polígonos inscritos na circunferência.

ANÁLISE PRELIMINAR

Esta atividade apresenta menor grau de dificuldade em relação à primeira, pois, além de apresentar uma figura inicial e uma sequência de passos a serem observados na resolução, esperamos que os alunos a resolvam com facilidade, no entanto, o mais comum é buscarem obter o ponto B, simétrico A em relação ao ponto O e não em relação à reta, o que produz um erro inicial, levando à construção de um triângulo equilátero e não isósceles; como pede a atividade.

CONTROLE DA ATIVIDADE

O controle da atividade deve ser realizado das interações realizadas, durante as fases da *maturação* e *discussão das soluções*, por meio de questionamentos direcionados à consecução dos objetivos da atividade, conduzindo e orientando a resolução a partir das dúvidas e erros manifestados pelos alunos, tendo como princípio norteador a simetria axial (em relação à reta) e simetria central (em relação ao ponto).

ANÁLISE DIDÁTICA

- Em relação ao *software*:
  - observar que ferramentas os alunos mobilizaram para a construção do ponto B;
  - verificar se os alunos perceberam que os pontos podem possuir ou não grau de liberdade para movimentação, de acordo com o tipo de dependência entre os objetos;
  - observar a percepção dos alunos em relação à estabilidade da construção.
- Em relação à Geometria:
  - observar que propriedades os alunos utilizaram para obter o ponto B, simétrico de A;
  - verificar se as condições a, b e c foram satisfeitos na solução construída;

AVALIAÇÃO
Verificar a evolução das resoluções, em relação aos objetivos propostos, por meio de: - observações do trabalho desenvolvido pelos alunos durante as aulas; - verificação do avanço nas resoluções a partir das interações individuais e coletivas de aluno-aluno, aluno-monitor e aluno-professor; - arquivo com resolução final; - dados obtidos das respostas na ficha diagnóstica final.

Fonte: Elaboração própria com os dados da pesquisa

- Análise da Sequência Didática Nº 02

Por iniciar sua resolução com base numa figura já dada e descrever alguns passos a serem considerados na obtenção da solução, os alunos apresentaram menos dificuldades para iniciar a resolução desta atividade. Esse fato se tornou mais evidente quando observamos que a maioria do grupo iniciou a resolução sem consultar outros colegas.

As soluções apresentadas estiveram ligadas aos três modelos abaixo:

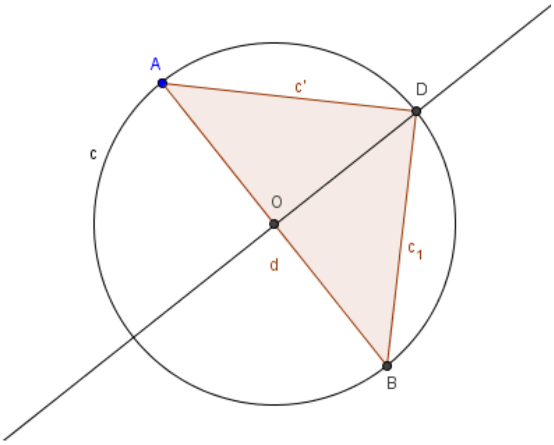


Figura 46 - a: Solução (a)
Princípio (s) utilizado (s):
Ponto O pertencendo a três objetos: segmento $\overline{AB}$, circunferência c reta r.

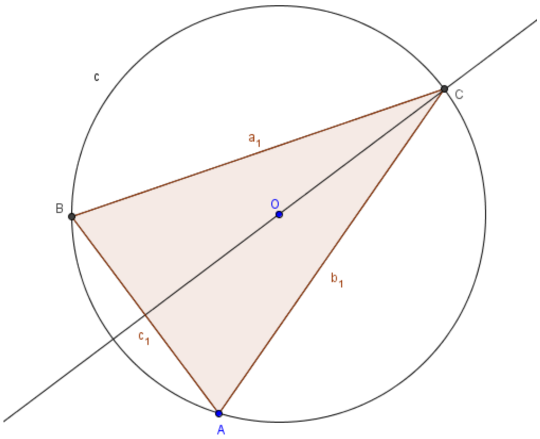


Figura 46 - b: Solução (b)
Princípio (s) utilizado (s):
Ponto O não pertencente ao segmento AB

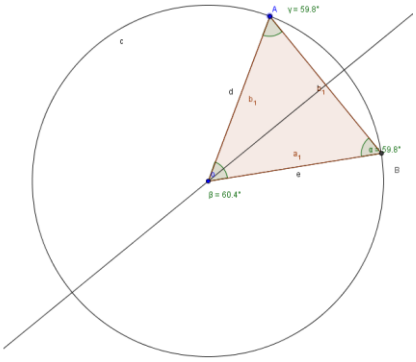


Figura 46 - c: Solução (c)
Princípio (s) utilizado (s):
Triângulo não inscrito na
circunferência

A solução **a** foi inicialmente dada por muitos alunos, mas esta não era correta, pois, além de não satisfazer as condições apresentadas na atividade, limitava a resposta a um único triângulo, sendo **b** a solução que contemplava todos as proposições do enunciado, a qual mostra que existe uma família de triângulos que satisfaz as condições e não apenas um.

A comparação entre as soluções **a** e **b** fica bem mais evidente quando vislumbrada pela dinâmica de movimentação permitida pelo *software*. Apresentamos algumas variações da solução **b,** obtidas destas movimentações:

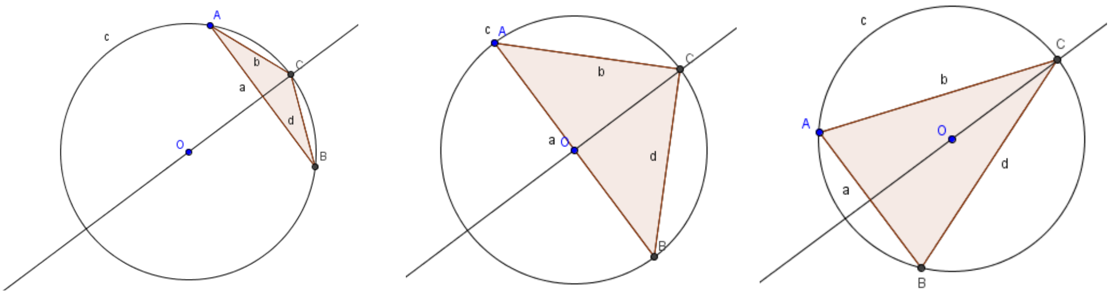


Figura 47: Variações obtidas da movimentação da solução **b**

Podemos perceber que a representação do meio corresponde à solução **a**, sendo esta apenas uma das possibilidades.

Conforme tratamos na apresentação dos *softwares*, tanto o *Geogebra* como o *Cabri* possibilitam a visualização de cada passo realizado na solução, ferramenta muito útil ao professor no momento de analisar as respostas dos estudantes. Ilustramos esta opção, apresentando os protocolos de construções das soluções **a** e **b**, mostrando a diferença entre os passos percorridos por parte de cada aluno nas referidas soluções.

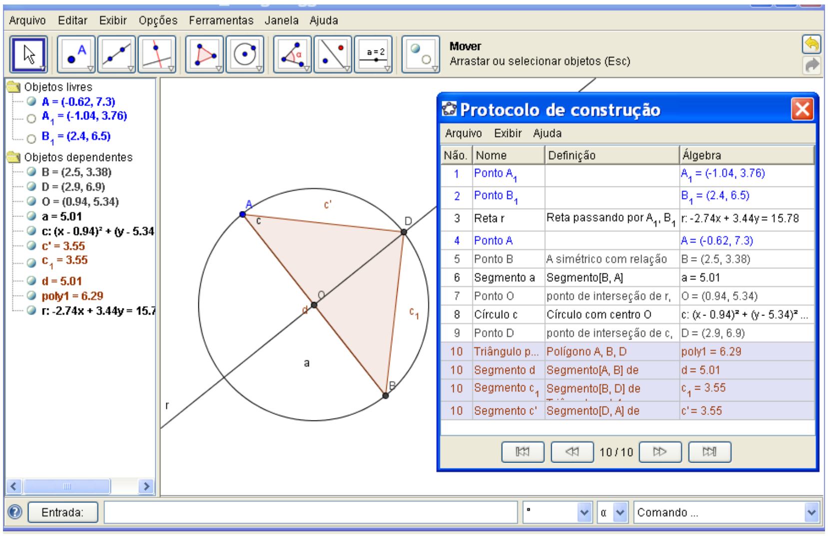


Figura 48: Protocolo de construção da solução **a**

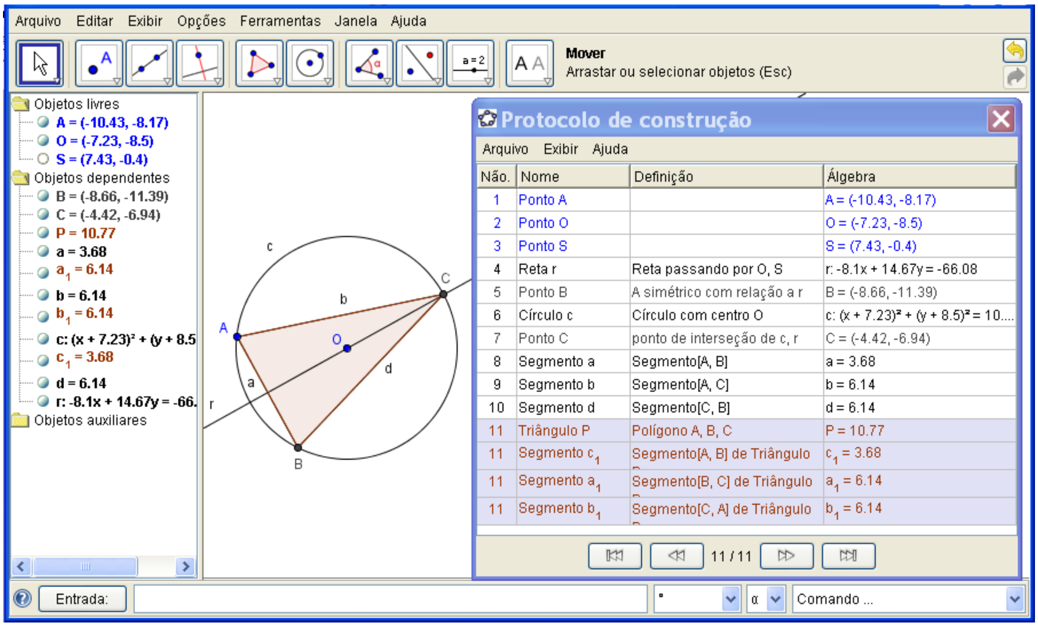


Figura 49 - Protocolo de construção da solução **b**

- Análise didática em relação ao *software*

Observamos que na atividade 2 as maiores dificuldades em relação ao *software* continuaram relacionadas à estabilidade da construção. Esta é uma etapa da transposição informática que parece simples mas não é, fazendo-se necessário um certo tempo, resolução de atividades que propiciem o uso de variadas funções do novo dispositivo e domínio dos conceitos matemáticos em jogo, para que o aluno se familiarize com as regras inerentes ao ambiente e a implementação dos conceitos nesta nova interface. Concordamos com Balacheff (1994) apud Almouloud (2007, p.7) quando assinala que:

> A algoritmização computacional dos objetos do ensino, para sua inscrição num dispositivo informático para fins educacionais não é o resultado de um processo simples de tradução de uma representação para outro, mas é o de um verdadeiro processo de modelagem, o que precisa de uma teorização dos objetos de ensino e de sua condição de existência.

Como já era previsto este tipo de dificuldade, uma de nossas constantes orientações durante a maturação da solução foi propor que os alunos movimentassem as construções e observassem o que acontecia; este momento era muito interessante, a decepção era quase certa, e apareciam em palavras como: ‘*ah professora, assim desfaz tudo*’ ou então ‘*agora saiu tudo do lugar, mas antes estava correto*’. Estas frases denotam que os alunos ainda estão em processo de assimilação de uma importante variante dos ambientes de Geometria Dinâmica, que é a ***relação entre os objetos que compõem a construção e a estabilidade da figura construída***, se eles (objetos) não estiverem corretamente relacionados, as propriedades que se apresentam visualmente corretas, ao serem movimentadas, transformam-se e não mais correspondem à solução elaborada, conforme ilustramos abaixo a resolução de um dos alunos:

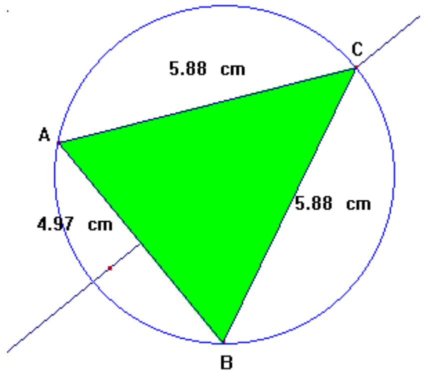


Figura 50 - a

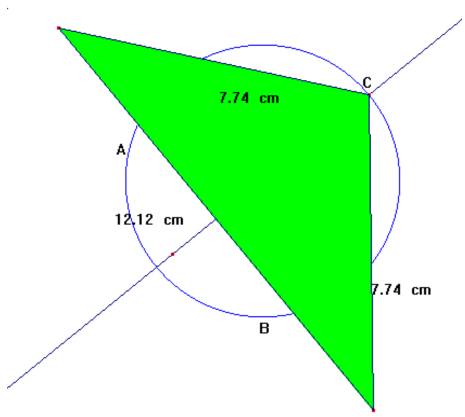


Figura 50 - b

Nesta solução, ao movimentar o vértice A, podemos perceber que o triângulo deixou de ser inscrito na circunferência, em razão dos pontos A e B pertencerem à circunferência C apenas no plano visual, tendo sido construídos de maneira independente da circunferência. O mesmo tipo de erro é identificado na solução de outro aluno, conforme mostramos abaixo.

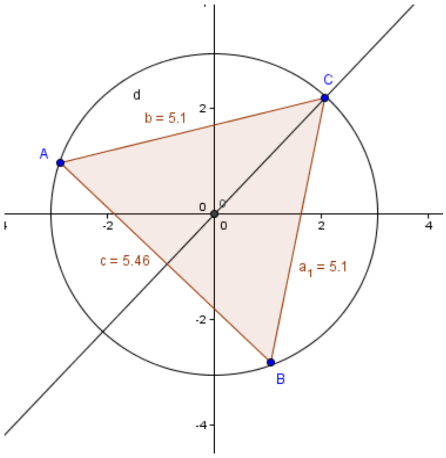


Figura 51 - a

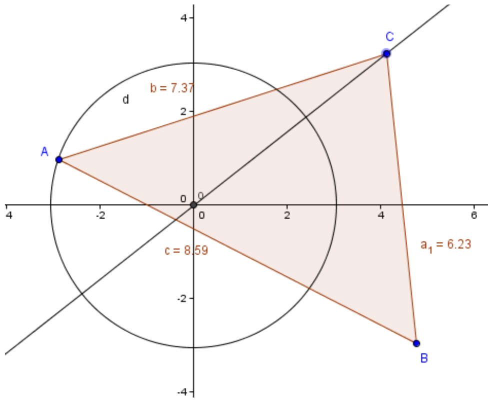


Figura 51 - b

Este tipo de erro foi sendo aos poucos superado, na medida em que orientamos os alunos a verificarem as observações que aparecem na tela, no momento da construção das figuras e ao unirem os objetos da construção. Este é um recurso de apoio presente nos dois *softwares* (Cabri e Geogebra), conforme mostramos nas figuras seguintes:

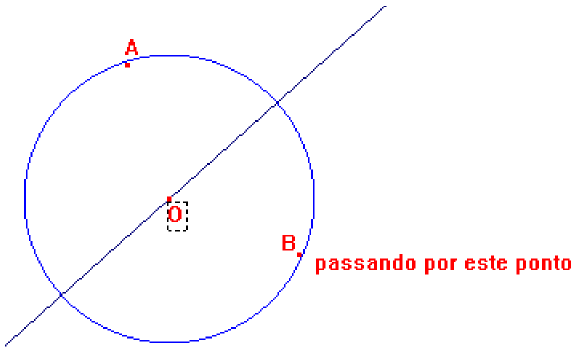


Figura 52 - a

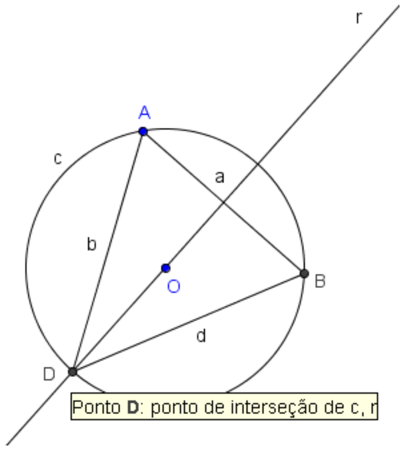


Figura 52 - b

A figura 52 - a corresponde à construção da circunferência com centro no ponto O e a opção do programa perguntando se ela deve passar pelo ponto **B**. Na figura 52 - b é feita a verificação das relações do ponto D com outros objetos da figura, onde a observação ressalta que o ponto D é ponto de intersecção com a circunferência **C** e com a reta **r**.

Outra variante dos ambientes de Geometria Dinâmica é o ***grau de dependência ou independência dos objetos*** envolvidos na construção, que varia de acordo com a maneira que são criados.

O grau de liberdade de movimento destes decorre desta interdependência. No *Geogebra* esta dependência é facilmente denotada pelas cores dos pontos. O próprio *software* diferencia as cores entre eles de acordo com sua possibilidade para movimentação, ou seja, os pontos pretos não têm grau de liberdade para movimentação, enquanto os azuis sim.

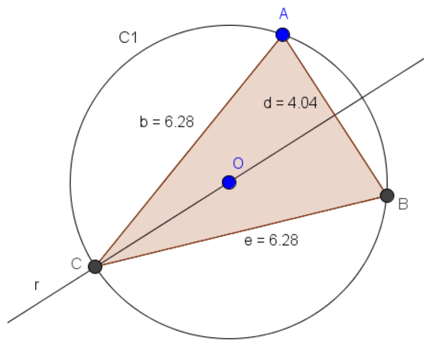


Figura 53

O ponto C não pode ser deslocado individualmente (pode até ser arrastado, mas juntamente com toda a figura), em razão de pertencer e ser dependente da reta r perpendicular ao segmento AB, a circunferência C1 e aos segmentos AC e BC. O ponto B também não pode se deslocar, por ser resultante da propriedade de simetria do ponto A em relação a reta r, seus movimentos dependem dos movimentos do ponto A. No Cabri, os pontos aparecem todos iguais, seu grau de dependência só é percebido quando são movimentados.

Os pontos que ficam livres são geralmente denominados como *pontos de base (independentes)* e os outros que não podem se mover (arrastar-se) são os dependentes. Essa distinção é importante, pois fará uma grande diferença na manipulação das figuras, permitindo ou não a visualização da figura em várias configurações (HENRIQUES, 2001).

Podemos então dizer que a estabilidade das figuras e a dependência dos objetos foram entraves comuns à maior parte dos alunos na fase de maturação da solução. As intervenções realizadas, conforme já relatamos, foram principalmente levar os alunos a movimentar suas construções, observar as transformações, verificar a relação entre os objetos e, ficarem sempre atentos ao enunciado da atividade.

- Análise didática em relação à *Geometria*

Um tipo de erro bastante comum na resolução de problemas matemáticos, apresentado pelos alunos que construíram a solução **a** (figura 46 - a, página 165), foi desconsiderar a ordem e a relação das informações do problema, na hora de montarem a solução. Neste caso, alguns não iniciaram a resolução a partir da figura dada, ensejando portanto erros ao final da solução.

Em relação à *simetria*, a principal dúvida era qual o tipo de simetria - axial (com relação a uma reta) ou central (com relação a um ponto) – pois tanto o *Cabri* como o *Geogebra* trazem as duas opções.

Nossa intervenção relativa a esta dúvida foi solicitar que eles construíssem o ponto B, testando os dois tipos de simetria e observassem com qual delas era possível realizar a construção proposta na atividade; e que, além das opções oferecidas pelo *software*, eles também poderiam obter a simetria por meio de propriedades das construções geométricas.

Na discussão das soluções, apresentamos inicialmente os dois tipos de simetria.

- *Simetria Axial* é a transformação geométrica que permite obter a imagem de um objeto refletido em relação a uma reta, semirreta ou segmento de reta (eixo da simetria). Neste caso, a reta **r** como eixo da simetria e $\overline{AB} \perp r$, conforme exemplos que apresentamos para o grupo:

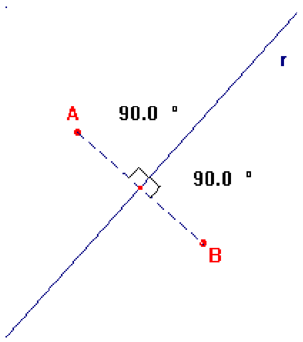


Figura 54 - a

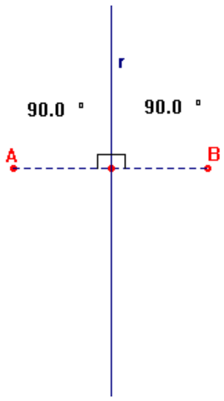


Figura 54 - b

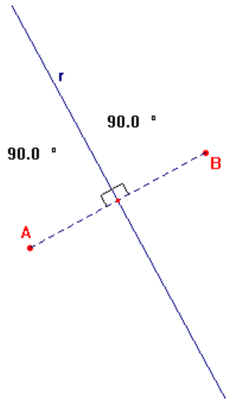


Figura 54 - c

- *Simetria Central* é a transformação geométrica que permite obter a imagem de um objeto a 180º com relação a um ponto (centro da simetria). Neste caso, temos o ponto M como centro da simetria e AM = MB, conforme exemplos que apresentamos para o grupo:

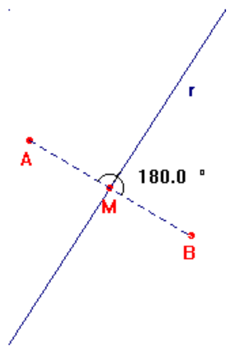


Figura 55 - a

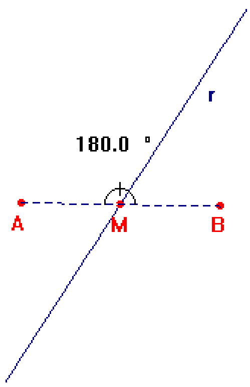


Figura 55 - b

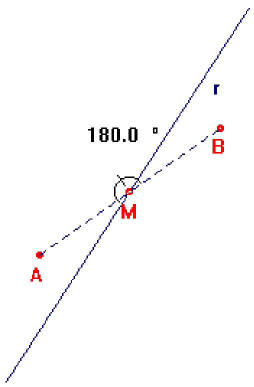


Figura 55 - c

Apesar de havermos ressaltado para os alunos que eles poderiam tentar obter o ponto B com uma construção geométrica da simetria, nenhum deles apresentou solução com este tipo de construção, todos optaram pela função de simetria disponível no *software*. Alguns nos disseram que tentaram, mas não conseguiram e desistiram. Apesar de ser mais fácil utilizar a opção já pronta no *software*, percebemos que eles pouco dominavam propriedades acerca das construções geométricas, apesar de já terem cursado a disciplina Desenho Geométrico.

Ao observar o trabalho destes alunos durante a maturação da solução, detectamos que suas dificuldades não estavam ligadas à interface informática trabalhada, e sim às propriedades matemáticas e geométricas, pois não sabiam como relacioná-las para obter a construção geometricamente correta.

Na discussão da solução apresentamos o exemplo seguinte (figura 56), como um tipo de construção que poderia ter sido feita para obter o ponto B, simétrico de A, tendo como base da construção a perpendicularidade do segmento AB em relação a reta **r.**

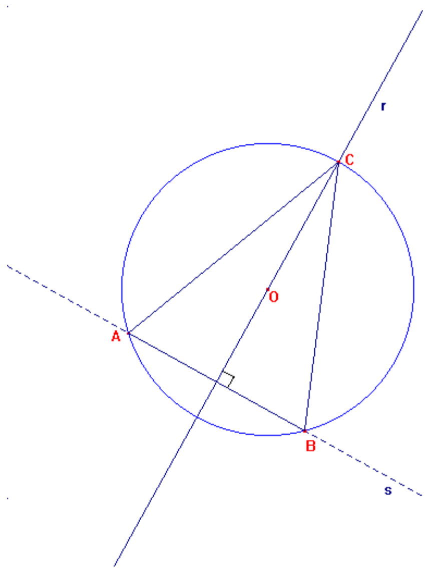


Figura 56

Outro conceito explorado na discussão das soluções foi o de *Polígonos Inscritos na Circunferência* (um polígono é inscrito em uma circunferência se cada vértice do polígono é um ponto da circunferência; neste caso, dizemos também que a circunferência é circunscrita ao polígono).

Apesar do conceito de polígono inscrito ser simples e de fácil apreensão visual e construção, quatro alunos haviam feito a solução **c** (Figura 57)**,** na qual o triângulo, apesar de ser isósceles de base AB, não estava inscrito na circunferência centrada em O. É observado um erro conceitual acerca de polígono inscrito, no entanto, ao observar os alunos que haviam feito esta solução, percebemos que incorreram em uma das problemáticas que enfrentamos ao trabalhar com o computador, que é a cópia de arquivos.

Verificamos facilmente que um aluno havia construído a solução e outros três haviam apenas copiado e não tinham sequer se dado o trabalho de movimentar a figura, pelo menos para mudar os valores numéricos. Perguntamos a eles o que era polígono inscrito, dois responderam corretamente, um disse que era quando o triângulo ficava ligado ao centro da circunferência e outro disse que não se lembrava. Ao verificar que realmente haviam copiado as resoluções, solicitamos que refizessem suas soluções e orientamos a nova construção. Dissemos a eles que havíamos percebido a cópia, eles riram e disseram que não, mas não colocaram objeções para refazerem a solução, percebemos que estavam conscientes de seu erro.

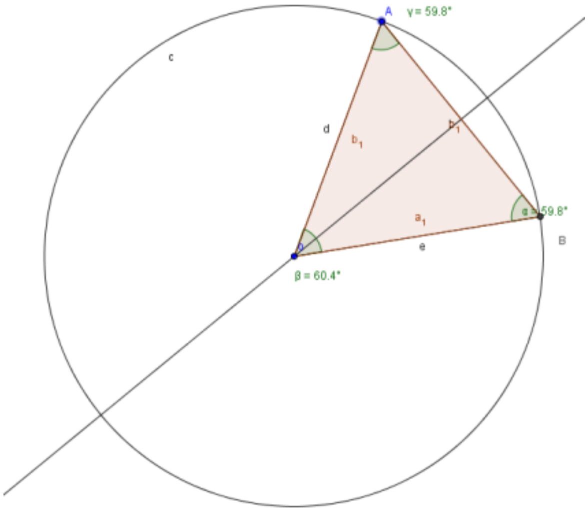


Figura 57

Alguns exemplos de polígonos inscritos apresentados para o grupo durante a maturação da solução (polígonos regulares ou irregulares):

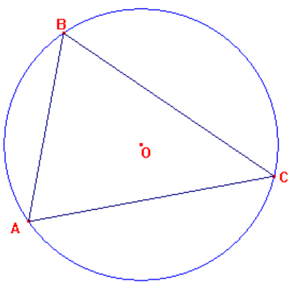


Figura 58- a

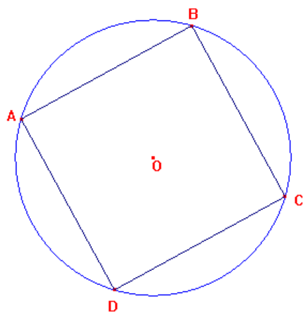


Figura 58 - b

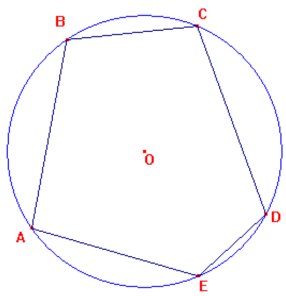
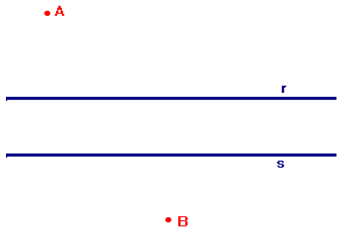


Figura 58 - c

A etapa da *prova* da Atividade 2 foi feita em primeiro lugar, solicitando que os alunos revissem as condições apresentadas pelo problema e, verificassem se haviam sido consideradas em suas soluções. Em segundo, movimentassem a construção e observassem se permanecia estável e que refizessem a construção, tirando suas dúvidas conosco, caso não conseguissem reconstruir corretamente.

6.7.3 Sequência Didática da Atividade 03

Quadro 13: Sequência didática referente à aplicação da atividade nº 03

SEQUÊNCIA DIDÁTICA - ATIVIDADE 03
ATIVIDADE
As paralelas **r** e **s** são as margens de um rio e os pontos A e B representam cidades em lados opostos desse rio. Deseja-se construir uma ponte $\overline{PQ}$ ($P\in r$, $Q \in s$) perpendicular às margens de forma que, construindo as estradas $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ o percurso total de A e B seja mínimo. Determinar a posição da ponte. 
OBJETIVOS
- Cabri / Geogebra: - medir e somar segmentos; - construir retas paralelas e perpendiculares; - movimentar e animar objetos. - Geométrico: aplicar propriedades referentes a: - princípio da Geometria: a menor distância entre dois pontos é uma reta; - paralelismo e perpendicularismo; - levantar e testar hipóteses acerca da distância procurada.
ANÁLISE PRELIMINAR
Entre as quatro atividades propostas, esta é a única caracterizada como situação-problema, ou seja, necessitando mais do que as outras de que os alunos lancem mão de estratégias de resolução, para conseguir aplicar posteriormente as propriedades matemáticas ou geométricas. É esperado que a maioria dos alunos necessite de auxílio inicial do professor para uma melhor compreensão e representação da situação-problema. É previsto que poucos alunos resolvam a atividade sozinhos, e que estes apliquem o princípio fundamental da Geometria: *a menor distância entre dois pontos é uma reta* e depois somem os segmentos AP, PQ e BQ, acreditando haver encontrado a resposta final e correta, sem perceber que necessitam observar uma outra variável, que é o ponto exato onde a ponte deve cruzar o segmento AB, levando a uma resposta aproximada, mas não à resposta correta.
CONTROLE DA ATIVIDADE
O controle da atividade deve ser realizado das interações realizadas, durante as fases da *maturação* e *discussão das soluções*, por questionamentos direcionados à consecução dos objetivos da atividade, conduzindo e orientando o processo da resolução a partir das dúvidas e erros manifestados pelos alunos, tendo como elemento norteador o princípio geométrico de que a menor distância entre dois pontos é uma reta.
ANÁLISE DIDÁTICA
• Em relação ao *software*: - observar que ferramentas os alunos mobilizaram para a somar os segmentos; - observar se os alunos utilizaram a animação dos objetos para comprovação de hipóteses. • Em relação à Geometria:

- observar se os alunos relembraram e aplicaram o princípio geométrico de que a menor distância entre dois pontos é uma reta; - verificar que estratégias e fundamentos geométricos os alunos utilizaram para obter e validar o resultado final.
AVALIAÇÃO
Verificar a evolução das resoluções, em relação aos objetivos propostos, por meio: - observações do trabalho desenvolvido pelos alunos durante as aulas; - verificação do avanço nas resoluções a partir das interações individuais e coletivas de : aluno-aluno, aluno-monitor e aluno-professor; - arquivo com resolução final; - dados obtidos através das respostas na ficha diagnóstica final.

Fonte: Elaboração própria com os dados da pesquisa

- Análise da Sequência Didática Nº 03

- Análise didática em relação ao *software*

Conforme esperávamos, a maioria dos alunos não conseguiu iniciar sozinho a solução do problema e ficavam solicitando nosso auxílio, ressaltando que não estavam entendendo a questão. Dos poucos que iniciaram, utilizaram o princípio geométrico de que *a menor distância entre dois pontos é uma reta*, mas nenhum conseguiu aplicar o princípio, de modo a justificarem suas respostas, antes de serem realizadas as intervenções.

Apesar de havermos feito a leitura inicial do problema, ressaltando os dados de cada uma das frases do enunciado, percebemos que os alunos não conseguiam avançar na solução, vários deles nos chamavam, perguntando como podiam iniciar a solução.

Resolver problemas ainda é uma das dificuldades que precisa ser transposta no ensino da Matemática, pois os alunos são acostumados a resolver exercícios matemáticos, bem mais do que problemas[11].

Apesar de esta realidade estar sendo aos poucos repensada, com amparo nas próprias avaliações nacionais, como ENEM e ENADE, as quais têm inserido situações-problema e contextualizações nas provas de Matemática (dos alunos do Curso de Matemática da UVA, que fizeram o ENADE 2008, apenas *13,8% dos iniciantes e 36,4% dos concluintes* acertaram a questão nº 15 e *41,4% dos iniciantes e 30,3% dos concluintes* acertaram a questão de nº 36,

[11] Exercícios: são aqueles que tem como objetivo levar o aluno a exercitar conceitos e algoritmos específicos. Problema Matemático: é aquele que exige uma maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo. (DANTE, 1999)

que versavam sobre situações-problema envolvendo geometria - Anexo 2), a realidade do ensino nas salas de aula continua praticamente a mesma; a resolução de exercícios ainda é predominante, fato que constatamos no próprio Curso de Licenciatura onde lecionamos, como também nas escolas que acompanhamos na disciplina Estágio Supervisionado.

Nossa intervenção inicial, foi solicitar que relessem o problema, e tentassem aplicar as informações lidas, na figura dada. Uma pergunta constante era *'Professora como vou saber o local exato onde deve passar a ponte?*' ou '*Como assim a menor distância possível ? Não estou entendendo'*.

Perguntávamos sempre ao grupo: *'Qual é a principal pergunta do problema? O que ele está procurando? O que está nos pedindo?'*

Por meio de nossas perguntas, notamos que os alunos ficavam mais atentos, reliam a questão e respondiam que era o local entre os pontos A e B, que a ponte deveria passar, então reforçávamos: '*Tentem determinar'*.

Partindo dessas interações, e observando as resoluções, verificamos que a solução mais recorrente nos grupos foi a solução **a** (figura 59)**.**

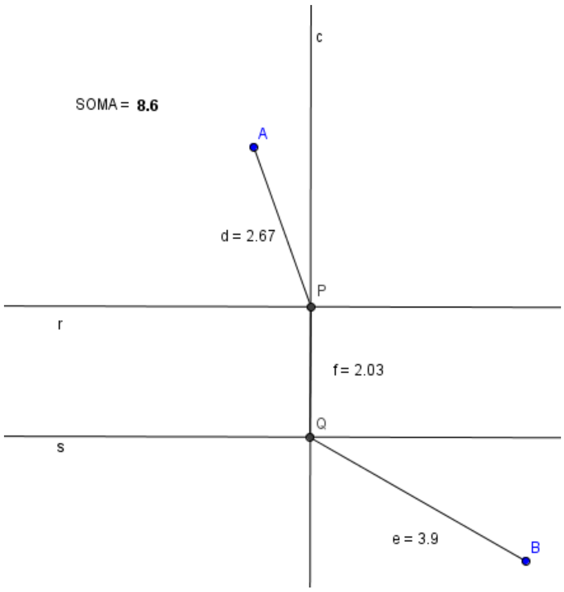


Figura 59: Solução (a)

Na *solução a,* os alunos se preocuparam apenas em determinar a medida do percurso total de A até B, traçando uma reta perpendicular a **r** e **s,** para determinar os pontos P e Q, determinar os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$ e somar suas medidas.

Com esta solução, encontraram o valor do percurso da cidade A até B, no entanto, esqueceram a principal condição do problema, que era determinar a posição da ponte, de forma a se conseguir o *menor percurso* possível.

Este tipo de raciocínio é muito comum na resolução de problemas, onde os alunos se fixam nos dados numéricos da questão, sem observar qual é a pergunta do problema e como esta se relaciona com os dados.

Conforme Chevallard, apud Silva (2002, p.51), este tipo de compreensão, em que os dados são prioridade em relação ao contexto, resulta do modelo de ensino no qual os alunos estão inseridos, ensejando regras implícitas do contrato didático, as quais são internalizadas pelos alunos, conduzindo-os muitas vezes a erros e incoerências, como: '*em Matemática resolve-se um problema efetuando operações. A tarefa é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente. Certas palavras-chave contidas no enunciado permitem que se adivinhe qual é ela'* (CHEVALLARD apud SILVA, 2002, p.51). O autor ressalta que estes tipos de interpretação só serão, aos poucos, superados, na proporção que os professores renovarem e renegociarem seus contratos didáticos, incluindo elementos didáticos que permitam a ruptura e a superação dos modelos anteriores.

- Análise didática em relação à *Geometria*

As afirmações de Chevallard são facilmente identificadas nas resoluções matemáticas dos alunos em todos os níveis escolares, a tendência de buscar os dados numéricos ou figurais (Geometria) e aplicar as operações mais facilmente identificadas no problema é muito comum. Nesta atividade, tal comportamento ficou bastante visível, mesmo se tratando de alunos do nível superior, do Curso de Matemática.

A solução **b** a seguir (figura 60), foi realizada por aproximadamente 60% dos alunos (ainda na fase da maturação), mas somente depois que perguntamos ao grupo que elemento geométrico nos permite determinar a menor distância entre dois pontos. A intervenção foi importante para este avanço na solução, mas não foi suficiente para responder o problema.

Antes de fazermos esta intervenção para o grupo, ficamos em dúvida se esta não seria o que Brousseau (1986) denominou de "Efeito Topázio", ou seja, aquelas intervenções em que o professor, com a vontade de ajudar, apresenta aos alunos explicações e elementos por demais facilitadores, chegando a sacrificar os objetivos de ensino visados anteriormente. Refletimos e concluímos que não, pois não estávamos ferindo os nossos objetivos nem de ensino nem de pesquisa, de vez que o objetivo central era a transposição informática dos conteúdos geométricos.

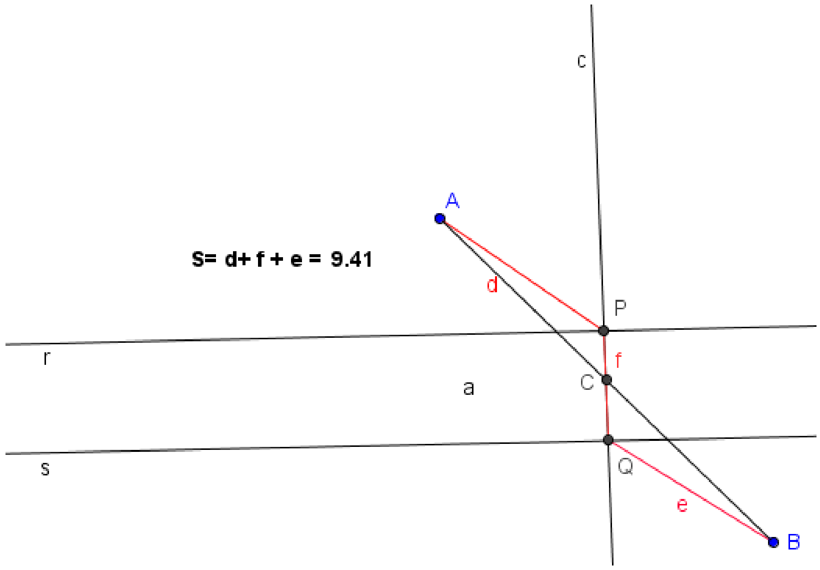


Figura 60: Solução (b)

A solução **b** diferencia-se da solução **a,** em razão de a reta **c,** perpendicular às retas **r** e **s,** ter sido determinada através do ponto médio do segmento $\overline{AB}$, para somente depois determinar os pontos P e Q e a soma dos segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$. Este percurso ainda não corresponde à menor distância.

A solução **c** (figura 61) apresenta a construção geométrica, onde encontramos uma distância menor, através do ponto médio do segmento DH, ou seja, o segmento que se encontra entre as margens do rio. Outras construções podem ser aplicadas para se conseguir a menor distância, mas não foram exploradas na sequência didática aplicada.

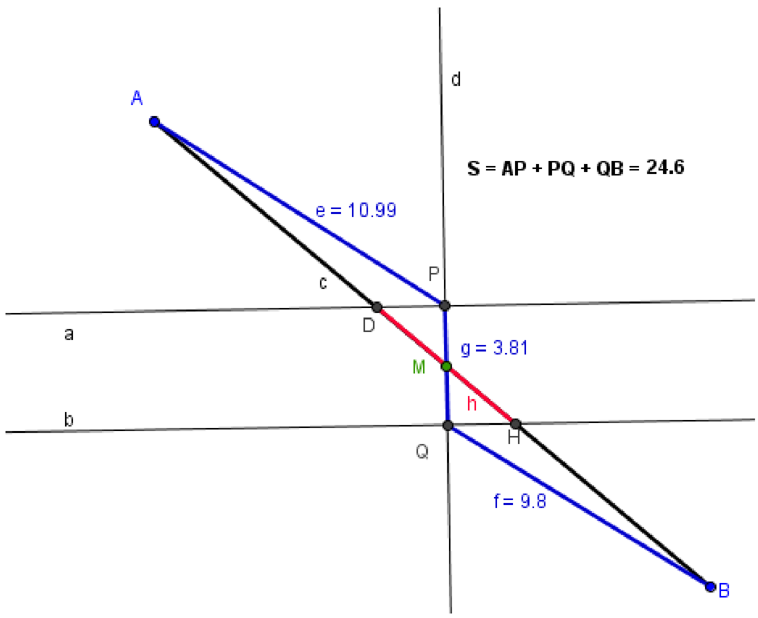


Figura 61: Solução (c)

Comparando as soluções **b** e **c** temos:

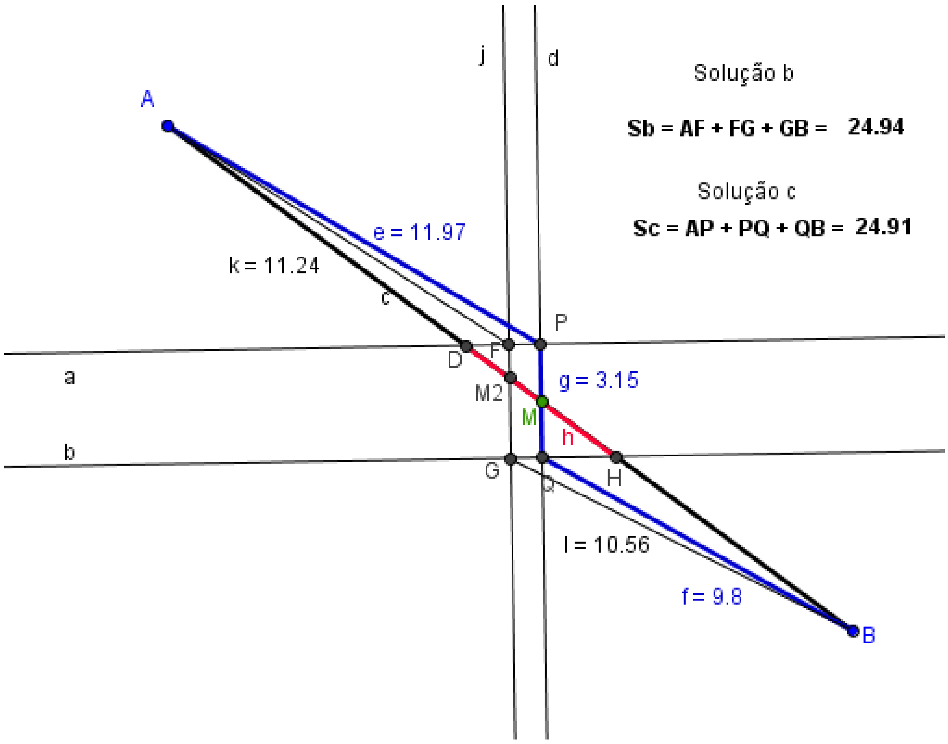


Figura 62: Comparação das soluções **(b)** e **(c)**

A aplicação desta situação-problema foi muito interessante junto ao grupo, pois possibilitou uma maior vivência acerca da experimentação matemática, da exploração do raciocínio matemático, levando os alunos a buscarem interpretar e compreender com clareza a questão e sua possível solução. (Maturação e Discussão das Soluções – Fedathi).

6.7.4 Sequência Didática da Atividade 04

Quadro 14: Sequência didática referente a aplicação da atividade nº 04

SEQUÊNCIA DIDÁTICA – ATIVIDADE 04
ATIVIDADE
Construa um hexágono regular, a partir do segmento $\overline{AB}$. 

OBJETIVOS
- Cabri / Geogebra: - transferir medidas; - estabilizar construção; - movimentar e animar objetos. - Geométrico: reconhecer propriedades do: - hexágono regular; - perceber o raio da circunferência como medida transferível; - noções elementares das construções geométricas.
ANALISE PRELIMINAR
Espera-se que a maioria dos alunos inicie a resolução tomando o segmento AB como a medida do lado do hexágono. Acreditamos que a atividade apresente certo grau de dificuldade para ser iniciada, em razão de os alunos necessitarem de noções das construções geométricas para avançar na resolução. É provável que a maioria dos alunos solicite auxílio ao professor para iniciar a resolução; os que conseguirem iniciar sozinhos, provavelmente, procederão considerando AB como raio de uma circunferência inicial, onde, à partir desta, sejam feitas intercessões com outras de mesmo raio, para compor os lados do hexágono.
CONTROLE DA ATIVIDADE
O controle da atividade deve ser realizado das interações realizadas, durante as fases da *maturação* e *discussão das soluções*, por questionamentos direcionados à consecução dos objetivos da atividade, conduzindo e orientando o processo da resolução à partir das dúvidas e erros manifestados pelos alunos, tendo como elemento norteador a construção geométrica de um triângulo eqüilátero, de vez que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos eqüiláteros.
ANÁLISE DIDÁTICA
• Em relação ao *software*: - verificar se os alunos determinaram a intercessão entre objetos de forma correta; - verificar que ferramentas os alunos utilizaram na transferência de medidas. • Em relação à Geometria: - observar como os alunos aplicaram as propriedades referentes a lados e ângulos no hexágono regular na solução; - verificar que estratégias e fundamentos geométricos os alunos utilizaram para construir o hexágono; - perceber como os alunos utilizaram o segmento AB na construção do hexágono.
AVALIAÇÃO
Verificar a evolução das resoluções, em relação aos objetivos propostos, por meio de: - observações do trabalho desenvolvido pelos alunos durante as aulas; - verificação do avanço nas resoluções das interações individuais e coletivas entre: aluno-aluno, aluno-monitor e aluno-professor; - arquivo com resolução final; - dados obtidos das respostas da ficha diagnóstica final.

Fonte: Elaboração própria com os dados da pesquisa

- Análise da Sequência Didática Nº 04

- Análise didática em relação ao *software*

Ao contrário do que previmos na análise preliminar desta atividade, os alunos tiveram pouca dificuldade na resolução da questão, por já estarem mais familiarizados com o software e os princípios das construções geométricas, como, também, pela própria atividade, que tratava apenas das propriedades do hexágono.

Em relação ao software, apesar de já terem um maior domínio sobre seu funcionamento e construção das figuras, a dificuldade de alguns continuava sendo ainda, tornar as construções estáveis, conforme apresentamos na figura abaixo.

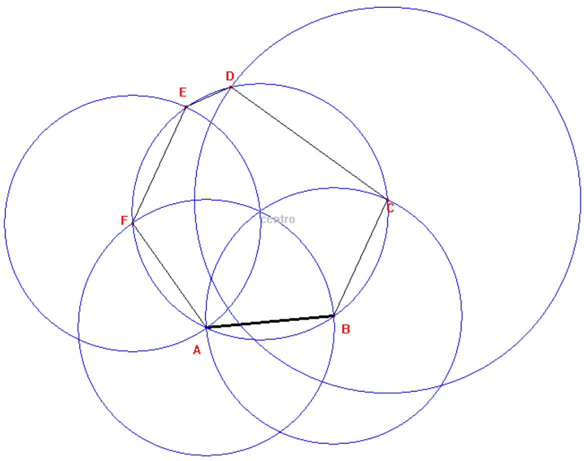


Figura 64

Observando os erros na estabilização da figura, verificamos que eles são resultantes, principalmente, da não observância dos alunos em relação à intersecção de dois objetos, ou seja, os alunos acabam clicando apenas sobre um dos objetos, acreditando que o ponto pertencerá aos dois, pois no plano visual, realmente parece pertencer, no entanto, quando movimentam a figura, é que vão perceber o erro através de sua deformação.

Para superação deste tipo de falha, nossa orientação foi sempre solicitar que primeiro marquem os pontos de interseção dos objetos interligados, para depois poderem uni-lo a outros objetos da construção.

- Análise didática em relação à *Geometria*

Em relação aos conceitos geométricos do hexágono, os alunos tinham clareza que se tratava de um polígono regular de seis lados e ângulos congruentes e que tinham que iniciar a construção deste partindo do segmento $\overline{AB}$.

Ao indagarem sobre como deveriam proceder na construção, orientamos que cada um fizesse à sua maneira, desde que os princípios do hexágono e da atividade estivessem contemplados na solução.

Para aqueles que estavam sem saber como iniciar, perguntamos se o hexágono poderia ser decomposto em outros polígonos e qual era este polígono. A partir do questionamento, alguns responderam que poderia ser decomposto em 6 triângulos eqüiláteros, o que deu uma luz para o início da construção partindo do triângulo equilátero, que culminou na solução **a.**

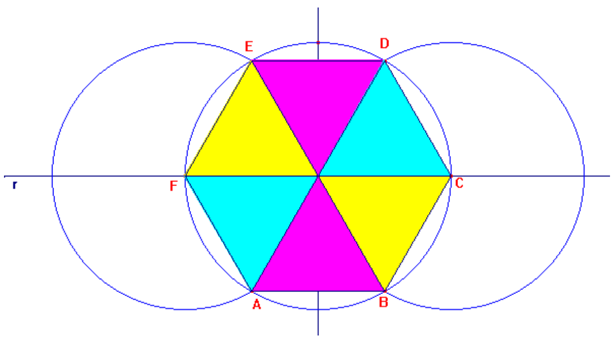


Figura 65 - a: Solução a

Outras soluções apresentadas pelo grupo foram as soluções **b** e **c.** A solução **b** foi a que mais apareceu entre o grupo, e tem o mesmo princípio da solução **a,** os triângulos eqüiláteros e o raio da circunferência; a solução **c,** teve o raio da circunferência como medida de referência para a construção.

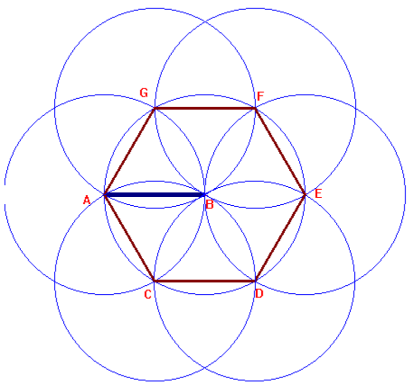


Figura 65 - b : Solução b

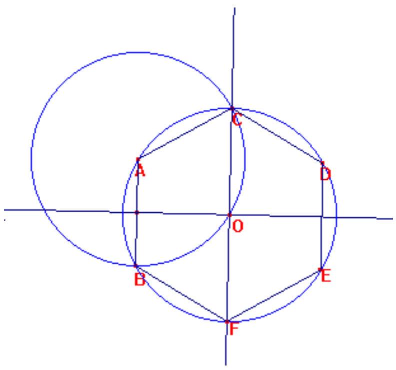


Figura 65 - c: Solução c

6.8 Dados obtidos das Fichas diagnósticas Inicial e Final (Apêndices 3 e 4)

Os 76 alunos pesquisados apresentaram várias vantagens para a utilização das tecnologias digitais no ensino de Matemática, conforme apresentamos a seguir, no entanto as mais enfatizadas foram *(1) possibilitar a compreensão, visualização e contextualização de conceitos matemáticos abstratos – 66% e (2) motivar e despertar a atenção e o interesse dos estudantes – 34%.*

Outras vantagens apresentadas pelo grupo foram:

- exploração, investigação e criação matemática,
- precisão nos resultados,
- modificação e movimentação imediata das construções,
- inovação na metodologia de ensino,
- verificação e assimilação dos conteúdos estudados,
- ampliação das possibilidades na pesquisa matemática,
- apresentação de um ensino atual e renovado,
- maior preparação do aluno para o mercado de trabalho e
- um novo modo de ensinar e aprender os conhecimentos matemáticos.

Objetivando compreender qual a melhor forma de conduzir as atividades no laboratório, perguntamos aos alunos se haviam resolvido as atividades de forma individual ou em dupla e porquê. Apresentamos a seguir as respostas e justificativas obtidas.

- Justificativas para as resoluções individuais - 23,4%

- *Idealização de aprender mais e superar os desafios com esforço próprio*

"Pois eu pretendia aprender mais sobre os programas."

"No início cheguei a pensar que era difícil, porém com esforço consegui e fiquei feliz com os resultados."

"Não senti muita dificuldade e gosto de quebrar a cabeça até conseguir aprender."

"Gosto de tentar resolver minhas atividades só, isso me ajuda a raciocinar mais, além de que sou um pouco autodidata."

- *Levantar e testar hipóteses e fazer autoavaliação em relação as atividades*

"Para buscar meu limite e me avaliar."

"É bom fazer sozinho, pois assim testamos cada hipótese e vemos sua validade."

"Achei mais fácil para visualizar melhor as atividades e observar com mais facilidade as resoluções."

"Creio que a aprendizagem depende em grande parte de nós, e algumas vezes, por estarmos no grupo, acabamos nos acomodando."

- *Validação do conhecimento do professor*

"Com as explicações da professora ficou mais fácil a compreensão das atividades."

"Quando tinha dúvidas chamava a professora, sua explicação é melhor que a dos colegas."

"Preferi fazer só, as observações que a professora fazia para tirar dúvidas de outros colegas, ajudaram a corrigir meus erros ."

"Fazer só ajuda a gente a ter mais atenção aos erros, principalmente com as perguntas que a professora fazia, pois a gente via logo o que tava ou não tava certo.."

Apesar de este grupo haver assinalado a opção de resolução individual, 40,1 % destes, relataram que em determinados momentos recorreram a algum colega para tirar dúvidas. Os 59,1% restantes, apesar de não relatarem que solicitaram ajuda de algum colega, observamos que a maioria deles interagiu com algum colega em relação à atividade, e/ou recorreram ao professor ou monitor para tirar dúvidas.

- Justificativas para as resoluções em dupla - 76,6%

- *Trocar ideias, informações e conhecimento acerca das resoluções*

"O trabalho em dupla facilitou a troca de informações, porque surgiram dúvidas no desenvolvimento de algumas questões."

"Fica mais fácil resolvermos uma questão quando podemos discutí-la com outra pessoa."

"Tivemos a liberdade de compartilhar informações entre colegas, havendo ajuda mútua e confronto de ideias."

"Duas cabeças pensam melhor que uma. Nas dificuldades meu colega me auxiliava, assim como eu o ajudava nas suas."

- *Tirar dúvidas sobre o manuseio do software*

"Tiveram alguns itens que me trouxeram dúvidas quanto à utilização dos softwares."

"Em algumas atividades tive que ter ajuda de um colega, pois esses softwares eram novos para mim."

"As minhas atividades foram feitas em dupla, porque tinha dificuldade no manuseio dos softwares, talvez pela falta de prática fora da sala de aula."

"Pois sendo um software que ainda era desconhecido por mim, precisei trocar ideias."

- *Solicitar auxílio aos colegas na compreensão das questões*

"Pois em algumas questões precisei da ajuda dos meus colegas para a compreensão das atividades."

"Algumas questões eu fiz com ajuda, pois não lembrava de como se usa aquelas regrinhas para as construções das figuras."

"Pois dessa forma nós conseguimos relembrar e discutir temas da geometria que tínhamos esquecido e assim pudemos resolver com mais facilidade e interesse tais atividades."

"Para tirar dúvidas com os colegas."

- *Ajudar os colegas que tinham menos experiência com o computador*

"Como não tive dificuldade com o software, optei por ajudar minha colega que tinha menos experiência."

"Tenho alguns conhecimentos na área de tecnologia e matemática e acredito que a aprendizagem coletiva é bem mais proveitosa."

"Como eu não sentia dificuldades nos programas, preferi trabalhar em dupla para tentar orientar um colega que estava meio perdido."

"Tinha minhas dúvidas, mas os colegas próximos tinham mais ainda, então trocamos informações e nos ajudamos o tempo todo."

As falas ora transcritas nos mostram que a interação dos alunos ocorreu principalmente durante a *maturação* das questões, momento proposto pelo professor-pesquisador para a busca da solução das questões. Esta foi uma ocasião essencial na resolução das atividades, foi nele que surgiram *questionamentos* e *hipóteses* acerca das soluções.

Observamos que, apesar de o professor ter deixado os alunos escolherem se iriam resolver as questões de maneira individual ou em dupla, mesmo que uma parte do grupo tenha optado por efetivá-las de maneira individual, verificamos que houve algum tipo de interação deles com membros do grupo (aluno, monitor ou professor). Mesmo que estes não tenham percebido, as interações influenciaram na compreensão e avanço das soluções, o que nos leva a concluir que as interações entre os alunos, durante as atividades de laboratório contribuem para o avanço das soluções, como também, para um melhor domínio dos softwares trabalhados.

Podemos destacar o fato de que, durante a maturação das soluções das atividades trabalhadas no exprimento, prevaleceram as situações a-didáticas, as quais podemos concluir que foram de grande contribuição para a aprendizagem dos alunos, tanto nas resoluções individuais, como em dupla. Esta importância ficou bastante perceptível durante a *discussão das soluções,* quando a maioria dos alunos mostrou, por meio das respostas apresentadas, que eles haviam compreendido os problemas propostos e os modelos de resolução.

Percebemos que a maior parte dos erros estava mais relacionada ao *software,* muitas vezes os alunos lembravam do conceito, resolviam a atividade no papel, mas tinham muitas dúvidas sobre como implementá-la. Destacamos aqui os efeitos da *Transposição Informática,* ou seja, a dificuldade da representação / transposição do conhecimento em jogo no ambiente informático. Estas representações causam inicialmente uma certa estranheza, pois a determinação das propriedades matemáticas não é mais o único parâmetro para a elaboração de uma resposta correta, mas também as regras de formulação da resposta, inerentes ao ambiente informático e ao *software* trabalhado.

6.9 Aplicando a Sequência Fedathi

Apresentaremos aqui um maior detalhamento da aplicação da Sequência Fedathi na Sequência Didática da Atividade 1. O tópico tem como objetivo ressaltar aspectos das intervenções realizadas em cada uma das etapas da Sequência Fedathi. Este detalhamento é apresentado apenas sobre a atividade 1, por serem similares aos realizados junto a outras atividades, de vez que o intuito aqui é enfatizar as interações e intervenções realizadas de acordo com os propósitos da Sequência Fedathi.

1º ETAPA → TOMADA DE POSIÇÃO

Iniciamos uma sondagem sobre quem tinha experiência em informática e em quais *softwares,* todos eles disseram que tinham alguma experiência, alguns ressaltaram que tinham, mas ainda se consideravam aprendizes. Entre as principais atividades desenvolvidas pelo grupo no computador, foram citadas: pesquisa na Internet, correio eletrônico, MSN, editores de texto e poucos com planilha eletrônica. Após este diagnóstico, fizemos a apresentação do *software Cabri-Géomètre,* seus menus e suas principais funções. Logo depois demos aproximadamente 20 minutos para os alunos manipularem o programa e tirarem dúvidas.

Após as primeiras explorações com o *software* entregamos uma folha para cada um com a atividade a ser trabalhada. Orientamos a classe, no sentido de que nos primeiros 15 minutos, tentassem resolver a questão de maneira individual, e só depois, fossem trocar idéias com os colegas, caso preferissem, poderiam continuar resolvendo de forma individual. A atividade apresentada ao grupo foi:

ATIVIDADE Nº 01
Construa um Quadrado ABCD.

2º ETAPA → MATURAÇÃO

Iniciamos a etapa da *maturação,* passando pelos grupos, acompanhando seus primeiros registros na busca da solução. Observamos que inicialmente, todas as resoluções se baseavam na construção do quadrado mediante a união de segmentos, que eram arrastados até atingir medidas iguais. Vale ressaltar que todos eram desenhados sempre com a figura na posição reta, o que denota um conhecimento ligado à aparência e a forma, e, menos, à propriedade do objeto, conforme figura abaixo**.**

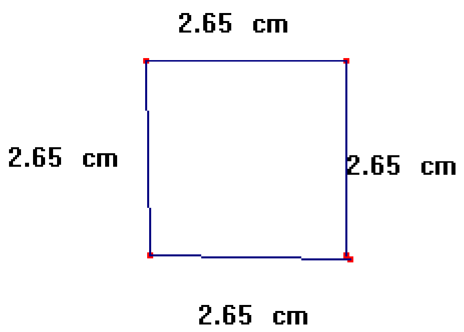


Figura 66

Nenhuma solução mostrava o quadrado inclinado. Então apresentamos ao grupo um quadrado, na posição reta conforme Figura 67**.** Logo depois, como contraexemplo, inclinamos o quadrado, conforme Figura 68 e indagamos se ainda continuava sendo quadrado, pelo menos 50% dos 76 alunos pesquisados, afirmaram que não, e que a figura era agora um losango.

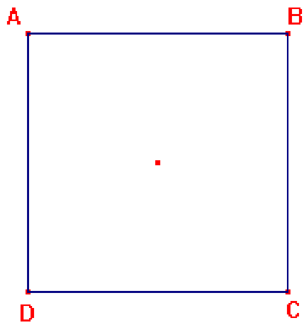


Figura 67

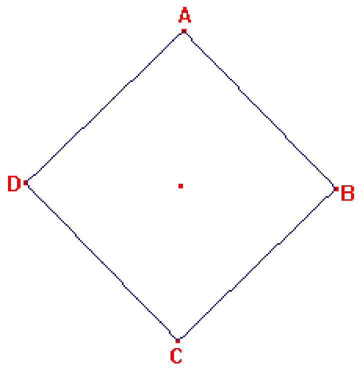


Figura 68

Perguntamos como podiam nos justificar tal afirmação. Alguns dos que afirmaram que era losango ficaram calados e pensativos. Os que tentaram justificar começaram argumentando que a posição dos vértices determinava o losango. Perguntamos o que havia mudado do quadrado para o losango, se alguma propriedade havia sido alterada com a mudança de posição. Só então começaram a dizer que não, e perceberam que realmente a figura continuava sendo a mesma. Solicitamos que movimentassem a figura e observassem que tipo de alterações e transformações ocorriam com as figuras construídas.

Após essa discussão, continuamos passando junto aos grupos, observando suas construções, tirando dúvidas e fazendo indagações sobre elas. Neste acompanhamento, a maioria dos alunos nos perguntavam se a sua solução estava correta. Sempre que nos perguntavam, fazíamos a seguinte pergunta: "*quais as propriedades que compõem o quadrado"?* A resposta apresentada era a de que o quadrado possui quatro lados iguais e quatro ângulos retos. Perguntamos então, se eles haviam verificado a medida dos ângulos de seus quadrados. A maioria respondeu que não (já havíamos observado que nenhum havia medido os ângulos de suas figuras, talvez por desconhecerem como realizar tal ação junto ao *software Cabri-Géomètre*). Explicamos como realizar a medição de ângulo junto ao *software*; relembramos também o conceito de *ângulo.* Notamos que a representação que os alunos possuem sobre ângulo está ligada ao vértice - geralmente o ângulo é identificado somente pelo ponto de seu vértice, no caso do ângulo D$\hat{A}$B, destacado na figura abaixo; geralmente, o ângulo é visualizado pelos alunos como sendo apenas o ponto A e não a região determinada pela união dos segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{DA}$.

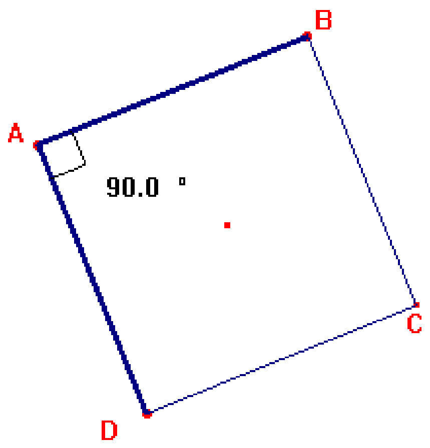


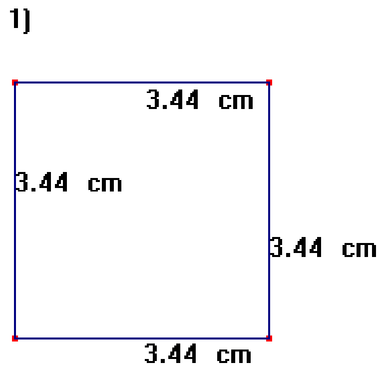
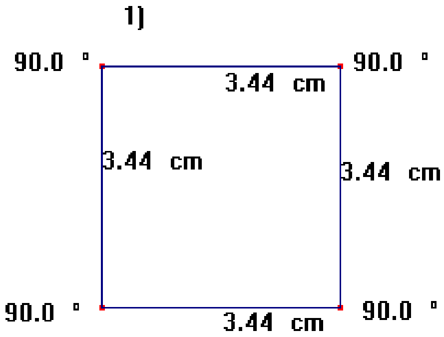
Figura 69

Ainda na etapa da Maturação, enquanto trabalhavam nas soluções, observamos que, após algumas explicações e dúvidas esclarecidas, as construções eram estruturadas e apresentavam-se de formas diferentes, variando de acordo com o nível de conhecimento matemático de cada aluno.

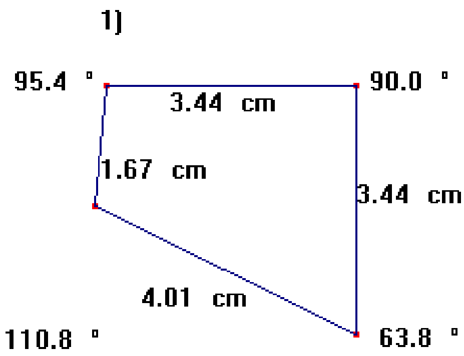
3º ETAPA → SOLUÇÃO

Iniciamos a discussão das resoluções nos pequenos grupos ainda na fase da *maturação* e socializamos os vários tipos de resposta na etapa da *solução.* As soluções apresentadas foram socializadas com todo o grupo e nomeadas como ***Solução A, B, C e D,*** as quais apresentamos logo abaixo, juntamente com as reflexões e sugestões suscitadas desde suas concepções iniciais nos pequenos grupos (na maturação) até a discussão destas junto ao grupão.

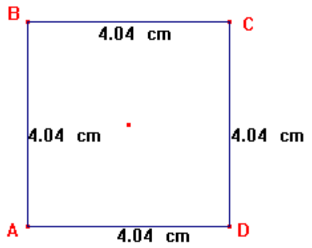
Quadro 15: Protocolo - Solução A

<table>
<tr><th>SOLUÇÃO A</th><th>DISCUSSÃO</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Na etapa da maturação, quando os alunos iniciaram os primeiros registros de suas representações da solução, o modelo mais comum foi o que denominamos de desenho, ou seja, aquele em que os alunos se preocupam inicialmente em representar o objeto que corresponda visualmente à resposta, conforme a Solução ‘A’. Esse tipo de representação matemática é comum quando os alunos começam a utilizar o software Cabri-Géomètre. Inicialmente, eles não apresentam preocupação com a estabilidade das construções, nem com o restante das propriedades matemáticas que determinam a figura. Esse tipo de representação é resultante da representação trabalhada no ambiente lápis e papel.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ainda na etapa da maturação, observando que a maioria dos alunos estavam representando a Solução A, fizemos o seguinte questionamento para o grupo:

“Ter os quatro lados iguais é uma propriedade suficiente para desenharmos um quadrado ?”

A maioria do grupo respondeu que não, que era necessário também ter ângulos iguais. Alguns responderam iguais a 90º. Solicitamos então que medissem os ângulos. A maioria dos alunos que haviam conseguido fazer o desenho com os lados iguais também obteve os ângulos retos.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ainda na discussão da solução, solicitamos que movimentassem a figura e verificassem o que acontecia com o desenho e com as medidas. Todos verificaram de imediato a deformação do quadrado e de suas medidas.

Este momento suscitou questões importantes relacionadas a Transposição Informática, pois alguns argumentaram que apresentaram a reposta correta, pois fizeram o desenho com lados e ângulos iguais, considerando que a mudança dos valores e do desenho após a movimentação era algo posterior à resposta apresentada. Aproveitamos o momento para suscitar questões inerentes à transposição do conhecimento do ambiente lápis e papel para o ambiente informático, ressaltando que, além das propriedades matemáticas, cada ferramenta utilizada como apoio na formulação de um conhecimento possui características próprias e estas precisam ser respeitadas para que seus resultados possam ser validados.</td></tr>
</table>

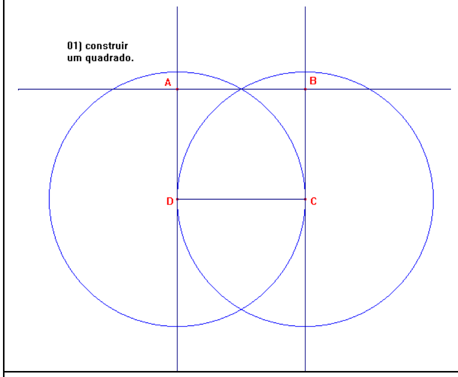
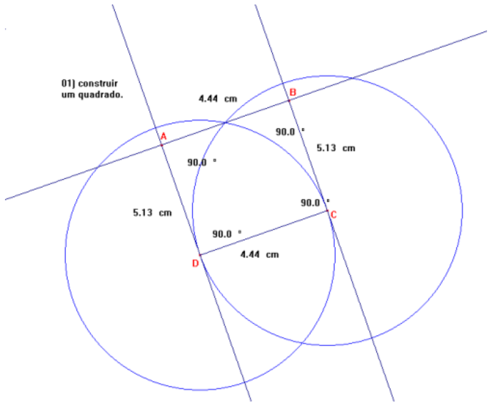
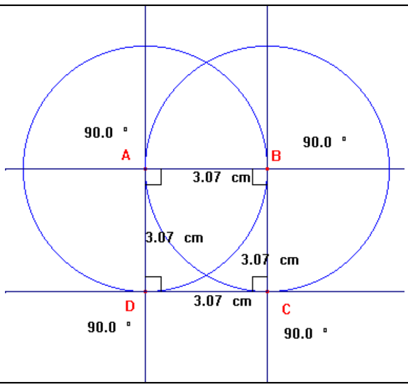
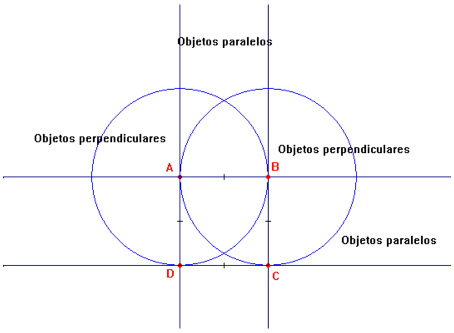
	Houve ainda os alunos que inseriram o quadrado já pronto, pela opção “Polígono Regular”, aos quais ressaltamos que a resposta não era válida para a atividade, em razão da questão apresentada solicitar que os *alunos construíssem o quadrado* e não inserissem a figura já construída. Mesmo não havendo a construção, verifica-se que foi mobilizada a propriedade referente ao quadrado que é a medida dos lados iguais, igualmente à Solução A, não aparecendo nenhuma relação com outras propriedades que ajudassem a definir o quadrado.

Fonte: Dados obtidos da Sequências Didática 01, aplicada na Pesquisa

O modelo da resolução apresentado na Solução A é bastante comum como resposta ao tipo de atividade apresentada, seja no ambiente lápis e papel ou em ambientes informáticos da Geometria Dinâmica. A forma e as propriedades apresentadas nos mostram como a aprendizagem da Geometria ainda é superficial, ou seja, o ensino deixa uma marca muito interna da relação dos objetos geométricos com sua aparência e não com suas propriedades, conforme podemos constatar nos níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico descritos por van Hiele. Apesar dos sujeitos pesquisados possuírem formação específica na área de Matemática e parte deles já serem professores, a solução que prevaleceu (Solução A) ainda está ligada ao Nível 1 na escala de Van Hiele, onde predomina a análise da figura em reconhecimento aos seus componentes e propriedades. No caso da Solução A, predominou apenas a propriedade referente aos lados, ou seja, terem que ser iguais.

A aplicação da Sequência Fedathi foi determinante para a evolução do conhecimento dos alunos nas fases da *maturação e solução*, momentos em que o professor aproveitou as dúvidas, perguntas e representações manifestadas pelos alunos, levando-os a refletir sobre suas hipóteses e a realizar comparações e experimentações sobre estas produções. O ambiente da Geometria Dinâmica nas etapas 2 e 3 da Sequência Fedathi apresenta grande contribuição para a elaboração do conhecimento matemático, pois permite que o aluno experimente e teste as hipóteses levantadas por eles, pelos colegas e/ou pelo professor, podendo verificar de forma imediata os resultados destas experimentações, momento este em que o trabalho dos alunos pode ser comparado ao trabalho do matemático, pois estão imersos em uma situação de experimentação e testagem das hipóteses levantadas, referente a um problema investigado.

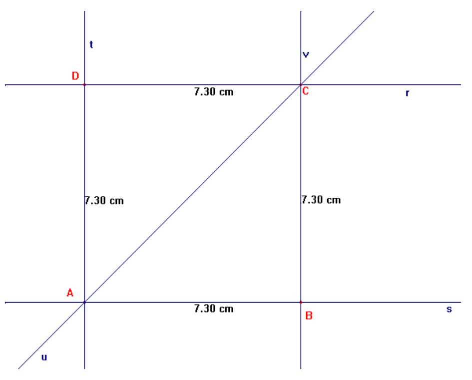
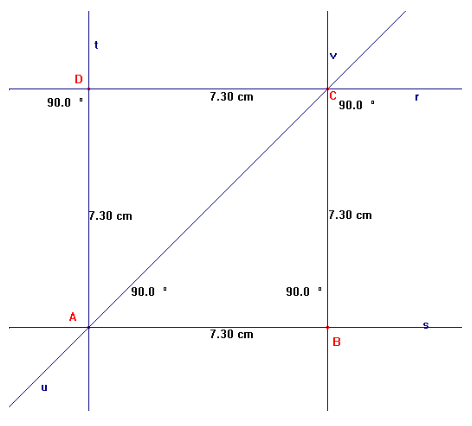
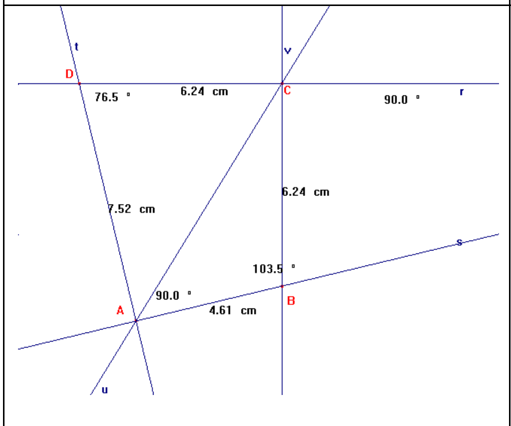
Quadro 16: Protocolo - Solução B

<table>
<tr><th>SOLUÇÃO B</th><th>DISCUSSÃO</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A Solução B foi outro tipo levantado por alguns alunos. Esta já é uma solução mais elaborada, onde podemos perceber que os alunos estão aplicando conceitos ligados às construções geométricas, considerando a medida do raio da circunferência para garantir a igualdade nas medidas dos lados do quadrado; no entanto, não houve atenção inicial do aluno para visualizar que os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ eram menores do que a medida do raio das circunferências.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ainda na fase da maturação, quando o aluno nos perguntou se a construção estava correta, solicitamos que ele fizesse a medição dos lados e dos ângulos, movimentasse a construção e observasse se haveria alguma transformação na figura, e quais.
Após realizar as alterações, ele nos chamou novamente, dizendo que a medida dos ângulos estavam iguais e continuaram mesmo com a movimentação, no entanto a medida dos lados estava diferente. Observamos que ele ainda não havia percebido que os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ não correspondiam ao raio das circunferências.
Solicitamos que verificasse por que as medidas dos lados estavam diferentes, foi quando percebeu e nos respondeu que havia traçado a reta no lugar errado, que ela não deveria passar pelo ponto B e sim pelas intersecções da reta com as duas circunferências.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Este outro aluno optou pelo mesmo tipo de construção do aluno anterior, no entanto, sua construção estava correta. Na etapa da solução,quando discutimos as representações das soluções encontradas, este aluno nos perguntou se havia outra forma de verificar se a construção estava correta, que não fossem as medições dos lados e ângulos e a movimentação da figura.
Respondemos que o Cabri possui no menu Verificar Propriedades, algumas funções que permitem verificar a existência de propriedades e relações entre objetos geométricos trabalhados; orientamos que os alunos verificassem essas propriedades.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ao final o aluno nos chamou e nos apresentou esta representação, tendo usado as funções de verificação de Paralelismo e Perpendicularismo entre as retas que compõem o quadrado.
Podemos ressaltar que as representações e explorações da Solução B apresentavam um grau de dificuldade e de conhecimento matemático maior do que a Solução A, pois levaram os alunos a mobilizar um número maior conceitos e propriedades geométricas e a estabelecer relações entre eles.</td></tr>
</table>

Fonte: Dados obtidos da Sequências Didática 01, aplicada na Pesquisa

O modelo de representação da Solução B foi apresentado apenas por quatro dos 76 alunos. Podemos observar que se trata de uma solução mais elaborada e requer do aluno maior conhecimento acerca de conceitos e propriedades geométricas. Foram mobilizados nesta solução conceitos ligados a *circunferência, perpendicularismo, paralelismo, ângulos e construções geométricas.*

Quadro 17: Protocolo - Solução C

SOLUÇÃO C	DISCUSSÃO
	Esta solução foi apresentada apenas por cinco, dos 76 alunos. Ao revisarmos, observamos que os alunos utilizaram os mesmos princípios e conceitos para obterem a construção da figura: - traçado das retas paralelas **r** e **s**; - traçado da reta **t,** perpendicular a **r** e **s;** - traçado da reta **u,** bissetriz do ângulo DÂB; - traçado da reta **v,** perpendicular a **r** e **s,** passando pela intersecção de **u** e **r**. - medição dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Verificamos que nesta solução, os alunos não usaram conceitos das construções geométricas, como na Solução B; aplicaram outros conceitos geométricos – paralelismo, perpendicularismo, bissetriz e diagonal.
	Durante a *maturação*, um dos alunos que fez esta construção nos chamou para perguntar se a resposta estava correta. Perguntamos a ele como poderia nos garantir que a figura era um quadrado. Respondeu que os lados e ângulos eram iguais. Perguntamos como podia nos garantir que eram iguais. Ele disse que iria medir. Mediu todos e nos confirmou que realmente eram iguais (90º). Perguntamos se havia outra propriedade que ele pudesse nos garantir que os ângulos eram iguais, sem precisar medir. Ele disse que achava que não. Solicitamos que observasse as relações entre as retas e entre os ângulos da figura, para ver se conseguia justificar os ângulos iguais, sem precisar medir.
	Pedimos ainda que animasse a figura e verificasse se o quadrado pemanecia estável. Ele animou e verificou que a construção não era estável, pois a forma e os valores haviam se alterado; e argumentou que estes estavam corretos antes da animação, se isto não era suficiente. Ressaltamos que não, pois ele necessitaria acrescentar à sua construção, regras inerentes ao *software* (Cabri) juntamente às propriedades matemáticas. Deixamo-lo tentando responder os seguintes questionamentos: Como verificar a igualdade entre dois ângulos sem precisar medi-los ? e - Como tornar a construção estável ?

Fonte: Dados obtidos da Sequências Didática 01, aplicada na Pesquisa

Podemos perceber que a Solução C não está diretamente ligada a modelos de construções geométricas, aproximando-se das resoluções tipicamente exploradas no ambiente lápis e papel, mostrando-se como uma tentativa de transposição direta da mesma abordagem para o ambiente informático. Apesar de não envolver diretamente os típicos modelos de construção geométrica, a solução requer o domínio de vários conceitos da Geometria plana, sendo eficiente, principalmente nos primeiros contatos com o *Cabri*, quando os alunos ainda estão se familiarizando com suas ferramentas, suas possibilidades e potencialidades na elaboração das soluções.

Ao iniciar a utilização do *software Cabri-Géomètre* com alunos, é interessante para o professor realizar este tipo transposição direta das soluções trabalhadas no ambiente lápis e papel, para que os alunos não criem resistência à ferramenta e sintam-se à vontade para trabalhar no novo ambiente, que, apesar de exibir características motivadoras - como movimentação, cores, transformação imediata dos objetos etc - poderá agregar e acrescentar ao seu uso o mito do quanto a Matemática é difícil, pois, além das dificuldades conceituais, poderão também sentir obstáculos na implementação do conhecimento no ambiente informático.

Percebemos que a utilização de construções geométricas como base para as soluções, torna-se certo obstáculo para alguns alunos nos contatos iniciais com os *softwares* de Geometria Dinâmica, principalmente para os que não possuem domínio de seus conceitos, ou muito pouco conhecimento acerca destas construções. É importante que o professor esteja atento em relação a este aspecto, para não prejudicar o saber que pretende consolidar com seus alunos, necessitando, talvez, acrescentar a seu planejamento, a exploração de conceitos acerca das construções geométricas, de maneira paralela aos conceitos geométricos estudados.

Durante a discussão das construções apresentadas pelos grupos, procuramos incentivar os alunos a justificar suas soluções, buscando mostrar-lhes os pontos em que haviam cometido erros, tanto com relação aos conceitos matemáticos, como à implementação da solução no ambiente do *Cabri*. Chamamos a atenção para a representação correta dos objetos geométricos, pois muitas das soluções não apresentavam nomeação dos objetos. Durante a discussão das soluções, tivemos uma grande participação dos alunos na busca de compreender e apresentar sugestões em relação a resposta dos colegas. Foi um momento de grande contribuição para o entendimento e consolidação de vários conceitos matemáticos suscitados pelos diferentes tipos de solução, como também, para a compreensão de funções do Cabri.

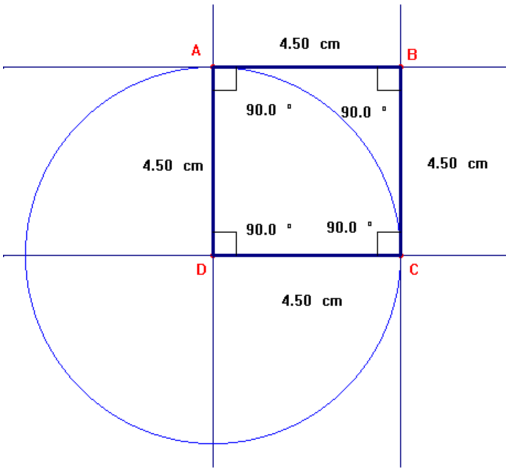
4º ETAPA → PROVA

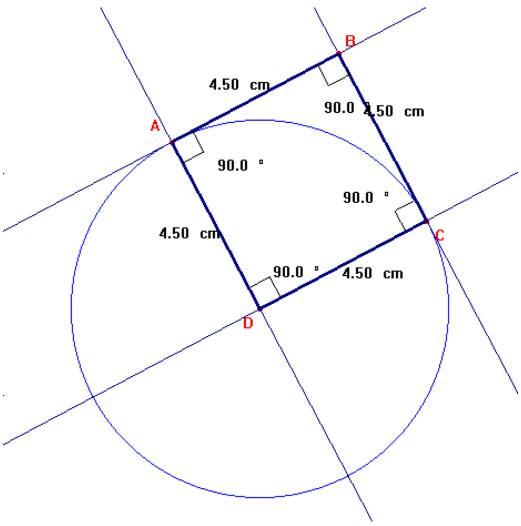
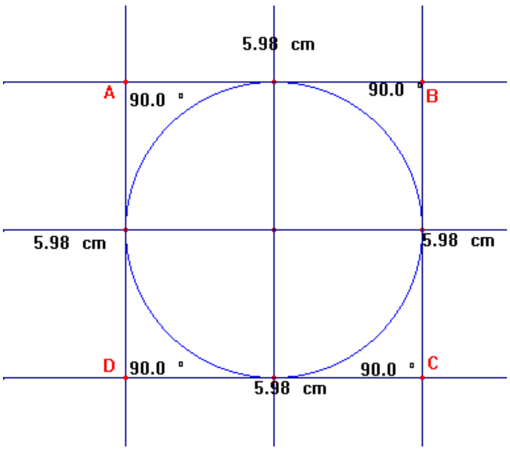
Ainda na etapa da solução, quando discutimos as soluções apresentadas pelos grupos, alguns alunos nos perguntaram qual seria a forma correta de construir o quadrado. Respondemos que não havia uma só forma e que em sua maioria as soluções apresentadas estavam corretas do ponto de vista conceitual, muitos dos erros que apresentavam, não eram da solução escolhida e sim, da implementação da solução no ambiente informático, neste caso, no *Cabri*.

Explicamos ao grupo que muitos dos erros que havíamos detectado estavam ligados a relação dos objetos, ou seja, das intersecções de pontos, retas e circunferências, da visualização dos objetos, onde as relações de intersecção ou sobreposição só eram percebidas, na maioria das vezes, quando as figuras eram movimentadas.

Mostramos ao grupo uma das soluções que podiam ser consideradas como correta, pois, além de incorporar as propriedades do quadrado, mostrava facilmente sua validade em razão das relações e valores proporcionados pela circunferência (raio) e sua relação com as retas paralelas e perpendiculares (Solução D).

Quadro 18: Protocolo - Solução D

SOLUÇÃO D	DISCUSSÃO
	A Solução D foi apresentada por nós. Fizemos sua construção passo a passo (*Datashow*), explicando para os alunos o porquê de cada etapa, a importância de cada objeto do ponto de vista conceitual, sua relevância para compor as propriedades do quadrado e do ponto de vista da estabilidade da construção, ou seja, da permanência das propriedades após serem movimentadas. No fim da apresentação da solução, buscamos solidificar junto ao grupo quais eram realmente as propriedades que compõem o quadrado, deixando claro que seria: - QUATRO LADOS IGUAIS e - QUATRO ÂNGULOS RETOS e que, para conseguirmos fazer esta construção temos como condição o paralelismo entre os lados opostos e a perpendicularidade entre os lados adjacentes. Nesta construção, utilizamos a circunferência para garantir as medidas iguais entre os lados, por meio da medida do raio.

	Após apresentar a nossa solução, fizemos algumas animações da figura, a fim de verificar a estabilidade da construção, ou seja, a permanência das propriedades e não deformação do quadrado. Na construção, ressaltamos a importância da observação das etiquetas que aparecem com mensagens na tela do *Cabri*, referentes aos objetos. Explicamos que a atenção a estas mensagens no ato da construção, é determinante para a construção correta e a estabilidade das figuras, que serão postas à prova, no momento das animações da figura.
	Após a Solução D, apresentamos outra solução que poderia ser realizada, a partir da mesma construção, sendo que o quadrado obtido seria circunscrito à circunferência.

Fonte: Dados obtidos das Sequências Didáticas da Pesquisa

Após a discussão das soluções por nós apresentadas, solicitamos aos alunos que refizessem sozinhos a mesma construção, a fim de apreenderem o modelo e, se necessário, tirarem suas dúvidas. Orientamos no sentido que, sempre que concluíssem uma construção, buscassem animá-la ou movimentá-la como forma de verificar se esta permanecia estável, ou seja, se estava correta para os ambientes da Geometria Dinâmica.

Buscamos através dos protocolos apresentados, ilustrar algumas ações vivenciadas durante a aplicação da sequência didática 01, enfatizando as mediações e interações realizadas com base nos princípios da Sequência Fedathi.

Concluindo

Neste capítulo buscamos ilustrar etapas percorridas na construção da pesquisa de campo. Na primeira parte, apresentamos elementos constituintes da pesquisa: ambiente pesquisado, descrição dos sujeitos, instrumentos aplicados e etapas de desenvolvimento, onde ressaltamos que o estudo foi dirigido a 76 alunos da disciplina - Matemática e Novas Tecnologias, do Curso de Licenciatura em Matemática da UVA, semestre 2009.1, com os quais foi realizado um experimento constando de 14 sessões de trabalho, tendo sido aplicado fichas diagnósticas no início e final do experimento, e, vivenciado quatro sequências didáticas com atividades de geometria, no ambiente do software Cabri-Géomètre.

O experimento teve a Sequência Fedathi como fundamento teórico-metodológico para aplicação das sequências didáticas da pesquisa, além de Fedathi, elementos da didática da matemática como contrato didático, transposição didática e informática e situações didáticas também apoiaram a elaboração, aplicação e análise do experimento.

Na segunda parte, apresentamos as sequências didáticas das quatro atividades aplicadas. Após cada sequência, procede-se a análise, onde buscou-se elucidar os aspectos fundamentais da Sequência Fedathi. Em relação às análises, podemos afirmar que a as etapas da *maturação* e *solução* foram essenciais na compreensão dos conceitos explorados. Os alunos participaram de forma bastante ativa em cada uma destas etapas. Elaboraram seus raciocínios e suas soluções, tiveram a oportunidade de discuti-las e acima de tudo, compreenderem seus erros e acertos.

A exploração dos *questionamentos* durante a etapa da *maturação*, ajudou significativamente os alunos a refletirem sobre os caminhos escolhidos na construção das soluções, esta reflexão ficava perceptível, quando lançávamos questionamentos ou fazíamos outros em relação ao que nos perguntavam; eles avançavam com mais segurança na construção das respostas. Através das reflexões oriundas dos questionamentos, os erros eram percebidos por eles com mais facilidade.

Apesar dos estudantes pesquisados serem licenciandos de matemática, próximos a concluírem a graduação, no início das resoluções, geralmente não aplicavam propriedades matemáticas, recorriam apenas a conceitos mais elementares, associando-os através de ensaios com tentativa e erro. Observamos que este comportamento tinha duas origens principais: conceitos matemáticos mal assimilados ou mesmo desconhecidos e dificuldades iniciais na transposição informática dos conceitos matemáticos envolvidos nas atividades.

Os estudantes iniciavam as resoluções tentando reproduzir o que fazem no ambiente lápis e papel, só depois de algum tempo de familiarização com o software trabalhado, é que iam percebendo as regras inerentes ao ambiente, adaptando assim, suas soluções.

Conforme já comentamos anteriormente na análise das fichas diagnósticas, a interação entre os alunos é algo que surge naturalmente, na maturação das atividades, aproveitar e direcionar as interações para os objetivos da atividade, depende do professor e de sua metodologia de ensino. Em relação à pesquisa, como as ações foram conduzidas pelos princípios da Sequência Fedathi, foi combinado com o grupo quais seriam os momentos individuais e quais seriam coletivos, a ênfase nos trabalhos individuais foram dadas no debruçar-se inicialmente sobre o problema (*tomada de posição*), momento que era direcionado para os alunos pensarem sobre as possíveis formas de resolução, podendo depois, discutirem com os colegas suas proposições iniciais e/ou dúvidas. Eles também podiam solicitar auxílio do professor e/ou monitor. Na maturação buscou-se conduzir os alunos a refletirem sobre suas dúvidas e, observarem em suas soluções como estavam aplicando as propriedades e conceitos matemáticos. O auxílio mais direto do professor e monitor, se davam mais em relação às funções do software.

As etapas da *maturação* e *discussão das soluções* demandaram de muito tempo da aplicação das sequências, no entanto, em razão da compreensão alcançada pelos alunos durante estas etapas, a generalização necessária para a solução final – a *prova*, eram conseguidas sem muitas dificuldades. Os conceitos já estavam previamente elaborados, sendo apenas organizados e estruturados de acordo com os modelos matemáticos previstos para as soluções (prova).

Além da apresentação, discussão e análise das sequências didáticas apresentadas, na terceira e última parte do capítulo, tentamos ilustrar de forma mais detalhada, a aplicação da Sequência Fedathi, apresentando através de protocolos, momentos significativos vivenciados na aplicação da sequência didática da Atividade 01. A ilustração da aplicação foi realizada apenas com a atividade 01, em razão dos fundamentos da Sequência Fedathi, aparecerem de forma similar na aplicação das outras atividades.

A Sequência Fedathi foi para nós, uma metodologia que muito se adequou e muito contribuiu para o ensino da matemática no ambiente informático trabalhado, seu modelo possibilitou um trabalho significativo tanto para nós, como para os alunos, que além de haverem alcançado os objetivos propostos nas sequências didáticas, relataram que o trabalho realizado ficou sendo um modelo para aplicarem nos laboratórios das escolas que lecionam/lecionarão.

CONCLUSÕES

Sabemos que o que fizemos foi apenas uma gota d'água no oceano, mas se não tivéssemos feito, essa gota faltaria.

Madre Tereza de Calcutá

A Matemática, desde o seu surgimento até os dias atuais, passa por diferentes fases de desenvolvimento, cada uma marcada pelas influências do contexto social de cada época. As expressões do desenvolvimento dessa ciência marcam também o contexto educativo, pois a Matemática está inserida na maioria dos currículos escolares e universitários e, como tal, exerce grande influência sobre a formação dos educandos.

No contexto atual, todos os segmentos sociais são influenciados pelo desenvolvimento tecnológico. O desenvolvimento das ciências é impulsionado pela utilização dos recursos tecnológicos. Como ciência, a Matemática também tem o desenvolvimento potencializado pelo uso destas novas ferramentas, como os computadores, softwares gráficos, calculadoras etc. O desafio das instituições educacionais, como unidades responsáveis pela disseminação dos saberes é introduzir esses novos instrumentos no ensino da Matemática, de maneira que estes venham a contribuir com o desenvolvimento cognitivo e social dos educandos.

Partindo desta realidade, iniciamos o presente trabalho tendo como objetivo investigar como as novas tecnologias poderiam contribuir na aprendizagem matemática, no entanto, quando começamos a refletir sobre o tema, sentimos constantemente a necessidade de pensar em primeiro lugar sobre o ensino da matemática.

Esta inquietação veio de encontro ao que havíamos iniciado em nossa dissertação de mestrado, por meio de reflexões acerca da Sequência Fedathi. Compreender e sistematizar a proposta da Sequência passou a ser então um dos objetivos a serem atingidos nesta pesquisa, principalmente, por ainda não possuir uma literatura mais vasta, abordando suas especificidades.

Desde que começamos a estudar a Sequência, buscamos compreender seus princípios e aplicá-los em nossas aulas, o que algumas vezes nos deixava dúvidas sobre como proceder em determinados momentos da aula, como saber se as ações realizadas correspondiam ao que propõe a Sequência. Tentando aproximar-nos destes propósitos indagamos por várias vezes o Professor Hermínio sobre o que vínhamos realizando em relação à aplicação da Sequência, buscando clarificar quais eram realmente os principais pontos a serem considerados em uma prática de ensino da matemática, que se proponha a aplicar Fedathi. Estes esclarecimentos e reflexões nos ajudaram na estruturação apresentada no terceiro capítulo.

Para sistematizar a Sequência surgiu então a necessidade de buscarmos subsídios que pudessem auxiliar na fundamentação teórica. A primeira necessidade foi tentar compreender quais são os principais fundamentos da Didática Geral e como eles aparecem na sala de aula; este anseio de compreender e abstrair elementos desta ciência originou o primeiro capítulo do trabalho, o qual nos conduziu a um melhor entendimento dos objetivos e elementos da Didática Geral.

Quando buscávamos autores que pudessem auxiliar nos fundamentos teóricos da didática, encontramos um livro de *Introdução a Didática Geral* de 1966, do autor Imídeo Nérici, a obra consta de 512 páginas e apesar do período em que foi escrito, muito do que trata permanece válido. Para nossa surpresa, descobrimos que o autor tem uma vasta obra na área de didática e metodologia de ensino, com escritos que vão dos anos 1960 a 1980, dentre os quais conseguimos adquirir 5 livros. Em um deles *Didática Geral Dinâmica* o autor propõe como método de ensino um ciclo docente composto de três fases, que muito se identificam com a Sequência Fedathi, principalmente a segunda fase que ele nomeia como *execução,* que se aproxima ao que é proposto na *maturação* e *solução* em Fedathi, fortalecendo a importância destas fases para o desenvolvimento do aprendizado.

Vislumbramos através da Didática Geral, tanto em Nérici como em Libâneo, que os *métodos e técnicas de ensino* correspondem a um dos elementos fundamentais do processo de ensino, e é neste espaço que se insere a Sequência Fedathi, apontando caminhos para o professor e o aluno, na elaboração do saber matemático.

Passamos por uma compreensão acerca da Didática Geral, para chegar então a Didática da Matemática. Partindo do desenvolvimento histórico desta, compreendemos que um de seus objetivos é a investigação das *situações didáticas.* Conforme ressalta Brousseau (2008), compreender as relações que movem o professor, o aluno e o saber durante as realizações didáticas, auxiliarão na abstração e generalização de variáveis que possam conduzir a uma situação didática fundamental (ideal), para a elaboração de determinado saber.

O aspecto destacado por Brousseau, em que o ensino da Matemática deve reproduzir o trabalho científico, é também reforçado por Borges Neto na Seqüência Fedathi, quando propõe que o ensino da Matemática seja realizado levando em consideração os estádios de trabalho vivenciados pelo matemático nas suas criações e experimentações teóricas.

Com base nos estudos realizados sobre a Didática Geral e da Matemática observamos que ambas propõem sequências de ensino como forma de organizar e desenvolver a aprendizagem do aluno, esta observação nos motivou a realizar um levantamento histórico acerca de algumas destas sequências. O levantamento teve como objetivo verificar o que elas tinham em comum e como poderiam ajudar na sistematização da Sequência Fedathi. O resultado foi bastante interessante, conforme mostramos no capítulo quatro, a maioria das sequências apresentadas se aproximam em alguns pontos e estes se fazem presentes na Sequência Fedathi, são eles: *a compreensão do enunciado e do problema, a busca de várias estratégias de resolução, a aplicação das estratégias* e *a revisão e comprovação do processo.*

Mesmo com os pontos de convergência encontrados entre as sequências apresentadas, o que percebemos é que a maioria delas fornece pouquíssimos subsídios teóricos para serem aplicadas, sendo este um ponto que estamos tentando diferenciar na Sequência Fedathi. A caracterização apresentada no terceiro capítulo, visou deixar uma contribuição neste sentido, ou seja, apresentar elementos e categorias que facilitem a compreensão e aplicação da Sequência Fedathi.

No que concerne a Geometria, podemos dizer que esta é uma importante área da Matemática. Sua formalização, através dos princípios de Euclides, influenciou o desenvolvimento e axiomatização da matemática. As marcas impostas pelo Movimento da Matemática Moderna, que acarretou seu quase desaparecimento dos currículos escolares e salas de aula, estão aos poucos sendo superadas. No que diz respeito aos currículos, tanto das escolas como dos Cursos de Matemática, vemos um grande avanço, a maioria propõe e enfatiza a importância dos conteúdos geométricos, mesmo assim, conforme verificamos nos resultados do ENADE e nas resoluções dos alunos junto ao experimento, o domínio dos estudantes em relação à Geometria ainda é muito baixo, fazendo-se necessário um maior investimento no ensino da Geometria, nos cursos que formam professores para o ensino da Matemática.

Quanto à utilização das tecnologias digitais no ensino da matemática, percebemos que há muitos avanços principalmente no que concerne à criação de softwares, oferta de cursos à distância, grupos de pesquisa sobre a temática, implantação de laboratórios etc. Apesar destes avanços, ainda é pouca a literatura que trate de forma mais específica sobre a influência destas tecnologias na aprendizagem de conceitos matemáticos. Para potencializar estes avanços que vêm ocorrendo, faz-se necessário um maior compromisso por parte das instituições superiores tanto na formação dos professores, como no desenvolvimento de estudos e pesquisas que busquem uma utilização crítica e eficaz da tecnologia na educação.

Os resultados obtidos no experimento, nos apontam importantes conclusões tanto acerca da aplicação da Sequência Fedathi, como da transposição informática com o *software* Cabri-Géomètre.

Em relação à Sequência Fedathi, percebemos que a vivência de cada uma das fases propiciou um excelente desenvolvimento das atividades, isto porque o ensino da matemática utilizando tecnologia requer do professor uma nova postura perante a elaboração do saber. É preciso que o professor perceba que os conceitos matemáticos, quando explorados no computador, adquirem novas formas de apresentação e formulação. A experimentação passa a ser um elemento enriquecedor para o aluno, que passa realmente a desenvolver um trabalho similar ao do matemático. Neste sentido, é preciso que o professor organize a gestão do tempo das aulas, para conseguir concretizar os objetivos de ensino perseguidos.

Os elementos da Sequência que consideramos de maior contribuição para o aprendizado dos alunos foram as interações decorrentes dos *questionamentos*, que levaram os alunos a refletir sobre o que estavam fazendo (na fase da maturação) e *a discussão das soluções,* que permitiram aos alunos vislumbrar as várias soluções apresentadas, e, principalmente, identificar os *erros* contidos naquelas que não satisfaziam o problema.

Outro ponto a ressaltar é a importância das interações do professor com os alunos e dos alunos entre si. Tanto em nossas observações, como nas respostas dos alunos, ficou claro que a troca de informações e as reflexões suscitadas pelo professor ou por colegas foi determinante para a compreensão e avanço nas resoluções.

No que concerne à *transposição informática* nos ambientes de geometria dinâmica, inicialmente há um obstáculo comum, que é a tentativa de resolver o problema da mesma forma que se resolve no ambiente lápis e papel. Este é um momento importante para a atuação do professor, é preciso que comece a fazer indagações e reflexões acerca das propriedades matemáticas que envolvem a solução. Assim, o aluno começa a perceber que esta interface tem uma nova forma de apresentar os conceitos e problemas geométricos.

Após esta percepção, uma das dificuldades que persegue os alunos é a construção de figuras estáveis, geralmente, quando movimentadas as construções acabam se deformando. Construir figuras estáveis depende, principalmente, da forma como o aluno está unindo os objetos, neste caso é importante que o professor oriente sobre como relacionar os objetos a fim de tornar as construções estabilizadas.

- Sugestões e Perspectivas

Defendemos a idéia de que os Cursos de Formação de Professores, além de buscarem incorporar a utilização das novas tecnologias na formação de seus alunos, ofereçam disciplinas na área das tecnologias digitais , a fim de levar os futuros professores a discutirem e apresentarem posições críticas quanto ao uso dessas tecnologias na sala de aula, visando também a capacitá-los quanto ao uso das mídias disponíveis. Acreditamos que essas mudanças precisam ser urgentemente repensadas, pois, será cada vez mais necessário que os profissionais da educação adquiram o domínio crítico dessas tecnologias para o pleno desenvolvimento de sua atividade profissional.

Estamos cientes que as Licenciaturas em Matemática devem dar cada vez mais ênfase a disciplinas ligadas ao ensino da Matemática, propiciando que estas sejam ministradas por professores com formação Didática e Matemática, pois o que percebemos é que, na maioria das vezes, os alunos das licenciaturas acabam cursando estas disciplinas, explorando apenas a Didática Geral, ou então, quando são direcionadas à Didática da Matemática, acabam sendo ministradas por professores que não têm formação Matemática, apenas a formação pedagógica, fator que lhes dificulta maior aprofundamento de questões inerentes ao ensino da Matemática, principalmente em níveis que vão além do Ensino Fundamental I.

Em razão da Educação a Distância – EAD ser um campo em pleno desenvolvimento, inclusive na área de Matemática, por esta ser carente de professores, temos como intuito aperfeiçoar os resultados obtidos, visando investi-los no ensino de Matemática à distância.

Outra intenção é levar contribuições das discussões do trabalho acerca da Sequência Fedathi e das Tecnologias Digitais para os Projetos Políticos Pedagógicos de Licenciaturas em Matemática, iniciando pela reestruturação que está sendo pensada para o Projeto do Curso pesquisado (Licenciatura em Matemática da UVA), no qual somos professora atualmente.

Ao finalizar, evidenciamos o fato de que o presente ensaio resulta dos anseios que carregamos pela busca de uma Educação que torne nossas crianças e jovens pessoas competentes, justas, humanas e que os faça capazes de renovar diariamente a capacidade de lutar, de amar e sonhar...

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P. et all. **Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática**. Lisboa: APM, 1998.

ALMEIDA, F.J. de e JUNIOR, F.M.F. **Projetos e Ambientes Inovadores**. Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2000.

ALMEIDA, J.A. **Educação e Informática**. São Paulo: Cortez, 1988.

ALMEIDA, M.E. de. **Informática e Formação de Professores**. PROINFO - Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2000. Vols. 1 e 2.

ALMOULOUD, S.A. **Didática e concepção de dispositivos informáticos educacionais.** Revista de Informática Aplicada. Universidade Municipal de São Caetano do Sul – Vol. III, n*o* 1, jan./jun. 2007 • ISSN 1809-5585, pág. 4-10.

__________. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Vol. III, PUC-SP, 2000. (Versão Preliminar)

ALONSO, M. et all. (Org.) **Formação de Gestores Escolares para a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação.** 1ª edição. Ministério da Educação: Secretaria de Educação a Distância – Programa Nacional de Informática na Educação. Brasília: Takano Editora e Gráfica, 2002. 84p.

AMORIM, J.A. A Educação Matemática, a Internet e a Exclusão Digital no Brasil. **In: Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, nº 14, ano 10, pág. 58-67.

ARMSTRONG, Alison. **A criança e a máquina: como os computadores colocam a educação de nossos filhos em risco.** Alison Armstrong e Charles Casement. Tradução Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. 248p.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. In: **BRUN, J. (Org.). Didactique des Mathématiques**. Paris: Delachaux et Niestlé S.A, 1996.

__________. Ingénierie Didactique. In: **Recherches en didatique des mathématiuqes.** Vol. 9/3, 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage editions, 1988.

BACHELARD, G. **A Formação do Espírito Científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento**.** Tradução de Estela dos Santos de Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAGNO, M. **Pesquisa na escola: o que é e como se faz.** 2ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 1998.

BALACHEF, N. **Didactique et inteligence artificiel**. Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 14/1.2, 1994.

BARRETO, Raquel G. (Org.). **Tecnologias educacionais e educação à distância: avaliando políticas e práticas.** Rio de Janeiro: Quartet, 2001. 192p.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BASTOS, J. A. S. **Tecnologia e interação.** Curitiba: Artes Médicas, 1998.

BAZZO, W. A. **Ciência, tecnologia e sociedade: e o contexto da educação tecnológica.** Florianópolis: Ed. da UFSC, 1998.

BELLONI, M. L. **Educação a Distância**. Campinas: Autores Associados, 1999. 115p.

BICUDO, M. A. V. e JUNIOR, A. S. **Formação do Educador e Avaliação Educacional: formação inicial e contínua.** Volume 2, São Paulo:UNESP (Seminários e Debates), 1999.

BICUDO, M. A. V. **Filosofia da Educação Matemática.** 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

__________. Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP (Seminários e Debates), 1999.

BONGIOVANNI, V. **Descobrindo o Cabri-Géomètre.** São Paulo: FTD, 1997.

BORBA, M.C. e PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).98p.

BORBA, M.C. (Org.). **Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Coleção Tendências em Educação Matemática).140p.

BORDANAVE, I. **Estratégias de Aprendizagem.** São Paulo: Vozes, 1983.

BORGES NETO, H. et all. **A Sequência de Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas.** In: Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação – EPENN, 15, São Luís, Anais, 2001.

BORGES NETO, H. & DIAS, A.M I. Desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático no 1º Grau e Pré-Escola**. Cadernos da Pós-Graduação em Educação**: Inteligência–enfoques construtivistas para o ensino da leitura e da matemática. Fortaleza, UFC, 1999, v. 2.

BORGES NETO, H. e CAPELO, S.M.C. **O papel da informática educativa no desenvolvimento do raciocínio lógico.** Disponível em <http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/pre-print/O_papel_da_Informatica.pdf>. Acesso em 12 de abril de 2009.

BORGES NETO et all. O ensino de matemática assistido por computador nos Cursos de Pedagogia. **XIII Encontro de pesquisa educacional do Nordeste** – Coleção EPEN – Volume 19 – Organizador John A. Fossa. Natal: EDUFRN – Editora da UFRN. pág. 149, 1998.

BORGES NETO, H. **A informática na Escola e o Professor**. In: IX Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino - ENDIPE, 1998.

__________.Uma classificação sobre a utilização do computador pela escola. In: **Revista Educação em debate.** FACED-UFC. Fortaleza, Ano 21, nº 37, p. 135-138. 1999.

__________. **Porque computador no ensino de matemática ?** Programa de Pós-Graduação em Educação - FACED - UFC. Sala Multimeios. Fortaleza (CE), [s.d.].

BRANDÃO, J.T. Contribuições do *software* Geogebra no ensino-aprendizagem das funções quadráticas. 2009. 69p. Monografia de Especialização. Curso de Especialização em Ensino de Matemática. Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA.

BRANDÃO, L. de O e ISOTANI, S. **Uma ferramenta para ensino de Geometria Dinâmica na Internet: iGeom.** Anais do XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. Volume V - IX Workshop sobre Informática na Escola, 2003. p. 412.

BOWERS, J. **Convite à matemática**. Lisboa: Edições Silabo, LDA.239p.

BOYER, C. B. **História da Matemática.**. New York: Edgard Blücher LTDA, 1996.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. In: **BRUN, J. (Org.). Didactique des Mathématiques**. Paris: Delachaux et Niestlé S.A, 1996a.

__________. **Os diferentes papéis do professor.** In: SAIZ, C.P.I. et alii - Didática da Matemática – reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas – conteúdos e métodos de ensino.** São Paulo: Ática, 2008.

BRUN, J. et al. **Didactique des Mathématiques.** Paris: Delachaux et Niestlé S.A, 1996.

CABRAL, T.C.B. Lógica Intervenção Didática. **In: Formação de Professores de Matemática – uma visão multifacetada.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001, p.89-128.

CAMPOS, Fernanda C. A. et all. **Cooperação e aprendizagem on-line.** Rio de Janeiro: DPeA, 2003. 167p.

CAMPOS, T.M..M. (Coord.). **Explorando Geometria Elementar com o dinamismo do Cabri-Géomètre**. São Paulo, PROEM, 1999.

__________.**Explorando os Polígonos nas séries iniciais do Ensino Fundamental**. São Paulo, PROEM, 1999. (Versão Preliminar)

CAMPOS, T.M.M. **Geometria Plana com o Cabri-Géomètre**: **diferentes metodologias.** São Paulo: PROEM, 1999.

CAPPONI B. e LABORDE C. **Cabri-Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire. Actes de la sixième école d'été de didactique des mathématiques.** Plestin les Grèves, 1991.

CARNEIRO, R. **Informática na Educação: representações sociais do cotidiano.** São Paulo, Cortez: 2002. (Coleção Questões da Nossa Época, v. 96)**.** 120p.

CARVALHO, A.M.P. de. **Prática de Ensino.** São Paulo: Enio Matheus Guazzelli e Cia LTDA, 1985, 106p.

CARVALHO, D.L. de. **Metodologias do Ensino de Matemática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1994. (Coleção Magistério). Série Formação do Professor.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique - un exemplo d'analyse de la trasnpositions didactique.** La Pensee Sauvage: Paris, 1991.

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; Volume 2)

CLAÚDIO, D.M. e CUNHA, M.L. As novas tecnologias na formação do professor de matemática**. In: Formação de Professores de Matemática** – uma visão multifacetada**.** São Paulo: EDPUCRS, 2002.p.167-190.

COLL, C. S. **Psicologia do Ensino.** Tradução Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000, 408p.

COMÊNIO, J.A. **Didática Magna.** Tradução de Nair Fortes ABU-MERHY. Rio de Janeiro: Edição da Organização Simões, 1954.417p.

GRILLO, M. Prática Docente: referência para a formação do educador. In: CURY, H.N. (Org.). **Formação de Professores de Matemática.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001, 190p.

COLTRO, A. A fenomenologia: um enfoque fenomenológico para além da modernidade. **In: Caderno de Pesquisas em Administração**, São Paulo, V.1, nº 11, 1º trimestre/2000.

COSTA L. e GRAÇA, M. **Aprender matemática, pensar a realidade.** Lisboa, 1993.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

COXFORD, A.F. e SHULTE, A.P. **As ideias da Álgebra.** Tradução: Higino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

CROWLEY, M.L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do Pensamento Geométrico.** In: Aprendendo e ensinando geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

CURY, H.N. (Org.). **Formação de Professores de Matemática.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001, 190p.

CYSNEIROS, P. G. **A assimilação da informática pela escola pública.** In: III Congresso da Rede Ibero-americana de Informática Educativa – RIBIE – Barranquilha – Colômbia. Anais da III RIBIE, 1996.

__________. Iniciação à Informática na Perspectiva do Educador**. Revista Brasileira de Informática na Educação**, nº 7, setembro, 2000.

__________. Programa Nacional de Informática na Educação: novas tecnologias, velhas estruturas. **In: Tecnologias Educacionais e Educação a Distância** - avaliando políticas e práticas. Raquel Goulart Barreto (Org.). Rio de Janeiro: Quartet, 2001, págs.120-144.

D´AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Papirus, 1997.

__________. **Etnomatemática –** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica: 2001, 112p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

__________. Uma análise dos Parâmetros Curriculares em Matemática. **Educação Matemática em Revista.** Número 7, ano 6, 1999.

D'AMORE, B. **Elementos da Didática da Matemática.** Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 451p.

__________. **Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino**. Bolema. Boletim de Educação Matemática. 1998, Vol. 20, n° 28, 179-205.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas da Matemática**. São Paulo: Ática, 1999.

DAVIS, P.J. e HERSH, R. **A Experiência Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DIEUDONNÉ, J. **A formação da Matemática Contemporânea.** Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Parecer nº CNE/CES-1.302/2001- MEC. Disponível em <http://www.cmconsultoria.com.br/legislacao/pareceres/2001/par_2001_1302_CNE_CES_diretrizes_curriculares_matematica.pdf>. Acesso em: 15 de mai. de 2009.

DUPAS, Gilberto. **Ética e poder na sociedade da informação**. 2ª ed. São Paulo: Editora UNESP, 2001. 134p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FERREIRA, M.K.L. **Ideias Matemáticas de Povos Culturalmente Distintos.** São Paulo: Global, 2002.

FERRETI, J. C. et alii. **Novas Tecnologias, Trabalho e Educação - um debate multidisciplinar.** Petrópolis: Vozes, 1997.

FIORENTINI, D. (Org.) **Formação de Professores de Matemática** – **explorando novos caminhos com outros olhares.** Campinas: Mercado de Letras, 2003.

FIORENTINI, L.M.R. e MORAES, R. de A. (Org.). **Linguagens e Interatividade na educação a distância.** Rio de Janeiro: DPeA, 2003. 132p.

FLICK, U. **Introdução a Pesquisa Qualitativa.** Tradução Joice Elias Costa. 3.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.405p.

FONSECA, M. da C.F.R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FOSSA, J. A. e MENDES, I. A. **Tendências atuais na Educação Matemática: experiências e perspectivas.** XIII Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste – Coleção EPEN – Volume 19, Educação Matemática. da UFRN – Natal, 1998.

FRANCO, M. A. **Ensaio sobre as tecnologias digitais da inteligência.** Campinas: Papirus, 1997.

FRANCO, M. L. **Tecnologias, Trabalho e Educação**. Petrópolis: Vozes, 1994.

FREIRE, F.M.P. **O computador em sala de aula: articulando saberes.** Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 2000.

FREITAS, J.L.M. Situações Didáticas. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) - **Educação Matemática - uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 65-87.

FREUDENTHAL, H. **Perspectivas da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

GALVEZ, G. et alii. A Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. **In: Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GIL, A.C. **Métodos e Técnicas da Pesquisa Social**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1994.

GILBRAN, K. **Frases & Pensamentos de Khalil Gilbran.** Acesso em 23 de outubro de 2009. Disponível em http://www.amopoesias.com/frase-de-khalil_gibran--2231.html.

GOODSON, I.F. **Currículo - Teoria e História.** São Paulo**:** Vozes, 1995.

GRANJER, G. G. **A Ciência e as ciências**. São Paulo: UNESP, 1994.

GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. **In: Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação.** Belo Horizonte, MG, 1996.

__________. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **In: IV Congresso RIBIE.** Brasília, 1998.

HAGUETE, T.M.F. **Metodologias qualitativas na sociologia**. 5 ed. Petrópolis-RJ, 1997.

HENRIQUES, A. **Dinâmica dos elementos da Geometria Plana em ambiente computacional -** Cabri-Géométre II. Ilhéus: Editus, 2001. 200p.

HUETE, J. C. S. e BRAVO, J.A.F. **O ensino de matemática** - fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IAHN, L.F. et al. (Org**.).** A Educação a Distância na Universidade Federal do Paraná: novos cenários e novos caminhos. **In: Curso de Aperfeiçoamento para Capacitação de Tutores na Modalidade de Educação à Distância.** Curitiba: Editora Apta, 2002. 299p.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O**. Imática** - ambiente interativo de apoio ao ensino de matemática via Internet. Anais do Workshop sobre Informática na Escola, XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2001.

ISOTANI, S. et all**. Utilizando a Geometria Dinâmica em ambientes de Educação à Distância: iGeom e SAW.** In: Anais do XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2005.

KENSKI, V.M. **Tecnologias e ensino Presencial e a Distância.** Campinas: Papirus, 2003.157p.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

KNIJNIK, G. **Exclusão e Resistência - Educação Matemática e Legitimidade Cultural**. Curitiba: Artes Médicas, 1996.

LA TAILLE, Y. **Ensaio sobre o lugar do computador na educação.**. São Paulo: Iglu, 1990.

LABORDE, C. e CAPPONI, B. Aprender a ver e manipular no objeto além do traçado no Cabri-Géomètre. In: **Revista em Aberto, nº 62**, 1994.

LAKATOS. E.M. e Marconi, M. de A. **Metodologia científica, ciência e conhecimento, métodos científicos, teoria, hipóteses e variáveis**. Atlas, 2ª edição revista e ampliada, 1991.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 4, 1993. 203p.

LIBÂNEO**,** J.C**. Didática.** São Paulo: Cortez, 1994. Série Formação do Professor.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino.** 2. ed. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

__________. **Medida e Forma em Geometria.** Rio de Janeiro: GRAFTEX Comunicação Visual, 1991.

__________. **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, M.S.L. **A hora da prática: reflexões sobre o estágio supervisionado e a ação docente**. 2ª ed. Ver. Aum. Fortaleza: Edições Demócrito Rocha, 2001.

LINDQUIST, M.M. e SHULTE, A. P. **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1991.

LOBO NETO, F.J.S. (Org.) **Educação a distância: referências e trajetórias**. Brasília: Plano, 2001. 143p.

LOBO NETO, F.J.S. **Educação à distância: regulamentação**. Brasília: Plano, 2000.100p.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

LUNGARZO, C. **O que é Ciência, Lógica e Matemática ?** Primeiros Passos. Vol. 20. São Paulo: Círculo do Livro S.A.[s.d.]

MACE, E. e AQUINO, M. **Guia do Software Educativo - 1999 - EDULINK.** Rio de Janeiro: Logon Informática LTDA, 1999.

MACHADO, J. N. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**.** São Paulo: Editorial Danilo A. Q. Morales, 1995.

MACHADO, J. N. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Cortez , 1989.

MACHADO, S.P.A. (Org.). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002.

MACHADO, S.P.A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S.P.A. (Org.). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002. p.197-208.

MANSUR, A. A Gestão na Educação a Distância: Novas Propostas, Novas Questões. In: **Educação a Distância: Temas para o debate de uma nova agenda educativa.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

MIALARET, G. **A Aprendizagem da Matemática.** Coimbra: Livraria Almedina, 1975.

MIGUEL, A. e MIORIM, M. A. **O Ensino de Matemática no 1º grau**. São Paulo: Atual,

MINAYO, M.C.S. **Pesquisa Social - teoria, método e criatividade.** 3. ed. São Paulo:

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo, 1998.

MOORE, Michael G. **Educação à distância: uma visão integrada**. Michael G. Moore, Greg Kearsley. Tradução Roberto Galmon. São Paulo: Cengape Learning, 2008. 398p.

MORAES, M. C. **O paradigma educacional emergente.** Campinas: Papirus, 1997.

__________.Informática Educativa no Brasil: uma história vivida, algumas lições aprendidas**. Revista Brasileira de Informática na Educação**, nº 01, setembro, 1997.b.

MORAES, R.A. **Rumos da Informática Educativa no Brasil.** Brasília: Plano Editora, 2002. 115p.

MORAN, J.M. et all. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 3ª edição. Campinas, SP: Papirus, 2001.173p.

MOREIRA, A. F. B. **Currículo: questões atuais**. São Paulo: Papirus, 1997.

MORIN, E. **Os setes saberes necessários a Educação do Futuro.** São Paulo: Cortez; Brasília: DF, UNESCO, 2000.

MOYASÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 1997.

MUNGUBA, M. C. **Videogame - estratégias de aprendizagem, visão do terapeuta ocupacional para o século XXI:** aporte para os terapeutas ocupacionais e os pais. Fortaleza: Universidade de Fortaleza, 2002, 143p.

NASSER, L. **Níveis de Van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria?** Boletim do GEPEM nº 39, p.33-38.

NASSER, L. (Coord.) **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele.** Instituto de Matemática-UFRJ - Projeto Fundão, Rio de Janeiro, [s.d].

NÉRICI, I.G. **Didática – Uma introdução.** São Paulo: Editora Atlas S.A., 1988. 310p.

__________. **Didática Geral Dinâmica.** 4. ed.. São Paulo: Editora Fundo de Cultura, 1973. 314p.

__________. **Educação e Metodologia.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1970, 276p.

__________. **Introdução à Didática Geral –** dinâmica da escola**.** 4**.** ed**.** São Paulo: Editora Fundo de Cultura S.A., 1966. 512p.

__________. **Metodologia de Ensino** – uma introdução**.** São Paulo: Editora Atlas S.A., 1977. 579p.

NIQUINI, D. P. **Informática na Educação**. Brasília: Universo - UCB, 1997.

__________. **A transposição didática e o contrato didático, para o professor-metodologias de ensino; para o aluno: a construção do conhecimento** – Brasília: Petry , 1999.

__________. **O grupo cooperativo - uma metodologia de ensino.** Brasília: Petry, 1998.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PALLOFF, Rena M. **O aluno virtual:** um guia para trabalhar com estudantes on-line. Rena M. Palloff e Keith Pratt; Tradução Vinícius Figueira. Porto Alegre: Artmed, 2004. 216p.

PAPERT, S. **A máquina das crianças -** repensando a escola na era da informática**.** Campinas: Papirus, 1994. 210p.

PARRA, C. **Didática da Matemática** - reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PAVANELLO, R. M. **O abandono da Geometria** - uma visão histórica. Campinas: DEMR-FE-UNICAMP. Dissertação de Mestrado, 1989.

PERRENOUD, P. **Novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PETERS, O. **Didática do ensino a distância: experiências e estágio da discussão numa visão internacional.** Tradução: Ilson Kayser. São Leopoldo: Unisinos, 2006. 402p.

__________. **A educação à distância em transição: tendências e desafios.** Tradução: Leila Ferreira de Souza Mendes. São Leopoldo: Unisinos, 2004. 400p.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética.** São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1990.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro:Interciência, 1995.

POUTS-LAJUS, S. e RICHÉ-MAGNIER, M. **A escola na era da Internet – os desafios do multimédia na Educação.** Tradução Paula Rocha Vidaline. Lisboa: Instituto Piaget, 1998. 243p.

PRETI, O. (Org.). **Educação a Distância – construindo significados.** Cuiabá: NEAD/IE – UFMT; Brasília: Plano, 2000. 400p.

__________. **Educação a Distância – sobre discursos e práticas.** Cuiabá: NEAD/IE – UFMT; Brasília: Plano, 2005. 172p.

__________.**Educação a Distância – ressignificando práticas.** Brasília: LÍBER Livro Editora, 2005. 240p.

Projeto Político-Pedagógico da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, 2005.

RAPKIEWICZ, C.E. **A informatização do professor no processo de informatização da escola.** In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (I: 19021 nov. 1990: Rio de Janeiro) **Anais.** Rio de Janeiro: COPPE/RJ, 1990.

Relatório Anual de Avaliação dos Cursos de Graduação da Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA, 2008.

Relatório do Curso de Matemática da Universidade Estadual vale do Acaraú - UVA - Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes - ENADE 2008. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior – SINAES / INEP.

RICARDO, E. et all. **A perturbação do contrato didático e o gerenciamento dos Paradoxos.** Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol8/n2/v8_n2_a4.html.> Acesso em: 18 ago. de 2009.

RICH, Barnett. **Álgebra Elementar.** Tradução de Orlando Agueda. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1971. (Coleção Schaum)

RODRIGUES, C.I. **Cabri-Géomètre e a Geometria Plana.** Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2005. 112p.

ROMANOWSKI, J. P. **As licenciaturas no Brasil: um balanço das teses e dissertações dos anos 90**. São Paulo: FE/USP. 2002. Tese de Doutorado em Educação.

RÜDIGER, F. **Introdução às teorias da Cibercultura: perspectivas do pensamento tecnológico contemporâneo.** Porto Alegre: Sulina, 2003. 150p.

RUMBLE, G. **A Gestão dos Sistemas de Ensino a Distância.** Tradução de Marília Fonseca. Brasília: Editora Universidade de Brasília – Unesco, 2003. 117p.

SAMPAIO, M. N., LEITE, L. S. **Alfabetização tecnológica do professor.** Petrópolis: Vozes, 1999.111p.

SANDHOLTZ, J. H. **Ensinando com tecnologia:** criando salas de aula centradas nos alunos**.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.196p.

SAVIANI D. e GEORGEN P. **Formação de Professores: a experiência internacional sobre o olhar brasileiro**. Campinas: Autores Associados – NUPES, 1998.

SCHLIEMANN, A. e CARRAHER, D. (Orgs.) **A compreensão de conceitos aritméticos - ensino e pesquisa**. Campinas: Papirus, 1998.

SEABRA. T. **Geometria Plana.** Recife: Inojosa Editores, 1994.

SILVA, J. A. de M. **Educação Matemática e Exclusão Social:** tratamento diferenciado para realidades desiguais**.** Brasília: Plano Editora, 2002.

SILVA, M. (org.). **Educação Online: Teorias, Práticas, Legislação, Formação Corporativa.** São Paulo: Loyola, 2003. 514 p. ISBN 85-15-02822-0.

SILVA, C. P.da. **Aspectos históricos do desenvolvimento da Pesquisa Matemática no Brasil.** São Paulo: Editora Livraria da Física / SBHMat, 2009.

SILVA, B. A. da. **Contrato Didático.** In: MACHADO, S.D.A. (Org.) - **Educação Matemática - uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p.43-64.

SILVEIRA, S.A. **Exclusão Digital – a miséria na era da informação.** São Paulo: Editora Fundação Perseu Abrano: 2001.48p.

SIMSON, R. **Euclides – Elementos de Geometria.** 2. ed.São Paulo: Edições Cultura.1945.324p.

Sociedade Brasileira de Matemática e Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Artigo: Panorama dos Recursos Humanos em Matemática no Brasil: Premência de Crescer, 2001. Disponível em <http:www.sbm.org.br/files/panmat.ps>. Acesso em: 23 ago. de 2009.

SOUZA, M.J.A. **Informática na Educação Matemática: estudo de geometria no ambiente do software Cabri-Géomètre.** 2001.187p.Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Educação. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará – UFC.

__________. **Como ensinar matemática ? Uma proposta didática através da Sequência Fedathi.** In: Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste – EPENN, 29, 2009, João Pessoa. Anais. 2009.

__________. **Aplicação de Sequências Didáticas no ensino de matemática com ênfase na Sequência Fedathi.** In: Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa – Universidade Estadual Vale do Acaráu, 3, Sobral. Anais.2008a.

__________. **O bom professor de matemática: características essenciais à docência em matemática.** In: Jornada Cearense de Educação Matemática, 3, Fortaleza. Anais.2008b.

__________. **Investigação de ambientes para o ensino de matemática à distância.** In: Jornada Cearense de Educação Matemática, 3, Fortaleza. Anais.2008c.

__________. **Evolução da aprendizagem matemática de alunos do Ensino fundamental II, através da utilização do software Cabri-Géomètre.** In: Encontro de Pesquisa e Pós-Graduação (VII ENPPG) / VII Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica (VII ENICIT) / I Simpósio de Inovação Tecnológica (I SIMPIT) - CEFETCE, 7, Fortaleza. Anais. 2007.

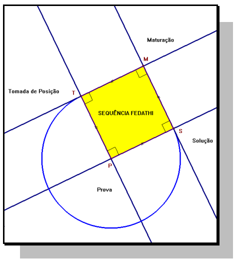
SOUZA, M.J.A. e MARQUES, J.L.F. **Contribuições da Didática para o ensino da Matemática.** 2007, 45p. Monografia de Graduação. Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, 2007.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. **In: Aprendendo e ensinando Geometria.** Mary Montgomery Lindquist, Alberto P. Shule (Org.). Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 21-39.

VALENTE. J.A. (Org). **O Computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: Unicamp/Nied, p. 89-110, 1999.

WEISS, A.M.L. **A informática e os problemas de aprendizagem.** 3. ed. Rio de Janeiro: DPeA editora, 2001,. 104p.

WIELEWSKI, G. D. **O movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil.** Disponível em <http://www.apm.pt/files/_co_wielewski_4867d3f1d955d.pdf >. Acesso em: 23 dez. de 2009.



Apêndices e Anexos

ANEXO 1 - Estrutura Curricular do Curso de Licenciatura em Matemática UVA – 2006.1

GRADE – 2006.1

	1º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
IUNIV132	INTRODUÇÃO A UNIVERSIDADE	----	2
INGLE132	INGLÊS	----	4
ETICA132	ÉTICA	----	4
PORTU132	PORTUGUÊS	----	4
MTCIE132	METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO	----	4
MATEF132	A MATEMÁTICA NA ESCOLA FUNDAMENTAL	----	6
	2º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
MATEM232	A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO	MATEF132	6
GEEUC232	GEOMETRIA EUCLIDIANA	----	6
INCOM232	INTRODUÇÃO A COMPUTAÇÃO	----	4
PSIA1232	PSICOLOGIA I	----	4
	3º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
CADI1332	CÁLCULO DIF. E INTEGRAL I	MATEM232	6
GAVET332	GEOMETRIA ANALÍTICA VETORIAL	MATEM232	6
PSIA2332	PSICOLOGIA II	PSIA1232	4
DESGE332	DESENHO GEOMÉTRICO	GEEUC232	4
SEMA1332	SEMANA DA MATEMÁTICA I	---	2
	4º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
CADI2432	CÁLCULO DIF. E INTEGRAL II	CADI1332	6
GEODE432	GEOMETRIA DESCRITIVA	DESGE332	4
ALGLI432	ÁLGEBRA LINEAR	GAVET332	6
HTEMA432	HIST. E TENDÊNCIAS NO ENS.DA MATEMÁTICA	---	4
	5º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
CADI3532	CÁLCULO DIF. E INTEGRAL III	CADI2432	6
FISEM532	A FÍSICA NO ENSINO MÉDIO	CADI1332	6
EPEFM532	EST. E PROB. NO ENS. FUND. E MÉDIO	MATEM232	4
ESPE1532	EST. SUP. E PRÁT.DE ENSINO I	---	16
SEMAT2532	SEMANA DA MATEMÁTICA II	SEMAT1332	4
	6º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
ESPE2632	EST. SUP. E PRÁT.DE ENSINO II	ESPE1532	16
ESTPR632	ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE	EPEFM532, CADI2432	4
CNUM632	CÁLCULO NUMÉRICO	CADI2432, INCO232	6
ITNUM632	INTRODUÇÃO A TEORIA DOS NÚMEROS	MATEM232	6
	7º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
ESPE3732	EST. SUP. E PRÁT.DE ENSINO III	ESPE2632	20
ESALG1732	ESTR. ALGÉBRICAS E O ENSINO DA ÁLGEBRA I	ITNUM632	6
NTMAT732	NOVAS TECNOLOGIAS NO ENS. DA MATEMÁTICA	INCO232, ALGLI432	6
EDOEA732	EQ. DIF. ORDINÁRIAS E ED. AMBIENTAL	CADI3532, CNUM632	6
SEMAT3732	SEMANA DA MATEMÁTICA III	SEMAT1332	4
	8º SEMESTRE		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
ESPE4832	EST. SUP. E PRÁT.DE ENSINO IV	ESPE3732	28
ESALG2832	ESTR. ALGÉBRICAS E O ENS. DA ÁLGEBRA II	ESALG1732	4
	DISCIPLINAS OPTATIVAS		
CÓDIGO	DISCIPLINA	PRÉ REQUISITOS	CRÉD.
ESPME032	ESPAÇOS MÉTRICOS	CADI3532	4
TECOD032	TEORIA DOS CÓDIGOS	ALGLI432	4
ALCOM032	ÁLGEBRA LINEAR COMPUTACIONAL	ALGLI432, CNUM632	4
TOPOL032	TOPOLOGIA	CADI3532	4
VCOMP032	VARIÁVEIS COMPLEXAS	CADI3532, ALGLI432	4
CGRAF032	COMPUTAÇÃO GRÁFICA	ALGLI432, CNUM632	4
GEDIF032	GEOMETRIA DIFERENCIAL	CADI3532, ALGLI432	4
MAPLI032	MATEMÁTICA APLICADA	ESTPR632	4
TEGAL032	TEORIA DE GALOIS	ESALG2832	4
EDP032	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	EDOEA732	4
ANAL032	ANÁLISE	CDIN3532	6
FHPSE032	FUNDAMENTOS HISTÓRICOS, FILOSÓFICOS E SOCIAIS DA EDUCAÇÃO	HTEMA432	4

APÊNDICE 1 – Programa da disciplina Novas Tecnologias no Ensino da Matemática

UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ

Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática e Novas Tecnologias
Profª: Maria José Araújo Souza

PROGRAMA DA DISCIPLINA:

NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

1. OBJETIVOS

A disciplina *Matemática e Novas Tecnologias* tem por objetivos levar os alunos a:

- Compreenderem como as novas tecnologias vem se desenvolvendo na sociedade e na educação;
- Identificarem os diferentes tipos de tecnologias educacionais;
- Reconhecerem diferentes formas de contribuição das novas tecnologias para o ensino da matemática;
- Discutirem implicações da inserção de novas tecnologias na educação matemática;
- Analisarem as possibilidades e limitações dos recursos tecnológicos no ensino da matemática;
- Conhecerem e desenvolverem atividades em softwares voltados para o ensino da matemática

2. CARGA HORÁRIA

90 h/a - 06 Créditos

3. PÚBLICO ALVO

Alunos do 8º semestre Curso de Licenciatura em Matemática da UVA

4. CONTEÚDO

- Técnica e Tecnologia;
- Alfabetização Tecnológica do Professor;
- Breve histórico da Informática na Educação;
- Recursos tecnológicos aplicados à Educação;
- Softwares no Ensino da Matemática – Geogebra e Cabri-Géomètre;
- Educação à Distância e o Ensino de Matemática
- As Plataformas Teleduc e Moodle

5. METODOLOGIA

A disciplina será desenvolvida através de:

- Estudo e discussão de textos;
- Apresentação de slydes sobre cada conteúdo proposto;
- Esplanações orais acerca das temáticas estudadas;
- Trabalhos individuais e em grupo;
- Resolução de atividades nos softwares Geogebra e Cabri-Géomètre;
- Acompanhamento das atividades pelo professor e monitor da disciplina.

6. AVALIAÇÃO

A avaliação far-se-á por meio de:

- Pontualidade e freqüência nas aulas;
- Observação da participação nas atividades individuais e coletivas desenvolvidas em classe,
- Entrega das Fichas Avaliativas devidamente preenchidas;
- Entrega das atividades realizadas junto aos softwares Cabri e Geogebra;
- Análise coletiva em sala de aula, em relação às atividades desenvolvidas.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BORBA, M.C. e PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- CLAÚDIO, D.M. e CUNHA, M.L. **As novas tecnologias na formação do professor de matemática.** São Paulo: EDPUCRS, 2002.
- KENSKI, V.M. **Tecnologias e ensino Presencial e a Distância.** Campinas, SP: Papirus, 2003.
- MORAES, R.A. **Rumos da Informática Educativa no Brasil.** Brasília: Plano Editora, 2002.
- MORAN, J.M. et all. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 3. ed.. Campinas, SP: Papirus, 2001.173p.
- SAMPAIO, M. N. e LEITE, L. S. **Alfabetização Tecnológica do Professor.** Petrópolis: Vozes, 1999.

APÊNDICE 2 - Ficha Diagnóstica Inicial

ALUNO(A)____Data:_____/_____/_____
E-MAIL:____
IDADE:______________ MUNCIPIO:____________________FONE:___________________

01. Já leciona: ( ) SIM ( ) NÃO
Se respondeu SIM, qual (is) disciplina (s):______________________________________

02. Se já leciona, a escola em que trabalha possui Laboratório de Informática?
( ) SIM ( ) NÃO

03. a) Se respondeu SIM, que tipo de atividades a escola desenvolve no Laboratório?

b) Vc já teve chance de utilizá-lo em alguma atividade com seus alunos ? Qual (is)?

04. Já tinha experiência em informática antes da disciplina? ( ) SIM ( ) NÃO

05. Quais programas mais utiliza?

06. Geralmente, utiliza o computador para quais atividades ?

07. Tem computador em casa ? ( ) SIM ( ) NÃO

08. Se não tem, onde acessa Computador / Internet ?

09. Já trabalhou com algum software voltado a matemática ?
( ) SIM ( ) NÃO – Qual (is) ?

10. a) Já usou o Laboratório de Informática em outras disciplinas do Curso de Matemática ? Quais?

b) Em que tipo de atividade e qual programas foram trabalhados?

11. Concorda com o uso da calculadora na escola: ( ) SIM ( ) NÃO
Justifique:

12. Já fez algum Curso à Distância ? ( ) SIM ( ) NÃO
Se respondeu SIM, nome do Curso:____
O Curso foi feito:
( ) Via Correio ( ) Internet ( ) Correio e Internet ( )Outro______________________

14. O que gostaria de estudar na disciplina Novas Tecnologias no Ensino de Matemática ?

APÊNDICE 3 - Ficha Diagnóstica Final

ALUNO (A):____Data:_____/_____/_____
MUNCIPIO:________________________________ FONE: _____________________________
E-MAIL:____

01. Qual a importância das Tecnologias Digitais para o ensino-aprendizagem de matemática ?

02. Suas resoluções foram feitas: ( ) Individual ( ) Dupla
Justifique.

03. Que software você considerou mais interessante para o ensino de matemática:
( ) Cabri ( ) Geogebra
Justifique:

04. Quais foram suas maiores dificuldades na resolução das atividades junto aos programas trabalhados:

Cabri:

Geogebra:

05. Vantagens e desvantagens dos softwares para o ensino-aprendizagem da matemática

Softwares	Vantagens	Desvantagens
Cabri-Geómètre		
Geogebra		

06. Das atividades trabalhadas no Cabri e Geogebra, qual delas você considerou *mais fácil* de ser resolvida e *a mais complexa*? Justifique.

07. Quais foram as maiores em diferenças estudar matemática / geometria no ambiente lápis e papel e nos softwares Cabri e Geogebra ?

08. Como você classifica o ambiente TELEDUC para o ensino à distância:
( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim

09. Quais as vantagens e desvantagens do TELEDUC para o ensino de matemática à distância ?

10. Quais os pontos positivos e negativos do TELEDUC para o *ensino de matemática à distância*:
* Positivos:

* Negativos:

11. Que ferramentas TELEDUC você considera mais interessantes e de contribuição para a aprendizagem?

12. Em sua opinião, quais são as maiores dificuldades para o uso das tecnologias digitais no ensino de matemática:
* Na escola:

* Na Universidade:

13. Em sua opinião, quais as principais habilidades requeridas de um professor para utilizar as tecnologias digitais em suas aulas de matemática ?

14. Para você, quais são as principais vantagens do computador para:

* O Ensino da matemática:

* A Aprendizagem da matemática:

15. Observações, sugestões e /ou comentários pessoais.

Obrigado pela participação !

APÊNDICE 4 - Ficha de Observação das Sessões

Turma: _________ Nº da Sessão: _________ Atividade (s):___________________________
Horário: Início - _______ Término - __________ Data da Aplicação: ____/ ____/ ________

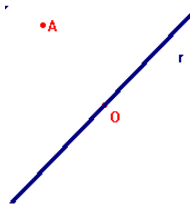
BANCADA / COMPUTADOR	OBSERVAÇÕES
A - 1	
A - 2	
A - 3	
A - 4	
B - 1	
B - 2	
B - 3	
B - 4	
C - 1	
C - 2	
C - 3	
C – 4	
D - 1	
D - 2	
D - 3	
D - 4	

BANCADA / COMPUTADOR	OBSERVAÇÕES
E - 1	
E - 2	
E - 3	
E - 4	
F - 1	
F - 2	
F - 3	
F - 4	
G - 1	
G - 2	
G - 3	
G – 4	
H - 1	
H - 2	
H - 3	
H - 4	

APÊNDICE 5 - Atividades exploradas nas sequências didáticas aplicadas

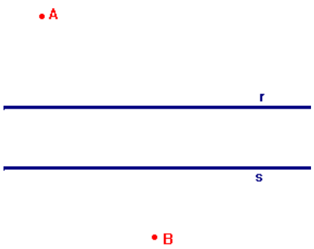
01. Construa um quadrado ABCD.

02. Dada a figura abaixo, construa um triângulo △ABC isósceles, de modo que:



- B seja simétrico de A em relação à r;
- Sua base seja $\overline{AB}$;
- △ABC seja inscrito no círculo C centrado em O.

03. As paralelas r e s são as margens de um rio e os pontos A e B representam cidades em lados opostos desse rio. Deseja-se construir uma ponte $\overline{PQ}$ (P∈ r, Q ∈ s) perpendicular às margens de forma que, construindo as estradas $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$, o percurso total de A e B seja mínimo. Determinar a posição da ponte.

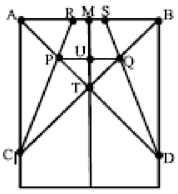


04. Construa um hexágono regular, a partir do segmento $\overline{AB}$.

ANEXO 2 – Situações-problema envolvendo geometria
ENADE 2008 (questões nº 15 e nº 36)

QUESTÃO 15

Uma professora do ensino fundamental resolveu utilizar, em suas aulas, a construção de um avião de papel para explorar alguns conceitos e propriedades da geometria plana. Utilizando uma folha de papel retangular, os estudantes deveriam começar fazendo as dobras na folha ao longo dos segmentos de reta indicados na figura ao lado.



As seguintes condições, segundo instruções da professora, devem ser satisfeitas:

- a reta determinada por M e U é a mediatriz do segmento AB;
- AC, BD e AB são segmentos congruentes;
- PT e TQ são segmentos congruentes;
- PD e BD são segmentos congruentes.

A partir da análise da figura, um estudante afirmou o seguinte:

O triângulo PQD é obtusângulo

porque

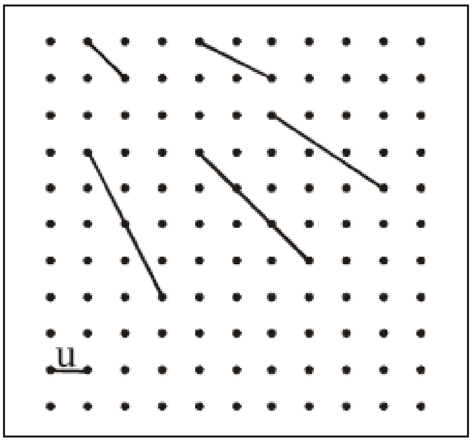
o triângulo PQT é equilátero.

Com relação ao que foi afirmado pelo estudante, assinale a opção correta.

Ⓐ As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira.
Ⓑ As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda não é uma justificativa correta da primeira.
Ⓒ A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa.
Ⓓ A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira.
Ⓔ Ambas as asserções são proposições falsas.

QUESTÃO 36

A figura abaixo mostra alguns segmentos construídos em um geoplano por um estudante, de acordo com a orientação dada pela professora.



Acerca do uso do geoplano retangular nessa atividade, assinale a opção **incorreta**.

Ⓐ O geoplano auxilia na compreensão de que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$.
Ⓑ O geoplano auxilia na compreensão de que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
Ⓒ O geoplano auxilia na representação geométrica de números irracionais da forma $\sqrt{a}$.
Ⓓ O geoplano auxilia na obtenção da relação entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.
Ⓔ O geoplano auxilia na simplificação de expressões com irracionais algébricos, como, por exemplo,

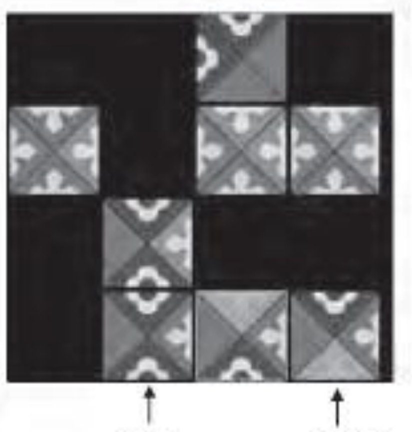
ANEXO 2 – Situações-problema envolvendo geometria
ENEM 2009 (questões nº 141 e nº 145)

Questão 145

As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.

Figura A

Figura B



Disponível em: [illegible]. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça

- A) 1 após girá-la 90° no sentido horário.
- B) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.
- C) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.
- D) 2 após girá-la 180° no sentido horário.
- E) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

Questão 141

O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que $AB = \frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = \frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.

Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele

- A) duplicasse a medida do lado do quadrado.
- B) triplicasse a medida do lado do quadrado.
- C) triplicasse a área do quadrado.
- D) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.
- E) ampliasse a área do quadrado em 4%.

APÊNDICE 6 – Momentos de aplicação das Sequências Didáticas