



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA**

**DANIEL BRANDÃO MENEZES**

**O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA  
SEQUÊNCIA FEDATHI: CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE UM  
BOM PROFESSOR**

**FORTALEZA**

**2018**

DANIEL BRANDÃO MENEZES

O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA  
SEQUÊNCIA FEDATHI: CARACTERIZAÇÃO DA MEDIAÇÃO DE UM BOM  
PROFESSOR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor. Área de concentração: Educação, currículo e ensino.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M51e Menezes, Daniel Brandão.

O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva da Sequência Fedathi.:  
Caracterização do Comportamento de um Bom Professor / Daniel Brandão  
Menezes. – 2018.  
127 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação,  
Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

1. Sequência Fedathi. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Pensamento Matemático  
Avançado. I. Título.

CDD 370

---

DANIEL BRANDÃO MENEZES

O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA  
SEQUÊNCIA FEDATHI: CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE UM BOM  
PROFESSOR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação. Área de concentração: Educação, currículo e ensino.

Aprovada em 22/10/2018

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Antônia Lis de Maria Martins Torres  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Plácido Rogério Pinheiro  
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

---

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans  
Universidade de São Paulo (USP)

A Deus.

Aos meus avós, José Expedito Menezes (*In memoriam*) e Ana Neci Brandão Menezes.

Ao meu irmão Diego.

A minha amada esposa, e ao meu amado filho - Lidiane Costa e Saulo Liel que foi esperado com muito amor.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, em quem pude ter todo meu sustentáculo de força e superação e que me guiou pelos passos do divino Espírito Santo por todos os meus dias até chegar aqui.

Ao Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, pela excelente orientação e por ter acreditado e forjado em mim um pesquisador e, além disso, ter sido o braço forte a me conduzir teoricamente até a elaboração final deste trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Jonatan, que me acompanha na orientação desde o mestrado sempre contribuindo com o meu desenvolvimento, ao Prof. Dr. Plácido, eterno professor de cálculo numérico e colega de instituição a quem muito admiro e aprendo sempre que estou ao seu lado, à Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Lis que acompanhou também meus passos no decorrer do doutorado e que me deu outra visão da educação e, por fim, ao Prof. Dr. Orlando, o qual admiro desde a época da graduação quando o conheci em uma palestra e naquele dia já imaginava que participaria de minha formação. Agradeço a essas pessoas pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Ao professor Tomaz, que ao ministrar aula para mim no ensino médio não somente encantou-me, mas também, mostrou-me quão bela era a matemática.

Aos professores Judson Santos e Eduardo Leão, pois foram eles que acreditaram em meu potencial e em nenhum momento disseram que não iria conseguir realizar meus sonhos, pelo contrário, cuidaram do meu aprendizado como se fosse um filho.

Ao Prof. João Montenegro, que com suas palavras de motivação para estudar uma matemática mais sofisticada, sempre confiou em mim e também muito contribuiu para meu crescimento intelectual.

Aos amigos de grupo de pesquisa da pós-graduação, Marcelo, Virlane, Milínia, Lara, Adriana, Iliane, Carmem, Ana Cláudia, Airton, Cláudia Fontenele, pelas reflexões, críticas, sugestões recebidas e principalmente pelo companheirismo e amizade que cultivamos neste período.

Aos amigos que cultivo desde a graduação, Rafael e Gil, os quais acompanham minha caminhada mesmo de longe.

Aos amigos e padrinhos, Neto e Danielle, que tiveram grande participação em minhas escolhas e me inspiraram em muitas decisões.

Aos amigos que, mesmo de longe, ainda se fazem tão presentes, Jeferson, Davi, Klayton e Rui.

Por fim, aos meus amigos da Universidade Estadual Vale do Acaraú, Carina, Elaine, Edvalter, Maria José e Alessandra, por constantemente aprender com cada comentário e vivência semanal.

“É bom lembrar que a aprendizagem é uma elaboração individual e não coletiva, embora o trabalho em grupo possa facilitar ou atrapalhar, dependendo de seu estilo de aprender, ou seja, a introjeção é individual, própria de cada um”.

**(Borges Neto, 2017)**

## RESUMO

Os cursos da área de Ciências Exatas, em particular, as licenciaturas em Matemática no Ceará possuem ainda muitos desafios com a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, no tocante aos aspectos metodológicos desenvolvidos nas sessões didáticas que ainda representam alguns pontos de insatisfação, motivo de desistência e reprovação por parte dos alunos. Ante esse problema, esta Tese trata de uma pesquisa expressa na metodologia de pesquisa e ensino Sequência Fedathi (SF) cuja finalidade foi investigar como sua relação com a Teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA) pode alicerçar os processos de ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) dos alunos de um grupo de estudos da Universidade Estadual Vale do Acaraú, respondendo de que maneira isso contribui para a aprendizagem de conceitos e procedimentos nessa disciplina, em particular, do conteúdo de Taxas de Variação, e como pode ser feita a caracterização do docente em amparo nesses conceitos. Como suporte teórico preliminar, foram utilizados estudos da Sequência Fedathi, Teoria do Pensamento Matemático Avançado e do recurso computacional (*Geogebra*) para contribuir com a melhoria do processo de ensino-aprendizagem. Então, para alcançar os objetivos, as sessões didáticas foram trabalhadas com a Sequência Fedathi como metodologia para elaboração e condução no ensino do conteúdo. A pesquisa é de natureza qualitativa, delineada como participante e, além disso, seguiu o método científico Sequência Fedathi, descrito e estudado no decorrer do trabalho; como campo e sujeitos da investigação, o ensaio delineou-se num grupo de estudos criados no curso de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú e os sujeitos foram os alunos inscritos e o professor que mediou os encontros. No decorrer da experimentação, as perguntas da pesquisa foram respondidas e colhidos resultados que serviram como embasamento para a classificação de bons professores e bons alunos. A metodologia de pesquisa mostrou-se como um rígido método a ser promovido cientificamente, direcionando corretamente cada etapa do experimento e os instrumentos metodológicos necessários para a obtenção e coleta de dados. No decorrer das práticas e consequente análise, foi possível estabelecer relação entre a SF e o PMA nos testes que foram aplicados com os alunos. Além disso, concluiu-se, o quão benéfico foi para a compreensão dos conteúdos o uso do recurso computacional, com as questões contextualizadas utilizadas como problemas na vivência da Tomada de Posição, ou seja, contribuiu para demandar compreensões para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, além de desenvolver avanços para as pesquisas em Educação Matemática e, acima de tudo, como o comportamento docente influenciou nas emoções dos alunos em relação à Matemática e na condução da vivência da Sequência Fedathi.

**Palavras-chave:** Sequência Fedathi. Cálculo Diferencial e Integral. Pensamento Matemático Avançado.

## ABSTRACT

The courses in the area of Exact Sciences, particularly as Undergraduate Mathematics in Ceará, have already done several works with a Differential and Integral Calculus, regarding the methodological aspects developed in the training sessions that still did not have points of dissatisfaction, reason for withdrawal and disapproval on the part of the students. Faced with this problem, this thesis deals with a research based on its methodology of teaching and teaching. The discipline of Advanced Thought (Master of Science) aims to investigate its relationship with different levels of education. (CDI) of the students of a study group of the State University of Vale do Acaraú, responding in a didactic way to a learning of concepts and a proof, in particular, of the contents of a class of variance, and how a characterization of the teacher in support of these concepts. As a preliminary theoretical support, the studies of the Fedati Sequence, Theory of Advanced and Advanced Computing Thinking (Geogebra) for development with the improvement of the teaching-learning process were included. Then, to reach the objectives, the didactic sessions were worked with the Fedathi Sequence as methodology for elaboration and conduction in the teaching of the content. The research is qualitative in nature, outlined as a participant and, in addition, followed the scientific method Fedathi Sequence, described and studied in the course of the work; as field and subjects of the investigation, the essay was outlined in a group of studies created in the course of Mathematics of the State University Vale of Acaraú and the subjects were the enrolled students and the teacher who mediated the meeting. In the course of experimentation, the research questions were answered and collected results that served as a basis for the classification of good teachers and good students. The research methodology proved to be a rigid method to be promoted scientifically, correctly directing each stage of the experiment and the methodological instruments necessary for the collection and collection of data. In the course of the practices and consequent analysis, it was possible to establish a relationship between the SF and the PMA in the tests that were applied with the students. In addition, it was concluded that the use of the computational resource was beneficial to the understanding of the contents, with the contextualized questions used as problems in the experience of the Position Taking, that is, it contributed to demand comprehension for the teaching of Differential Calculus and Integral, in addition to developing advances in research in Mathematics Education and, above all, how the teaching behavior influenced the students' emotions in relation to Mathematics and in conducting the experience of the Fedathi Sequence.

**Keywords:** Fedathi sequence. Differential and integral calculus. Advanced Mathematical Thinking.

## LISTA DE FIGURAS

1	Organização das etapas da Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi.....	25
2	Relação entre as etapas da Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi.....	28
3	Apresentação da Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi.....	29
4	Resolução, pelo aluno A1, da questão 02 do pré-teste.....	75
5	Resolução, pelo aluno A2, da questão 02 do pré-teste.....	76
6	Resolução, pelo aluno A1, da questão 05 do pré-teste.....	77
7	Resolução, pelo aluno A2, da questão 05 do pré-teste.....	77
8	Resolução, pelo aluno A7, da questão 04 do pré-teste.....	78
9	Resolução, da questão 01, pelo aluno A3 do pré-teste.....	78
10	Resolução, da questão 03, pelo aluno A2 do pré-teste.....	79
11	Realização da atividade de taxas relacionadas com o <i>software Geogebra</i> .....	81
12	Solução pelo aluno A1, da questão 1 no <i>geogebra</i> .....	82
13	Solução pelo aluno A7, da questão 1 no <i>geogebra</i> .....	83
14	Solução pelo aluno A3, da questão 2 no <i>geogebra</i> .....	84
15	Solução pelo aluno A7, da questão 2 no <i>geogebra</i> .....	84
16	Ciclo completo da atividade do Pensamento Matemático Avançado.....	89
17	Atitudes do bom professor na vivência da prova.....	90
18	Entrevista coletiva com os alunos do grupo de estudos.....	101

## LISTA DE QUADROS

1	Cronograma de atividades realizadas no grupo de estudos.....	30
2	Postura docente conforme a Sequência Fedathi.....	37
3	Problema da sessão didática de Taxas de Variação.....	59
4	Análise do pré-teste dos alunos envolvidos na pesquisa.....	74
5	Análise do pós-teste dos alunos envolvidos na pesquisa.....	79

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
PMA	Pensamento Matemático Avançado
PME	Pensamento Matemático Elementar
SF	Sequência Fedathi
SM	Sequência de Mac Lane
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>1.1</b>	<b>Justificativa</b> .....	17
<b>1.2</b>	<b>Problema e delimitação do tema</b> .....	18
<b>1.3</b>	<b>Fundamentação empírica</b> .....	20
<b>1.4</b>	<b>Objetivos</b> .....	21
<b>1.5</b>	<b>Procedimentos metodológicos</b> .....	22
<b>2</b>	<b>PERCURSO METODOLÓGICO DE PESQUISA</b> .....	25
<b>2.1</b>	<b>Organização das etapas da metodologia de pesquisa Sequência Fedathi...</b>	25
<b>2.2</b>	<b>A pesquisa</b> .....	30
2.2.1	<i>Sujeito e Locus</i> .....	30
2.2.2	<i>O grupo de estudos</i> .....	31
<b>2.3</b>	<b>Sequência Fedathi como metodologia de ensino</b> .....	32
2.3.1	<i>Origem e embasamento teórico</i> .....	32
<b>2.4</b>	<b>A formulação de conceitos e a Sequência Fedathi</b> .....	36
<b>2.5</b>	<b>Etapas da Sequência Fedathi</b> .....	41
2.5.1	<i>Tomada de Posição</i> .....	43
2.5.2	<i>Maturação</i> .....	44
2.5.3	<i>Solução</i> .....	45
2.5.4	<i>Prova</i> .....	49
<b>2.6</b>	<b>De Fundamentos da Sequência Fedathi à função de categorias</b> .....	51
<b>2.7</b>	<b>Metodologia de ensino e de pesquisa Sequência Fedathi</b> .....	53
<b>3</b>	<b>TAXAS DE VARIAÇÃO</b> .....	55
<b>3.1</b>	<b>Exemplo de como não fazer</b> .....	58
<b>3.2</b>	<b>Saber contido no conhecimento</b> .....	63
<b>4</b>	<b>PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO (PMA)</b> .....	65
<b>4.1</b>	<b>Aquisição do conhecimento matemático</b> .....	65
4.1.1	<i>Conceito imagem e conceito definição</i> .....	65
4.1.2	<i>Generalização e abstração</i> .....	67
4.1.3	<i>Intuição e rigor</i> .....	68
<b>4.2</b>	<b>A Prova sob o ponto de vista do PMA</b> .....	68
4.2.1	<i>Síntese e análise</i> .....	69

4.3	<b>A emoção aliada à cognição.....</b>	70
4.3.1	<i>Aprendizado instrumental e relacional.....</i>	73
4.4	<b>Análise e resultados do pré-teste e pós-teste.....</b>	74
4.4.1	<i>Vivência do software Geogebra.....</i>	80
5	<b>MEDIAÇÃO DOCENTE E DISCENTE.....</b>	86
5.1	<b>O professor bom.....</b>	86
5.2	<b>O bom professor.....</b>	87
5.3	<b>O aluno bom e o bom aluno.....</b>	91
6	<b>VALIDAÇÃO DA APLICAÇÃO.....</b>	93
6.1	<b>A mensuração da aplicação.....</b>	93
6.2	<b>Análise e resultados do instrumento metodológico questionário.....</b>	102
7	<b>CONCLUSÃO .....</b>	108
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	113
	<b>APÊNDICE A – FORMULÁRIO DE CADASTRO GRUPO DE ESTUDO</b>	119
	<b>APÊNDICE B – CARTA DE ANUÊNCIA.....</b>	122
	<b>APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL SOBRE O GRUPO DE ESTUDOS.....</b>	123
	<b>APÊNDICE D – AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE DO USO DA SEQUÊNCIA FEDATHI.....</b>	124
	<b>APÊNDICE E – PRÉ-TESTE.....</b>	125
	<b>APÊNDICE F – PÓS-TESTE.....</b>	126
	<b>APÊNDICE G – AVALIAÇÃO 1 COM O USO DO <i>SOFTWARE GEOGEBRA</i>.....</b>	127



## 1 INTRODUÇÃO

As discussões envolvendo temas relacionados à Educação Matemática ocorrem de modo considerável nas instituições de ensino, em busca de respostas sobre a Didática da Matemática, que podem apontar caminhos para que ocorra uma melhoria, tanto no ensino quanto na aprendizagem, dos conteúdos relacionados às áreas desse conhecimento (SOUZA, 2010).

Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013) acentuam que no Ensino Superior as disciplinas da área de Matemática são conhecidas pelos alunos como as que possuem elevado grau de abstração e dificuldade. Isso se perpetuou no decurso dos anos, ensejando uma ideia equivocada de que essas disciplinas se afastam demasiadamente da realidade dos alunos, não apresentando, portanto, significado algum para os acadêmicos.

Para Borges Neto (2016), sua experiência como docente e pesquisador o conduz a acreditar que, em regra geral, a Matemática é ensinada autoritariamente com a predominância de regras e algoritmos impostos pelo docente. O aluno, contudo, é obrigado a absorver e repetir essa estratégia em seu cotidiano.

Neste universo, enquadra-se o Cálculo Diferencial e Integral, disciplina introdutória e obrigatória nos cursos de Ciências Exatas nos primeiros semestres, cujo objetivo é servir como sustentáculo de vários cursos, para aprendizagens posteriores, em disciplinas específicas, e possui relevante papel nas representações de fenômenos do cotidiano de cada área. (DA SILVA & DA SILVA, 2010).

Nos estudos desenvolvidos por Barbosa (1994), afirma-se que a qualidade da interação ocorrida dos alunos de uma turma de Cálculo Diferencial e Integral pode ser um dos fatores que torna a aprendizagem dos conteúdos repassados afetada, influenciando diretamente o rendimento dos estudantes, realidade também vivenciada por nós como docente, mas salientamos, evidentemente, a existência de alunos que, sem qualquer interação, conseguem se sobressair na disciplina. Uma década depois, De Lima *et al* (2014) concluíram que um parâmetro a afetar o aprendizado da disciplina é a falta de domínio do conteúdo básico de Matemática. Essas duas conclusões devem ser trabalhadas mediante uma postura diferenciada por parte do docente, com o intuito de mudar o panorama atual da disciplina, pois é pela valorização do discente em sala de aula e seu direcionamento ao interesse científico à medida que lhe instiga a curiosidade, a descoberta, a reflexão, o levantamento de hipóteses, as validações, advindas também da ação do próprio aluno, não apenas sendo imposta ou transmitida a informação pelo professor.

Como problemática, Morelatti (2001) aponta que os altos índices de reprovação e evasão dos alunos nessa disciplina estão ligados à priorização de uma aula expositiva com verdades conceituais prontas, sem, ao menos, ter a participação do aluno. Contrapondo essa situação, nossos primeiros relatos na aplicação de uma sessão didática realizada em sala de aula em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral, de uma instituição de nível superior particular, utilizando a metodologia da Sequência Fedathi (SF) na prática docente com o ensino do conteúdo de derivadas mediante aplicações, percebemos resultados iniciais promissores, principalmente pela participação da turma em cada etapa, culminando na possibilidade de haver um aprofundamento na observação da existência da aprendizagem significativa com amparo no uso de modelos matemáticos no momento em que os alunos solucionaram questões sobre taxas de variação com os conceitos aprendidos em derivadas, mesmo após a análise da aplicação ter sugerido efetivas mudanças no modo da condução da aula com apoio dos princípios da SF.

Com efeito, a atitude e a mediação docente observadas nessas aulas se opuseram ao que normalmente acontece em aulas de Matemática, uma vez que foram dadas oportunidades de ação aos discentes para que pudessem refletir sobre os conteúdos trabalhados, por via de situações de formulação do conhecimento, no lugar de situações de mera passividade por parte deles. Assim, percebemos que a Sequência Fedathi, trouxe uma ruptura aos modelos tradicionais do ensino de Matemática de nível superior, geralmente marcado pela exposição sucessiva de definições, teoremas, demonstrações, axiomas, exercícios resolvidos, entre outros, e pelo centralismo na figura do professor.

Com base em Alves (2012), ao afirmar que o matemático e o estudante no quesito investigativo destacam características cognitivas comuns, mesmo em níveis de dificuldades distintos, revelam-se novas reflexões acerca da atitude do professor em sala de aula, principalmente, no que se refere à mediação, que enseja a elaboração dos conceitos, valoriza o tempo de maturação do aluno e dá ênfase à qualidade do ensino, considerando o ritmo de acompanhamento dos discentes.

Assim, em razão desses resultados promissores e das dificuldades que o professor de Cálculo vivencia ao trabalhar com seus alunos conteúdos tão abstratos, consideramos necessária uma ampliação das investigações sobre o tema, a fim de contribuir para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral e para o ensino da Matemática de modo geral.

Há, ainda, a necessidade de compreender a organização e a execução de aulas de Cálculo Diferencial e Integral no tocante à aplicabilidade do conteúdo de taxas relacionadas na derivada, segundo os pressupostos da Sequência Fedathi, principalmente no que se refere ao planejamento das sessões didáticas e à avaliação da aprendizagem dos alunos. Desse modo,

partimos das seguintes indagações: de qual modo a Sequência Fedathi pode se transformar em uma proposta metodológica para mediar a ação docente na transposição didática dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral? Como compreender o comportamento docente no decorrer de sessões didáticas? Como se verificar a aprendizagem do discente?

Portanto, nesta tese, iniciamos a temática do Cálculo Diferencial Integral buscando investigar sessões didáticas no ensino dessa disciplina, recorrendo à Sequência Fedathi e aos recursos tecnológicos (*softwares*) e dos subsídios teóricos da literatura sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, Pensamento Matemático Avançado e Sequência Fedathi.

### **1.1. Justificativa**

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral motivou o surgimento deste projeto de tese assentado em reflexões oriundas da prática em sala de aula obtidas, bem como a preocupação com a notória dificuldade no aprendizado dessa disciplina por parte dos discentes, e na crescente importância para realidade científica e tecnológica, em que cada vez mais seus conceitos e aplicações se fazem necessários aos profissionais da área das Ciências Exatas e afins.

A experiência obtida com a condução dessa disciplina no nosso docente contexto acadêmico mostrou ser necessário procurar mecanismos que auxiliem a mediação docente em aulas sobre o conteúdo de aplicações das derivadas com taxas relacionadas. Além disso, faz-se necessário conduzir o curso do grupo de estudos sob uma prática metodológica elaborada segundo os pressupostos da Sequência Fedathi, com vistas a motivar melhorias no ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Os trabalhos de Zuchi (2005), Praslon (2000), Bloch (2000), que expuseram em seus trabalhos o ensino das definições de limite, derivada e dos problemas do movimento do nível médio para o superior nas disciplinas iniciais de CDI ratificando a importância concedida, tanto nacional como internacionalmente, ao aprendizado destes conceitos no primeiro ano da universidade (BARROSO, 2009).

Nos estudos desenvolvidos por Souza (2016), é descrita a necessidade de se reestruturar os meios pelos quais estão acontecendo os processos de ensino e aprendizagem, em particular, no nível superior, pois variados são os problemas analisados nas pesquisas cujo objeto é a disciplina Cálculo Diferencial e Integral. O desenvolvimento dessa disciplina atrela-se a elevados patamares de reprovação e de desistências (BARUFI, 1999; REIS, 2001;

REZENDE, 2003; BASSANEZI, 2011). Alguns motivos levantados apontam para o modo como os conceitos são explicados, em geral, com repetições mecanizadas e expositivas sem qualquer relação com o cotidiano.

De tal maneira, esta tese busca, portanto, ampliar as reflexões sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, e da Matemática como um todo, podendo despertar distintas percepções e atitudes na práxis docente, suscitando a vontade de reelaborar a maneira de abordagem dos conceitos matemáticos discutidos por meio da Sequência Fedathi e uso das tecnologias, percorrendo caminhos favoráveis à reflexão discente sobre o conteúdo de Cálculo e buscando superar as dificuldades inerentes ao próprio conteúdo.

## **1.2 Problema e delimitação do tema**

Conforme leciona Malta (2004), as conclusões das pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior convergem para as disciplinas iniciais dos cursos da área de Ciências Exatas, em razão dos altos índices de não aprovação.

No estudo desenvolvido por A. O. Júnior (2006), é descrito sobre a importância que deve ser dada à compreensão de conceitos e à valorização de suas aplicações, ao passo que sugere um enfraquecimento do papel das habilidades manipulativas e algorítmicas tradicionalmente priorizadas. É possível, portanto, afirmar que algumas ações dos docentes que permanecem com essa prática, provavelmente, contribuam para agravar as dificuldades com a disciplina.

As principais dificuldades vivenciadas pelos alunos podem ser mencionadas então como os obstáculos inerentes ao conteúdo em si e à prática docente. Será enfatizado este último, traçando-se o perfil do ensino do Cálculo Diferencial e Integral, que depende diretamente das ações do professor em sala de aula, embora os demais obstáculos devam ser considerados pelo docente na elaboração e condução de suas aulas. Corroborando essa ideia, Catapani (2001) ensina que tal disciplina se exprime como empecilho ao avanço profissional e no acesso aos semestres posteriores do curso, em vez de exercer uma importante função no progresso científico e tecnológico.

O primeiro obstáculo está nas dificuldades vivenciadas pelos estudantes recém-admitidos a cursos de nível superior e com sérias deficiências com o conteúdo matemático do Ensino Médio. Lopes (1999) reforça num conteúdo de taxas de variação na derivada que

O conhecimento matemático é em camadas que se superpõem. Você começa a aprender Matemática no primeiro ano da escola. Se você não sabe dividir, não vai saber o que é uma taxa, se você não sabe o que é uma taxa não vai saber o que é uma derivada e assim por diante. Essa é talvez uma das principais razões porque existem tantas reprovações em Cálculo em nossas universidades. Em muitos casos, os estudantes universitários não sabem os conceitos matemáticos anteriores que são necessários para fazer os cursos de Cálculo. (p. 125)

Não obstante, esses alunos deparam o excesso de complexidade e formalismo dos exercícios, com teoremas e demonstrações rigorosas que causam estranheza e dificuldades de compreensão de seus significados e com uma aplicabilidade deficiente no cotidiano.

Isso, conseqüentemente, provoca uma dificuldade grande de o aluno absorver novas palavras, símbolos, definições e teoremas que serão necessários para o aprendizado de conceitos futuros, ou seja, ocorre a perda de sentido em virtude do não entendimento dos significados impostos nos conteúdos. Além desses obstáculos epistemológicos, também aparecem as barreiras didáticas, que são uma consequência do modo como os professores lidam com essas dificuldades, ou seja, determinadas situações podem constituir um problema de ordem didática, se o entrave para sua superação encontrar resistência em relação às escolhas equivocadas feitas pelo docente.

Nesse caso, em decorrência de tais dificuldades, a atitude, em geral, tomada pelos professores é a de dar menos atenção à parte conceitual do ensino e maior ênfase às tarefas algorítmicas. Isso ocorre quando os conflitos entre os saberes antigos dos alunos e os novos que lhes são expressos resistem em chegar a um equilíbrio e o docente apenas instiga com tarefas repetitivas. Desse modo, de acordo com Alves (2011), os professores não fazem Ciência e, de modo particular, não se produz conhecimento matemático, quando não é possível desenvolver em sala de aula, de modo eficiente, o hábito de exploração da capacidade imaginativa do discente.

É possível, entretanto, desenvolver um importante pensamento, que é o de se utilizar da imaginação dos alunos para a compreensão matemática. Como ensina Ribenboim (2000 apud ALVES, 2011) “[...] a demonstração, a formalização e o rigor foram elementos essenciais na atividade matemática dos Helenos”. O autor indaga ao leitor sobre quais etapas são necessárias para que se possa alcançar uma demonstração ou até mesmo uma propriedade axiomática, como também, aprofundando mais o assunto: o que é preciso para qualquer conceito ou exercício ser concebível pelo discente? É então necessário acolher e estudar mecanismos cognitivos, que ao serem conhecidos, podem contribuir para o melhor entendimento matemático. Alves (2011) conceitua um raciocínio intuitivo como o

desenvolvimento de raciocínio que se baseia nas percepções e que não denota um raciocínio lógico dedutivo.

Neste âmbito de entrave do ensino do Cálculo e do aprendizado dos conteúdos repassados, faz-se necessário, portanto, explorar o raciocínio intuitivo para o auxílio do aprendizado da Matemática. Esse estímulo deve partir do comportamento do docente em sua prática em sala, pois, segundo Garzella (2013), é isto um dos fatores que influenciam no sucesso ou fracasso do aluno na disciplina, pois, dependendo do método de ensino utilizado pelo professor, poderá atrapalhar ou facilitar a captação do conhecimento. Assim, tal pensamento corrobora o fato de que as práticas pedagógicas não favorecem o acesso ao significado de conceitos do Cálculo, o que reforça nossa premissa de que parte dos problemas está atrelada a aspectos metodológicos que perpassam a atitude, mediação e formação docente.

Como, porém, o professor pode superar tais obstáculos? Nesse caso, o problema de pesquisa recai sobre a mediação do professor em sala de aula e suas ações para superar as dificuldades. E o que fazer quando os alunos não detêm os conceitos primitivos que irão orientar no aprendizado dos conteúdos futuros? Assim, uma proposta a ser pesquisada no assunto de taxas relacionadas dentro das derivadas é o uso do *software Geogebra*.

Ademais, como aprimoramento da prática docente no conteúdo específico de derivadas é importante estabelecer a abordagem da Sequência Fedathi, softwares matemáticos e Pensamento Matemático Avançado, buscando então ampliar esse estudo, o que abrangerá determinados conteúdos iniciais da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável. Além disso, lançar mão de recursos teóricos e tecnológicos buscando propor um método que possa ser usado pelo professor nessa disciplina como tentativa de superar esses obstáculos.

### **1.3 Fundamentação empírica**

Os temas que cumpriram seus papéis como fundamentação empírica no decorrer desta pesquisa e estruturaram o trabalho foram: “Sequência Fedathi”, “Pensamento Matemático Avançado” e o “*Geogebra*”. Na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), mediante a busca pela nomenclatura Cálculo Diferencial e Integral, foram registradas 130 ocorrências, sendo 83 dissertações e 47 teses. Ao ser procurado pela expressão “Pensamento Matemático Avançado”, foram encontrados 13 trabalhos, sendo 12 dissertações e uma tese. Para o termo “Sequência Fedathi” há 45 dissertações e 19 teses.

A expressão “Sequência Fedathi” também foi procurada no repositório de Teses e Dissertações da Universidade Federal do Ceará no indexador do Programa de Mestrado

Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) e foram encontrados 39 resultados com 14 teses e 25 dissertações, porém com quatro trabalhos voltados para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Por fim, ao ser pesquisado por “*Geogebra*”, uma das temáticas desta tese, foram verificados seis trabalhos no repositório institucional com relação ao tema “Pensamento Matemático Avançado” e 14 com a temática Sequência Fedathi. Logo, inferimos o caráter original do trabalho, uma vez que não se verificou o cruzamento com nenhum outro e, em particular, no desenvolvimento da Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi.

Com suporte nesse estudo sobre outros trabalhos com temas correlatos, surgiram as seguintes perguntas diretrizes:

- 1 É possível relacionar o comportamento docente e o ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, em particular, o conteúdo de taxas relacionadas, sob a perspectiva da proposta metodológica Sequência Fedathi e da Teoria do Pensamento Matemático Avançado e o uso do *software Geogebra* no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú?
- 2 Como se daria o desenvolvimento das aulas no grupo de estudos com os conteúdos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral de uma variável sob a perspectiva da metodologia Sequência Fedathi?
- 3 De que maneira os processos envolvidos no pensamento matemático avançado e o *software Geogebra* influenciam na aquisição do conhecimento, e quais dificuldades podem ser sentidas pelos discentes na realização das atividades?
- 4 Quais resultados para a ação docente e discente podem ser inferidos com o emprego da Sequência Fedathi e da Teoria do Pensamento Matemático Avançado?

Desse modo, os procedimentos metodológicos da investigação serão norteados para a consecução dos seguintes objetivos da investigação.

#### **1.4. Objetivos**

Os objetivos oriundos da reflexão permitida pelas questões da pesquisa são:

##### **Objetivo Geral**

Investigar o ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, em particular, o conteúdo de taxas relacionadas, e o comportamento do professor, sob a perspectiva da proposta metodológica Sequência Fedathi, Teoria do Pensamento Matemático Avançado e o uso do *software Geogebra* no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú.

### **Objetivos Específicos**

- Analisar as aulas desenvolvidas no grupo de estudos com os conteúdos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável sob a perspectiva da metodologia Sequência Fedathi;
- Compreender os processos envolvidos no pensamento matemático avançado e o *software Geogebra* que influenciam o aprendizado e as dificuldades sentidas pelos alunos na realização das atividades;
- Entender se houve coerência e mudança das ações nos estudos dos alunos com apoio no comportamento adotado pelo professor.

### **1.5 Procedimentos metodológicos**

Esta tese descreve uma pesquisa de natureza qualitativa, na qual se embasou metodologicamente na concepção da Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi, desenvolvida por Borges Neto (2018) desde as aulas de TÓPICOS AVANÇADOS EM EDUCAÇÃO II - Sequência Fedathi: uma proposta de ensino lógico-dedutiva-construtiva que semestralmente é ofertada PPGE. Foi utilizada como método investigativo a abordagem participante, em que o pesquisador está inserido no âmbito educacional e tem na figura do professor - pesquisador um componente que faz parte do objeto estudado há dois anos e possui experiência com o ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral há cinco anos.

Essa escolha vai ao encontro do que preceitua Grossi em relação à Pesquisa Participante, como: “[...] um processo de pesquisa no qual a comunidade participa da análise da sua própria realidade, com vistas a promover uma transformação social em benefício dos participantes”. (GROSSI apud DEMO, 1999, p.126).

Esse intento se deu não somente para a observação das atuais estratégias docentes em sala, mas também, a fim de criar recursos de mudança para a melhoria nas estratégias metodológicas utilizadas pelo docente em seu cotidiano no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. A atitude do pesquisador é essencial para lograr colher dados com relevância científica e imparcialidade.

Foram utilizadas para análise dos dados, obtidos por meios de entrevistas, observações de campo, diário de campo, atividades com os sujeitos e os princípios da Sequência Fedathi. A investigação se deu nas seguintes etapas, com seus referentes procedimentos

metodológicos. A análise de dados e a apresentação dos resultados ocorreram ao serem percorridos os capítulos teóricos, uma vez que já foi expressa a pesquisa no capítulo 02.

A primeira etapa envolveu um aprofundamento bibliográfico, sobre o tema investigado, que inclui revisão de literatura dos campos conceituais que envolvem o objeto de estudo, visando à qualificação da base teórica da investigação. Para tanto, procuramos apoio em autores que tratam do ensino do Cálculo e do conteúdo desta pesquisa como um todo: Becker (2012) e da Sequência Fedathi: Sousa *et al.* (2013), Souza (2010), Fischbein (1994), Alves (2011), Moreira (2010) entre outros.

Esclarecido o método de pesquisa, os critérios para a escolha do *locus* e sujeitos da pesquisa foram assim definidos: o ambiente foi a instituição de nível superior Universidade Estadual Vale do Acaraú, no curso de Licenciatura em Matemática, e os sujeitos são nove alunos matriculados e inscritos no grupo de estudos.

A segunda etapa correspondeu à primeira parte da pesquisa empírica, na qual foi criado um grupo de estudos no Curso de Matemática, onde foram aplicadas aulas com os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral (Limite e Derivadas) concebidas com aplicação da Sequência Fedathi. Também foram coletados dados com professores e alunos da disciplina, com vistas a compreender melhor a realidade deles e a aprendizagem do Cálculo.

Ainda nesta etapa, foram elaboradas e ministradas aulas de Cálculo Diferencial e Integral de acordo com os pressupostos da Sequência Fedathi e o uso de recursos tecnológicos.

Na terceira etapa, analisamos as aulas desenvolvidas na segunda, ou seja, houve a triangulação dos dados visando à elaboração de um modelo que explicitasse as estratégias de raciocínio nas atividades propostas aos alunos para o aprendizado dessa disciplina, cumprindo-se, portanto, o objetivo geral da pesquisa.

Por fim, recolhemos os dados por via de entrevistas, observação e questionários para a imediata sistematização e análise dos indicadores, bem como a produção do relatório final da ação investigativa.

A elaboração desta tese parte da consciência de que as práticas de ensino do Cálculo e da Matemática de nível superior devem ser analisadas, e de acordo com suas problemáticas e objetivos de ensino, não de ser repensadas. Para isso, é imprescindível que se considerem as tendências da Educação Matemática, aproximando cada vez mais teoria e prática e contribuindo, assim, com a melhoria do ensino.

Este trabalho autoral está em sete capítulos. O primeiro referiu-se à introdução, a qual objetivou descrever sobre a estrutura da pesquisa, com as seguintes informações:

justificativa; problemática e delimitação do problema; fundamentação empírica, objetivos da pesquisa, procedimentos metodológicos e descrição sobre a estrutura do trabalho.

O segundo módulo cuida acerca da Sequência Fedathi como metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos da busca, tais como *locus*, sujeitos da investigação e descrição das atividades realizadas no trabalho de investigação. Além disso, abordamos a Sequência Fedathi, então como metodologia de ensino, enfatizando as etapas, fundamentos que deram origem às categorias principais de análise e a relação com a metodologia de pesquisa.

No próximo capítulo, efetivamos uma revisão de literatura sobre o conteúdo matemático específico desta tese: taxas de variação, apresentado um caso de aplicação da Sequência Fedathi com resultados diferentes dos esperados e, nesta parte, começam as primeiras análises e apontamos os primeiros resultados da pesquisa.

No quinto capítulo, avançamos o estudo, com o tema Pensamento Matemático Avançado, trazendo as temáticas de algumas categorias e a continuação das análises de dados colhidos no pré-teste, pós-teste e algumas sessões didáticas realizadas com os sujeitos, encerrando, assim, as partes teóricas do trabalho, bem como fizemos uma revisão de literatura sobre a emoção matemática.

No capítulo posterior, localizam-se os resultados que deram origem aos conceitos de bom professor, professor bom, bom aluno e aluno bom, à luz do quadro teórico desenvolvido.

No penúltimo capítulo, houvemos por bem descrever uma ação de validação realizada com o grupo de estudos de Cálculo Diferencial e Integral em uma manhã pelas Doutora Maria José Araújo de Souza e Francisca Cláudia Fernandes Fontenele, as quais entrevistaram coletivamente os sujeitos da pesquisa, com o fito de inferir como foi o desenvolvimento das sessões didáticas com a metodologia Sequência Fedathi e as últimas análises prosseguidas dos resultados.

As conclusões compõem o conteúdo do sétimo capítulo desta tese, em que são retomadas as principais reflexões identificadas na pesquisa, tendo como foco as questões centrais que nortearam os objetivos e a metodologia, bem como são ressaltadas os desafios e limitações vivenciados.

## CAPÍTULO 2 – PERCURSO METODOLÓGICO DE PESQUISA

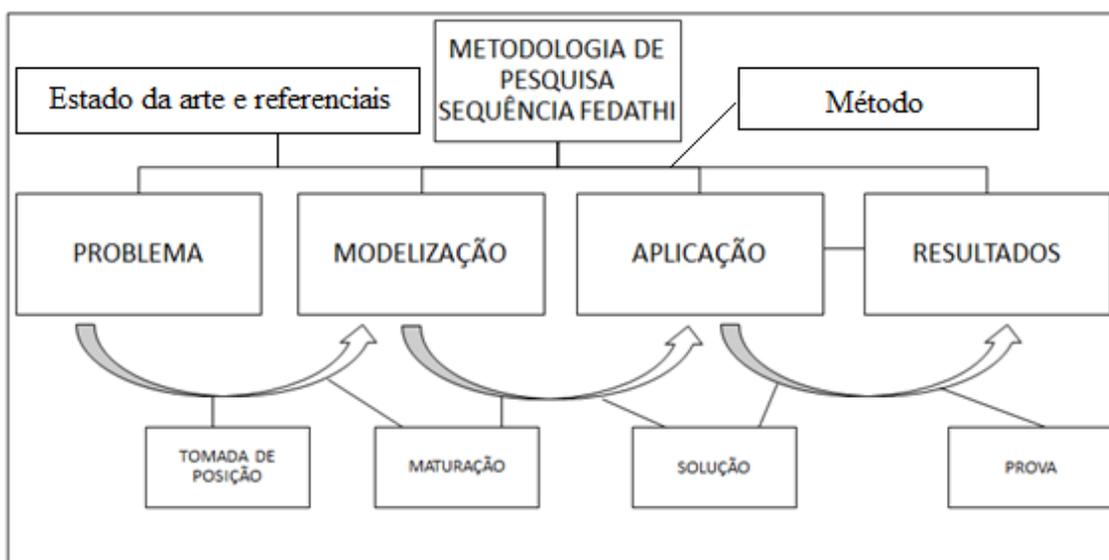
Este segmento determina o marco teórico da fundamentação da metodologia Sequência Fedathi como um modelo de método de pesquisa para o desenvolvimento de trabalhos científicos e, com isso, denotando uma visão formalista de um método. Como ensina Gil (1991, p.17),

Pode-se definir pesquisa como o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa é requerida quando não se dispõe de informação suficiente para responder ao problema, ou então quando a informação disponível se encontra em tal estado de desordem que não possa ser adequadamente relacionada ao problema.

Então, para que uma pesquisa seja imparcial e cumpra os objetivos propostos, procuramos, no contexto de uma metodologia de ensino, sistematizar de modo amplo procedimentos que, quando cumpridos rigorosamente, podem orientar para o caminho de uma resposta a um problema.

### 2.1 Organização das etapas da metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi

Figura 01 – Organização das etapas da Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi



Fonte: Borges Neto (2018)

Formulamos no decorrer das aulas da disciplina de pós-graduação em Educação Brasileira denominada “Tópicos de Matemática”, uma metodologia de pesquisa científica com suporte na ampliação dos estudos e reflexão sobre a Sequência Fedathi e, também, da

necessidade de criar no Laboratório Multimeios da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará uma identidade de pesquisa, tanto para os orientandos como orientadores. Esse método é composto por quatro etapas: problema, modelização, aplicação e resultados, de acordo com a figura 01.

A primeira etapa da metodologia de pesquisa corresponde à apresentação do problema e é dividida em vários casos: relevância do tema, propósito e função da pesquisa, ou seja, justificativa, onde irá aplicar, importância, originalidade do trabalho e, em seguida, as questões a serem analisadas com os objetivos específicos que serão as etapas a serem desenvolvidas para consubstanciar o objetivo geral.

Neste momento, também foi posta toda a fundamentação teórica do problema, priorizando o que já foi escrito, ou seja, os trabalhos correlatos e o que precisa ainda ser pesquisado e, conseqüentemente, está em aberto, tratando-se, portanto, do “estado da arte” que, de acordo com Nóbrega-Therrien e Therrien (2004), consiste em realizar um estudo preciso de uma produção científica em determinada área do conhecimento com o intuito de buscar o desconhecido e, assim, encontrar lacunas para preencher. Em se delimitando o problema de pesquisa,

[...] em toda questão, deve haver necessariamente algo de desconhecido, pois, de outro modo, a sua investigação seria inútil; em segundo lugar, esse incógnito tem de ser designado de alguma maneira, pois, de outro modo, não estaríamos determinados a investigá-lo de preferência a qualquer outro objeto; em terceiro lugar, só pode ser designado mediante alguma outra coisa já conhecida. (Descartes, 1985, p. 83; AT, 10, p. 430)

Como consequência da realização do “estado da arte”, ocorrerá melhor lapidação e especificação do desafiante problema a ser investigado, descartando informações desnecessárias e tornando a pesquisa viável. Esta explicação se encaixa com a vivência na tomada de posição oriunda da metodologia de ensino da Sequência Fedathi. Então, o pesquisador se depara com o problema, tentará resolvê-lo por meio das leituras pré-estabelecidas, preferencialmente, com base nos trabalhos desenvolvidos no Laboratório Multimeios e de suas áreas específicas de acordo com um parâmetro específico em busca de uma solução.

Após refinar seu problema inicial, o seu amadurecimento ensejará um modelo formal, o real problema de pesquisa, que servirá como suporte para um controle de busca pela resolução o que se compara com a vivência da maturação do método de ensino.

A segunda etapa é a modelização do problema, ou seja, como existe uma situação que deve ser resolvida, então deverá ser elaborado um modelo de resolução do problema, elaborando, assim, o objeto de pesquisa, as hipóteses e os objetivos. Por enquanto, está sendo descrito o próprio método científico: há um problema, investigação sob a perspectiva desse problema e tentar formular uma resposta com base num sistema formal. E depois volta para saber se este problema que foi modelizado possui alguma finalidade desde sua aplicação. É a vivência da maturação do objeto de pesquisa, em que são traçadas as primeiras estratégias para a consecução da aplicação com amparo num plano formal oriundo de um modelo sistematizado.

Passamos para a próxima etapa, denominada aplicação ou validação, em que há o uso dos instrumentos metodológicos, tais como entrevistas, filmagens, observação, aplicação de sessões didáticas etc. No caso de um problema em que queremos investigar o comportamento de alunos sob a metodologia de ensino Sequência Fedathi, fazemos um pré-teste antes da aplicação. A aplicação do método ocorre neste momento e averigua se houve mudança de comportamento ou atitude diante de determinado problema que foi trabalhado.

Há, então, uma passagem na etapa da maturação para a solução, pois os primeiros relatos do que foi apurado na validação deverão ser testados, visando a mensurar qualitativa ou quantitativamente se os dados obtidos podem ser possíveis respostas para suas perguntas de pesquisa.

Na etapa posterior, definida como resultados, serão realizadas as análises das aplicações do momento da validação. Na vivência do método de ensino, está a prova em que são efetivados o amadurecimento e a reflexão sobre os momentos anteriores, transformando ciclicamente esse percurso, sempre tendo que recorrer à etapa anterior a fim de caminhar para as próximas.

Uma teoria com características semelhantes ocorre com o ciclo de ações DERD (descrição, execução, reflexão e depuração). Nele o pesquisador deve passar pelas etapas da solução de um problema, o que significa resolvê-lo, refletir sobre os resultados e depurar as ideias obtidas confrontando com a procura de outros conteúdos ou estratégias, ocorrendo, assim, a formação de um conhecimento por meio da experimentação científica e teste de hipóteses. (VASSALLO NETO, 2015)

Essas ideias estão consubstanciadas no teórico Seymour Papert, que possuía uma peculiaridade, pois seus estudos eram direcionados fortemente para o ambiente informatizado, enquanto a sequência pode se adequar a qualquer situação. Além disso, em suas contribuições, afirma ser objetivo do ciclo tornar o aluno reflexivo, mas omite como será executada essa

proposta. Como o professor faz para que o aluno seja reflexivo? Eis a grande diferença entre os dois métodos.

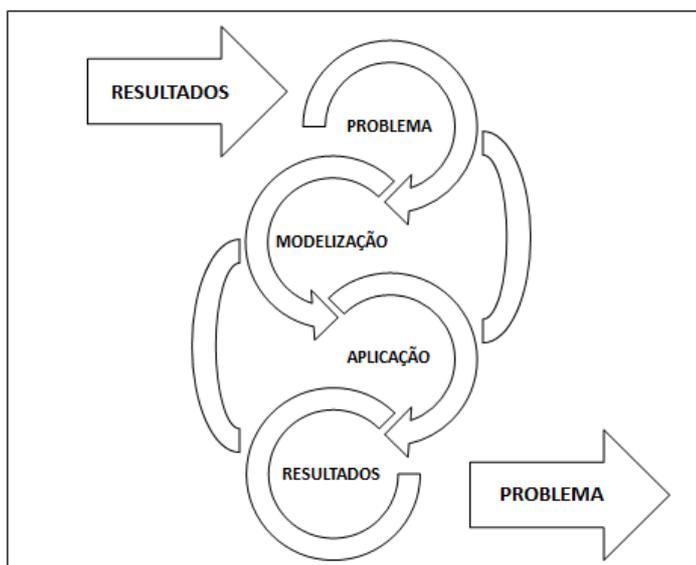
Esse ciclo foca apenas na interação do aluno com o computador, deixando sob a vontade do professor atuar no ambiente de aprendizagem, não sendo obrigatoriamente incorporada a mediação, enquanto na Sequência Fedathi o professor é protagonista de suas ações.

A figura 02 estabelece relação não linear das etapas, pois há um sistema de retroalimentação partindo de resultados já predefinidos que representam as motivações geradoras dos problemas de pesquisa que podem ter sido oriundos de outros estudos. De forma análoga ocorre com os resultados, que geram novos problemas em aberto, suscitando, assim, pesquisas futuras.

É perceptível, ainda, na figura 02, o fato de que há a integração das etapas do problema e a aplicação e da modelização e resultados. A decisão do pesquisador pela delimitação do problema influencia de modo claro na escolha dos instrumentos metodológicos para coleta de dados e, por conseguinte, o método de ensino adequado que, porventura, venha a ser utilizado para sessões didáticas.

Os resultados obtidos nas análises dos dados colhidos na etapa da aplicação devem ir ao encontro do sistema formal estabelecido na segunda etapa, com a finalidade de tornar o processo de pesquisa coerente, pois os resultados levantados devem ser testados no modelo formalizado anteriormente e, conseqüentemente, validado.

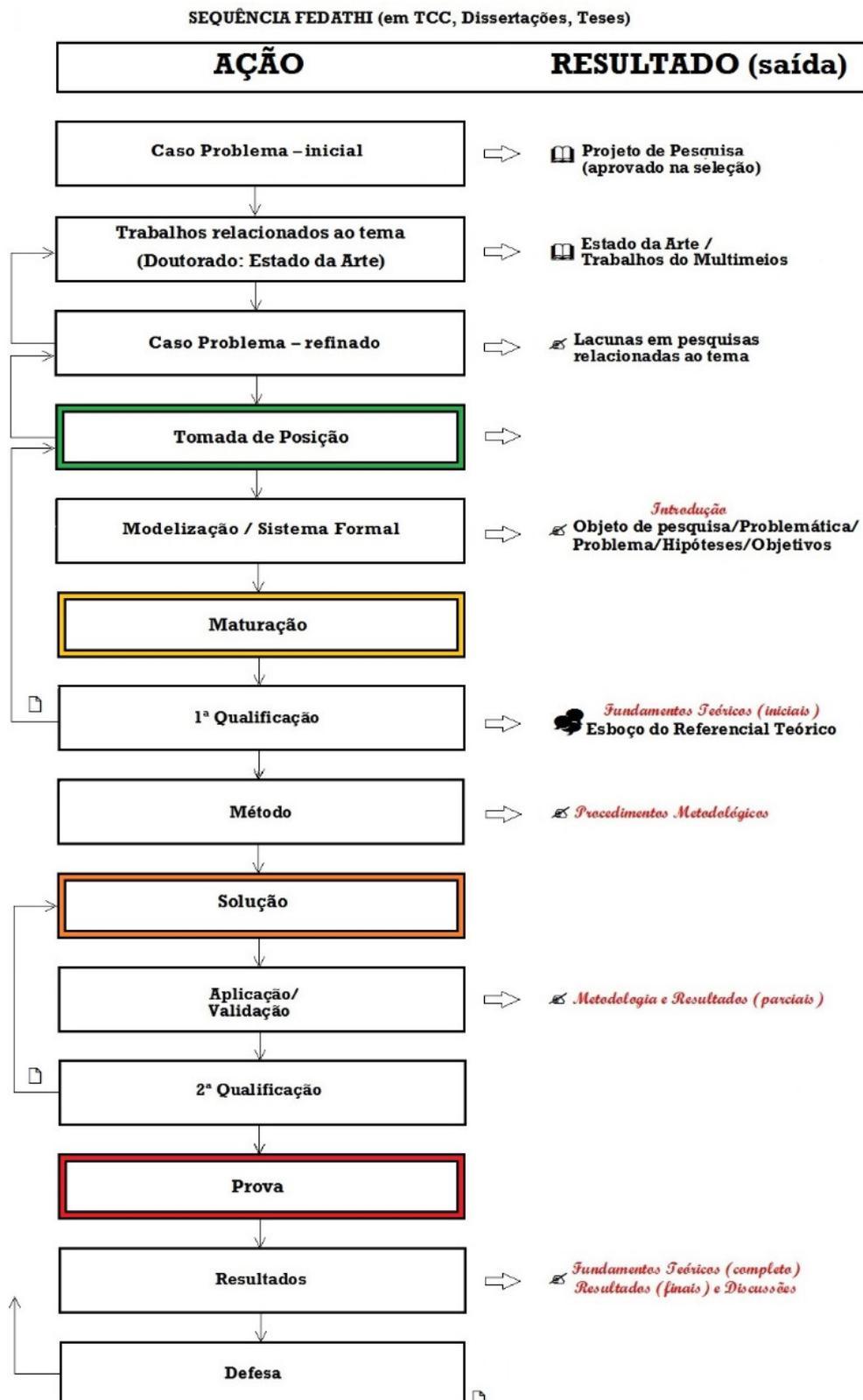
Figura 02 – Relação entre as etapas da Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi



Fonte: elaboração própria (2018)

As etapas da metodologia de pesquisa interagem intrinsecamente com a vivência da Sequência Fedathi como método de ensino - tomada de posição, maturação, solução e prova - e será mais bem estabelecido o elo entre as duas no próximo capítulo.

Figura 03 – Apresentação da Metodologia de pesquisa Sequência Fedathi



Fonte: esquema elaborado nos estudos realizados no grupo de pesquisa do Laboratório Multimeios (2018).

Por fim, a figura 03 representa resumidamente como é trabalhada a metodologia de pesquisa Sequência Fedathi. Esse esquema foi apresentado no encontro do grupo de pesquisa “Segunda Multimeios” pela professora Dr.<sup>a</sup> Ana Cláudia no dia 03 de setembro de 2018.

## 2.2 A pesquisa

Neste conteúdo será descrito o modo como a pesquisa se estruturou e criou suporte às partes seguintes que, além de explicitarem as teorias estudadas, também receberão a análise dos dados colhidos no desenvolvimento da experimentação, de acordo com seu conteúdo teórico.

### 2.2.1 Sujeito e locus

A experimentação foi realizada com *locus* da Universidade Estadual Vale do Acaraú, situada na cidade de Sobral/CE, no Curso de Licenciatura em Matemática, e os sujeitos da pesquisa foram nove alunos que já haviam cursado a disciplina CDI, identificados por A1 a A9 no decorrer da tese para preservar suas identidades, tendo assinado o Termo de Anuência, conforme apêndice B, matriculados no curso e inscritos no “Grupo de Estudos em Cálculo Diferencial e Integral” no semestre 2017.1, o qual foi berço das aplicações.

As atividades desenvolvidas no grupo de estudos foram realizadas por nós, orientador e pesquisador, e contiveram: aplicação de uma prova pré-teste, atividades em sala com o uso do programa *Geogebra*, atividades em sala com avaliações teóricas, pós-teste, aplicação de um questionário e, por fim, uma reunião com duas especialistas na área da Metodologia Sequência Fedathi e os alunos, as quais aplicaram uma entrevista com o professor ausente.

As aulas aconteceram no Laboratório de Informática do Curso de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú, no horário de 8h às 12h. Ocorreram dez encontros de 16/03 a 15/06, totalizando 44 h/a, cinco atividades e finalizando com a reunião de avaliação entre a turma e as duas especialistas na Metodologia Sequência Fedathi. O quadro 02 descreve o cronograma realizado no período.

Quadro 01 – Cronograma de atividades realizadas no Grupo de Estudos

Data	Conteúdo	Atividade
16/03	Definição de Limites e Continuidade	

23/03	Propriedades de Limites, Limites no infinito e limites infinitos	
27/04	Teoremas, Limites trigonométricos e exponenciais	
04/05	Definição de Derivadas	Pré-teste
11/05	Propriedades das Derivadas	
18/05	Aplicação das derivadas	Atividade com o <i>Geogebra</i>
25/05	Introdução a Taxas de Variação	
01/06	Taxas Relacionadas	Resolução do Pré-teste
08/06	-----	Pós-teste
15/06	-----	Entrevista coletiva e questionário de avaliação

Fonte: elaborado própria (2018).

### 2.2.2 O Grupo de Estudos

O grupo de estudos em Cálculo Diferencial e Integral foi proposto por nós a uma comissão do colegiado do curso de Matemática, o qual foi aprovado em reunião entre os professores e, em seguida, as inscrições foram realizadas pelo endereço eletrônico do Curso de Matemática da UVA.

A escolha dos nove sujeitos se deu pela assiduidade nos encontros, haja vista o fato de que alguns outros que se inscreveram iam esporadicamente às aulas. Dentre esses alunos, quatro eram do terceiro semestre, um do quarto, dois do oitavo e dois eram do nono. O pré-requisito para se inscrever no grupo era ter cursado a disciplina Cálculo I, para que já pudessem acompanhar os estudos de modo que tivessem conhecimentos prévios necessários para compreender melhor os conteúdos.

Sobre o grupo de estudos tem-se como objetivos

#### **Objetivo Geral**

Amadurecer os estudos de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável.

#### **Objetivos Específicos**

Rever a Teoria de Cálculo Diferencial e Integral com o uso da metodologia Sequência Fedathi e a Teoria do Pensamento Matemático Avançado.

Ensejar objetos de estudos inerentes ao Cálculo para que os alunos desenvolvam suas pesquisas.

Analisar se houve coerência e mudança de comportamento nos estudos dos alunos.

Escrever artigos e levar os alunos a comparecer em eventos na área da Matemática e da Educação Matemática propiciando a cultura de pesquisa acadêmica.

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral motivou o surgimento deste grupo de estudos com suporte em reflexões oriundas da prática em sala de aula obtidas, bem assim a

preocupação com a notória dificuldade no aprendizado dessa disciplina por parte dos discentes, e a crescente importância dessa disciplina para a realidade científica e tecnológica, em que cada vez mais seus conceitos e aplicações se fazem necessários aos profissionais da área das Ciências Exatas e afins.

A experiência obtida com a condução dessa disciplina mostrou ser necessário procurar mecanismos que auxiliem a mediação docente em aulas sobre o conteúdo de aplicações das derivadas com taxas relacionadas. Além disso, fez-se necessário conduzir o curso sob uma prática metodológica, elaborada segundo os pressupostos da Sequência Fedathi com o intuito de motivar melhorias no ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Este grupo busca, portanto, ampliar as reflexões sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, e da Matemática como um todo, podendo despertar distintas percepções e atitudes na práxis docente, suscitando a vontade de reelaborar o modo de abordagem dos conceitos matemáticos discutidos por meio da Sequência Fedathi, Teoria do Pensamento Matemático Avançado e o uso das tecnologias, percorrendo caminhos favoráveis à reflexão discente sobre o conteúdo de Cálculo e buscando superar as dificuldades inerentes ao próprio conteúdo.

### **2.3 Sequência Fedathi como metodologia de ensino**

Inicialmente, a Sequência Fedathi foi desenvolvida para ser usada em aulas de Matemática para aplicação de sessões didáticas. Estudos e experimentos posteriores de pesquisadores de outras áreas, no entanto, permitiram a adequação dessa metodologia em outros domínios de conhecimento para além da Matemática - Física, Pedagogia, Tecnologias, Educação Inclusiva, dentre outras, em diversas searas de aplicação “[...] quer seja Informática Educativa, Educação a Distância, Formação de Professores e Inclusão Digital, sendo operada de modo articulado às temáticas que o Laboratório desenvolve”. (TORRES, 2014, p. 154).

Ante tal afirmação, o prosseguimento do capítulo descreverá as concepções que embasaram o desenvolvimento da sequência.

#### **2.3.1 Origem e embasamento teórico**

No final dos anos 1980, na Universidade Federal do Ceará, mais precisamente no Curso de Bacharelado em Matemática, surgiram as primeiras tentativas de escrever algo mais compreensível nos trabalhos acadêmicos voltados para a Matemática Pura para o público que não tinha um amadurecimento tão aguçado. Era o trabalho de Vasconcelos (1983), intitulado “Uma abordagem natural para os anéis de Dedekind”, cujo orientador foi o professor doutor Hermínio Borges Neto. Este trabalho ensejou um dos primeiros fundamentos aprofundados: um

problema passado pelo professor deve ter a característica de ser generalizável com o intuito de refinar, porém deve-se partir do geral para o particular. A dissertação foi elaborada com o intuito de poder ser uma fonte acessível de estudos para alunos do início da graduação em Matemática. Surgiu como consequência a sequência de Mac Lane<sup>1</sup> como uma proposta de metodologia de ensino ainda em uma fase teórica inicial. Apreendeu-se como lição que não é se estudando situações específicas que se conduzirá o aluno ao aprendizado de maneira mais acessível.

Ainda nesse período, com o pseudônimo “Prof. Fedathi Cebê”, o professor pesquisador Borges Neto introduzia uma visão denominada Teoria Fundamental para ministrar suas aulas de Tópicos da unidade de Matemática da UFC. Isso significava ensinar matemática não com modelos prontos, mas em busca de investigar as ideias oriundas do pensamento matemático.

A sua teoria se enraizava no fato de que todo o cotidiano está permeado pelos conceitos matemáticos e, diante deles, seria possível elaborar modelos matemáticos sob a égide de definições fundamentais valorizando, assim, o modo ingênuo e intuitivo das ideias.

Uma década depois, Borges Neto foi realizar estudos de pós-doutoramento na França, na Université Paris Diderot, e sua maior preocupação era compreender qual seria a atitude de um docente para a realização de uma sessão didática em que o aprendizado matemático fosse constituído e assim o conhecimento desenvolvido.

Em entrevista para a doutoranda em Educação, Matos (2017), ocorrida no dia 22 de maio de 2017, o professor doutor Hermínio Borges Neto relata a história da origem e desenvolvimento da Sequência Fedathi. Ele é matemático de formação e carreira, correntes de formação do matemático estadunidense formalista e especializada (trabalha logo a linguagem matemática para que as pessoas se tornem o mais rápido possível matemáticos), europeia, em particular a Russa (segue a linha da francesa) e francesa (desde a época em que Napoleão criou a escola politécnica, em que formava matemático como engenheiros cuja concepção era formar com algum objetivo), inglesa (segue a americana) e alemã, meio-termo. O professor recebeu influência tanto da escola francesa como da estadunidense, mas foi a francesa que nas reuniões semanais de seus estudos com professores matemáticos dessa corrente, foi notado que eles trabalhavam conteúdos que eram possíveis de compreender desde o conhecimento que existia entre os alunos. Além disso, com suporte nos problemas apresentados, havia o objetivo de transpor o conhecimento matemático para outras áreas do saber. Em seu grupo de estudos de

---

<sup>1</sup> Nome de um famoso matemático na área da álgebra abstrata que, por ser sofisticado, possuiu a função de chamar atenção.

orientação no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) recebeu intenso influxo, também, de professores alemães, percebendo maior amplitude e formação mais abrangente, sem deixar de ter o conhecimento de sua área específica. Essa experiência tornou possível seu trabalho com a Matemática Aplicada com ferramentas computacionais em meados dos anos 1980, já como bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

No final dos anos 1980, chefe do Departamento de Matemática da UFC, identificava um grande problema com o ensino de Matemática nos cursos de Ciências Exatas para os quais a Matemática oferecia disciplinas em que verificou muitas reprovações e desistências por parte dos alunos, momento em que notou que o serviço prestado aos outros cursos estava deficiente. Daí foram realizados programas como tentativa de atenuar essas dificuldades.

Começavam as primeiras preocupações com o ensino de Matemática. Os professores do Departamento que estavam cursando mestrado na Matemática, e que estavam com alguma dificuldade para acompanhar o curso, foram convidados a se engajarem no programa de pós-graduação na Faculdade de Educação. Foram levados cinco professores oriundos do curso de Matemática da UFC e a primeira dificuldade foi fazer com que o Programa de Educação concedesse de modo diferenciado o acesso de “vagas diferenciadas” a esses profissionais sem favorecimento, mas dentro de um “plano de cooperação” de modo que houvesse uma seleção interna entre eles.

Então, quatro professores terminaram o mestrado em Educação e já se passava para cinco, juntamente com o professor Hermínio, o número de docentes com um novo olhar para o ensino de Matemática. Daí, como resultado das dissertações de mestrado, esses professores concluíram que o problema estava na formação do professor de Matemática, tendo, assim, de repensar a Matemática desde o seu propósito, para que serve etc.

Inicialmente, a Sequência Fedathi não foi concebida com nenhuma base teórica de educadores, inclusive a obra freireana, suporte da metodologia de ensino, só foi conhecida pelo professor após voltar da França. Como concepção, a SF baseava-se que quem pode e deve falar como se aprende Matemática é o matemático, aquele que cria a Matemática. Surgiu, assim, a ideia inicial da SF, em que o professor pudesse transformar a sala de aula em um ambiente de matemáticos trabalhando já que o problema residia em como o professor estava transmitindo o conhecimento para o aluno.

Como um matemático prepara seus problemas? Essa pergunta foi uma das ensejadoras do projeto inicial que viria a ser denominado Sequência Fedathi. Alguns trechos da

história são relevantes para a continuação e melhor entendimento deste estudo a saber: o concurso para a área de ensino em Matemática do prof. Raimundo Barbosa para a Faculdade de Educação, e a criação da disciplina Tópicos de Matemática, no Departamento Teoria e Prática de Ensino, com a anuência da profa. Ana Iório, então coordenadora do curso de Pedagogia.

A ruptura no paradigma de avaliação do certame para docente de Matemática para a Faculdade de Educação já não concebia apenas um professor bom (conceito que será bem estruturado nos próximos capítulos) nas áreas de metodologias e didática, mas agora era preciso saber o conteúdo matemático, caindo assim questões específicas na prova que mensurasse o domínio em Matemática.

Segundo Borges Neto (2017), a professora Ana Iório, na qualidade de coordenadora do Curso de Pedagogia na época, criou a disciplina Tópicos de Matemática na graduação; não havia uma programação preconcebida, pois seu objetivo era dar aulas no “molde” francês, ou seja, o professor direcionava o curso de acordo com o público matriculado.

Então, a disciplina tinha um viés aberto e isso poderia dificultar o trabalho do professor que já tinha tudo pré-programado para realizar o curso, mas foi neste contexto que os tópicos estudados foram sendo implementados na disciplina, por meio de questões contextualizadas, em que os alunos até possuíam as ferramentas necessárias para as resoluções, mas ainda não eram tão sofisticadas para as conclusões esperadas pelo docente. No decorrer da aula, os alunos iam ao quadro apresentar seus resultados e o professor, em seguida, sistematizava o padrão matemático axiomatizado envolvido no problema.

No decorrer desses experimentos envolvendo o ensino de matemática na graduação, surgiu uma proposta de formação docente para a Secretaria de Educação do Estado do Ceará, com o viés construtivista, e daí a proatividade dos professores mencionados comandou esse trabalho e culminou com a criação do grupo Fedathi, por volta dos anos 1991/92, composto por professores matemáticos e pedagogos. Assim é iniciada a sistematização de um método de ensino denominado inicialmente de Sequência de Fedathi (informação verbal)<sup>2</sup>.

Por volta dos anos 1990 e com estudos voltados para as questões da didática da Matemática, o grupo intitulado Fedathi começou a estudar uma metodologia de ensino denominada formalmente Sequência Fedathi (SF) e atualmente é estudada pelo Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática Multimeios (GEM<sup>2</sup>) do Laboratório Multimeios<sup>3</sup> que

---

<sup>2</sup> Informação fornecida pelo professor Hermínio Borges Neto no decorrer de suas disciplinas ministradas e por suas orientações no grupo de pesquisa no período de 2015 a 2018.

<sup>3</sup> O Laboratório de Pesquisas Multimeios faz parte da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará e existe desde 1997 como parte integrante do PROIN. Tem por objetivo o desenvolvimento de

desenvolve pesquisas em educação e no Ensino de Matemática (BORGES NETO; SANTANA, 2003).

A Sequência Fedathi idealizada com base nos estudos realizados no pós-doutorado de Borges Neto, que é bacharel em Matemática com mestrado e doutorado em Matemática, professor da Universidade Federal do Ceará (UFC), ligado à Faculdade de Educação (FACED), a quem afetuosamente batizou o nome Sequência Fedathi devido às iniciais dos seus três filhos **Felipe, Daniel e Thiago**; e pode ser definida, segundo Borges Neto (2016), com fundamentação teórico-metodológica baseada na proposta lógico-dedutiva-construtiva, por um comportamento, uma atitude diferenciada por parte do docente, perante seus estudantes, que respeite e tente reproduzir o método de trabalho de um matemático.

#### **2.4 A formulação de conceitos e a Sequência Fedathi**

A compreensão de como se dá o processo de aprendizagem dos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, as etapas do raciocínio intuitivo as quais os alunos devem estabelecer para compreenderem o conteúdo de taxas de variação, requer um componente primordial: um recurso metodológico de ensino. A proposta como metodologia de ensino é usar a Sequência Fedathi como mediação didática com a finalidade de promover o raciocínio intuitivo a ser estudado durante a pesquisa.

A Sequência Fedathi, nesse processo, possui a finalidade de orientar a ação do professor, que conduzirá o aluno como um sujeito ativo e não como receptor de respostas prontas e de uma matemática acabada.

Assim, a Sequência Fedathi atinge essa função no instante em que traduz em sala um momento em que o professor é um condutor que dá oportunidade aos alunos de descobrirem a Matemática, partindo de situações desafiadoras que os desiguem a agir sobre o conteúdo proposto, assimilando e acomodando novos saberes. Tal fato ocorre de acordo com as etapas a serem seguidas numa sessão didática: *tomada de posição, maturação, solução e prova*.

Quadro 2 – Postura docente segundo a Sequência Fedathi.

<b>Postura Docente Esperada em Cada Fase da Sequência Fedathi</b>			
<b>Tomada de Posição</b>	<b>Maturação</b>	<b>Solução</b>	<b>Prova</b>

Apresenta uma situação desafiadora que esteja no nível dos alunos.	Deixa os alunos pensarem sobre o problema/atividade proposto; Observa o desempenho dos alunos (postura mão no bolso); Se questionado responde com perguntas que estimulem a curiosidade e o instinto investigativo do aluno; Não fornece a resposta pronta; Intervém quando necessário, caso o aluno não consiga avançar.	Chama os alunos para apresentarem suas respostas; Faz questionamentos que suscitem discussões com a turma; Aponta e discute os possíveis erros de modo a favorecer a aprendizagem; Compara os resultados apresentados.	Formaliza os resultados matematicamente;  Faz generalizações;  Expõe as definições formais ou teoremas.
--	---	--	---

Fonte: Fontenele (2013).

O correto uso dessas etapas traduz uma nova visão em sala de aula, tanto no que se refere ao posicionamento do professor quanto ao do aluno, de modo que este último deverá ser um participante ativo durante toda a aula, seja resolvendo as atividades, discutindo as soluções encontradas ou verificando a formalização do conteúdo realizada pelo professor.

A atitude do professor, segundo Fontenele (2013), é definida pelo quadro 2, que traz um resumo do que se espera do professor em cada fase da Sequência Fedathi.

Ao elaborar a sequência de ensino, no entanto, mais precisamente, a sessão didática, é imprescindível que o professor tenha consciência do nível de conhecimento dos alunos (*plateau*)<sup>4</sup>, ou seja, se há condições de assimilar o conteúdo a ser apresentado e, além disso, preparar-se para possíveis questionamentos, dúvidas e pontos de dificuldades que poderão surgir, o que dotará o docente de um maior preparo.

Nos relatos de Sousa (2013), antes de haver um planejamento da aula, deve ocorrer uma transformação na ideia do docente, ou seja, não há como pôr algo em prática que não se utiliza em sua maneira de pensar. Eis a reflexão do autor:

[...] para organizar uma aula segundo o roteiro metodológico da Sequência Fedathi, a mudança de concepção deve preceder a mudança na forma de planejar. [...] compreendemos que as ideias do professor, sua forma de pensar, é que fazem o diferencial no momento da execução do plano, quando este é posto em prática e pode, efetivamente, ser chamado de currículo, no sentido de caminho a ser percorrido.

<sup>4</sup> *Plateau* segundo a Sequência Fedathi, é o nível cognitivo do sujeito em relação ao domínio do conteúdo.

A maneira de pensar e agir do docente se faz essencial para o êxito no uso da Sequência Fedathi, pois, consciente ou não de suas concepções de ensino e aprendizagem, a elaboração e execução de suas aulas tenderão a se sustentar nessas bases. Um exemplo de aplicabilidade dessa estratégia metodológica é o uso de recurso computacional, pois segundo Alves e Borges Neto (2011), a exploração de tal ferramenta propicia o desenvolvimento de estruturas cognitivas e percepção de aspectos matemáticos por parte dos discentes.

Ressaltamos que cada etapa da Sequência Fedathi representa momentos distintos da aula, que devem acontecer naturalmente, quantas vezes forem necessárias, de acordo com o planejamento da aula, e perfazer todos os momentos em que um matemático cria determinado conhecimento, ficando a critério do docente as melhores ferramentas de ensino a serem utilizadas no processo. A Sequência se baseia no método científico e é o método científico aplicado no ensino, daí a proposta de transformar a sala de aula em um ambiente de pesquisa, de descoberta. Como fazer isto? Tem-se os princípios e alguns conceitos básicos (como mão no bolso, pergunta, plateau....) Quem pode ajudar a fazer isto? Engenharia didática(ED), por exemplo, na sua análise, a prioridade é preliminar, mas não só a ED pode ajudar. Por exemplo, as metodologias ativas como sala invertida, PBL, CBL ou TBL, a PP (pedagogia de projetos) pode também ajudar e, até mesmo, serem inseridas na sessão didática em que for aplicada a metodologia Sequência Fedathi.

Portanto, a concepção inicial da SF não foi fundamentada em teóricos da Educação e sim em matemáticos, mas, com o decorrer da sofisticação dos estudos, experimentação e reflexões, apareceram David, Hersch, Morris Klein, Dieudonne, Fermat, Russel, Brower, Polya Lakatos (que já em meados dos anos de 1990 foi utilizada como embasamento teórico para o curso fundamentos da Matemática ministrado pelo professor Hermínio, pois explicava para que servia a Matemática com sua função prática na vida) etc.

O amadurecimento dos estudos na área da Educação convergiu para o entendimento de que os teóricos Piaget e Vygostky também fundamentaram e com suas teorias deram suporte à sequência. Notou-se, então, que a Sequência Fedathi era o próprio método científico.

A maioria das formações centralizava seus estudos com foco no aluno, a sequência de ensino vislumbrada pelo professor; em contrapartida, visava ao comportamento e ao professor, ou seja, recomenda o comportamento, postura, forma de interagir com o aluno, partir do geral para o particular com problemas desafiadores e, como consequência disso, alterar o modo como o aluno aprende e flexibilizar o entendimento. Essas características que irão incidir no docente é que vão ao encontro das ideias desenvolvidas pelos teóricos da Educação citados anteriormente.

Na Sequência Fedathi, mais importante do que saber resolver é o como equacionar o problema, de modo que a Matemática resolva. Isto denominamos matematizar, ou seja, é imprescindível que o aluno seja capaz de desenvolver um raciocínio pautado na investigação e criação de um modelo com base nos dados fornecidos. E a viabilidade do uso dessa metodologia diante de um desnivelamento de conhecimento em sala de aula? O problema visto não é esse, já que a metodologia possui uma saída para essa situação, mas a quantidade de professores e monitores reduzida para o número elevado de alunos em sala, podendo dificultar o uso dessa ferramenta metodológica.

Antes das etapas que compõem o método de ensino, existe também um momento de grande importância, que é denominado *Plateau*<sup>5</sup>, e configura a preparação da aula. Preocupa-se com o conhecimento necessário aos alunos para desenvolverem a contento a atividade. O professor deve realizar uma investigação para saber em que grau de conhecimento estão os alunos. Esse momento na sequência é o primeiro passo para que o docente conheça seus alunos. À medida que conhece os alunos, conhecerá também suas deficiências por meio das perguntas, desafios e, também, da constância em fazer com que participem ativamente do processo. Daí a discrepância pode diminuir e o *Plateau*, conhecimento médio necessário para a aquisição do novo conhecimento. *Plateau* é um nível em que o aluno precisa de uma base de conhecimento mínimo para avançar no conteúdo com tranquilidade e segurança. Tal desafio nem pode ser tão fácil de modo que os alunos bons se sintam infantilizados nem tão difícil de maneira que os que sentem maior dificuldade se achem incapazes de resolver.

A origem do *Plateau* remonta os estudos em Geometria Diferencial ao estudar área de superfícies mínimas do professor de Matemática lotado no Programa de Matemática Pura da Universidade Federal do Ceará, Luquésio Petrola de Melo Jorge, quando teve uma notória publicação. É a superfície exemplo de *Plateau* que, nesse contexto, significa sinal de equilíbrio e principalmente estabilidade para o ponto de partida.

Diante disso,

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau, um físico belga que se dedicou em realizar experimento com películas de sabão em meados de 1850. No entanto, os resultados dos experimentos de Plateau foram explicados fisicamente. Assim, surgiu o problema de Plateau: provar que, para cada curva fechada  $C \subset \mathbb{R}^3$ , existe uma superfície  $S$  de área mínima tendo  $C$  como fronteira. Isto é, queremos minimizar a área dentre todas as superfícies do  $\mathbb{R}^3$  com fronteira dada  $C$ . (ARRUDA e DIÓGENES, 2017, p.2)

---

<sup>5</sup> Segundo a Sequência Fedathi, é o nível mínimo de conhecimento para que o aluno acompanhe o desenvolvimento do conteúdo.

À medida que foram sendo realizadas mais experimentações e seus resultados foram gerando artigos, monografias, dissertações e teses, outros conhecimentos foram sendo atrelados à Sequência e, assim, desenvolvendo ainda mais seu aporte teórico.

Nos estudos realizados sobre a didática francesa, percebeu-se que seria possível idealizar um método que complementasse algumas lacunas dessa pesquisa. A continuação dessa história se deu quando Borges Neto retorna ao Brasil de seus estudos e trazendo consigo ideias que contribuiriam com a educação matemática no Ceará.

Ao serem analisadas as produções que tratam da Sequência Fedathi, atesta-se o seu objetivo principal: promover a mudança de postura do professor que passa a ser o mediador do processo de ensino (SANTOS; LIMA; BORGES NETO, 2013). Além disso, a SF tem ainda como propósito despertar a autonomia do aluno, apontando uma reflexão sobre sua prática e se debruçar em busca do resultado final, que pode ser diferente da forma convencional esperada pelo professor. A SF representa um elo entre aluno, professor e os conhecimentos, pois o desafio e a mediação proporcionam interação dos componentes do grupo, ou seja,

A SF é empregada na busca de desenvolver no professor uma postura mediadora que estimule uma participação mais ativa do aluno em seu processo de construção do conhecimento, contribuindo assim para a autonomia discente. (CARDOSO, 2015 p. 36).

De acordo com Torres, a “Sequência FEDATHI considera todo o processo didático, desde o planejamento mais inicial de aula/curso, envolvendo preparação, estudo e avaliação dos meios a serem utilizados”. (2014, p. 151).

Os professores que utilizam a sequência proporcionam aos alunos experimentar o percurso de um matemático, assim como relatam Borges Neto *et al.*:

Nesse modelo, ao se deparar com um problema novo, o aluno reproduz os passos que um matemático utiliza ao se debruçar sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos anteriormente adquiridos para ajudar na solução, testa os resultados encontrados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo.” (2014, p. 6)

Assim, é de suma importância que não seja um comportamento apenas discente, pois a responsabilidade deve ser de todas as partes envolvidas no processo.

É importante que o professor de matemática conheça os passos que o conhecimento matemático percorreu ao longo da história, conheça as necessidades mentais e sociais que levaram o homem a produzir esses conhecimentos e utilizá-los em sala de aula, para que seus estudantes possam reconstruir (à sua maneira, e dessa vez convivendo

com uma realidade diferente) seus conhecimentos e utilizá-los (já atualizados) no meio em que vive. (BORGES NETO, 2016, p.07)

Em sendo responsabilidade de todos, é preciso atentar para as metodologias ativas direcionadas para a figura do aluno, ou seja, ele é responsável pelo seu aprendizado; enquanto a SF se preocupa com o comportamento docente, mesmo a Engenharia Didática, que não direciona sua atenção especificamente para o aluno e sim para o professor, na hora de executar a sessão didática, deixa sob responsabilidade do docente para fazer como achar melhor; em contrapartida, os próprios teóricos Papert e Valente preocupavam-se muito com a sala de aula assistida por computador, mas não priorizavam o comportamento desse docente em cada atividade realizada. Se a preocupação for com o professor, então os processos funcionam e naturalmente resvalam positivamente nos alunos.

As metodologias ativas, em contrapartida, podem entrar na SF como apoio ou suporte, como a Engenharia Didática. Na SF, o docente interfere o mínimo possível para não atrapalhar o raciocínio do aluno. O princípio da metodologia ativa é tornar o aluno reflexivo, enquanto a Sequência é uma das metodologias ativas, mas nem toda metodologia ativa é uma Sequência Fedathi.

A sequência não pode ser vista sob a óptica do reducionismo às quatro etapas segundo Borges Neto (2018), já que permeia princípios além das quatro etapas: pedagogia mão no bolso, o trabalho partindo do geral para o particular, o fato de o professor nunca responder de modo positivo para o aluno, efeito topázio, trabalho sempre baseado em perguntas e professor inquisidor.

Foi o trabalho apresentado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, realizado em julho de 2016, na cidade de São Paulo intitulado: **A Aplicação de problemas sobre Taxas Relacionadas com a metodologia Sequência Fedathi** analisou uma prática que tinha o objetivo inicial de usar a metodologia de ensino denominada Sequência Fedathi. A sessão didática versou sobre o conteúdo de derivadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e motivou esta pesquisa ainda nos estudos iniciais do doutoramento, porém não obteve os resultados esperados, uma vez que não executamos corretamente as vivências e os fundamentos da sequência conforme será visto no capítulo quatro.

## 2.5 Etapas da Sequência Fedathi

A Sequência Fedathi<sup>6</sup> (SF) é uma proposta metodológica que sugere a mudança na condução da aula pelo professor” e seu desenvolvimento teve o objetivo inicial de ser aplicado

---

<sup>6</sup> Metodologia estudada pelo Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática Multimeios (GEM<sup>2</sup>) na Faculdade de Educação - UFC onde desenvolvem pesquisas na Educação e no Ensino de Matemática.

em aulas de Matemática, porém, com estudos e experimentos posteriores de pesquisadores de outras áreas (Pedagogia, Física, Engenharia, jogos etc.), foi possível sua adequação/aplicação em outras ciências. Conforme anota Borges Neto (2016, p.15):

A Sequência Fedathi articula três concepções epistemológicas do conhecimento matemático: a proposta de resolução de problemas, explorado por Polya, nos anos 70, a lógica do descobrimento matemático, de Lakatos (1978), e o intucionismo de Brouwer.

Essas concepções epistemológicas possuem uma ressalva no método apresentado por Polya (1978), centrado no estudante. A Sequência Fedathi direciona-se à ação docente, a qual, conseqüentemente, se projeta na ação do discente.

O objetivo do teórico Polya é despertar a autonomia do aluno, apontando uma reflexão sobre sua prática, além de se debruçar em busca de um resultado, o qual, ao ser encontrado, pode se mostrar diferente da maneira convencional esperada pelo professor. Já a SF representa um elo entre aluno, professor e o saber, em que o desafio e a mediação proporcionam a interação dos componentes do grupo.

Os professores que utilizam esta metodologia proporcionam aos alunos experimentar os caminhos que um matemático percorreu para sua descoberta, assim como relatam Borges Neto *et al.* (2014),

Nesse modelo, ao se deparar com um problema novo, o aluno reproduz os passos que um matemático utiliza ao se debruçar sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos anteriormente adquiridos para ajudar na solução, testa os resultados encontrados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo.

Ante o exposto, inferimos que a Sequência Fedathi estabiliza qualidades metodológicas conflituosas com as do método tradicional de ensino, pois o sujeito de conflito continua sendo o professor, mas, agora, com a função de mediador, de conceber condições e ambiente adequado à reflexão e busca, porquanto

A Sequência Fedathi contrapõe-se ao ensino tradicional, ensejando aos professores a apropriação de um modelo de ensino em que docente e discente se achem motivados e engajados nas situações de aprendizagem [...] (SOUZA, 2013; p. 39)

Com efeito, são estabelecidas condições ideais à formação de seres humanos mais produtivos. Vive-se em um mundo dominado pelas renovações, no qual a tecnologia aparece sempre em destaque, assim, exigindo pessoas mais flexíveis e acessíveis às diversidades, para escutar as mudanças que ocorrem frequentemente nos vários setores da sociedade. Consoante

Souza (2013), contudo, a Sequência Fedathi não tem vaidade alguma de apresentar-se como a metodologia ideal a ser seguida pelo professor em sala de aula, porém, evidencia significativas assistências para o avigoreamento das práticas metodológicas desenvolvidas pelo docente.

A SF, diferentemente de outras propostas, preocupa-se diretamente com o professor. Torna-se evidente que a denominação de etapas ultrapassaria o conceito de classificação, pois logo era estabelecido o termo vivência. De acordo com Sousa (2015, p.43),

A essência da Sequência Fedathi é a postura do professor na sala de aula durante sua vivência, porque faz a mediação didática. Então, ele deve utilizar esse momento para instigar os alunos a resolverem o problema e a refletirem sobre os resultados que eles encontrarem, tanto no caso de acertos como no caso de erros.

De tal maneira, mudar o comportamento por si não basta, mas deve-se vivenciar as etapas em sua prática cotidiana. Com efeito, toda a experimentação será expressa na real vivência do professor pela Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

### *2.5.1 Tomada de Posição*

Na Tomada de Posição, o professor lança o problema, ou seja, propõe a atividade e espera a busca da solução por parte do discente com seus conhecimentos, escolhendo o caminho que achar mais correto de acordo com seus conhecimentos prévios. No período inicial, pode ser expressa uma situação desafiadora, um exercício direto ou um determinado conteúdo para o aluno.

Assim, a problemática apresentada deve ser de cunho desafiador, de tal modo que seja possível fazer uma conexão com o objeto de estudo, que será compreendido pela turma, representando, assim, a espinha dorsal da etapa. Souza (2013, p. 20) assegura que “[...] é importante que o problema tenha como um dos meios de resolução a aplicação do saber em jogo”. É uma situação generalizável, ou seja, que seu modo de executar possa também solucionar outras inúmeras situações.

Ressalta-se o cuidado em trabalhar com uma linguagem técnica acessível, para que os alunos não se percam no caminho e sim estejam familiarizados com o ambiente, pois o problema deve ser adequado ao conhecimento dos estudantes. O docente possui importante papel no processo, pois assume comportamento estimulador em que dialoga com os estudantes com suporte em suas inquietações e indaga sobre a questão proposta com uma atitude diferenciada, conhecendo a situação de aprendizagem em que o aluno está.

### 2.5.2 Maturação

Relativamente ao tempo, não significa, necessariamente, deixar o aluno lá sozinho pensando, mas sim é função do docente falar, conversar e na verdade dialogar com o aluno (*handshake*) o que fundamenta um princípio da SF: a pedagogia mão no bolso. Assim, o discente executará e será motivado a criar soluções e aplicar em outras situações, gerando, assim, reflexões conceituais e formando alunos cada vez mais críticos.

Deve existir a paciência da espera, ou seja, tempo didático, que é bem diferente do tempo de aula.

No ensino tradicional, é dado o problema e o docente diz como fazer. O aluno, em geral, resta capacitado a resolver, porém os matemáticos não conseguem resolvê-lo sem experimentar. E uma das características dessa situação é que se erra mais do que acerta, ou seja, emblematicamente, é o caso da quantidade de “papéis amassados” na cesta de lixo de um matemático de carreira que significa suas tentativas para chegar a um resultado correto (ressalta-se, culturalmente, a importância de amassar e não rasgar para, porventura, utilizar depois algum dado sob um novo olhar, mesmo sendo “imoral” ecologicamente.).

De modo análogo, ocorre em muitos filmes e até mesmo em locais de estudo nas lousas em que ninguém apaga um trabalho que foi começado por outra pessoa, apenas o próprio idealizador daqueles cálculos pode mexer, sob pena de alterar significativamente uma ideia a ser concretizada e trabalhada. Essa é a maneira de aprender Matemática! Mesmo de modo virtual, o fenômeno matemático ocorre no plano de pensamento e, quanto mais se experimenta, mais se aprende e, assim, ocorre a correspondência biunívoca entre o trabalho do matemático e o ato de estudar.

Essas experimentações levam o aluno ao erro, e um princípio fundamental é a provocação do contraexemplo que desestabiliza ainda mais as possíveis dúvidas do aluno, mas ele tenta novas estratégias até que se consiga um resultado adequado.

Caso a maturação não exista, ou seja, mesmo sendo um professor bom, se não instigar o aluno com outro, não havendo medição, e isso vai de encontro ao comportamento de um matemático que, na interação com outro, muitas vezes, surgem *insights* que mostram novos caminhos. Portanto, depreende-se que o trabalho matemático é individual, mas as descobertas são coletivas.

Alunos de uma escola tradicional são reativos, mas deveriam ser proativos e isso é uma dinâmica da Sequência Fedathi. Eis o papel do docente na mediação de novos processos mais efetivos, para que se possa trabalhar a Matemática, mas não é a conservadora e tradicional

que não generaliza situações-problemas. Portanto, a ideia inicial é de que se trabalhe uma questão generalizável que permita a criação e, assim, possa se trabalhar uma matemática mais sofisticada e rica de ser aprendida.

O tempo de maturação por vezes é mal-entendido por algum estudioso, porém, na Matemática, caso o currículo fosse trabalhado com o alicerce da SF, muitos conteúdos já estavam implicitamente contemplados em outros, evitando assim as inúmeras classificações em tópicos desnecessários, o que implicaria uma redução conteudista e, por conseguinte, aumento de tempo para melhor ser trabalhada a Matemática. O que é relevante, então, ser ensinado?

A Maturação ocorre quando os alunos, de posse do problema, buscam seu entendimento para uma solução e, em seguida, partem à procura da resolução. O professor deve ficar atento aos questionamentos da turma como sinal de compreensão do conteúdo e dar respostas que os levem a refletir mais ainda sobre sua intencionalidade e atitudes.

Na condução da fase maturação, o professor deve dar oportunidade para que os alunos fiquem independentes e, caso haja perguntas oriundas dos alunos sobre alguma passagem para solucionar a questão proposta, poderá utilizar-se de contraexemplos e aplicações em outros contextos para, mediante uma reflexão do estudante, encontrar opções diversas.

Um ponto importante da Sequência Fedathi é o uso da pergunta, como utilizada em Sousa (2015). Nesse trabalho, é abordada a curiosidade despertada no aluno e o poder de reflexão que um questionamento pode gerar. Além disso, o professor precisa estar atento às perguntas realizadas pelos alunos, já que suas indagações criarão possibilidades no sentido do conhecimento, saber aprendido.

### *2.5.3 Solução*

A Solução é a fase da Sequência Fedathi em que ocorrem a representação e a organização de esquemas e/ou modelos encontrados que visem à solução do problema apresentado na Tomada de Posição por meio da troca de ideias, atuação do professor como mediador, uso de contraexemplos e a exposição de várias soluções para o mesmo problema.

O estudante, após maturar e refletir, oferece, com argumentos, a sua resposta ou múltiplas trajetórias para serem analisadas e debatidas pelos demais colegas, que podem ter trilhado caminhos diferentes, e pelo professor, que formula exemplos, dá contraexemplos, verificando, assim, se são satisfatórias ou se têm erros, limitações, devendo, se necessário, retornar à fase anterior ou ir para a prova.

A opção metodológica no uso da exposição do problema e sua imediata resolução por parte do professor pode revelar um déficit na aprendizagem, pois seu foco é o ensino. Esse modelo preocupa-se somente com o repassar de fórmulas e a memorização de regras e receitas, em vez de permitir que o estudante compreenda e conceda significado aos conteúdos, fortalecendo a sua autonomia, indispensável para a vida escolar.

Em contrapartida, o percurso em que o ato investigativo se fez o objetivo principal do processo didático, é possível reestabelecer novas responsabilidades. O professor não é somente o que ensina nem os alunos meros sujeitos de um processo de aprendizagem.

Na fase da Solução ocorrem desequilíbrios cognitivos no estudante, com o intuito de conceber conhecimentos e esclarecimentos das hipóteses, segundo relatam Borges Neto, Lima e Santos (2013). Essa perspectiva promove a independência e autonomia para mostrar o que foi pensado na fase anterior.

Para a exposição, por algum aluno, de estratégias de resolução de um problema que foi desenvolvido por ele sozinho ou em grupo, após uma reflexão e consequente desenvolvimento de um raciocínio, é necessário que o ambiente de sala de aula seja estabelecido para dar segurança ao discente, que a ele favoreça superar o seu medo de errar, seus anseios e bloqueios (ROCHA, 2008).

O professor torna-se passivo neste momento diante a apresentação da solução? A Sequência Fedathi centraliza sua importância na figura do professor, o protagonista no ato científico de o aluno pesquisar. Então se espera um professor que tente elucidar o que o discente pensou e, para que isso ocorra, ele pode usar um recurso denominado contraexemplo. De acordo com Sousa (2015), é o emprego do contraexemplo que pode ser feito quando, ao ser interpelado, o aluno expor uma resposta correta, como contrapeso, desafiando-o a argumentar a favor, a defender sua proposição ou solução.

O professor posiciona-se como mediador, ou seja, deve atuar junto ao grupo para decidirem qual a melhor solução entre todas as apontadas. As soluções que não se aproximaram da resposta esperada deverão ser refutadas com apresentação de contraexemplos. Após a escolha da solução mais apropriada para a situação-problema proposta, o professor deve enaltecer a importância do conteúdo em foco e mostrar situações distintas que podem ser solucionadas mediante aquele novo conhecimento produzido (JUCÁ, 2004).

E os alunos já devem ter as condições de escrever em uma linguagem técnica? Não, já que neste processo o docente deve propor aos alunos organizar, sistematizar e estruturar as suas respostas às situações em questão (modelos que podem ser escritos em linguagem matemática, ou simplesmente mediante desenhos, esquemas ou mesmo por meio de

verbalizações), haja vista que as ideias propostas devem ser expressas ao grupo para que possam ser comparadas, rebatidas e discutidas entre os estudantes (ROCHA, 2006).

O aluno deve refletir sobre as realizações desenvolvidas no decorrer da vivência da maturação, avaliar suas respostas por meio de ensaios, erros e tentativas. Ele adquire autonomia e deve perceber a importância de cada caminho percorrido na elaboração de sua aprendizagem.

O professor deve analisar as distintas modalidades de representação expressas pelos alunos, para, baseado nelas, buscar o apoio do novo conceito matemático implicado.

A resposta sugerida pelo aluno na fase da Solução é manifestada de acordo com a Tomada de Posição, ou seja, pode ser uma demonstração, uma resolução de um exercício ou, até mesmo, uma discussão sobre um tema levantado inicialmente e já deve bem previamente ter sido pensada no planejamento do docente.

Nas Ciências Exatas, a fase da solução pode exprimir respostas como demonstrações, interpretações de situações propostas. Nas Ciências Humanas, a fase da Solução pode se tornar mais ampla, uma vez que se trabalha com estruturas de pensamentos não fechados e que merecem ser investigados quanto ao seu valor interpretativo.

Com efeito, seja em qualquer área do conhecimento, essa fase requer cuidadoso amparo por parte do professor, para que o percurso mostrado pelo aluno seja literalmente dissecado e que todos percebam a estrutura de pensamento estabelecida.

A Solução é o momento em que o estudante exprime sua proposta de resolução, podendo ser o resultado esperado ou não. Quando não é o esperado, o aluno pode ter percorrido outros caminhos que o levaram à resposta encontrada e isso deve ser valorizado pelo professor. A discussão do processo com o aluno é importante, pois pode orientá-lo nos pontos em que teve dificuldade na tarefa e possibilitará refletir sobre sua ação.

O saber em questão começa a ser delineado cientificamente no momento da Solução, a qual pode ser apresentada de modo completo, superficial ou pouco elaborado, pois a atitude do docente em analisar os dados possibilita aos alunos uma visualização sistematizada e os torna conscientes da maneira mais coerente, ajudando-os a não incorrerem nos mesmos erros.

Seria, então, uma maneira de aprender com os erros? Também, pois as estruturas cognitivas formadas por meio dos estudos das diversas respostas desenvolvem raciocínios que antes o aluno poderia não ser capaz de promover. Isso ocorre, no entanto, quando as competências didáticas e teóricas do professor convergem para a participação e entendimento dos alunos ao ser estruturada a Solução.

A última fase da Sequência Fedathi é denominada Prova e é caracterizada por ser o momento da ação docente de sintetizar ou modelar a situação apresentada na tomada de posição, formalizando e sintetizando o conteúdo com o intuito de generalizar para que a solução encontrada seja aplicada em outras situações e contextualizações.

Por isso, é louvável que o professor envolva os alunos nesse momento, procurando fazer uma conexão entre os resultados que eles apresentaram e os argumentos necessários à formalização do conteúdo. Ao perguntar, por exemplo, – *o que essas respostas têm em comum? Será que essas mesmas estratégias valem para a resolução de outro problema?* – o professor pode direcionar os alunos à formalização, à generalização de um modelo.” (SOUSA, 2015).

É inegável a existência, mesmo deficiente, de aprendizagem no binômio problema e explicação, porém o que se diria se houvesse uma fase intermediária em que os alunos pensassem sobre o problema e expusessem a solução? Ficaria mais fácil a compreensão após a explicação do professor?

Essa fase dita solução poderia encerrar o percurso da sessão didática promovida pela metodologia Sequência Fedathi? Suponhamos que, se isso ocorresse, os alunos poderiam sair com a impressão de que suas conjecturas sobre o problema estariam corretas, mesmo com várias respostas diferentes e, além disso, o papel do professor seria reduzido ao acompanhamento do processo de maturação dos alunos e mostra das soluções desenvolvidas desprezando as mediações necessárias de validações e refutações que convergem para o aprendizado.

O trabalho propiciado pelo professor transforma o estudante em um aluno-investigador, porquanto, ao realizar o percurso da maturação até à solução, pode revelar alguns resultados, tais como a ocorrência de alguns momentos redundantes ou obscuros, o acerto por completo da situação proposta e, até mesmo, ter ido ao encontro de uma resposta incompleta que poderia ser melhorada.

Nesse percurso, não seria presunção afirmar o quão eficaz pode se tornar o próximo momento, a fase da prova, pois os alunos não participariam apenas da fase da apresentação do problema e da exposição do professor, como é o *modus operandi* da maioria das sessões didáticas; em vez disso, amadureceriam e criariam um algoritmo capaz de sustentar uma possível resposta tornando-os capazes de compreender mais facilmente a formalização da situação proposta com a condução do professor por meio do uso das similaridades e diferenças dos caminhos percorridos.

Espera-se, então, que o aprendizado tenha sido alcançado e mais um degrau tenha se desenvolvido no conhecimento, ou seja, que uma base sólida tenha se estabelecido. Assim, a fase da Prova é o momento em que a “beleza estética” da disciplina entra em ação com a mostra de uma argumentação lógico-dedutiva mediante a precisão na definição e cuidadoso uso da linguagem técnica.

O modelo geral que é alcançado, conforme Soares (2014), pode ser uma fórmula para solucionar um problema que necessite de análise quantitativa e solução numérica, ou uma função para determinação de um gráfico no sistema cartesiano que represente as variações entre as grandezas envolvidas.

#### *2.6.4 Prova*

A prova é, portanto, consoante Alves (2011), a fase em que a dinâmica pedagógica do professor influenciará na retenção do novo saber, havendo a revisão e as verificações de elementos que poderiam ter causado alguma incompreensão.

A Prova é a etapa na qual o professor sistematiza as respostas dos alunos, mostrando e discutindo as etapas redundantes. Além disso, o docente pode simplificar, sofisticar ou ainda generalizar a situação contextualizada inicialmente formulada e, por fim, validar as respostas, elaborando o seu modelo de resultados baseados no conhecimento científico e no caminho encontrado pelo estudante.

Após ser detalhada a definição dessa fase, faz-se necessário esmiuçar as ações inadequadas nesse momento sob o risco de desconfigurar a Fase da Prova.

Ao mostrar somente a resposta, o professor negligencia a explicação do conteúdo científico e impede que haja um elo com as soluções expostas pelos alunos.

Se forem introduzidos conceitos além daqueles necessários ao aprendizado da situação proposta, estaria ocorrendo certa imprudência, pois não existiria certeza de que os alunos poderiam compreender o que foi explanado.

Ao solicitar que os alunos, diante do que foi apresentado na solução, pesquisem se suas respostas estão corretas, pedir para que ele, que acertou, exponha mais detalhadamente a sua solução ou, até mesmo, não realizar a explicação por falta de conhecimento sobre o assunto, o professor está agindo de modo imperito, o que não se admite na Sequência Fedathi, uma vez que, para conduzir toda a sessão, é de suma importância o pleno domínio do conteúdo por parte do docente. No caso específico da Matemática, por exemplo, Ávila (2006) assinala que enunciar

e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor ou estudioso da matemática; e não é admissível que tal pessoa sinta-se deficiente em demonstrações.

A palavra “Prova”, usada na Sequência Fedathi, possui a função de caracterizar uma fase em que o professor explicará o problema exposto em linguagem formal, relacionando com as soluções dos estudantes e os caminhos percorridos, pois nem sempre será provada uma afirmação, ou seja, o referencial para dosar este momento é a Tomada de Posição e, claro, o objetivo do docente para determinada sessão didática.

Caso a Tomada de Posição seja uma questão objetiva, é natural esperar dos alunos uma só resposta que será validada ou não no momento da Prova. Há casos em que o docente propõe um teorema, daí os estudantes em suas soluções apontarão as possíveis demonstrações e, na fase da Prova, será apresentada a solução do algoritmo mais bem otimizada. Essa observação diferencia a semântica das funções da palavra prova, ou seja, na Sequência Fedathi, quando essa palavra for usada para identificar a fase, terá o significado de retomar as discussões realizadas sistematizando o conteúdo atrelado à Tomada de Posição. Em disciplinas como a Biologia, por exemplo, a Tomada de Posição pode ser discorrer sobre as fases da embriogênese, de sorte que se espera na Prova que o professor exponha uma resposta discursiva única; sabe-se, contudo, que disciplinas como História em que o caráter crítico predomina e múltiplas respostas podem ser expostas, então a fase da Prova poderá ser uma discussão sobre as soluções expressas pelos alunos, não determinando resposta única.

O objetivo da fase da Prova é estabelecer interações cognitivas do que foi pensado e exposto (conjecturado) pelos alunos com as verdades explicadas pelo professor, almejando o máximo aprendizado possível.

Para exemplificarmos alguns modelos de prova, é essencial que já esteja internalizada a ideia de que a Sequência Fedathi pode ser utilizada em diversas áreas do conhecimento.

De acordo com Soares (2014, p. 59),

Outro ponto relevante para esta etapa diz respeito à resignificação das tomadas de posição, realizadas no início da Sequência Didática. Este processo é importante para os alunos, na medida em que confrontam os saberes organizados ao longo do processo, e também para o professor, tendo em vista que pode refletir sobre sua postura nas intervenções realizadas, bem como sobre o alcance ou não de seus objetivos.

Com efeito, a exposição nessa fase permite ao professor refletir se suas intervenções diante das manifestações dos alunos foram coerentes e, assim, minimizar as possíveis arestas que tenham ficado no aprendizado.

Essa fase encerra a Sequência Fedathi? De acordo com Souza (2015, p. 68), existe ainda outro nível após a vivência da sequência: “Essa atividade consiste na análise do professor sobre seu próprio trabalho, que pode servir para a organização de outras aulas ou cursos...” O autor denominou esse nível de análise, remete à reflexão crítica do que foi vivido pelo professor e contempla a avaliação do desempenho dos alunos e análises sobre o cumprimento ou não dos objetivos outrora traçados.

Em Sousa (2013), realizou-se uma pesquisa sobre o ensino de Física com a utilização da modelagem matemática computacional aplicada à Educação com o *software Modellus*, tendo como sujeitos diversos professores. Após a aplicação de algumas sessões da Sequência Fedathi, foi possível chegar a algumas conclusões sobre a alternativa potencial da modelagem e simulação matemática por intermédio do computador para o ensino da Física.

Isso traduz até onde a Sequência Fedathi se estende, ou seja, sua amplitude não se restringe somente a sua aplicação, mas seus resultados podem repercutir no âmbito de pesquisas futuras.

## **2.6 De Fundamentos da Sequência Fedathi à função de categorias**

Os fundamentos representam as principais ferramentas de que o professor se empodera para vivenciar em sua prática diária a metodologia Sequência Fedathi; não somente durante as aulas, mas como um propósito de comportamento contínuo.

Ante tal premissa e perante a importância dos fundamentos da Metodologia de Ensino Sequência Fedathi e subsidiários da Metodologia de Pesquisa vivenciada no decorrer da experiência com o grupo de estudos permeando toda a fundamentação teórica do trabalho e conduzindo a pesquisa, foram, então, atribuídas aos fundamentos as qualificações de categorias principais da pesquisa, servindo como base de análise dos dados e informações obtidas.

### ***Categoria 1: Pergunta***

Este fundamento foi classificado por Souza (2015) em esclarecedoras (verificam o que e como os alunos estão aprendendo causando uma reflexão com o intuito de relacionarem com outros conteúdos e dar subsídios ao professor para verificar o entendimento do discente), estimuladoras (objetivam direcionar o aluno à descoberta, estimulando-o a criar outros questionamentos que possam leva-lo em direção ao seu objetivo) e as orientadoras (são as que suscitam reflexões entre o caminho em que estão percorrendo e o resultado a ser encontrado).

As perguntas percorrem a metodologia desde o *Plateau* até a vivência da prova.

### ***Categoria 2: Pedagogia Mão no bolso***

O principal objetivo deste fundamento é propor ao professor e ao aluno que reflitam, usem a criatividade e raciocinem com base nas hipóteses dadas na fase da Tomada da Posição (SANTANA, 2018). Assim, o contexto antigo de sala em que o docente respondia diretamente às perguntas dos alunos muda e, em contraposição, a isto surge agora a imagem do docente que instiga seus discentes a chegarem às próprias respostas.

Esta categoria foi encontrada em todas as partes do método científico elevando-se assim, a esta denominação, uma vez que ultrapassou o senso comum de postura para o conceito mais amplo de Pedagogia.

### ***Categoria 3: Mediação***

Nas vivências da SF, um importante fundamento da relação de ensino e aprendizagem é a mediação, pois o professor se comporta como um gestor e observador, em alguns momentos voluntários e em outros a partir da necessidade dos discentes, mas sempre com uma intenção investigativa. Portanto, Pinheiro (2018, p.45) reforça

Pela mediação, o mediado adquire os pré-requisitos cognitivos para aprender, beneficiar-se da experiência e conseguir modificar-se. A mediação deve ser um processo deliberado, intencional, que estimula a busca do significado.

Ressalta-se que a vivência na SF tem seu ponto central na mediação, pois o docente se insere em uma ação imersa no ato de investigar, motivando e suscitando o conhecimento estabelecido pelos alunos.

### ***Categoria 3: Contraexemplo***

Este fundamento, prioritariamente, tem suas ocorrências na vivência da Maturação e Solução, possuindo o objetivo de desequilibrar o aluno com o intuito de fazê-lo refletir a respeito de algo que incida a uma situação errônea e, com base nisso, criar estratégias a fim de que direcione suas ações para o caminho correto.

Os fundamentos, de algum modo se complementam e possuem pontos de convergência, como o contraexemplo a pergunta. Seria uma pergunta o contraexemplo? Sousa (2015) responde que sim, pois pode ser caracterizada com o fim de negar uma afirmação ou pergunta, podendo ser realizado como uma forma de pergunta, sugestão ou indicação de uma ação a ser realizada.

É provável a existência de vários erros, que devem ser cautelosamente ajustados pelo professor. Como acentua Souza (2013), os contraexemplos são oportunos para esclarecer os vácuos nas soluções inadequadas. Deve ficar claro para o aluno que o modelo ora apresentado deve satisfazer não apenas um problema, mas, diversos. Coletivamente, o professor deve ensejar momentos e condições aptas à seleção dos modelos que possam viabilizar a solução procurada.

Presume-se, então, contraexemplo como a ação de o professor intervir à evocação do aluno e, em resposta, dar subsídios para que o discente possa validar sua afirmação genérica ou por uma situação específica retratar e redirecionar suas afirmações.

#### ***Categoria 4: A concepção do erro***

Tal concepção se confunde com situações negativas nas ações do aluno, mas torna-se o principal meio de aprendizagem caso haja reflexões sobre os resultados inesperados.

O docente, inegavelmente, deve propiciar situações em que aluno possa obter resultados inesperados no processo de resolução do problema e, por meio deste ato criar condições para sua reflexão, não dando a resposta correta, muito menos executando pelo discente.

Quando o docente resolve alguma situação que deveria ser função do aluno executar, então incide sobre o “efeito topázio” e, neste caso, certamente, os resultados da vivência não serão os esperados, pois os alunos não se desestabilizaram em refletir estratégias que pudessem elucidar a situação do erro.

### **2.7 Metodologia de ensino e de pesquisa Sequência Fedathi**

Analogamente à metodologia de ensino que foca no professor, a metodologia de pesquisa está direcionada para o pesquisador com o papel de mediador, de modo que os princípios da SF serão observados sob a óptica de um método científico.

Caso o pesquisador salte da etapa do problema para os resultados, desvalorizará toda a experimentação, assim como o professor que apresenta o problema e em seguida já resolve incorrendo no risco de gerar resultados equivocados na pesquisa e no “suposto” aprendizado do conteúdo por parte do aluno.

Além disso, assim como ocorre no método de ensino no tocante a não incidir parcialmente nas ações dos alunos no intuito de direcioná-los arbitrariamente para a sua solução “correta”. Portanto, o docente não pode incidir nas decisões que devem ser tomadas pelo aluno, a não ser que sejam para fins de reflexão e com o intuito de tomar as próprias ações cognitivas. Souza (2010, p.54) ratifica a errônea prática docente como

Tencionando que seus alunos obtenham bons resultados, o professor tende a facilitar-lhes a tarefa de variadas maneiras, como, por exemplo, fornecendo-lhes abundantes explicações, ensinando pequenos truques, algoritmos ou técnicas de memorização, ou mesmo indicando-lhes pequenos passos no problema. Atitudes como essas realizadas pelo professor foram denomina das por Brousseau como “Efeito Topázio”.

Subsidiariamente, o efeito topázio pode indicar a imparcialidade com a qual o pesquisador deve se comportar diante de sua pesquisa, não intervindo de modo a abrir um caminho necessariamente direcionado aos resultados esperados.

A Metodologia Sequência Fedathi não pode ser direcionada pela ação do pesquisador com opiniões ou práticas científicas que não sejam deliberadamente controladas.

A incidência do erro, entretanto, também pode ser comparada aos resultados de análises inesperados, porém carregados de conclusões que possam definir, ainda, argumento válidos de uma pesquisa científica. Eis a relação entre o pesquisador e tudo o que cerca uma pesquisa científica: a mediação.

Se o professor possui o objetivo de suscitar investigadores, o pesquisador é o próprio investigador que deve estar atento a cada etapa do método científico como um farejador e preocupado com seu comportamento diante da pesquisa.

O comportamento da “pedagogia mão no bolso” é bem fundamentada quando não se responde às questões de pesquisa por processos que não sejam por uma devida e científica análise de dados sob o risco de o pesquisador dar as próprias respostas baseadas no senso comum.

### CAPÍTULO 3 – TAXAS DE VARIAÇÃO

Mesmo sendo recente no Brasil, há muita pesquisa sendo realizada sobre Educação Matemática no nível superior e, em particular, é um consenso, por parte de muitos docentes, de que suas expectativas, em geral, não sejam correspondidas sobre os conhecimentos prévios dos alunos. Diante disso, Iglioni (2009, p. 12) ressalta que há a necessidade de uma reflexão mais profunda acerca do tema e que contemple:

[...] a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceitos de Matemática avançada; expandir a faixa etária das teorias da aprendizagem para a aquisição de conceitos complexos da Matemática; investigar abordagens de ensino que favoreçam a apreensão dos conceitos, entre outros temas.

Desse modo, o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) possibilita ao aluno a evolução do Pensamento Matemático Avançado e constitui uma das disciplinas consideradas mais difíceis pelos discentes e, além disso, é indiscutível o alto percentual de estudantes do nível superior cujo desempenho na aprendizagem da Matemática, em especial de Cálculo, tem deixado muito a desejar, segundo Iglioni (2009).

A disciplina CDI é lecionada desde o 3º semestre no Curso de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú é onde começa uma “batalha” entre o professor que quer dar aula com as definições e teoremas mais abstratos possíveis e o aluno com deficiência nas disciplinas básicas e já sofre as primeiras barreiras de compreensão de ensino de cálculo.

Segundo Fischbein (1994, *apud* ALVES, 2011), é imprescindível conhecer como os alunos resolvem os mais variados tipos de problemas matemáticos, ou seja, isso significa quais dificuldades e a origem delas, os erros sistemáticos e assim por diante. O abismo entre a proposta de ensinar o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral e alcançar o objetivo de assimilação por parte dos alunos requer muito mais do que simplesmente repassar os conteúdos, mas sim buscar estratégias que possam promover a reflexão dos estudantes, amenizando assim o aspecto mecânico que acompanha as atividades da disciplina.

Nesse caso, o diferencial que pretendemos propor para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral reside na ênfase concedida ao papel do professor nesse processo, de modo que as atenções não fiquem restritas às dificuldades do conteúdo em si. Por conseguinte, buscase, com a Sequência Fedathi, explorar os campos da mediação docente com seus entraves e possibilidades.

Assim, restringindo ainda mais o conteúdo proposto no ensino da disciplina CDI, este capítulo propõe um estudo detalhado das sessões didáticas ocorridas, envolvendo o conteúdo de taxas relacionadas com o uso de uma metodologia própria: Sequência Fedathi, com origem na descrição das categorias principais propiciadas pela análise de dados.

Será tratado neste capítulo o teor das noções intuitivas e formais do assunto de taxa de variação, o qual teve uso na aplicação com os sujeitos da pesquisa no grupo de estudo.

Embora o principal objeto matemático implicado nesta pesquisa seja Taxas Relacionadas, é reforçada neste texto a relação dessa ideia com os demais conceitos-chave de CDI. Enfatiza-se, ainda, que o ensino das outras noções, na ordem em que é geralmente estruturado, deve preparar o terreno para o ensino desse conteúdo de derivadas.

A ideia de limite pode não ser tão razoável de se compreender intuitivamente, pois, conforme Cornu (1991), já envolve um raciocínio tipicamente de Matemática avançada considerando definições de aproximações e continuidades. Alguns livros de CDI baseiam o seu conteúdo nessas noções intuitivas, utilizando uma linguagem não tão formal e que aproxime o conhecimento prévio dos alunos.

Surge, entretanto, um problema: se é necessário formalizar a definição de limites, quais as estratégias possíveis para que isso aconteça?

O conteúdo de taxas relacionadas é expresso diferentemente pelos livros tradicionais e os modernos. Aqueles não introduzem um novo conceito, mas sim utilizam a derivada para a apresentação de problemas de taxas relacionadas, enquanto estes criam até um tópico dentro do assunto de derivadas, como se fossem ajudar os alunos no aprendizado do conteúdo.

O livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 1, de Leithold (1994), destaca um tópico no capítulo de derivadas sobre taxas relacionadas e conceitua como sendo um problema que relaciona variáveis envolvidas por meio de uma relação intrínseca com a variável tempo.

O autor ainda indica um percurso para a resolução com o formato de um guia: desenhar a figura que representa a situação, definir as variáveis e perceber se dependem do tempo, escrever os fatos numéricos de acordo com as variáveis e suas derivadas, obter uma equação que envolva as variáveis que dependam do tempo, derivar ambos os lados da equação em relação ao tempo  $t$ , por fim, substituir os valores das quantidades dadas na equação em termos da quantidade desejada.

Essa abordagem pode tornar-se inócua, já que está fornecendo uma regra de resolução desses tipos de problemas, contrariando o fato de quaisquer situações sobre esse tipo

de taxas relacionadas poderem ser resolvidas com interpretação e os conceitos de derivadas. Nota-se, ainda, que a perspectiva de uma linguagem técnica sobre o assunto taxas relacionadas é necessária e sua falta pode dificultar o entendimento da definição do conteúdo.

Já em Thomas, Hass e Weir (2012), no livro *Cálculo*, Volume 1, define-se superficialmente como qualquer equação envolvendo duas ou mais variáveis que sejam funções deriváveis da variável tempo com o intuito de relacionar as taxas correspondentes.

Nos livros modernos utilizados nas instituições de nível superior, destaca-se a apresentação com a descrição formal de taxas de variação em Guidorizzi (2001, p.199), na obra *Um Curso de Cálculo*, Volume 1

Seja a função  $y = f(x)$ . A razão  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  é a taxa média de variação de  $f$  entre  $x$  e  $\Delta x + x$ . A derivada de  $f$ , em  $x$ , é também denominada taxa de variação de  $f$ , em  $x$ . Referir-nos-emos a  $\frac{dy}{dx}$  como a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$ . Seja  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ; para  $\Delta x$  suficientemente pequeno,  $\Delta y \cong f'(x) \Delta x$ . Assim para  $\Delta x$  suficientemente pequeno, a variação  $\Delta y$  em  $y$  é aproximadamente  $f'(x)$  vezes a variação  $\Delta x$  em  $x$ .

Qual a dificuldade, portanto, de apontar desse modo a definição de taxas de variação? Quando se usa o conceito mais rígido de derivadas? A linguagem técnica é necessária para que os alunos compreendam o conteúdo intrinsecamente e, portanto, deve ser estimulada pelos professores no decorrer das explicações, apresentações das questões e avaliações. O uso de termos intrínsecos à área não pode ser confundido com o excesso de símbolos desnecessários como  $y = f(x)$  no trecho ora acima, pois pode interferir e atrapalhar o entendimento do conteúdo.

De acordo com Stewart (2006), em *Cálculo*, Volume I, em uma situação de taxas relacionadas, deve-se computar a taxa de variação de uma grandeza em termos de taxa de variação da outra e, com base nisso, encontrar uma equação que relacione as duas grandezas, usando possivelmente a regra da cadeia ou derivação de função dada implicitamente.

É mostrada uma estratégia de resolução e adverte sobre o cuidado que se deve ter em não substituir precocemente a informação numérica fornecida. Nesse caso, há ainda uma dica sobre a maneira de utilizar os dados, eximindo o aluno de ter suas soluções da situação dada.

A abordagem de Simmons (1987) em *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 1, sobre o conteúdo de taxas relacionadas, é concebida por meio da exposição e resolução de questões. Ainda segundo o autor, os problemas que envolvem quantidades físicas ou geométricas em função do tempo possuem sua derivada denominada taxas de variação da

quantidade. Nesse caso, quando houver uma relação entre quantidades variáveis, então suas taxas de variação também se relacionarão.

O assunto é encerrado com um resumo, descrevendo as lições aprendidas com os exercícios: fazer um esboço da situação a ser estudada e inserção das quantidades numéricas que sejam fixas no decorrer do problema. Logo após, denotam-se com letras as variáveis dependentes que variam com o tempo e procura-se uma relação geométrica ou física e imediatamente se deriva em relação ao tempo com o objetivo de relacionar suas taxas de variação e assim calcular a que é procurada.

Essa abordagem segue um mesmo padrão das demais obras: um novo conceito de derivadas aliado a um tutorial de resolução de questões, implicando mais informações para serem absorvidas e reduzindo a vontade de amadurecimento do problema por parte dos alunos.

Na obra *Cálculo*, Volume I, de Anton, Bivens e Davis (2007), é expressa uma estratégia para resolver problemas de taxas relacionadas, cujo objetivo é encontrar uma taxa em que certa quantidade está se relacionando com as demais. Salienta, ainda, para o cuidado em não serem substituídos os valores antes de derivar a expressão relativa à questão indo ao encontro de Stewart (2006).

No livro *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração* de Flemming e Gonçalves (2006), as autoras abordam o assunto de taxas relacionadas, fazendo uma conexão com os conteúdos da Física, e definem a derivada como uma taxa instantânea de variação, mostrando a importância do conteúdo em aplicações em várias ciências.

Os livros mais modernos utilizam outra linguagem para explicar o conteúdo de taxas relacionadas e, em geral, não relacionam com uma definição formal do conceito de derivadas. Percebe-se nas obras pesquisadas que a explicação acontece no decorrer dos problemas, mas sem rigor técnico próprio da Matemática, no tocante à linguagem e uso do conceito de derivadas, e necessário ao aprendizado.

### **3.1 Exemplo de como não fazer**

A continuação do estudo sobre taxas relacionadas se caracterizará com a análise de uma sessão didática, a qual investigou a nossa prática num contexto de sala de aula com uma situação-problema. A intenção era utilizar a metodologia Sequência Fedathi, porém seus princípios não foram adequadamente aplicados, como será visto adiante. Para isto, são analisados os pontos divergentes entre a metodologia utilizada e a proposta SF, concluindo que

o docente agiu como um “bom professor” ou um “professor bom” conforme será abordado no capítulo 6.

Para o desenvolvimento deste texto foi realizado um levantamento bibliográfico inicial da literatura de nível superior – Leithold (1994), Thomas, Hass e Weir (2012), Guidorizzi (2001), Stewart (2014), Simmons (1987), Anton, Bivens e Davis (2007) e Flemming e Gonçalves (2006) - com o intuito de analisar a visão desses autores sobre o conteúdo de Taxas Relacionadas. A prática foi realizada no dia 22/04/2015 e teve como sujeito um grupo de oito alunos no Centro Universitário Christus, escolhidos por serem da turma do primeiro semestre do curso de Engenharia de Produção, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I.

Para o desenvolvimento da aula, eram necessários os conhecimentos prévios - figuras espaciais, definição de derivadas e semelhança de triângulos - porém o professor não realizou a fase do *Plateau* por conhecer a turma e não achar necessário, uma vez que dava aula semanalmente.

A Tomada de Posição foi iniciada com a seguinte situação-problema descrita no quadro 3.

#### Quadro 3 – Problema da sessão didática de Taxas de Variação

Enche-se um reservatório, cuja forma é de um cone circular reto, de água a uma taxa de  $0,1\text{m}^3/\text{s}$ . O vértice está a 15m do topo e o raio do topo é de 10m. Com que velocidade o nível  $h$  da água está subindo no instante em que  $h=5\text{m}$

Fonte: Guidorizzi (2001, p.203)

Logo em seguida, deu-se início à etapa da Maturação em que alguns alunos começaram a anotar os dados e a elaborar o desenho relativo à questão. Eles ainda tiveram dúvida em relação ao sólido a ser desenhado e confundiram o cone com o cilindro.

Um aluno se ofereceu para descrever a situação na lousa e desenhou o cone na situação usual, ou seja, com a base para baixo. Isso não provocou nenhum incômodo com o restante da turma, mas em seguida o professor indagou: o que significa estar a 15 m do topo? Qual o papel do topo? (Perguntas que direcionaram a compreensão dos alunos não partindo deles).

Imediatamente, perceberam que a figura desenhada não correspondia ao que o problema sugeria. O aluno na lousa apagou e refez, então, corretamente. Em seguida, os dados da questão foram anotados na lousa e a turma começou a pensar em como resolver, porém, sem suscitar nenhuma ideia inicial para a resolução.

O professor, sem o questionamento dos alunos, perguntou: o que significa encher um reservatório a uma determinada taxa? Alguns disseram haver relação com a derivada, já que representava uma taxa de variação; outros exprimiram que necessitava a fórmula do volume do cone. Ao escreverem a taxa, colocaram  $V = 0,1\text{m}^3/\text{s}$ , mas, em seguida, retificaram  $dV/dt = 0,1\text{m}^3/\text{s}$ . No momento em que lhes foi feita uma pergunta sem uma demanda prévia, o amadurecimento sobre o entendimento do caminho a ser percorrido foi retirado dos alunos.

A pergunta consiste em: “Com que velocidade o nível  $h$  da água está subindo no instante em que  $h = 5\text{m}$ ?” O que ele está verdadeiramente pedindo? Como resposta, alguns não sabiam o que dizer e estavam confusos com o fato de ser dado  $h = 5\text{m}$ .

Percebe-se que, até então, o professor “orientou” a participação dos alunos, embora sem dar sua opinião, resposta ou dizer se alguém errou, mas conduzindo o aluno pelo pensamento dele julgado como correto para a resolução do problema e não os deixou refletir sobre suas ideias.

O docente, ao motivar com os seguintes questionamentos - quando a água escoar, o nível está aumentando? Esse nível aumenta com que velocidade? Quais as unidades de medida da função velocidade? Há a mudança de velocidade? - excluiu a possibilidade de o aluno tentar obter sozinho essas reflexões indo de encontro à Sequência Fedathi.

A SF é clara ao descrever na etapa da maturação como o momento em que o aluno deve refletir sobre quais caminhos deve percorrer para chegar ao resultado, não devendo haver interferência com a ação do professor e este só podendo intervir, caso haja alguma dúvida por parte do aluno.

Os alunos, mesmo tendo compreendido do enunciado que a velocidade pedida é  $dh/dt$  (taxa de variação da altura em relação ao tempo), não obtiveram isso de suas reflexões, mas sim da condução realizada pelo docente. Após o entendimento da situação, o desenvolvimento da resolução foi sendo “mediado” pelo docente, de modo que ele desse as perguntas-chave para que os alunos prosseguissem no desenvolvimento da questão.

Retomando o problema, ficaram pensativos com a intervenção do professor: “- O que significa matematicamente  $0,1\text{ m}^3/\text{s}$ ?” Responderam que a cada segundo aumenta  $0,1\text{ m}^3$  de água no reservatório, mas, como relacionar isso com derivada? Qual variável se relaciona com o volume? De pronto, tentaram lembrar-se da fórmula do volume do cone e recorreram ao professor que, utilizando a postura mão no bolso<sup>7</sup>, deixou-os pensar mais até lembrarem que o volume depende do raio da base do cone e de sua altura.

---

<sup>7</sup> Conceito da Sequência Fedathi em que o professor evita dar a resposta pronta ao aluno.

O professor se utilizou de um recurso da SF, mas, mesmo assim, suas perguntas influenciaram as respostas dos alunos que não se manifestaram naturalmente no decorrer da aula, ou seja, a Sequência Fedathi está sendo executada de maneira errônea.

Após essa conclusão, os alunos então indagaram se é possível relacionar raio da base e altura no cone. Se sim, como seria? Será que um desenho facilitaria a visualização? Poder-se ia relacionar ao mesmo tempo o volume com o raio e altura? Começaram com o desenho, mas não conseguiam relacionar altura e raio que não fosse por meio do Teorema de Pitágoras.

Mesmo sabendo que esse estudo era realizado com o Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável, alguns responderam que era possível relacionar o volume com duas variáveis. Então, já que eles estavam com essa afirmação, o professor investigou e mostrou um contraexemplo com o intuito de que eles derivassem o volume em relação ao raio e depois em relação à altura; daí disseram que bastava considerar a outra variável como constante, porém um deles disse: - “Como podemos considerar o raio constante se ele vai mudando com o aumento da água?!”.

As poucas indagações foram respondidas com alguns contraexemplos e aplicações, quando os alunos fizeram algumas perguntas, porém já existia a dependência da ajuda do docente em fazê-los pensar.

Um cuidado que deve existir na fase de Maturação é a necessidade de que o aluno deve se prover de todos os meios para chegar à resposta procurada, ou seja, perseguindo o caminho que um matemático percorreu para a criação de um saber matemático. Nesta prática, o docente não orientou somente um aluno ou um grupo, mas a turma toda foi sendo “manipulada” (conduzida e não mediada) para que eles chegassem às conclusões que o professor queria, sempre que ele fazia perguntas dando dicas de qual caminho o aluno deveria percorrer.

Os alunos, após discutirem entre si e passando para a fase da solução da Sequência Fedathi, chegaram a uma conclusão e expuseram a resolução da situação-problema.

Na fase da prova, o docente validou as conclusões oferecidas pelos alunos e discutiu os percursos pelos quais passaram e explicou alguns pontos que os alunos não falaram ou que não tenham ficado claros e formalizou resultados que foram trabalhados no decorrer da resolução do problema. Nesta etapa, segundo os princípios da Sequência Fedathi, o professor tem liberdade para fazer todas as perguntas que achar necessário para mensurar o quão o aluno aprendeu e se os passos que ele tomou foram conscientes.

É bom lembrar que a aprendizagem é uma elaboração individual e não coletiva (embora o trabalho em grupo possa facilitar ou atrapalhar, dependendo de seu estilo de aprender, ou seja, a introjeção é individual, própria de cada um).

Em razão da prática realizada, notou-se que o professor atingiu a falsa impressão de que tinha utilizado corretamente a Sequência Fedathi e de que os alunos tenham conseguido por méritos próprios chegar ao conhecimento desejado, que era o de resolver a questão proposta.

Essa aula anteriormente tinha o objetivo de expor as dúvidas dos discentes e resolver imediatamente os problemas, o que reduzia o trabalho mental e apenas repassava os conteúdos, mas, mesmo com essa condução do professor, os alunos não tiveram momentos de reflexão e sim apoio, sempre que tentavam tirar alguma conclusão.

No decorrer da prática, o professor não se comportou como coordenador de estudos e os alunos não assumiram a responsabilidade pelo seu aprendizado, ou seja, não houve a correta execução da metodologia Sequência Fedathi e, mesmo permitindo a aplicação de uma sessão didática de modo mais dinâmico, mais participativo, interativo, com os alunos assumindo uma postura proativa, o poder de reflexão foi mínimo. Ficou bem claro que a tomada de posição foi realizada com as perguntas pelo professor e não pelo aluno. Na Tomada de Posição e Maturação, o aluno pergunta, enquanto na prova o professor faz os questionamentos.

Um erro comum dos professores de Matemática ao utilizarem uma metodologia é a falsa impressão de que estão utilizando corretamente e com isso alcançando os resultados esperados, o que resulta na prática descrita. Isso mostra que investigar a própria prática possibilita ao docente protagonizar e potencializar seu desenvolvimento profissional e fornece elementos para a compreensão da cultura educacional.

Este estudo ofereceu um modelo de sessão didática de um professor que almejou realizar uma sessão didática com a metodologia da Sequência Fedathi no campo da instituição de nível superior, ou seja, analisou uma possibilidade com erros na execução de uma aula por intermédio de uma metodologia denominada Sequência Fedathi. Tal jeito de dar aula não é uma “receita de bolo”, pois as perguntas que os alunos farão ou conclusões que podem ser geradas nem sempre são as mesmas, bem como os conhecimentos prévios de cada turma e, em razão disso, o professor deve realizar um adequado planejamento para que possa conduzir corretamente o aprendizado a ser alcançado.

Mostramos, com efeito, outra vertente de como analisar os princípios que regem a Sequência Fedathi, analisando o que não deve ser feito, pois, embora tenha sido uma boa aula, os alunos não chegaram aos resultados esperados pelo seu esforço. Esperamos que mais

trabalhos como esses sejam desenvolvidos com suporte numa análise crítica do como não fazer uma metodologia e que contribua para a Educação Matemática no País.

### **3.2 Saber contido no conhecimento**

No decorrer das orientações com o prof. Hermínio Borges Neto, fomos desenvolvendo e amadurecendo os conceitos de saber (Aparato e Raciocínio) e conhecimento inicialmente oriundo das tecnologias digitais e formado pela tríade aparato, raciocínio e gambiarra (transposição).

O raciocínio é a ação direcionada ao aparato, ou seja, a pessoa atua cognitivamente sobre o instrumento, ou seja, a habilidade de transformar, representar e modelar uma dada situação-problema com o intuito de utilizar um instrumental desejado.

Mais importante do que instrumentalizar a pessoa é desenvolver o raciocínio e tornar o aluno apto a desenvolver a transposição. O saber é a capacidade de, ao possuir um aparato tecnológico, ter a capacidade de fazê-lo funcionar, porém há aqueles que também sabem utilizar esse funcionamento em outras áreas. A ação cognitiva é uma habilidade sobre o instrumento, mas não é somente mais isso que importa, e surge, então, a terceira variável, o conhecimento, capacidade de usar o saber em outras áreas distintas da sua.

A Matemática, portanto, serve para dar uma boa instrumentalização à pessoa para que possa dar raciocínio matemático a ser usado em outras áreas do cotidiano. Cardano dizia que havia duas categorias de pessoas: as que sabem (usam raciocínio adequado para um instrumento) e as que executam (tem conhecimento, sabem e aplicam em n lugares distintos), porém na atual conjectura apareceu outra classificação, que são os que criam, ou seja, pois só saber e executar com as novas tecnologias já não resolve todos os problemas.

O ato de transpor o saber para outras áreas ou, até mesmo, criando elos interdisciplinares pode ser também denominado “gambiarra”, definindo-se como resolver problemas complicados com saídas simples. O aluno deve ser proativo e não reativo. Há um processo lógico que dá suporte às tecnologias educacionais, que é o ato de saber, executar e criar. Dessa vez um sinônimo para o ato de criação é associado a gambiarra.

Os riscos devem ser transpostos por opções como perguntas, contraexemplos; assim é dado um aparato para o discente para que ele possa refletir sobre a ação.

Raciocínio matemático é a habilidade de transformar, representar uma dada situação em uma forma em que se possa utilizar o instrumental matemático, ou seja, controle

de operações em que se possa ter uma tomada de decisão. Enquanto isso, Raciocínio lógico matemático classifica e categoriza objetos com as mesmas características.

Para o contexto desta pesquisa, aplicamos o conteúdo matemático de Taxas Relacionadas, no qual existe todo um arcabouço de conteúdos matemáticos em que o aluno necessita utilizar para desenvolver as soluções dos problemas, ou seja, é aplicação de derivadas e outros conceitos na própria Matemática, e caberá ao aluno realizar a devida transposição para que o conhecimento seja adquirido.

Portanto, o início desta pesquisa preocupou-se em instrumentalizar o aluno com os conceitos necessários para que pudesse utilizá-los com situações concretas vivenciadas no assunto de taxas.

## **CAPÍTULO 4 - PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO (PMA)**

Este capítulo se preocupa em inserir o aluno em um processo de pensar matematicamente e não fornecer o produto final do pensamento matemático, o que vai ao encontro de um processo investigativo, juntamente com a “Pedagogia mão no bolso” substituindo a convicção do binômio, apresentar o conteúdo e responder às questões pela mudança de comportamento do professor e, por conseguinte, do aluno.

Em 1985, The International Group for the PME (Psychology of Mathematics Education) teve o objetivo de produzir uma obra com foco no Pensamento Matemático Avançado. Esse pensamento inclui todo o pensamento matemático dos últimos anos da escola básica até a Matemática axiomática formal, baseada na definição e prova. (HENRIQUES, 2010, p. 15).

Encontramos na literatura alguns autores que norteiam o sentido do “Pensamento Matemático Avançado” caracterizando vários aspectos dessa natureza, dentre os quais podemos citar Dreyfus, Tall, Sfard, Gray et al, Dubinsky, Domingos, Costa e outros.

Os autores Dreyfus (1991) e Tall (1991) afirmam que o PMA encontra-se na aprendizagem de vários conceitos matemáticos complexos que podem aparecer em diversos níveis de escolaridade, manifestando-se com maior incidência nos anos terminais do Ensino Secundário e durante o Ensino Superior. Dreyfus (1991) faz uma distinção muito tênue entre PME e PMA, considerando, que: “É possível pensar em tópicos matemáticos avançados numa forma elementar e pode ter-se pensamento avançado sobre tópicos elementares”

### **4.1 Aquisição do conhecimento matemático**

#### *4.1.1 Conceito Imagem e Conceito Definição*

Segundo Tall (2012, p.6) a expressão Conceito Imagem é usada para descrever a total estrutura cognitiva associada com o conceito, incluindo as figuras, processos e propriedades associadas. Variados estímulos podem ativar distintas partes do Conceito Imagem, desenvolvendo nele uma maneira na qual não faz uma coerência com o todo.

O Conceito Definição é expresso como a maneira pela qual as palavras foram utilizadas para definir aquele conceito. Um estudante pode aprender naturalmente ou significativamente e relacionado com o conceito. Também pode ser a reconstituição de uma definição.

Tall (2012, p. 17) assevera que a dificuldade na transição da Matemática pré-formal para a compreensão dos processos matemáticos mais formais requer a necessidade de ajudar os estudantes a obter *insights*. A se delinear, contudo, uma sequência lógica para o ensino de determinada ideia simplificando o trabalho pode, na verdade, dificultar o aprendizado, uma vez que as partes devem ser vistas também como um todo. Quando o estudante encontra cada parte do quebra cabeça ele forma um particular conceito imagem do contexto na qual esteja a variação da ideia formal.

Dreyfus (2002) caracteriza pensamento matemático avançado como uma série de processos de representação, visualização, generalização e outros, com o intuito de classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar - destacando-se a abstração e generalização.

Segundo Tall (2002), esse pensamento matemático já é trabalhado, porém em níveis elementares, não sendo aprofundados ou sem muita clareza, o que ocasiona uma transição entre o pensamento matemático elementar e o avançado, no momento em que descreve para definir, convence para provar, utilizando uma maneira lógica baseada em tais definições. Tall ainda afirma que esse pensamento envolve um ciclo de atividades a considerar desde o ato de modelar um problema para a pesquisa matemática até a sua formulação criativa de conjecturas, concluindo com a prova.

Dois conceitos importantes para compreender o Pensamento Matemático Avançado são os de representação e abstração. A representação, além de ter intensiva influência no aprendizado matemático, pode interferir na interação aluno e professor quando os dois possuem representações mentais diferentes sobre determinado assunto. Boa compreensão matemática significa rica representação de conceitos, exemplos, contraexemplos, aplicações e outros (DREYFUS, 2002). Essa representação pode não ser consistente nos alunos, uma vez que ao formular o problema de outra maneira pode lhes tirar a capacidade de resolução. Além disso, há uma dificuldade por parte dos alunos em selecionar e escolher as representações que ensejam os resultados esperados para determinado problema.

A representação faz parte, também, do pensamento matemático elementar, enquanto a abstração compõe processos envolvidos no pensamento matemático avançado, ou seja, o fato de o aluno conseguir realizar abstrações de situações matemáticas, então, alcançou um nível avançado de pensamento matemático.

Em se tratando do conteúdo matemático que este trabalho aborda, Tall (1994) em suas pesquisas, provou que as dificuldades entre as representações realizadas analítica e graficamente eram bem distantes para alunos do nível superior e, como possível causa, indicou

o trabalho rígido e inflexível de caráter técnico do docente em suas aulas. Então, quanto mais acessível for a linguagem e maior riqueza de representações de aspectos diferentes, mais promissor será o entendimento de um conceito.

Dreyfus (2002) conceitua abstração com seus prerequisites: a generalização e síntese; a generalização induz do particular, identificando aspectos comuns e expandindo domínio de validade, enquanto a síntese, compor partes que formem um inteiro, ou seja, formem uma entidade válida de conhecimento.

Em adição à síntese, é preciso o professor compreender que o aluno nem sempre possui a habilidade de síntese e possui o objetivo de criar possibilidades para que isso ocorra.

De acordo com Jansen (2011)

Há também uma necessidade cognitiva em paralelo: o pensamento de muitos matemáticos e alunos de matemática melhora se forem capazes de se colocarem mentalmente em uma representação particular, uma representação visual.

No momento da criação de possibilidades por parte dos alunos, faz-se importante a não interferência do docente, sendo atuante apenas caso seja interpelado, quando motivará os discentes por meio de perguntas, objetivando melhores representações visuais, para que, em conjunto com o conhecimento prévio, possam estabelecer nexos de causa entre o que foi instigado e o que já se sabe.

#### *4.1.2 Generalização e abstração*

Os termos generalização e abstração usam-se na Matemática para denotar processos nos quais os conceitos são vistos em um contexto mais amplo e, também, o produto desses processos.

Como exemplo, mencionamos a generalização para solucionar distância entre pontos em uma dimensão e em duas dimensões e abstrair desse contexto a noção de um vetor espaço.

A abstração é um objeto mental diferente definida por um conjunto de axiomas. Durante esse processo, existe um conflito nas propriedades dos exemplos em que os aprendizes sabem e as propriedades dos novos conceitos abstratos, os quais podem ser deduzidos da definição. Um período de reconstrução e conseqüente confusão é inevitável.

A generalização também pode ocorrer quando se quer uma fórmula geral para o cálculo de áreas de regiões não triangularizáveis. O professor inicia com a área de regiões

formadas por gráfico de funções de primeiro grau em determinado intervalo, formando quadrados, triângulos e trapézios; porém, em seguida, tem o objetivo de calcular um trecho da área de uma região limitada por uma parábola em um intervalo inculcando uma generalização da Soma de Riemann para o cálculo de áreas.

#### 4.1.3 Intuição e rigor

Os matemáticos, geralmente, não demonstram interseção dos conceitos de intuição e rigor, porém uma explicação intuitiva requer necessariamente de rigor. Tall (2012, p.14) afirma que a intuição é resultado do Conceito Imagem do indivíduo e, quanto mais educado ele é no pensamento lógico, mais conceitos imagens irão ressoar respostas lógicas.

Alguns autores classificam os mais variados tipos de intuição, tais como Poincaré e Fischbein. O último realiza a divisão entre primária (são aquelas desenvolvidas pelas pessoas naturalmente, independentemente de qualquer grau de instrução) e secundária (são as desenvolvidas como resultado de treinamento intelectual).

O desenvolvimento de uma intuição lógica refinada deveria ser o maior objetivo de uma educação matemática mais avançada.

Portanto, a natureza do PMA está intimamente relacionada com os processos cognitivos que dão suporte ao conhecimento matemático. Será visto a seguir como esses processos podem interferir na produção da prova matemática.

## 4.2 A Prova sob o ponto de vista do Pensamento Matemático Avançado

Alguns docentes pensam que apenas na disciplina Análise Matemática há a necessidade de entender meticulosamente uma demonstração, porém esse pensamento está errôneo, pois as disciplinas matemáticas permeiam uma série de provas das quais os alunos necessitam entender seus mecanismos. Por exemplo, na Teoria dos Números, quando se estuda divisibilidade, há a necessidade de não apenas entender como também treinar a prova da identidade de Bezout<sup>8</sup> para que se possa avançar no conteúdo.

E esse é um dos momentos mais delicados quando se estuda uma matemática avançada: a demonstração em que ocorre um profundo rigor. Isso provoca grandes dificuldades aos alunos até eles conseguirem familiaridade com esta maneira de apresentar os conceitos matemáticos.

---

<sup>8</sup> A identidade de Bezout afirma que dados “ $b$ ” e “ $c$ ” inteiros não ambos nulos, e seja  $d$  o seu máximo divisor comum. Então existem inteiros  $x$  e  $y$  tais que  $d = bx + cy$ . (QUEIRÓ, 2002)

Tall (1991) identifica, como última fase do PMA, a prova matemática que reporta à necessidade de um trabalho árduo de estímulo à atividade mental, para, então, relaxar, permitindo o processo de transporte do subconsciente. Esse processo desenvolve-se à proporção que as definições matemáticas vão se tornando complexas.

De acordo com Domingos (2003, p. 77),

A demonstração ao nível formal consiste, essencialmente, em rearranjar o conteúdo de um dado conjunto de afirmações envolvendo quantificadores para dar outro conjunto de afirmações com quantificadores. Estas afirmações estão relacionadas com definições de conceitos matemáticos formais onde certas propriedades dos conceitos são dadas e outras são deduzidas.

Muitos conceitos envolvidos em uma demonstração podem ser encontrados em um pensamento elementar, porém escolher o caminho a ser percorrido é que pode ser um complicador para o aluno que ainda não possui certa experiência matemática. O professor do nível básico já não consegue apenas mostrar uma fórmula. Por exemplo, o seno da soma de arcos na Trigonometria, que é provada por meio de uma construção geométrica e alguns argumentos algébricos, pois o processo cognitivo envolvido na demonstração já não é elementar, uma vez que possui características do Pensamento Matemático Avançado, como rigor e intuição.

#### *4.2.1 Síntese e análise*

A síntese começa com o ato consciente de juntar as ideias na fase inicial seguindo uma atividade mais intuitiva, na qual o subconsciente atua de modo recíproco entre o conceito imagem até uma força relacionar o conceito à consciência, ou seja, há a necessidade de juntar com o intuito de formar um bloco inteiro. Esse inteiro possui uma personalidade matemática quando as partes estão relacionadas somente em uma entidade.

Podemos exemplificar a síntese no conteúdo de limites quando o professor interpela o aluno no tocante aos limites laterais, ou seja, o conceito de limites já foi dado em aulas anteriores, de sorte resta saber se o discente estará apto a unir as ideias outrora mostradas para, intuitivamente, com o conceito imagem, realizar a integração desse conceito à consciência.

Na análise, a atividade da consciência é mais lógica e organiza as novas ideias em um raciocínio, refinando e dando precisão às deduções. Neste caso, a ordem lógica para que se possa entender limites laterais segue rigorosamente os conceitos iniciais sobre limites de existência e unicidade.

No desenvolvimento do levantamento bibliográfico, notamos que a generalização e a síntese são dois processos, que aliados à representação, constituem o alicerce para o desenvolvimento da abstração, uma das precípuas finalidades do PMA. Essas ferramentas são estudadas nos diversos ramos da Educação Matemática, motivo de sua relevância em ser estudada.

Ficou evidenciado no texto que o fenômeno da atividade matemática é englobado pelo Pensamento Matemático Avançado, contemplando desde a situação, passando pelo levantamento de ideias e estratégias, até encontrar a formalização por meio de uma representação Matemática formal. Essas ideias, quando estudadas pelos docentes da área de matemática, podem sugerir uma mudança de comportamento no próprio ato de ensinar, enquanto, para os alunos, no modo de aprender.

Então, um estudante sem o aporte de um professor que possua um certo domínio nos estudos sobre algumas características do Pensamento Matemático Avançado pode não estabelecer inicialmente uma abordagem formal, ou seja, um fenômeno significativo, que pode revelar falta de conhecimento sobre o assunto ou a experiência do aluno. Para superar isso, Tall (1991) acentua necessitar de um início com conjecturas e discussões para produzir significado e refletir sobre definições formais e de construir o objeto abstrato, cujas propriedades são somente aquelas que podem ser deduzidas de uma definição.

Esse momento de transição, em que o aluno depara uma nova estrutura de conhecimento, pode causar uma simples expansão do conhecimento cognitivo ou, até mesmo, em casos em que há conflitos cognitivos, pode requerer uma reconstituição mental.

Por fim, entendemos que o propósito de gerar um modelo matemático não significa apenas reproduzir seu algoritmo formal, porém deve haver um processo de reflexão em que o aluno possa ser desequilibrado, propiciando a reconstituição do objeto de conhecimento.

### **4.3 A emoção aliada à cognição**

A Matemática afeta e é afetada pelas emoções, Tall (2013) argumenta, pois em um extremo está o prazer de ter a vontade para solucionar um problema complicado, porém de outro, está a ansiedade ou impaciência de ser incapaz de fazer matemática sob pressão ou mesmo de executar Matemática como um todo. Eis os sentimentos que podem ocorrer no momento da vivência da Tomada de Posição, em que nas sessões didáticas realizadas na experimentação ficaram evidentes os comportamentos diversos dos estudantes quando lhes era apresentado o problema.

Tall (2013) aborda, no entanto, as possíveis fontes destas emoções, já que pesquisas direcionadas para a ansiedade matemática, ou seja, a vontade de encontrar a solução ou a volatilidade de sequer realizar tentativas pela falta de estímulos ou de recursos necessários para progredir matematicamente tal qual a necessidade de conhecimentos prévios. As origens possíveis para essa emoção podem estar relacionadas a atributos pessoais de confiança ou insegurança; as atitudes de pais, professores e colegas; ensino inadequado; ou preparação rudimentar para provas. Neste estudo, entretanto, de algum modo as variáveis citadas serão consideradas, mas o objetivo principal é mostrar o quão o comportamento do professor na mediação desde a vivência da Tomada de Posição até a Prova pode influenciar na relação do aluno com a Matemática com origem no trabalho investigativo.

Para começar, o principal propósito do *Plateau*, que é dar estabilidade ao ponto de partida, pode encontrar alguns obstáculos, uma vez que nem todos os alunos estão com o pensamento matemático equilibrado para prosseguir o ato de investigação. Tall (2013) solidifica essa ideia ao acentuar que o meio para o desenvolvimento a longo prazo do pensamento flexível não é o mesmo para todos, mas isso não impede que atividades sejam realizadas com o intuito de congregarem conhecimentos que os alunos utilizarão na busca pela solução do problema.

Com efeito, Tall (2013) argumenta, ainda, uma bifurcação para possíveis situações que externam tanto sentimentos desejados como os indesejados no momento da solução de um problema, já que sucessivas experiências na Matemática envolvem os mesmos aspectos de suporte que encoraja generalização e aspectos problemáticos impeditivos da progressão. Se podem ser ocasionados por mesmos fatores, então como transformar os estímulos em reações positivas para os alunos? Na vivência da Maturação, caberá ao professor o acompanhamento dos alunos e não somente a divisão da aula em duas partes: apresentação e resolução dos problemas. Será nas reflexões e nas perguntas esclarecedoras, estimuladoras e orientadoras que o discente mostra o estado emocional em que se encontra perante àquela situação proposta pelo método de ensino.

Assim, como a “Pedagogia Mão no bolso” pode desafiar positivamente o aluno a criar mecanismos que o ajudem a pensar matematicamente, também poderá gerar um processo de recuo cognitivo, mas que poderá ser contornado pelo docente com outras estratégias como o uso de mais exemplos, contraexemplos e do estímulo à interação dos próprios pares. O *Plateau*, de modo bem peculiar, deve ser considerado também sob os aspectos emocionais, pois cada aluno já traz consigo experiências prévias estabelecidas em sua história de vida que os fazem se comportar diferentemente a cada estágio do aprendizado.

Em seu texto, Tall (2013) trata essa maneira de visualizar o tratamento dado pelos alunos à Matemática como nova ideia aos matemáticos, desempenhando um papel importante, tanto na alegria como negativo sentimento de ansiedade. Como, então, desempenhar um mecanismo em que considere as emoções dos alunos de nível superior num curso de Matemática? A mediação docente vem à tona responder a essa pergunta. Na primeira sessão didática do grupo de estudos, o docente pediu para que todos se apresentassem e falasse o motivo de terem se inscrito com o intuito de estudarem alguns tópicos de Cálculo Diferencial e Integral. Todas as respostas transportaram uma carga emocional que, caso pudesse ser mensurada, passariam por todos os níveis, pois houve comentários de alunos que tiveram aula com professores que sequer ficavam de frente para eles, já que somente ficavam escrevendo na lousa até comentários de que amavam o conteúdo, mas nunca conseguiram aprender.

As reações emocionais tiveram efeito a longo prazo no desenvolvimento pessoal desses alunos, as quais fortaleceram alguns a estabelecer autoestima e congregar a capacidade de fazer uma matemática belíssima sob seu ponto de vista, porém outros tiveram seu desenvolvimento matemático maculado, podendo ter até avançado em curso de nível superior com processos sem significado, tornando-o infeliz, ansioso para terminar as disciplinas e se ver distante dessa matemática ou, até mesmo, reprovando sucessivas vezes até o trancamento ou desistência do curso.

Em razão desse momento, o docente mediou no decorrer das aulas as experiências vividas por todos os alunos, no sentido de lidar com os avanços e dificuldades de acordo com as experiências prévias de cada um dos participantes.

Nos estudos realizados sobre a teoria de Tall, foi notada sua tendência em afirmar que os discentes desenvolvem caminhos distintos em seus desenvolvimentos cognitivos de crescimento do conhecimento matemático.

Tall (2004), então, classificou esse percurso como Mundo Conceitual Corporificado ou apenas Mundo Corporificado (surgem das percepções do mundo consistindo no modo como se sente e se percebem não apenas no mundo físico, mas próprio mundo mental de significado), Mundo Simbólico Proceptual (símbolos que vivem com cálculos e manipulação em Aritmética, Álgebra, Cálculo e assim por diante. Começam com ações, como apontar e contar, que são relacionadas com os conceitos pelo uso de símbolos que permitem mudar dos processos de fazer Matemática para os conceitos de pensar sobre, momento em que se encontram os símbolos do Cálculo e da Aritmética que envolvem os proceptos - processos e conceitos) e Mundo Axiomático Formal (mundo em que ocorrem as propriedades, expressas em termos de

definições formais usadas como axiomas para especificar as estruturas matemáticas como, grupo, espaço vetorial e espaço topológico).

Nos dois mundos iniciais do pensamento, a prova ocorre desde observações, percepções e cálculos. No mundo axiomático formal, o estudante desenvolve então o pensamento matemático avançado. Tendo na mente processos e conceitos que foram aperfeiçoados na passagem pelos dois mundos anteriores, tem agora, com origem em propriedades e axiomas, de deduzir teoremas e desenvolver o pensamento lógico dedutível.

#### *4.3.1 Aprendizado instrumental e relacional*

Richard Skemp formulou duas diferentes maneiras de aprendizado: instrumental (saber como trabalhar as operações matemáticas) e relacional (o qual envolve o saber por quê). Ele fundamentou isso nos tipos de aprendizado que têm seus papéis a desempenhar. Aprendizado instrumental é frequentemente mais rápido de adquirir e dá imediato resultado nos períodos de exame. Aprendizado relacional tem consequências a longo prazo em elaborações ricamente conectadas nas estruturas de conhecimento, mas podem envolver lidar com sutis conceitos. Por exemplo, o manuseio da multiplicação de dois números negativos pode ser mais fácil aprender do que “duas subtrações fazem uma soma” e do que considerar todas as ramificações envolvendo fazer sentido das operações em geral.

Pode também acontecer de um simples aprendizado do conceito não ser factível em um dado estágio porque, necessariamente, ideias requerem elevado nível de desenvolvimento do que correntemente é acessível para o aprendiz. Por exemplo, a prova da fórmula geral de sem  $(A + B)$  requer sofisticadas técnicas que podem não ser acessíveis quando a fórmula é usada num estágio inicial do cálculo, ainda pode ser usada em meios pragmáticos e conduzir a coerentes resultados, tanto que os estudantes podem ganhar prazer e confiança no sucesso de uso da fórmula, apesar de eles não dizerem respeito à prova como prioridade. Assim como consequência, aprendizado relacional pode não requerem todos os elementos envolvidos, mas requer ideias apropriadas juntas, num meio-suporte que trabalha coerentemente para o aprendizado individual.

Tanto o aprendizado instrumental como o relacional podem dar prazer. Por exemplo, instrumento matemático é prazeroso quando habilita o aprendiz a seguir em execução bem nos cálculos matemáticos. Matemática relacional é prazerosa quando as ideias se encaixam em um caminho significativo. Por outro lado, tanto pode causar problemas emocionais:

aprendizado instrumental pode trazer ansiedade ou medo de falhar quando os cálculos se tornam muito complicados; aprendizado relacional pode envolver confusão ou frustração quando a Matemática falha ao fazer sentido.

#### 4.4 Análise do pré-teste e do pós-teste

O pré-teste foi realizado no dia 04 de maio e está anexado nesta pesquisa no apêndice E. Seu resultado será tratado por meio do quadro 04 (descrição do aluno, qual questão acertou e a análise das soluções) de acordo com as subcategorias elencadas com amparo na Teoria do Pensamento Matemático Avançado: representação, generalização, abstração intuição e rigor, síntese, análise e os mundos da matemática.

Quadro 4 – Análise do pré-teste dos alunos envolvidos na pesquisa

ALUNO	QUESTÕES CORRETAS	ANÁLISES
A1	00	Representou corretamente a simbologia e conseguiu abstrair relações do pensamento elementar para o avançado, mas não conseguiu abstrair os conceitos de taxas relacionadas.
A2	04	Mundo simbólico proceptual, mas não chegou à análise e confundiu-se em relação ao conceito de taxa de variação não conseguindo concatenar as variáveis com o tempo.
A3	00	Conseguiu abstrair alguns conceitos de derivadas e taxas relacionadas, mas não construiu corretamente e, assim, não foi preciso quanto à análise.
A4	00	Não conseguiu representar nenhuma questão e nem relacionou intuitivamente os conceitos de derivada e taxas relacionadas.
A5	00	Uso de quase nenhuma representação e nenhuma abstração, apenas usos da derivada sem significado.
A6	00	Usou muitos conceitos proeminentes no pensamento elementar e das derivadas, mas não interpretou corretamente, ou seja, não abstraiu nem generalizou os conceitos de taxa.
A7	01	Não conseguiu chegar à síntese e análise; a intuição primária o levou a resultados incorretos e não conseguiu abstrair o conceito de taxas e suas variáveis.

A8	00	Sequer visualizou a relação entre as questões e taxa de variação. Não sendo possível a análise das subcategorias.
A9	00	Não representou e não foi possível averiguar as subcategorias, pois deixou as questões com poucos dados.

Fonte: elaboração própria (2018).

Nos dias 25 de maio e 01 de junho de 2017 houve a resolução do pré-teste como atividade a ser realizada então sob outra perspectiva, pois já haviam trabalhado o conteúdo de derivadas e Taxas Relacionadas durante o último mês de maio, logo favorecendo o conhecimento dos alunos, pelo professor, de seu *plateau*. Cada questão representou uma vivência da Tomada de Posição nessas sessões didáticas. Os momentos que serão analisados compreendem a vivência da Solução da SF e foram coletadas as distintas resoluções representantes também dos demais alunos.

O aluno A1 desenvolveu a seguinte solução para a questão 02, conforme a figura 4. Embora tenha realizado uma correta representação inicial do uso da fórmula do volume, no momento em que foi aplicar a derivação, usou duas variáveis e não as relacionou. Ao ser indagado pelo docente como iria fazer, respondeu: “– Basta derivar em relação ao tempo, o raio e a altura”, mostrando, assim, o emprego da intuição primária, pois naturalmente usou a regra da potência e substituiu as variáveis, ou seja, ações que gravitam à órbita do senso comum. Não conseguiu realizar a síntese no momento em que não relaciona a figura com o conteúdo de semelhança entre triângulos.

Figura 4 – Resolução, pelo aluno A1, da questão 02 do pré-teste

Handwritten solution for a related rates problem involving a cone. The student starts with the volume formula  $V_c = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ . They then differentiate with respect to time, but incorrectly use two variables,  $R$  and  $h$ , without relating them. The final result is  $\frac{dh}{dt} = \frac{0,1}{9} \cdot \frac{dn}{dt}$ .

Fonte: elaboração própria (2018).

Era esperado pelo docente esse resultado, pois, no momento da vivência da maturação, A1 perguntou: “Professor, posso derivar implicitamente o raio e a altura direto e ao mesmo tempo pela regra do produto?”. Então o professor respondeu com uma pergunta orientadora “– Na definição de derivação implícita A1, poderia me dar exemplos de funções com mais de uma variável que sejam deriváveis pela regra do produto aprendida em sala?”.

O aluno A2, imediatamente, respondeu que não existiam esses exemplos e falou que precisaria relacionar o raio com a altura de alguma maneira, mas não sabia como. Então foi sugerido que me dissessem de qual maneira poderiam visualizar a figura no plano e associar à álgebra.

Na figura 5, o Aluno A2 conseguiu explicar, descrevendo à direita na imagem por meio da relação de proporcionalidade e executar a síntese e a análise ao juntar as ideias de maneira lógica por meio do processo de refinamento com intuição e rigor necessários para o desenvolvimento da questão.

Figura 5 – Resolução, pelo aluno A2, da questão 02 do pré-teste

The image shows handwritten mathematical work on a whiteboard. On the left, the student derives the relationship between the volume rate of change and the height rate of change. The steps are as follows:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \quad \begin{matrix} 2h=3r \\ r=\frac{2h}{3} \end{matrix}$$

$$= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2h}{3}\right)^2 h \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{4h^2}{9} \cdot h \right) \quad h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3 \cdot 9} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 25}{9} \cdot \frac{dh}{dt}$$

On the right, there is a diagram of a cone with a smaller inverted cone inside it. The top cone has a radius of 10 and a height of 15. The smaller cone has a radius of r and a height of h. Below the diagram, the student calculates the height h:

$$\frac{h}{r} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$2h = 3r$$

Fonte: elaboração própria (2018).

O aluno A2 apresentou os aprendizados instrumental e relacional, conforme a figura 07, pois não somente executou corretamente as operações como ainda mostrou não serem necessárias quaisquer relações entre as variáveis e sim o uso da propriedade do produto. Além disso, conseguiu, pela definição, abstrair com intuição e rigor o caminho percorrido para a generalização das ideias presentes das duas questões.

Figura 6 – Resolução, pelo aluno A1, da questão 05 do pré-teste

$$A_n = b \cdot h$$

$$A_n = y \cdot x$$

$$\frac{dA}{dt} = y \cdot \frac{dy}{dt} + x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2$$

$$\frac{dA}{dt} = 0,04 \text{ m/s}$$

$y = x$

Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

O aluno A1, na solução da questão 05, segundo a figura 6, comete os mesmos resultados e, então, é pedido para que a turma compare as operações realizadas com a questão anterior e verifica-se que alguns alunos não obtiveram o aprendizado instrumental, não sabendo trabalhar com as operações matemáticas da derivação implícita.

Figura 7 – Resolução, pelo aluno A2, da questão 05 do pré-teste

$$A = x \cdot y$$

$$y = 2$$

$$x = 1$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d(x \cdot y)}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1$$

$$\frac{dA}{dt} = 0,4 + 0,1$$

$$\frac{dA}{dt} = 0,5 \text{ m}^2/\text{s}$$

Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

A solução, pelo aluno A7, da questão 04 foi corretamente realizada e nota-se a presença da intuição e o rigor primário, uma vez que ele utilizou uma intenção natural para o caminho de resolução. No início da resolução, indagou: “- professor irei derivar a fórmula do volume da esfera em relação ao tempo ou ao raio?”; daí o fizemos uma pergunta orientadora e pedimos que nos falasse quais eram as situações de derivação que envolvessem, por exemplo, três variáveis. O discente disse que uma delas era a regra da cadeia e então desenvolveu o seguinte raciocínio da figura 8.

Figura 8 – Resolução, pelo aluno A7, da questão 04 do pré-teste

$r = 0$  raio de um esfera está variando com o tempo, a uma taxa constante de  $5 \text{ m/s}$ . Com que taxa estaria variando o volume da esfera no instante em que  $r = 2 \text{ m}$ ?

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot 5 = 20\pi r^2$$

Como  $r = 2 = 7 \cdot 20\pi r^2 = 80\pi \text{ m}^3/\text{s}$

Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

A respeito da questão 01, o aluno A3, vivenciou o mundo proceptual, pois, ao passo que concretizou corretamente o momento inicial com o pensamento matemático elementar com a correta consciência da variação das distâncias “x” e “y”, processou corretamente a derivação implícita em relação ao tempo. Houve a correta representação do percurso a ser utilizado para encontrar a variação representada pela velocidade conforme figura 9.

Figura 9 – Resolução da questão 01 pelo aluno A3 do pré-teste.

Uma escada de  $8 \text{ m}$  está encostada na parede. Se a extremidade inferior da escada for afastado do pé da parede a uma velocidade constante de  $2 \text{ m/s}$ , com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a  $3 \text{ m}$  da parede?

Sol:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}; \frac{dy}{dt} = ?$$

$$x^2 + y^2 = 64$$

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$12 + 2\sqrt{55} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{12}{2\sqrt{55}}$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{55}} \text{ m/s}$$

Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

A questão 03 fora realizada pelo aluno A2 e se encaixa no bom exemplo de uma resolução que necessitaria de uma pessoa que tivesse atingido o mundo axiomático forma, pois sua resolução finaliza-se com a demonstração de uma igualdade. Nota-se que o conceito de taxas relacionadas já se encontra com um nível de embasamento mais amadurecido do que no

dia da realização do pré-teste. Já se consegue realizar a abstração do que seja taxa de variação e, além disso, as ideias já são organizadas logicamente, conforme a figura 10.

Figura 10 – Resolução da questão 03 pelo aluno A2 do pré-teste.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(4x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) &= \frac{d}{dt}(1) \\ 4 \cdot 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 0 \\ 2y \frac{dy}{dt} &= -4 \cdot 2x \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{-4 \cdot 2x \frac{dx}{dt}}{2y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{4x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

Uma característica *sui generis* destas sessões didáticas foi o fato de pouco terem aparecido intervenções por parte dos alunos, ou seja, fazendo com que o comportamento do docente fosse de realização de perguntas para mensurar o desenvolvimento das soluções e, além disso, na vivência da prova, somente foi necessário mediar as opiniões dos alunos, pois a linguagem técnica e a formalização das soluções já existiam em suas resoluções.

O pós-teste ocorreu no dia 08 de junho e a avaliação estão no Apêndice F. Teve suas impressões investigadas e analisadas no quadro 5 sob as mesmas perspectivas do pré-teste, conforme o quadro 5.

Quadro 5 - Análise do pós-teste dos alunos envolvidos na pesquisa

ALUNO	QUESTÕES CORRETAS	ANÁLISES
A1	01, 02 e 03	Intuiu com rigor e refinou corretamente as soluções com um ordenamento lógico abstraindo assim os conceitos necessários para a resolução das questões. Generalização e representação.
A2	01, 02 e 03	Conseguiu generalizar e abstrair as definições e usar corretamente a axiomatização para especificar a estrutura matemática das taxas relacionadas.
A3	01, 02 e 03	Abstração, representação e generalização. A clareza e especificidade com que construiu as questões marca o ato de síntese e análise.
A4	00	Ainda encontrou uma certa dificuldade com a abstração das derivadas com as taxas

		relacionadas, porém conseguiu generalizar a usar a síntese.
A5	01 e 02	Generalizou e representou, porém encontrou alguns obstáculos nos conceitos de taxas relacionadas e não conseguiu abstrair corretamente em algumas questões.
A6	01,02 3 03	O aluno conseguiu abstrair o conceito de taxa de variação, bem como, apresentou a intuição e rigor nitidamente marcado pelo treinamento intelectual e no decorrer das questões, a análise.
A7	01,02 e 03	Representou corretamente, conseguiu desenvolver a matemática dos três mundos, generalizou corretamente e organizou corretamente e de forma lógica as soluções.
A8	01, 02 e 03	Desenvolveu as seguintes subcategorias: análise, intuição e rigor, representação e generalização. As questões foram desenvolvidas com as relações entre derivadas e taxas de variação.
A9	01	Conseguiu abstrair a relação, mas não desenvolveu corretamente algumas questões. Representou corretamente os conceitos e sintetizou bem a passagem do PME para o PMA.

Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

No quadro 04, a resolução das questões do pré-teste e, no quadro 05, notamos o desenvolvimento da maioria dos alunos no conhecimento de taxas relacionadas, em particular, do entendimento e relação da derivada com o conteúdo das taxas relacionadas.

#### 4.4.1 Vivência do software Geogebra

Um lema importante a considerar é a existência do uso de tecnologia somente se o que for feito for melhor do que sem ela, ou seja, seu uso deveria ser restrito a situações em que pudesse ser mais bem agregado o conhecimento. No tocante ao desenvolvimento do raciocínio lógico, Borges Neto e Capelo Borges (2007) assinalam que os *softwares* auxiliam o desenvolvimento de habilidades cognitivas que necessitam uma atenção especial por parte docente para que possa identificá-las e utilizá-las com seus alunos em sala de aula e denomina: ao acaso, tentativa e erro, ensaio e erro e, por fim, dedução.

Quando o aluno dá uma resposta ao acaso, não processou nenhum raciocínio para chegar a alguma resposta, desconsiderando quaisquer pistas ou indícios que fomentem escolha. A tentativa e erro é bem comum entre os alunos que aleatoriamente testam variáveis com o

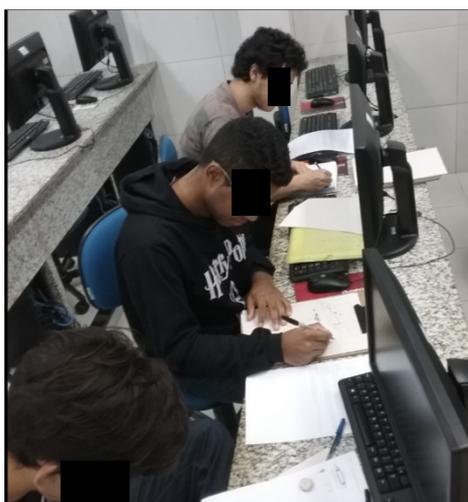
intuito de encontrar as possibilidades satisfatórias, não necessariamente, tendo que formular hipóteses. O ensaio e erro é um experimento controlado com o teste de uma hipótese pré-determinada com a intenção estudada de encontrar um resultado esperado. A dedução é o processo experimental realizado após a inferência ou análise de tentativas realizadas oriundas de testes em outros eventos ou, até mesmo, neste próprio.

O uso do *software* como atividade didático-pedagógica no grupo de estudos para resolução de problemas com o conteúdo de Taxas Relacionadas possui a finalidade de analisar se os alunos foram estimulados a desenvolverem respostas direcionadas às habilidades cognitivas do ensaio e erro e dedução, pois, caso não haja por parte do docente a mediação controlada sobre o caminho percorrido pelo discente, poderá incidir suas soluções ao acaso e tentativa e erro não tendo gerado assim uma reflexão na vivência da maturação.

Tal mediação sucedida no decorrer dos encontros não é um modelo fixo, mas a vivência de um docente que planejou a sessão didática de acordo com a metodologia de ensino Sequência Fedathi. Os alunos já possuíam certo grau de intimidade com o *software* e isso ajudou a conduzir a sessão. Todo o comportamento do docente foi orientado pelos princípios da SF, norteando assim o trabalho discente.

O Apêndice G ilustra a atividade realizada com os alunos, em dupla, no dia 18 de maio de 2017, como visto na figura 10, visando a utilizar o *software* para relacionar gráficos e pontos de máximo e mínimo começando assim as primeiras questões com aplicação da derivada e, com isso, para conseguirem melhor visualização e compreensão dos problemas.

Figura 11 – Realização da atividade de taxas relacionadas com o *software Geogebra*



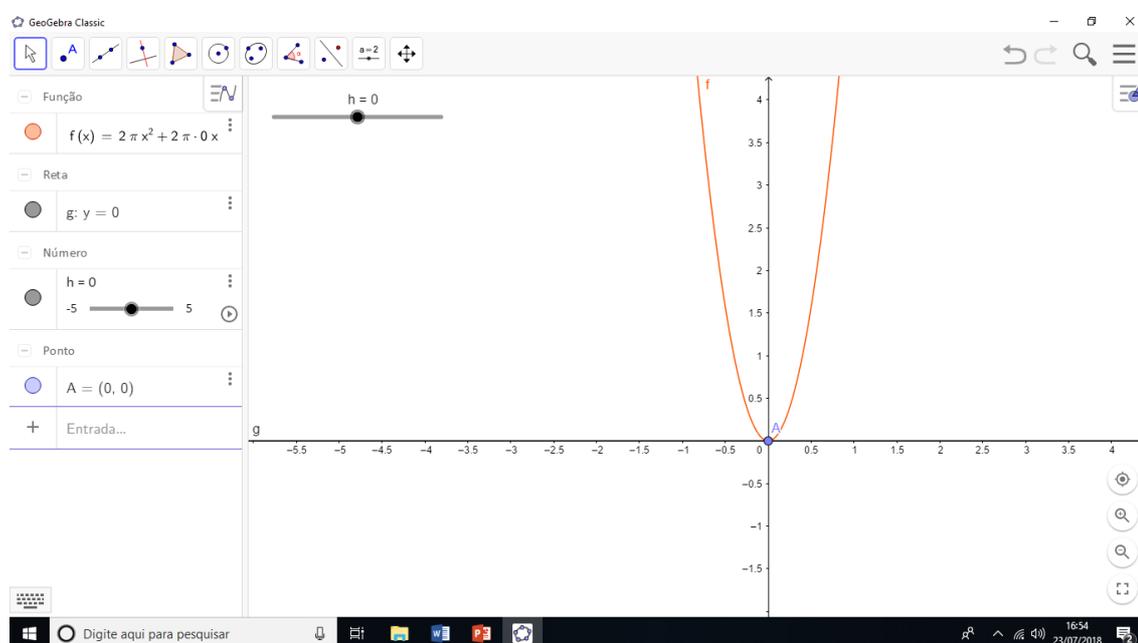
Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

A atividade com duas questões sobre pontos de máximo e mínimo objetivava descrever a ideia central da questão para ensejar reflexões de estratégias de resolução, representar uma função que caracterizasse a situação mostrada no âmbito do problema, uso do *software* para entender máximos e mínimos e extrair conclusões e, por fim, testar com a teoria de derivadas se os modelos experimentados no *Geogebra* estavam corretos.

No início da sessão didática, o *plateau* realizado com os alunos foi uma revisão dos conteúdos de aplicação de derivadas na construção de gráficos. Foi detectado o fato de que quase nenhum aluno se lembrava ou sabia como relacionar a construção de gráficos com as derivadas. Após breve revisão envolvendo a derivada primeira e derivada segunda, no entanto, todos estavam aptos a prosseguir com os problemas propostos na atividade.

Quanto ao manuseio do software, o *plateau* foi sendo realizado a cada aula do grupo de estudos. No início ou no fim, o docente trabalhava algumas funções e pedia que eles tentassem também trabalhar com o programa em casa. Esta atividade, portanto, teve o objetivo de apresentar aos alunos as primeiras questões com um teor maior de aplicação das derivadas para irem construindo um pensamento que pudessem desenvolver futuramente o conteúdo de taxas relacionadas.

Figura 12 – Solução, pelo aluno A1, da questão 1 no *Geogebra*.



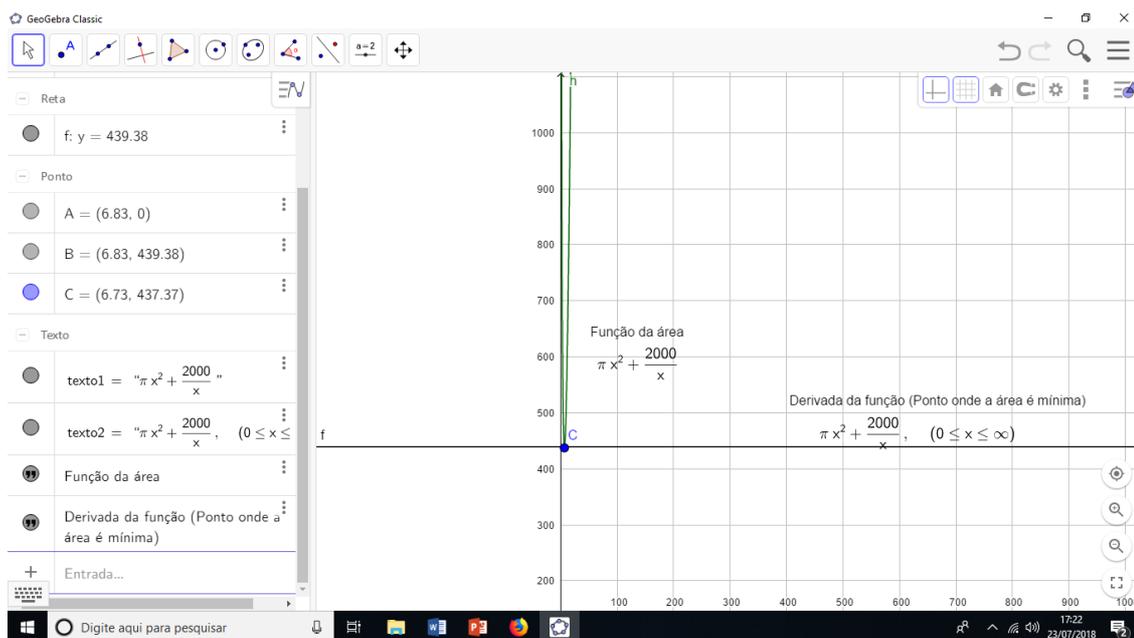
Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

O aluno A1 representou a fórmula  $S(x)$  corretamente, conseguindo intuir com rigor as devidas relações. Em determinado momento da maturação, interpelou o docente: “-

professor, preciso dos pontos críticos e os pontos de inflexão?” Então, o docente fez uma pergunta estimuladora para que ele, por meio de outra função, procurasse o gráfico pelo *Geogebra*. Ele não conseguiu abstrair o cálculo das derivadas primeira e segunda com a construção do gráfico nas opções da questão.

O aluno A7 desenvolveu a questão 01 com intuição e rigor, mostrando, ainda, ter atingido o aprendizado instrumental, pois no decorrer da vivência da maturação compartilhava seus resultados com colegas e ajudava nas reflexões coletivas. Foi no “erro” do aluno A1 que foram gerados resultados sobre sua questão. Neste momento, o docente agiu com a “Pedagogia mão no bolso”, deixando-os conduzirem o momento e ter o próprio trabalho investigativo. Curioso é observar que, naquela aula, o professor sequer sofria com a possibilidade de passar pelo efeito topázio, uma vez que os alunos já estavam educadamente conformados em saber que o docente não iria responder nenhuma questão por eles.

Figura 13 – Solução, pelo aluno A7, da questão 1 no *Geogebra*.



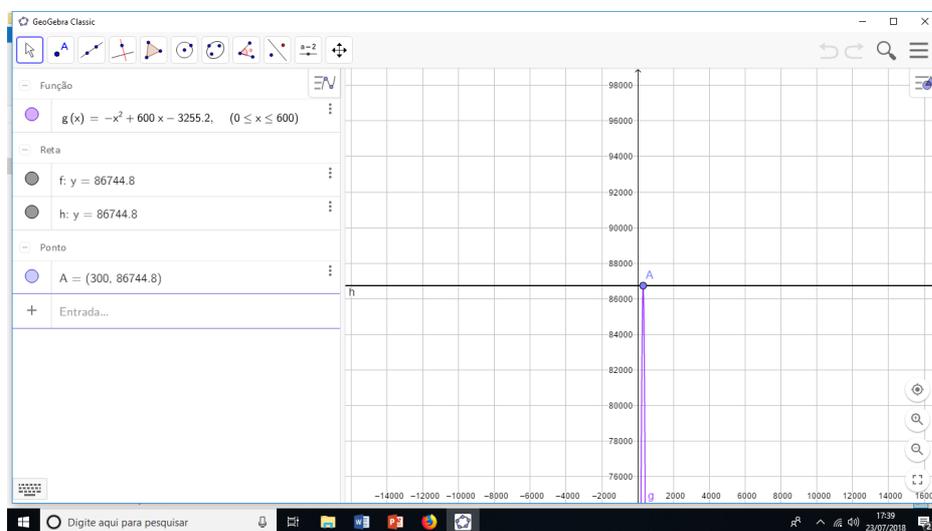
Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

Foi possível observar praticamente todas as subcategorias no desenvolvimento da solução, tanto no *Geogebra* como na parte escrita, uso correto das notações mostrando as abstrações entre os objetos e as funções das derivadas primeira e segunda, bem como, as possibilidades que poderiam ser vistas no software.

Quanto à questão 02, o aluno A3 desenvolveu algumas generalizações corretas, mas, no momento em que passava para o *software*, não conseguiu manuseá-lo corretamente e isso dificultou a visualização; assim, a organização das ideias no gráfico, mais especificamente

na divisão pela variável na definição da função tanto da área como do perímetro conforme a figura 13.

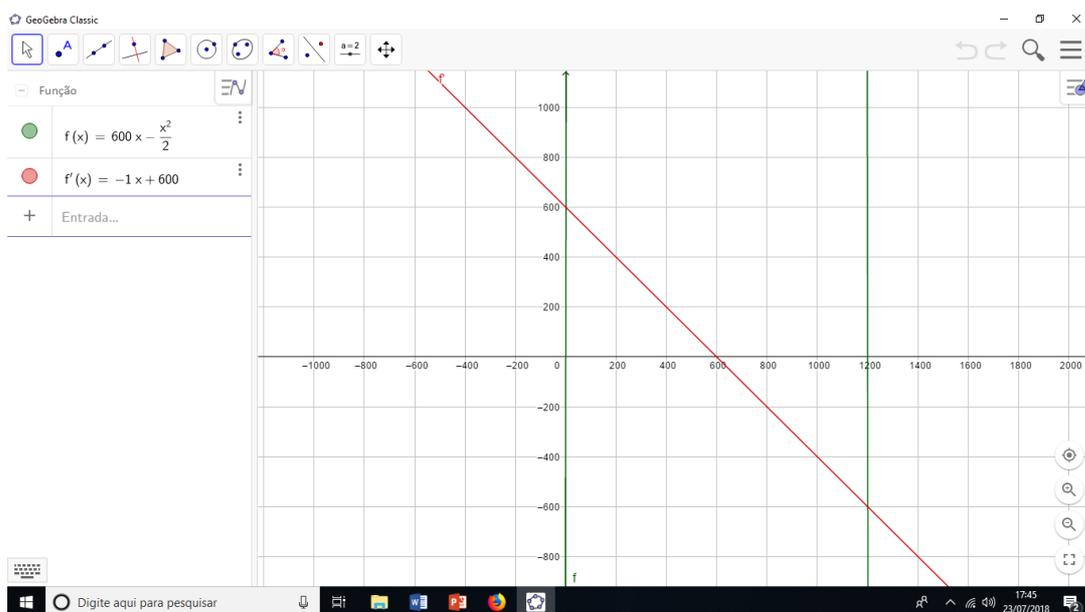
Figura 14 – Solução, pelo aluno A3, da questão 2 no *Geogebra*.



Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

Ainda quanto à questão 02, o aluno A7 apresentou em sua solução a síntese e análise, mostrando não somente trabalhar com as operações que ali se relacionavam desde as variáveis até relacionar área e perímetro como também tinha consciência do porquê de tomar cada passo conforme a figura 14.

Figura 15 – Solução, pelo aluno A7, da questão 2 no *Geogebra*.



Fonte: Fonte: elaboração própria (2018).

Neste momento, sabendo que o aluno A7 estava com o domínio da questão, o docente pediu que procurasse a área mínima que poderia ser obtida para o terreno retangular, ou seja, estava propondo algo que não poderia acontecer diante das características da função que modelava a situação proposta. Houve um certo mal-estar durante algum tempo, pois não chegavam a nenhuma conclusão. Na vivência da solução, o professor, então, os arguiu acerca das definições aprendidas sobre situações de máximo e mínimos envolvendo as derivadas.

As situações especificadas representam os demais alunos que não foram citados ou suas respostas apresentarem para evitar repetições desnecessárias. Mesmo tendo sido o primeiro momento de uma aplicação na própria Matemática, porém, os alunos conceitualmente conseguiram generalizar as informações contidas nas questões e intuíram corretamente as relações entre as fórmulas e o como calcular a derivada. A maior limitação ainda se encontrava no manuseio do programa, mas, mesmo assim, conseguiam ter melhor perspectiva quando mexiam nele, realizando elaborações diversas com os valores expressos.

Ante o aporte teórico da Sequência Fedathi, Teoria do Pensamento Matemático Avançado, juntamente com as análises realizadas, o próximo capítulo traz os resultados para os comportamentos dos professores e alunos observados como satisfatórios no decorrer da experimentação quando se objetiva a maximização do aprendizado. A pesquisa começa, então, de maneira concreta, a revelar respostas para as questões suscitadas no capítulo 01.

## CAPÍTULO 5 – POSTURA DOCENTE E DISCENTE

Este capítulo representa os resultados que caracterizam professores e alunos conforme a Teoria do Pensamento Matemático Avançado e a Metodologia Sequência Fedathi. As denominações dadas foram: professor bom, bom professor, aluno bom e bom aluno. Essas análises não representam uma maneira universal de como o professor e aluno devem se comportar, pois, dependendo do momento, comportam-se de maneira diversa. Além disso, o propósito é caracterizar e não classificar.

Para um melhor entendimento, recorreremos a um caso de uma semântica especial, segundo Cintra e Lindley (2013), na ordem direta entre adjetivo e substantivo, o adjetivo, cuja função é qualificar, geralmente fica depois do substantivo que ele modifica, como “professor bom”. Porém, se a ordem, no entanto, for alterada para adjetivo / substantivo, como no caso “bom professor”, a ideia será expressa de maneira mais enfática, dando significado especial à expressão, mas esse não é o resultado único da alteração da ordem do adjetivo, pois o sentido pode ser resignificado com outros aspectos, uma mudança semântico - significativa.

### 5.1 O professor bom

Ora, o hábito não faz a inteligência (que não é prática, muito ao contrário; faz rodeios para chegar aos mesmos objetivos). Assim, o professor não deveria se preocupar em saber se o estudante é capaz de encontrar, automaticamente, o resultado de uma dada questão, mas se ele é capaz de conseguir esse resultado por processos diferentes: o automatismo acontecerá após o encontro da forma mais simplificante (e eficiente?) (BORGES NETO, 2016, p.09).

Conforme nossos estudos definimos que o professor bom foi inovador na primeira aula, o resto foi repetição e explica algo que sabe que o aluno perguntará. Ele preocupa-se em dar as aulas de seu planejamento não dando tempo para os discentes trabalharem a tríade (A, R, G).

Ele exagera no formalismo e esquece as ideias ingênuas e elementares da Matemática, inibindo as ideias intuitivas de um conceito matemático. Prefere, então, repassar o conhecimento já sistematizado como a ciência o apresenta, desprezando assim as suas etapas de elaboração (BORGES NETO, 2016).

Muito parecido com a escola francesa que faz as perguntas, mas não deixa os alunos maturarem. O docente dá a receita e evita que o aluno tenha trabalho. Ele não incentiva a

investigação e trabalha o conteúdo de modo parcial e fragmentado sem considerar sua totalidade generalizante.

Na vivência da tomada de posição, a demanda pode surgir também com procedência nos alunos, pois com o problema podem vir outros por parte deles ou o docente pode denotar uma situação em que os estudantes suscitem distintas tomadas de posição. Então, o professor bom já prevê todas as possíveis situações que podem ser levantadas pelos discentes e, antes mesmo de qualquer intervenção, já explica tudo e é conhecido como aquele que lê o pensamento dos alunos, mas, na verdade, depois de tanta repetição, já sabe mesmo quais as possíveis dúvidas dos alunos, pois o modo como conduz a aula induz a estreitar o leque de intervenções discentes.

O professor bom realiza uma maturação forçada. Apenas consegue dar uma aula nos moldes em que recebeu, possuindo as limitações de mudança quanto à mediação. De efeito, pode possuir o conteúdo técnico embasado, mas não há o conhecimento nem o compromisso com a Educação.

O professor bom é um “dador” de aulas que já não estimula o raciocínio dos alunos, pois nem ele próprio consegue fazer isso. Não verifica se há bifurcação conceptual ou pensamento proceptual, quando se evidencia uma inabilidade para relacionar estes dois tipos de pensamento torna-se difícil desenvolver um conhecimento conceptual e isso, para Gray e Tall (1994), é uma das maiores barreiras e um dos fatores que mais tem contribuído para falhas no ensino e na aprendizagem da Matemática. E, assim, não situa os alunos em estado desconfortável, não os tirando da zona de conforto e preocupa-se, em geral, apenas com a abordagem procedimental, talvez até mesmo por uma possível insegurança própria de não se sentir confortável em sair de sua segurança cognitiva.

## 5.2 O bom professor

O professor tem o papel fundamental no desenvolvimento da aprendizagem do aluno, na medida em que souber planejar, refletir, decidir e escolher situações desafiadoras para o seu grupo de estudantes e a cada um em particular. Ao mesmo tempo em que aprende com cada estudante, deve prever (ou imaginar) soluções (ou estratégias) que eles poderão desenvolver, procurando criar outras possibilidades de conflito e de solução. (BORGES NETO, 2016, p.8).

A afirmação nos conduz a perceber não apenas características, mas, também, uma vivência docente de um professor que se preocupa com o aprendizado dos alunos. Não se deve aprender Matemática com os alunos, daí o bom professor é o detentor do saber, mas evita se comportar assim, mas como um pesquisador mais experiente a respeito do assunto a ser

ensinado. Ele sempre tem que usar uma metodologia com planos sobressalentes A, B e C. Um exemplo é que só um jaleco não o torna médico, mas a atitude do professor perante o aluno. É o aforismo popular “as pessoas só andam quando levam uma topada”, ou seja, quando são instigadas a usar seu máximo potencial.

O bom professor transforma o aluno em matemático, físico, engenheiro, biólogo ou outro profissional no momento em que o torna investigador em sala de aula, estimulando a prática de gerar conhecimento intrínseco à Matemática. Ele traz sentido às aplicações se relacionando-se com o senso comum do aluno.

O bom professor exprime situações em que o aluno errará ou até mesmo situações erradas com o intuito de desestabilizá-lo por meio do erro, mas nunca estimulando ao bel-prazer, valorizando o pensamento proceptual. O conhecimento apreendido assume significado e não memorizado, podendo ser utilizado em situações derivadas onde a sua aplicação não é tão evidente, ou em que a questão não é tão diretamente relacionada com um procedimento-padrão, ou seja, há o uso da gambiarra.

Por meio da valorização do erro, o bom professor torna-o um elemento essencial ao aprendizado.

O bom professor é inquisidor e faz o papel do “advogado do diabo”, pois por meio das perguntas estimula a abordagem processual e conceitual. E, além disso, os alunos saem com maiores dúvidas do que antes. Este trabalho investigativo propiciado pelo bom professor põe o aluno numa introjeção individual de seu aprendizado por meio do método axiomático, respeitando o estilo de aprendizagem de cada um.

Ele reproduz em sala de aula o trabalho investigativo e de descoberta.

O bom professor realiza a biopsia, enquanto o professor bom a autópsia, ou seja, intervém ainda antes que seja tarde e consegue resultados significativos por parte dos alunos. Ele sabe que a escolha do mais e menos importante requer um forte conhecimento matemático, ou seja, fala do que entende.

O docente trabalha o essencial para depois se aprender uma matemática mais arrojada e tem em mente a ideia de quem tem de aprender é o aluno.

A Sequência Fedathi é um meio para que o bom professor desenvolva bons alunos que saibam, executam e criem. Estimula, na etapa da maturação, o terceiro mundo do pensamento matemático avançado criando processos para compreender um conceito, ou seja, combina proceitos elementares com a finalidade de compor novos proceitos. Isso pode ocorrer pelas perguntas, “Pedagogia mão no bolso” e a mediação. Caminha sobre os três mundos da Matemática quando necessário. E assim o matemático edifica o conhecimento.

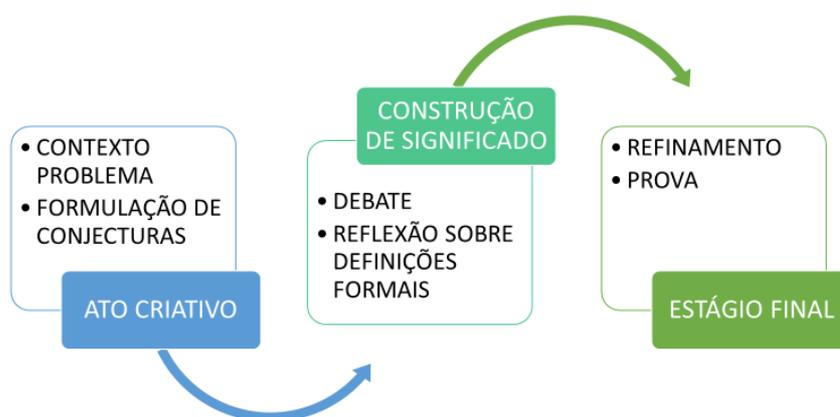
Domingos e Santos (2014) assinalam que a raiz da qualidade das aprendizagens em Matemática é fundamental para entender como os alunos lidam com esta ambiguidade. Um proceito elementar é amálgama de três componentes: um processo que produz um objeto matemático e um símbolo utilizado para representar um processo ou um objeto.

Sob a perspectiva da mediação, o bom professor é muito menos um professor e muito mais guia, treinador, facilitador, motivador, desafiador e companheiro.

Conclui-se que este docente se preocupa com a mudança de sua posição, em refletir sobre o pensamento matemático, com a criação de modelos matemáticos, em criar um ambiente investigativo em sua prática, destacar e conseguir gerir o erro.

A figura 15 mostra o ciclo seguido pelo bom professor para a condução teórica de uma aula sob a perspectiva da Teoria do Pensamento Matemático avançado.

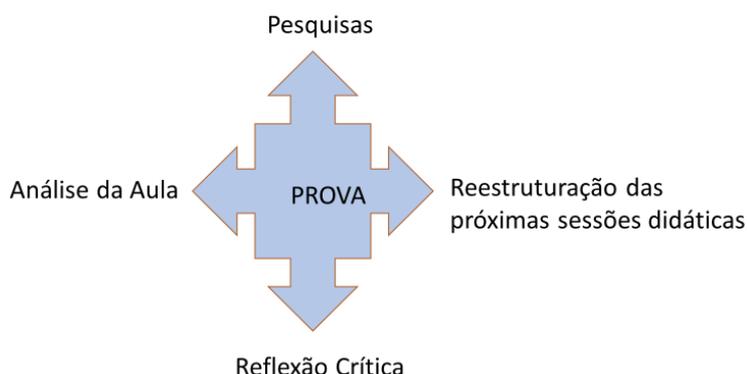
Figura 16 – Ciclo Completo da atividade do Pensamento Matemático Avançado



Fonte: Elaboração própria (2018).

Neste caso, o ato criativo decorre da vivência da maturação que gerará reflexões com o intuito de construir significados a serem apresentados na vivência da solução até o momento final da vivência da prova em que haverá o refinamento de todas as resoluções. Eis, então, as preocupações do bom professor.

Figura 17 – Atitudes do bom professor na Vivência da Prova



Fonte: Elaboração própria (2018).

De acordo com a figura 16, percebemos as ações executadas pelo bom professor no momento da prova, que não é o momento final de uma sessão didática, mas um complexo ciclo que tem sua interseção de fim e início sustentados pela análise da aula, reflexão crítica dos argumentos formalizados, pesquisas que podem ser ensejadas pelo que foi sistematizado e momentos de reestruturação das próximas sessões didáticas e, até mesmo, da que foi realizada.

Iniciamos, assim, uma reflexão: como existe alguém na função de professor de uma área sem o domínio integral do conteúdo? Talvez possa dar boas aulas, esclarecer as dúvidas dos alunos, expor bem o conteúdo a ser trabalhado, mas não destina o estudante a uma situação cognitiva desconfortável. Assim o aluno não sairá de sua “zona de conforto”. Este comportamento do professor bom atrapalharia muito mais do que ajudaria?

Perguntas retóricas podem ser respondidas ao serem retomadas as elaborações do conhecimento matemático, em que o matemático, com sua existência, mais erra do que acerta em seu trabalho de demonstração e criação; ou seja, elabora mais hipóteses falsas do que verdadeiras e por meio desse trabalho, vai erguendo o saber e o conhecimento matemático. Existiriam outras maneiras de criar o conhecimento matemático?

Uma das pessoas que realmente sabe como se aprende Matemática é o matemático profissional, pois é aquele que constrói a Matemática, embora não tenha o “sentimento” dessa apropriação que poderia ser replicado em sua sala de aula, já que é o profissional que descobre Matemática, demonstrando teoremas diariamente e, em consequência, está aprendendo frequentemente. Este profissional conhece as dificuldades e o como aprender, pois está criando e inventando, fazendo sempre em seus trabalhos e, por conseguinte, possui uma representação

do que seja criar e aprender. Então, eles sabem como pode ser construído o aprendizado matemático? Se houvesse tal entendimento, certamente, já teriam utilizado em sua sala de aula.

Na conjectura do ensino atual de Matemática, as dinâmicas se sobrepõem ao saber matemático e à descoberta. O que existe são didáticas pedagógicas e jogos lúdicos que não apontam nenhum caminho, a não ser pelo simples fato de só fazer atividades lúdicas na aula de matemática esquecendo a própria teoria. Defendemos, então o “uso controlado” de atividades lúdicas mas com a exploração do conhecimento matemático existente por trás da ludicidade, uma vez que o jogo pelo jogo não agrega conhecimento matemático nenhum.

### **5.3 O Aluno bom e o bom aluno**

O aluno bom é uma “esponja”, pois apenas absorve informações. Quando resolve uma questão sem refletir, significou que estava num *Plateau* muito abaixo do necessário ou aquele problema não era ensejador de nenhum desafio para ele.

O aluno nota 10 faz tudo o que o professor manda, mas não possui momentos da própria reflexão para as ações executadas. Ele não sabe pensar/raciocinar e criar, ou seja, apenas executa.

Ele, o discente, após a apresentação da vivência da tomada de posição, espera pela vivência da prova, não precisando, assim, se esforçar para encontrar qualquer resultado. Consegue até ter uma certa intuição no desenvolvimento de um problema, mas não dá o devido rigor matemático que a questão exige, mas, em geral, chega a um resultado correto.

Isso mostra que ele vivencia os dois primeiros mundos do pensamento matemático, não estimulando seu conhecimento para atingir o terceiro, desprezando a formalidade axiomática de que a Matemática necessita para as demonstrações.

O aluno bom vivencia apenas o aprendizado instrumental, ou seja, preocupa-se somente em saber como trabalhar as operações matemáticas, não importando o porquê de elas acontecerem. Ao deparar uma situação de erro em uma questão, só continua a resolução se o professor retificar o problema.

Em contrapartida, o bom aluno mostra a solução que o docente nunca viu, rompendo assim a cultura centrada no professor, e não se sente bem em estar numa sala de aula apenas admirando a imaginária sapiência alheia, no caso, a do docente.

Ele reflete sobre o comportamento do professor e tenta entender suas perguntas e condução das dúvidas dos outros alunos e, além disso, constitui conhecimento com amparo nas suas ideias e da interação com os outros colegas de turma.

Na vivência da maturação, dispõe-se a realizar representações, visualizações, classificações, conjecturas, análises e abstrações, mesmo que sejam apenas ideias que não cheguem a lugar nenhum e, na Solução, generaliza, sintetiza e formaliza os resultados das estratégias tomadas na vivência anterior.

O bom aluno é reflexo das ações do professor e incide diretamente sobre ele os resultados positivos que a metodologia Sequência Fedathi produz como protagonista da mudança de comportamento do docente.

Ele compreende que o professor não se declinará sobre o efeito topázio, aproveitando com isso para se debruçar sobre os exemplos, contraexemplos ou quaisquer outras informações que o docente disponibilizar para que os alunos continuem na tentativa de encontrar a solução correta dos problemas.

Vivencia incansavelmente a procura dos porquês em cada detalhe, comportando-se como investigador e não deixando nenhuma situação em aberto, priorizando assim o aprendizado relacional. Considera uma situação de erro em uma questão como um desafio e vai até o fim para procurar saber onde está a incoerência e o que deve ser feito para que ela se torne correta e possa continuar sua resolução. Não admite que não sabe e sim consegue identificar o erro e vai em busca dele até encontrar.

## CAPÍTULO 6 – VALIDAÇÃO DA APLICAÇÃO

Este módulo tem o objetivo de mensurar a aplicação da Metodologia Sequência Fedathi no decorrer do grupo de estudos, ou seja, perceber as contribuições da aplicação do método por meio de uma entrevista coletiva e, além disso, um questionário também realizado no dia 15 de junho de 2017. A análise ocorre sobre a transcrição da gravação da entrevista e será realizada sob a óptica das categorias enumeradas no decorrer do capítulo 3.

### 6.1 A mensuração da aplicação

A mensuração da aplicação foi realizada pelas professoras efetivas da UVA, doutoras Francisca Cláudia Fernandes Fontenele e Maria José Araújo de Souza, pesquisadoras da Metodologia Sequência Fedathi, e que conhecem a realidade dos alunos dessa instituição de ensino. Elas serão denominadas no decorrer de texto de CF e MZ, respectivamente. Denominamos, então, o grupo de participantes da entrevista coletiva de grupo focal, pois, assim como sujeitos, também serão informantes, os quais favoreceram a coleta de dados.

Afirmam Araújo e Melo (2003, p.3) que

Assim, com o uso dos procedimentos corretos podemos reunir informações e opiniões sobre um tópico em particular, oferecendo oportunidade para o desenvolvimento de teorizações em campo, a partir do ocorrido e do falado, esclarecemos que a adesão para participar do grupo é voluntária e propicia um momento de desenvolvimento para os participantes, tanto nos aspectos comunicacionais, como nos cognitivos e afetivos. Dessa forma, a escolha da técnica do grupo focal para um trabalho de pesquisa deve orientar-se pela aderência da mesma aos objetivos do estudo e a relevância dos dados que com ela se pode obter para o problema da pesquisa.

Com efeito, as opiniões específicas da entrevista centram-se sobre a Metodologia Sequência Fedathi e as informações reveladas por tal procedimento favorecerá a teorização mais aguçada do método com esteio nas impressões dos alunos que vivenciaram a pesquisa, produzindo dados que revelem resultados imprescindíveis aos objetivos da demanda acadêmica ora relatada.

Foi realizada uma apresentação inicial pelas professoras e seguiram orientadas pelo questionário expresso no Apêndice C. Os escritos seguintes representam as transcrições da gravação que foi realizada no ato da entrevista.

*Sobre a primeira pergunta, o aluno A9 falou sobre a ida dos alunos à lousa o que é difícil ocorrer nas aulas regulares do curso de matemática e assim tiveram uma experiência diferenciada como professor naquele momento. Ainda quando questionados sobre se*

*ocorria uma revisão inicial no início das aulas, todos disseram que sim, mas o aluno A4 informou que não era suficiente para o acompanhamento da aula.*

*O aluno A3 informou que sempre antes do novo conteúdo era revisado o que precisariam saber para entender o conteúdo do dia.*

Essas informações revelam a execução do *plateau* sempre no início da sessão didática com o intuito de nivelar os alunos com o conhecimento necessário ao acompanhamento e aprendizado da aula, no entanto, nem todos chegavam ao ponto em que o professor objetivava ensejando maior atenção a esses estudantes no decorrer da aplicação do método. Além disso, na vivência da solução, o docente instigava a ida à lousa para a apresentação dos resultados.

*Sobre a continuidade dos problemas apresentados, perguntou-se se havia clareza e entendimentos de acordo com cada novo conceito apresentado, o aluno A1 disse que embora inicialmente tivessem uma certa dificuldade, mas a partir do momento em que algum aluno ia tentar resolver, alguns “insights” iam aparecendo e os outros problemas se tornavam mais fáceis.*

Neste comentário, observamos que a vivência da solução acarretava também um momento de aprendizado, pois cada informação escrita na lousa era utilizada pelos alunos para ratificar ou perceber algum em suas resoluções.

*Sobre o tempo de resolução das questões por parte dos alunos todos foram unânimes em dizer que o professor deu um momento para reflexão e que pudessem pensar na resolução e afirmaram o quão se diferenciava das aulas no cotidiano do curso.*

*O aluno A3 aborda o fato de que nas aulas regulares o professor deve apresentar o conteúdo e no máximo passa exercícios para casa para que os alunos pudessem estudar, já no grupo de estudos é diferente, pois já que não há tanto “formalismo” fica bastante agradável a interação professor e aluno.*

A fase da maturação foi desenvolvida dentro do tempo que os alunos precisassem para concluir suas investigações; vê-se, porém, que os alunos perceberam a diferença do método da SF com as aulas expositivas que geralmente os alunos estavam acostumados a participar.

*No tocante à participação dos alunos, eles responderam que tinham espaço para perguntar e, também, para interagir com os colegas. Quando foi perguntado se o docente dava as respostas às perguntas disseram que, na verdade, apresentava caminhos e que para o aprendizado foi muito importante. Ao averiguar se os caminhos apresentados eram suficientes para concretizar as resoluções, a resposta foi afirmativa e caso em vez disso o professor tivesse dado a resposta o aluno A4 disse fazer diferença, pois mesmo assim ainda ficaria a dúvida de como deveria ser o caminho de resolução da*

*questão, afirmando que era importante entender e interpretar o problema para em seguida tentar resolver e tirar suas próprias conclusões*

*O aluno A8 comparou à situação de dar respostas a levar uma pessoa vendada para um determinado caminho e ao ser retirada a venda, ela não conseguirá dizer como chegou naquele lugar.*

Eis o momento em que a mediação foi percebida pelos alunos que foram sensíveis à interação com o docente e com os outros alunos sempre mediado pelo importante comportamento diferenciado do docente. A categoria Pedagogia Mão no bolso fica evidente nos comentários, ou seja, sentiram que o docente não respondia às perguntas e, também, não era influenciado pelo efeito topázio.

*E depois do tempo que tinham para refletir sobre a resolução, o aluno A1 disse que os alunos iam à lousa e nem sempre o professor corrigia algum erro ficando rapidamente a cargo de alguns alunos que percebiam algum equívoco. O aluno A3 narrou que diferentes alunos com diferentes soluções apresentavam na lousa.*

Aqui a mediação é fortemente sentida pelos alunos pela não interrupção do docente e sim responsabilizando cada aluno em prestar atenção na solução do outro.

*Ao serem indagados se ao irem à lousa se deparavam com algum erro, todos afirmaram até com risos que lógico mas tinham a chance de ver mais de uma solução e chegavam à conclusão de que estavam cometendo algum erro não somente pelo professor mas principalmente pela correção de alguns colegas, segundo o aluno A4. Ainda revelou que o professor quando percebia um resultado inesperado perguntava a cada aluno se não estava ocorrendo alguma imprecisão instigando assim com que todos investigassem o processo de resolução.*

*Os alunos afirmaram que era interessante ver o erro dos outros e em geral facilmente perceptível e quando indagados sobre este formato de aula o aluno A3 disse que não sentiam o desconforto da vergonha ou o medo de errar. O aluno A8 revelou ter sentido um certo medo inicial da participação, mas sendo superado com o decorrer das aulas.*

*O aluno A1 diz que em geral os alunos não vão mostrar suas resoluções na sala de aula “normal” por medo de serem julgados. E os outros discentes disseram que este receio é maior em relação aos colegas. O aluno A8 complementa afirmando que os colegas priorizam quando você erra e nem tanto quando acertam.*

A categoria de mediação em geral vem acompanhada de outras, como no caso em questão, a pergunta e o erro, pois, no momento da solução, o professor realizava uma inquirição com os discentes, principalmente quando os resultados não eram esperados. Além disso, foi a mediação a fazer com que os alunos ultrapassassem quaisquer barreiras de timidez, autoestima

ou emocionais, fazendo-os ter vontade de ir à lousa e participar sem medo de serem julgados, mas sim obterem aprendizado, o que nem sempre ocorre na sala de aula normal.

*O aluno A4 afirma que em relação a se sentir à vontade isso acontecia pelo fato de as únicas cobranças do professor serem a presença e o estudo em si. O docente era preocupado no curso em como o aluno iria aprender e a interpretar. Já nas aulas normais estão mais preocupados com as notas o que prejudica muito os alunos devido à pressão e por mensurar apenas a performance e, ao contrário, o curso estava aumentando investindo na performance dos alunos o que deveria ocorrer nas aulas regulares.*

Notamos que as emoções são comentadas como um fator de motivação para que os alunos trabalhassem cognitivamente com base no comportamento mostrado pelo docente evitando que os alunos sentissem qualquer ansiedade ou impaciência e demonstrassem tudo o que eles estavam aprendendo.

*Ao serem indagados pelas avaliadoras sobre como seria o comportamento deles tendo aula em uma disciplina regular do curso com o mesmo professor que geriu o grupo de estudos. O aluno A8, em sua opinião, há professores mais preocupados com o aprendizado dos alunos do que outros quando eles transmitem o conteúdo desesperadamente sem mensurar se os discentes estão conseguindo assimilar. E, se este molde de aula fosse seguido nas disciplinas regulares, o curso de matemática seria mais proveitoso.*

Seria a observação de uma caracterização de um bom professor? Os próprios alunos reconhecem quando algo diferente, mas engrandecedor, ocorre com o próprio comportamento e isso fica perceptível na mudança da própria ação docente.

*O aluno A8 lembrou momentos em que o professor fazia perguntas para mensurar quanto do conteúdo os alunos estavam dominando e com isso tentar igualar o nível de conhecimento de todos.*

O docente utilizou-se das perguntas também para avaliar o *plateau* da turma que quase sempre começava com uma conversa informal e ia tomando um teor formal.

*Ao serem indagados pelas professoras se realizavam muitas perguntas para o docente ou entre si, relataram que o maior inquisidor era o professor e enquanto não obtivesse a resposta estava procurando arguir os alunos.*

*No começo do grupo, nos primeiros encontros, como foi a percepção deles ao sentirem aquele novo modelo de aula? Perguntou a Professora doutora CF. Obteve como resposta pelo aluno A8 que marcou o fato de não cobrar notas e sim a presença e avaliação.*

As perguntas aconteciam não somente no sentido do professor para o aluno, mas também entre os próprios alunos.

*Sobre os conceitos que foram abordados, existiu o entendimento para que pudessem ser usados em outras áreas ou situação ou ficou a desejar? Indagou MZ. O aluno A3 foi enfático e disse que quase sempre os problemas partiam de casos mais simples até chegar a uma generalização e sempre o resultado obtido era favorável ao nível da generalização.*

*O aluno A9 disse que um ponto importante foram as atividades que eram passadas com cunho de aplicação, pois não era muito abordado comumente.*

Os casos apresentados desde o conteúdo de limites eram escolhidos por terem a característica de serem generalizáveis e com a finalidade de serem aplicados em outras áreas, mais especificamente, da própria Matemática, desaguando, por exemplo, nas derivadas implícitas, taxas relacionadas e construção de gráficos com aplicação em situações contextualizadas de máximos e mínimos.

*FC perguntou se no momento em que os alunos apresentavam as soluções, o professor aproveitava para em seguida realizar a sistematização do conteúdo. A resposta geral foi sim e em termos de aprendizagem o aluno A1 achou interessante porque todos tinham a oportunidade de ver suas respostas formalizadas e melhoradas não ficavam preocupados em apenas copiar pois tinha a participação de cada aluno.*

Eis a afirmação que revela a vivência da formalização, sistematização e do uso das soluções apresentadas pelos alunos: a prova. Eles ficavam sempre esperando o que poderia ainda haver que ninguém tivesse pensado, como, a linguagem mais técnica por meio de uma simbologia.

*Quais momentos os alunos consideraram mais significativos e gostavam mais, achavam bem interessantes e motivador? O aluno A9 disse que foi o momento em que começou a trabalhar as questões com o software Geogebra. O aluno A1 complementa que nunca havia usado o programa na sala e aprendeu muitos recursos no grupo de estudos. E conseguiam usar o programa nos problemas envolvendo derivadas. Também foram unânimes em dizer que a utilização do software Geogebra dava uma melhor visualização ao problema clareando as ideias. Um momento determinante e que contribuiu para a aprendizagem dos alunos, o aluno Leandro informa especificamente que foi a aplicação das derivadas implícitas. O aluno A8 ratifica o colega e complementa falando da participação e discussões das soluções.*

Foi notória mudança de motivação quando íamos realizar alguma atividade no *software* e, neste caso, houve um cuidado maior do docente uma vez que os alunos tinham pouca experiência em manusear o programa. Foi o *Geogebra*, porém, que possibilitou visualizações antes não perceptíveis nos cálculos ou nas explicações do professor. Como exemplo, citamos os gráficos e as manipulações que podem ser realizadas com variáveis.

*O aluno A1 afirma que em geral o conteúdo de derivadas era praticamente o uso de fórmulas, porém viu que existia um outro viés neste conteúdo.*

*O aluno A3 relatou que no ensino básico é bem complicado o docente propiciar muitas aplicações práticas a seus alunos, porém no nível superior com o auxílio do cálculo diferencial poderia ser bem abordado e o docente no grupo de estudos aprimorou bem diversas aplicações e isso ajudou bastante na aprendizagem.*

A mediação contemplada pela metodologia e por questões contextualizadas em que era possibilitada o uso das ferramentas de cálculo em outras áreas contribuiu para que os alunos pudessem acreditar que eram capazes de pensar matematicamente.

*Quais foram as principais ações ou atitudes que o professor desenvolveu para que pudessem servir como exemplo para os demais docentes com o intuito de formarem bons professores? Pergunta MZ. Foi unânime a resposta: “- A participação do aluno! ”.*

*O aluno A4 diz que o trabalho realizado tanto ao quadro como também em seu local, pois a participação de um instigava a vontade dos outros. O aluno A3 informou que foi fundamental o fato de ter deixado os discentes o mais à vontade possível no decorrer das aulas. Lembrou o primeiro dia do grupo em que todos se apresentaram e contaram um pouco de sua história fazendo com que a partir daí o ambiente tornou-se mais leve.*

Inconscientemente, as professoras perguntam quais características o docente que geria o grupo de estudos apresentava de um bom professor e, naturalmente, obtiveram o comportamento em que instigava o aluno a refletir e a trabalhar.

*Em seguida as professoras indagam sobre a postura do aluno, perguntando-lhe o que precisa mais do aluno, quais são as posturas, participações e ações dos alunos que têm condições de contribuir e necessárias para complementar. O aluno A8 afirma que é a atenção e maior participação, enquanto o aluno A9 diz estar sobrecarregado de disciplinas e acabou não sobrando muito tempo para desenvolver os estudos complementar dos conteúdos em casa.*

O aluno A8 fala das características de um bom aluno, aquele que é proativo, mas o A9 revela ter se comportado como um aluno bom quando se comporta como um aluno que só trabalha na aula.

*O aluno A1 revelou medo às vezes inclusive de perguntar algo aos professores e, portanto, isso seria um fator que deveria ser superado pelo discente. O aluno A8 amplia a discussão dizendo que o professor deve tomar a iniciativa de fazer com que o aluno supere essa limitação. O simples fato de o professor mostrar que está disposto a explicar uma dúvida abre caminhos para que o discente tenha um encorajamento e entendimento dos processos.*

*Como ponto positivo ressaltou-se o comportamento do docente perante ao discente de proximidade quebrando antigos tabus que existiam.*

*O aluno A4 afirma que alguns alunos não conheciam o conteúdo das aplicações da derivada, mas com a metodologia aplicada pelo professor conseguiram acompanhar todo o raciocínio.*

Destaca-se o modo como o poder de mediação possibilitou ao docente envolver os alunos e diminuir quaisquer entraves emocionais, pois diariamente era realizado a uma conversa com alguns até para se aproximar, sabendo lidar com os avanços e limitações apresentados por parte de cada um.

*Caso fossem fazer um novo curso com o professor que geriu o grupo de estudos, o que poderia ser sugerido como melhorias? Perguntou MZ. O aluno A4 afirma que existem professores que passam listas e não resolvem os exercícios e os alunos acabam não conseguindo resolver e não tendo uma compreensão adequada sobre o conteúdo, ou seja, sentiu falta de listas resolvidas pelo docente.*

*O aluno A4 percebeu que por diversos momentos o professor sabia que os alunos não iriam conseguir resolver, por não saberem ou não lembrarem, mas tentava fazer com que fossem o mais longe possível na resolução.*

Interessante é que, mesmo passando intensamente por uma sequência didática com a aplicação de uma metodologia nunca vivida por eles, alguns entraves das aulas tradicionais em que imperava o binômio apresentação do conteúdo – resolução de exercícios ainda foram manifestados como, o que sugeriu o aluno A4 que afirmou precisar que o docente resolvesse listas de exercícios. Não obstante, a percepção do desafio por parte do professor ficou evidente pelos alunos que, em contrapartida, eram motivados a irem o mais profundo possível no conhecimento, tentando não deixar nenhuma informação sem ser observada.

*MZ perguntou se este formato de aula seria possível trabalhar na escola básica e obteve a resposta do aluno A4 que iria depender da quantidade de alunos, o aluno A9 afirmou que seria enriquecedor no tocante às aplicações e o aluno A3 disse que requeria um tempo maior*

*para as aulas, porém todos consideram possível dentro de determinadas adequações.*

Como licenciandos em Matemática, já possuem um certo grau de maturidade mesmo com os alunos de mais diversos semestres, pois abordam temas da sequência que convergem para a mediação docente, já que o quantitativo de alunos pode ser mediado por um ou mais professores, as aplicações devem ser mediadas por meio da gambiarra e assim gerar o conhecimento e, por fim, a utilização do tempo requeria um planejamento mais robusto do docente dentro de um contexto que conhecesse ou não a turma.

*E se fossem avaliar sua aprendizagem no decorrer do grupo, qual seria o percentual que poderia ser dado? Perguntou MZ. O aluno A9 afirma que o docente os orientou implicitamente a estudarem sozinhos, ou seja, são capazes de pegar um livro para sozinhos estudarem. Todos confirmaram que foi visível o antes e o depois no quesito aprendizagem e na importância que foi dado ao livro didático tanto na sua leitura como na resolução de exercícios.*

*O aluno A1 afirmou que até os exemplos resolvidos que havia no livro ficou com maior entendimento, pois mesmo sendo resolvido antes não eram entendíveis determinadas passagens. O aluno A8 informou que as questões com aplicações foram mais enriquecedoras, pois não nunca havia conseguido resolver.*

A Sequência Fedathi possibilitou a autonomia dos estudos para os alunos, responsabilizando-os verdadeiramente pelo seu aprendizado.

*O aluno A7 era o único que conhecia a metodologia Sequência Fedathi e algo muito marcante foi ver os alunos indo à lousa responderem independentemente de estarem certos e, também, conversando entre si investigando a resolução das questões.*

*O aluno A6 falou sobre a autonomia, que sem ela os alunos não iriam para lugar algum, pois assim sempre iria depender dos outros, embora ainda não tenha conseguido, mas acredita que o trabalho contribua para que isso ocorra: a autonomia do aluno.*

*O aluno A2 destacou que o fato de estar presente no grupo alunos de diferentes períodos mostrou o quão distinto também podem ser as resoluções e o melhor que poderiam chegar ao mesmo resultado. Acrescenta ainda que tudo que cada aluno pudesse somar, era válido naquele processo mesmo com as diferenças cognitivas todos conseguiam chegar aos resultados sem precisar ter sido nada imposto tornando o conteúdo parte do aluno e assim mais prazeroso.*

O comportamento docente em conceder a oportunidade de o aluno ir à lousa com frequência e conceber diálogos e reflexões transformou a mentalidade e motivou o aprendizado no grupo.

*O aluno A3 resumiu o grupo de estudos como tendo sido prazeroso e complementa dizendo que o bom professor não é aquele que domina todas as técnicas, tem que ter uma metodologia interessante também. No ambiente da sala de aula, para que haja aprendizado, é necessário que o professor torne um local leve, pois cita inclusive estudos de universidades americanas dizendo que quando o professor tenta motivar os alunos sinapses são ativadas facilitando e encorajando ao aprendizado. A maioria dos conteúdos já havia visto, mas não daquela forma que foi dada em sala. Por fim, foi ressaltado o caráter extrovertido do professor que também tornou o momento mais prazeroso.*

As reações emocionais ocorreram em toda a entrevista e com naturalidade responderam o quão foram presentes as categorias: “Pedagogia mão no bolso”, a pergunta, a mediação, concepção do erro e, também, as vivências da Sequência Fedathi.

A figura 18 retrata o cenário em que ocorreu a entrevista coletiva.

Figura 18 – Entrevista coletiva com os alunos do grupo de estudos



Fonte: arquivo pessoal (2018)

As professoras FC e MZ ainda deram um depoimento ao final da entrevista sobre suas percepções acerca do do que fora avaliado com os alunos em relação às perguntas:

*Desde o início da avaliação foi possível perceber a satisfação dos alunos em relação ao curso em razão da metodologia adotada. Em sua maioria, relataram que gostaram muito de poder apresentar suas compreensões acerca das questões estudadas, situação que, segundo eles, não ocorre nas outras aulas. Segundo o grupo, estes momentos*

*ajudaram muito na evolução de seus conhecimentos acerca dos conceitos trabalhados.*

*O tempo da aula dedicado para resolverem e discutirem as atividades foi algo muito enfatizado pelo grupo, consideraram um dos grandes diferenciais para sua aprendizagem. Outro aspecto que também consideraram importante foram as interações que ocorreram no grupo a partir da postura do professor, que fazia perguntas a cada um, levando-os a refletir, a repensar o que estava sendo discutido e também a participarem da aula, possibilitando ao grupo verificar onde e porque estavam errando alguma questão ou mesmo, a entenderem alguma etapa ou procedimento que não haviam conseguido entender sozinhos, antes da discussão. PROFESSORA MZ.*

No relato da professora MZ, notamos que suas impressões vão ao encontro das categorias estabelecidas, tais como: mediação, pergunta e “Pedagogia mão no bolso”. Esse depoimento, em particular, revela o diapasão com as respostas ao questionário respondido pelos alunos que será analisado no próximo tópico.

*Pelo que percebi nas falas expostas na entrevista coletiva, os alunos ficaram bastante satisfeitos com a metodologia adotada no curso e com os conhecimentos adquiridos. Além disso, pela descrição que eles deram é possível observar como a Sequência Fedathi guiou as ações enquanto professor, no sentido de mediar a exploração dos conteúdos do cálculo favorecendo a investigação e a descoberta em um ambiente didático livre de cobranças e permeado pelo estímulo à ação e à reflexão. PROFESSORA CF*

No depoimento de CF, observa-se sua percepção quanto ao ambiente investigativo criado pelo docente, revelando sua atitude de mediador e, além disso, por ter ensejado aos alunos recriação do percurso de um matemático.

## **6.2 Análise e resultados do instrumento metodológico questionário**

Neste segmento são descritos o que foi coletado individualmente por parte dos alunos no tocante ao questionário final sobre o grupo de estudos anexado no Apêndice C. A avaliação

tratou de dez perguntas, cujas respostas são analisadas sob a perspectiva das teorias apresentadas neste trabalho. Salientamos que os alunos não identificaram as folhas de avaliação, sendo, portanto, uma análise às cegas de suas respostas.

Cada pergunta do questionário inserido como Apêndice C foi representada por sua temática conforme descrito na sequência. Por exemplo, “**P.1(Ressignificação do conhecimento sobre aplicação de derivadas)**” significa impressões sobre a pergunta número 01 por parte dos alunos cuja temática é resignificação do conhecimento sobre a aplicação de derivadas. As respostas dos alunos participantes foram condensadas no decorrer do texto.

### **P.1(Ressignificação do conhecimento sobre aplicação de derivadas)**

Apreendeu a teoria e pôde perceber que os cálculos que antes não tinham sentido podem ser perfeitamente aplicados no cotidiano. Apresentação de novos conteúdos dando um novo ponto de vista sobre aplicações de derivadas, em particular, às implícitas. Conseguiu assimilar conteúdos e tirar dúvidas que haviam ficado da disciplina e salientou o estudo das Taxas Relacionadas com o aprendizado de aplicações da derivada e o aprendizado com muitos exemplos. Apreendeu a modelar as questões, fortaleceu conceitos como o de produtos notáveis e o uso do *geogebra*. Na disciplina de cálculo não foi possível estudar taxas relacionadas por conta do tempo. Pela falta dos conhecimentos básicos, parecia ser a primeira vez em que estudava o conteúdo.

Os comentários convergem para o embasamento que obtiveram no decorrer das sessões didáticas, em particular, nos conteúdos de aplicação como derivadas implícitas e taxas relacionadas, além de fortalecerem conteúdos e processos do Pensamento Matemático Elementar no *plateau*.

### **P.2 (Dificuldades quanto à aplicação das derivadas)**

Taxas de variação, comportamento das situações reais havendo a necessidade de muitos conhecimentos prévios. Notação e interpretação lógica correta dos problemas. A velocidade do curso, pois ainda estava iniciando os estudos de cálculo. Demonstrações do teoremas e interpretação dos enunciados.

Ratificamos, então, a escolha por esse conteúdo matemático, pois nossa experiência aliada às pesquisas que tratam sobre o Cálculo Diferencial e Integral mostram o quão desafiador é para os alunos trabalhar esses conteúdos com aplicações e acabam apenas usando-os como meros processos de algoritmização.

### **P.3 (Utilização do software *Geogebra*)**

Na própria definição de derivadas é possível fazer construções e visualizar o comportamento de retas tangentes a curvas e definir pontos onde a derivada é nula. Foi possível visualizar as derivadas de diferentes ordens e analisar pontos específicos.

Essas análises foram realizadas semanalmente. No momento em que se começávamos a trabalhar algum conteúdo matemático, logo eram realizados experimentos com os conceitos no *software*.

### **P.4 (Opinião sobre a metodologia utilizada)**

O docente não vinha com fórmulas ou resultados prontos, sempre instigava os alunos a chegar aos resultados; o professor era mais um guia do que um docente convencional. Era sempre revisado o conteúdo necessário para que pudéssemos acompanhar a aula, a necessidade do pensar do aluno, pois mesmo que não conseguissem resolver algo deveriam pensar em estratégias que seriam adotadas ou melhoradas pelo grupo. O tempo de trabalho para as situações problemas propiciou o melhor aproveitamento e trabalho com os colegas. O docente fez com que os alunos tivessem a postura de professor; não havia cobrança de notas. O professor construiu o conhecimento a partir de um saber prévio do aluno. A afetividade deve estar presente no professor.

A percepção dos alunos de que o professor estava aplicando uma metodologia ficou evidente, tanto no instrumento de coleta de dados coletivo como no individual. Estes comentários expressam o caráter investigativo com que as aulas eram conduzidas, a realização do *plateau* e uma característica que talvez os alunos não tenham percebido: muitos consideraram que o docente estava fazendo com que os alunos tivessem a postura de professor, porém, subsidiariamente, isto significa o comportamento do próprio matemático ao realizar o

trabalho matemático. Como observação final, a emoção matemática os afetou e os encorajou a também criar Matemática nem que fosse uma matemática que eles nunca tinham realizado, como aqueles exercícios de aplicação em taxas de variação.

### **P.5 (Descrição da metodologia)**

Diferente do convencional em que o aluno estuda por conta própria e o professor esclarece apenas as dúvidas e sugere ideias à classe; o professor não dava aula, o grupo pensava em estratégias para contornar os problemas apresentados fazendo com que os conteúdos vistos passassem a ter significado, pois o era aprendido fazia parte dos alunos e não era uma imposição e melhor sensação não existia quando os resultados eram positivos gerando também um sentimento de emancipação. Os erros também foram aproveitados pelo professor para construir o conhecimento. Todos têm igual importância, embora os alunos tenham dificuldade no começo por estarem acostumados com o ensino tradicional. A metodologia deveria ser utilizada em sala de aula nas disciplinas. O aluno percebe sua linha de raciocínio e como poderia aperfeiçoar seus pensamentos.

O professor é visto sob a perspectiva de outro comportamento com a atitude mão no bolso; os alunos tinham de criar estratégias de resolução, dando-lhes a oportunidade de serem emancipados e de criarem o próprio conhecimento. Além disso, os resultados inesperados também eram utilizados pelo professor e nunca vistos como erros.

### **P.6 (Peculiaridades da metodologia aplicada)**

Em aulas convencionais o professor dita as regras, em contrapartida a metodologia utilizadas deu vez aos pensamentos e ideias dos alunos. A postura do professor perante à turma incentivando o aluno a mostrar sua solução. O aluno tem mais trabalho e a aula não segue o modelo de aula em que o professor explica e se utiliza de alguns contraexemplos, apenas para depois os alunos tentarem entender alguma possível dúvida do conteúdo e seus exemplos. A dos outros professores é só copiar no quadro, explicar e responder as questões.

Surge a categoria do contraexemplo como proposta de resposta às intervenções do aluno na vivência da Sequência Fedathi. Ainda reiteram como são as outras metodologias, baseando-se apenas em explicação e resolução de questões.

#### **P.7 (Ações docentes)**

Incentivo por parte do professor em fazer com que o aluno chegue em resultados de demonstrações ou cálculo; o professor jogava ideias e os alunos iam aos poucos estruturando; O fato de o professor não ser o detentor do conhecimento, mas sim uma postura disposta a agregar conhecimento. O tempo dado para o trabalho dos alunos para tentarem resolver e interagir com a turma, mas os alunos não podem deixar de ser também individualistas quando necessário. Mostrar teoremas que não são vistos no curso foi muito importante, mesmo porque era investigado quais conteúdos nós sabíamos.

Marca-se o comportamento do professor mediador, que cultiva a participação e interação do aluno, ao passo que valoriza o trabalho individual de cada um, respeitando o tempo e os conhecimentos prévios dos alunos.

#### **P.8 (Sugestões de ações que poderiam ser implementadas)**

A tecnologia poderia ter sido melhor utilizada, pois alguns alunos entendem mais facilmente quando visualizam. Resolução de listas de exercícios.

Reiteramos a necessidade de um maior uso da tecnologia como ferramenta que poderia auxiliar na compreensão dos processos matemáticos e as raízes de uma metodologia baseada na resolução de listas pelo professor.

#### **P.9 (Autoavaliação de seu comportamento)**

Ativo sempre que solicitado indo ao quadro apresentar ideias e resultados. Dificuldade em entender alguns conteúdos também por conta de algumas faltas. O excesso de disciplina impediu um maior debruçamento dos alunos nos estudos. Maior motivação para estudar.

Comentários que caracterizaram as definições de aluno bom e bom aluno.

#### **P.10 (Sugestões)**

Propaganda para que o grupo e torne mais visível e distribuir desafios antes do término da aula.

Fica marcada a necessidade dos alunos em vivenciar mais situações como essas, em que eles participam do processo de aprendizado e o professor não é aquele que fica longe dos alunos, pelo contrário, ele é o próprio condutor do processo na metodologia.

Ante as análises realizadas, no tocante às categorias predefinidas, inferimos que há convergências entre os dois instrumentos metodológicos aplicados tanto o coletivo como o individual, mostrando que, caso os alunos não se sentissem confortados em falar em público, tinham a possibilidade de escrever individualmente sem a descoberta de suas identidades.

Houve maior prioridade nas observações relativas à mediação, ao erro e aos problemas chamados de aplicações, no entanto, não ficou demonstrada nenhuma resistência ao método aplicado pelo docente, mas, mesmo assim, um aluno sentiu falta de uma lista de exercício resolvida pelo professor.

Os alunos insistiram em comentar o quão importante foi a ida deles à lousa para mostrarem suas soluções, independentemente de estarem corretas, mas estavam convictos de que de algum modo iriam aprender algo, pois a contribuição do docente e dos demais colegas era essencial para o aprendizado, o que não ocorria com frequência nas aulas regulares.

A utilização do *software* e sua importância se deu por dois fatores: o primeiro em razão da curiosidade, pois poucos conheciam e trabalharam com essa tecnologia nas disciplinas do curso. Em segundo lugar, a compreensão matemática dos objetos em movimentação, ou seja, eles puderam realizar experimentações com dados, testar soluções e estabelecer modelos matemáticos e ratificar no *software*.

## 7. CONCLUSÃO

Em decorrência de tudo o que foi exposto, serão trazidas à tona as reflexões sobre as discussões realizadas nos capítulos, cujo objeto foi o ensino de taxas relacionadas e que culminou como resultado a definição do “bom professor” sob a perspectiva da Metodologia Sequência Fedathi e da Teoria do Pensamento Matemático Avançado.

Destarte, serão abordadas algumas questões desde a metodologia de pesquisa utilizada, Sequência Fedathi, até a cognição e emoção no ensino de Matemática para a Teoria do Pensamento Matemático Avançado.

Baseado nisso, começemos pelas perguntas que geraram inquietação e motivaram a pesquisa: *É possível relacionar o comportamento docente e o ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em particular, o conteúdo de Taxas Relacionadas, sob a perspectiva da proposta metodológica Sequência Fedathi e da Teoria do Pensamento Matemático Avançado e o uso do software geogebra no curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú?*

Foi necessário começar as aulas pelos conceitos iniciais de Limite, aplicando o método de ensino, sob pena de, caso fosse usar a SF somente nas sessões didáticas sobre taxas relacionadas, era possível que os conceitos basilares não tivessem sido corretamente estabelecidos cognitivamente. Daí a escolha pela abordagem dos conteúdos iniciais de limites e derivadas.

No decorrer das sessões didáticas, compassadamente, os alunos iam se adequando à metodologia empregada, alguns aprimorando os conceitos de cálculo, outros, porém, ainda aprendendo, mesmo tendo sido um grupo com a restrição de todos já terem cursado a disciplina. No tocante ao conteúdo específico matemático, o pré-teste, a sua resolução em sala, e o pós-teste, mostraram o desenvolvimento do conhecimento matemático com as aulas. Não obstante, os próprios alunos ressaltaram diversas vezes nos instrumentos metodológicos o aprendizado que tiveram com as questões contextualizadas que, neste caso, eram as de taxas de variação.

Além disso, um bom início de questões contextualizadas foram as apresentadas em sala e, também, resolvidas por eles na atividade com o uso do *software Geogebra*. Tratou-se da construção de gráficos com o uso de teoremas e proposições de derivadas e as questões contextualizadas que envolviam valores de máximo e mínimos. Esse momento representou significativamente um passo importante para o entendimento dos demais conteúdos, como derivação implícita e taxas relacionadas, quando aplicadas a questões com contextos diferenciados daqueles algoritmizados.

Sobre a pergunta: *Como se daria o desenvolvimento das aulas no grupo de estudos com os conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável sob a perspectiva da metodologia Sequência Fedathi?*

Os testes aplicados e analisados mostraram o quão as subcategorias elencadas a partir das características da Teoria do Pensamento Matemático Avançado existiam nas soluções: representação, generalização, abstração intuição e rigor, síntese, análise e os mundos da matemática. Além das avaliações, continuamente, o professor observou o desenvolvimento do conhecimento matemático nas resoluções apresentadas pelos alunos ao explicarem na lousa ou por meio de seus comentários entre os colegas.

Alguns alunos observaram suas mudanças na própria maneira de exibir as soluções no decorrer das aulas, provando que eles estavam adentrando o Mundo Axiomático formal, mostrando que um método controlado de pesquisa, juntamente com uma metodologia de ensino é capaz de desenvolver um pensamento matemático assinado na investigação e reflexões oriundas do trabalho individual, mas com a condução do professor.

Para a terceira pergunta diretriz da pesquisa: *de que forma os processos envolvidos no pensamento matemático avançado e o software geogebra influenciam na aquisição do conhecimento e quais dificuldades podem ser sentidas pelos discentes na realização das atividades?*

Ficou notória a satisfação dos alunos em perceber os objetos matemáticos sendo trabalhados por um programa de fácil manuseio, porém de pouco acesso na Universidade, já que nem todos os docentes utilizam em suas aulas. Na avaliação analisada, no entanto, mostrou-se eficiente com a visualização dos gráficos e do comportamento das derivadas em determinados pontos, provando ser possível usar o raciocínio sobre tal tecnologia e no final do exercício ainda transpor este conhecimento para um conteúdo de aplicação, taxas relacionadas.

Essa conclusão vai ao encontro do que seja criar conhecimento e não apenas executar o que um algoritmo determina. O *software* aguçou a vontade de criar e não ser um mero repetidor de algo definido pelo docente. Com isso, os alunos não terceirizaram sua criatividade, mas tiveram a oportunidade de usar gambiarras com o ferramental das derivadas e o raciocínio que pôde ser obtido com esse instrumento.

Concluindo as questões que suscitaram a pesquisa, indagou-se: *quais resultados para a ação docente e discente podem ser inferidos com o uso da Sequência Fedathi e a Teoria do Pensamento Matemático Avançado?*

Essa pergunta foi respondida com a caracterização sistemática do professor bom, do bom professor, aluno bom e bom aluno. Os alunos mostraram o impacto sensível ao terem

uma aula com um professor cujo comportamento era diferente de tudo o que eles já haviam presenciado. Não obstante, a mudança na prática pedagógica do docente produziu um comportamento também diferenciado nos alunos que, *de motu* próprio se sentiram à vontade para participar das aulas e, até mesmo, expor suas soluções sem quaisquer amarras emocionais que pudessem prejudicá-los. Em adição, não se pode deixar de frisar a conduta de mediação que em conjunto com as outras categorias analisadas, ficou evidente o quanto foram decisivas para que o Pensamento Matemático Avançado pudesse ser estabelecido com base nessa transformação não só de hábito, mas, também, de vivência.

Para que o experimento fosse uma fonte de dados imparcial e respeitasse rigidamente um controle científico, foi desenvolvida nas aulas da disciplina TÓPICOS AVANÇADOS EM EDUCAÇÃO II - Sequência Fedathi: uma proposta de ensino lógico-dedutiva-construtiva, a Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi que contribuiu para melhor compreender e cumprir os objetivos pretendidos no início deste estudo.

Na etapa do problema, foi o projeto inicial, os estudos das disciplinas do doutorado e as orientações que deram impulso à problematização desaguando na modelização de um sistema formal no qual foi elaborado um modelo de estratégia a ser cumprido no decorrer da pesquisa qualitativa. A aplicação usou a metodologia de ensino Sequência Fedathi para atingir os objetivos predefinidos e, como instrumentos metodológicos, recorremos ao diário de campo, a entrevistas coletivas, a questionários e testes. Na etapa dos resultados, foi possível analisar os dados sob os auspícios das categorias de análise elencadas, os princípios da Sequência Fedathi e, assim, atingir as metas que a pesquisa havia se prontificado.

Logo, um percurso controladamente traçado permitiu que a experimentação fornecesse dados e análises sem a variável parcialidade, propiciando, com isso, a potencialidade dos recursos metodológicos que foram aplicados e consequentes análises o mais próximas possível da realidade.

Quanto a uma possível mensuração do quantitativo aprendido pelos alunos, revela-se uma limitação e indícios de pesquisas futuras, já que o intuito foi provar o amadurecimento na construção do conhecimento matemático na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, finalizando com a consubstanciação do aprendizado do conteúdo de taxas relacionadas e as reflexões que foram geradas com a desestabilização criada desde a saída da “zona de conforto” com uma nova maneira de conduzir a aula pelo docente. Afinal os alunos aprenderam de verdade? Os testes por si mostram o crescimento no conteúdo matemático, cabendo a cada um deles continuar os estudos e se comportar como investigadores, assim como foram formados indiretamente no decorrer das aulas do grupo de estudos.

Podemos, quem sabe, de maneira qualitativa, mensurar o quão eficaz foi a aplicação da metodologia de ensino Sequência Fedathi. Para isso, foi realizado uma entrevista coletiva sem a presença do docente que geriu o grupo de estudos, obtendo as gravações apenas posteriormente. As duas professoras-doutoras que analisaram a turma quanto à aplicação do método de ensino poderiam ter obtido resultados não esperados ou terem manipulado as respostas, porém os alunos, de modo tácito, disseram que o comportamento do docente não era legítimo com o que até então eram acostumados a presenciar. Além disso, com suas palavras descreveram cada categoria elencada pela Sequência Fedathi e afirmaram haver vivenciado algumas etapas distintas, como o *plateau*, tomada de posição, maturação, solução e prova, tendo sido respeitado o tempo de aprendizagem de cada um.

Esta pesquisa trouxe uma característica diferenciada de outros trabalhos no ensino de Matemática: emoção matemática. Como a Matemática afeta as emoções e vice-versa! Os desafios em cada aula eram vivenciados pelos alunos com entusiasmo, mostrando como aquela estratégia utilizada pelo docente estaria quebrando as barreiras emocionais que a cultura matemática pregava. Já não existia medo ou ansiedade ao ir à lousa mostrar sua questão, pois o aluno e o docente já eram “cúmplices emocionais e cognitivos” um do outro. A história de vida e de aprendizado de cada aluno foi valorizada, dando a cada o tempo necessário para que se sentissem à vontade em participar das aulas.

Portanto, como ponto central da pesquisa, concluímos que o grupo de estudos possibilitou aos alunos a verdadeira vivência da SF, deixando-os serem protagonistas de suas ações, sendo conduzidas pelo comportamento docente. No *software Geogebra*, os alunos solitariamente fizeram Matemática e colheram os próprios resultados; houve, assim, uma percepção de como foi estabelecido o raciocínio dos alunos, em particular, sobre o conteúdo das taxas relacionadas: primeiro foi focado em sessões didáticas que relembraassem e revisassem os conteúdos prévios necessários; logo após, se iniciaram os estudos com questões contextualizadas, inclusive com a ferramenta computacional. Por fim, foram executadas aulas com o conteúdo sobre taxas de variação. Com isso e os fundamentos do método aplicado foi solidificado o raciocínio, e por esse meio, os alunos conseguiram o objetivo do aprendizado.

Como limitação do trabalho e consequente continuação dos estudos, não foi possível trabalhar de forma específica e aprofundada com os livros didáticos. Portanto, a partir dessa necessidade, pretende-se continuar os estudos na área do Cálculo Diferencial e Integral com o apoio da SF, PMA e auxílio de recursos computacionais com vistas a escrever um livro didático que contemple tais teorias e, em adição, o conteúdo de CDI.

Não foi objetivo criar sessões didáticas rígidas com um formato imutável para que professores pudessem utilizar como parâmetro em suas aulas, mas sim mostrar a potencialidade de como mudar o comportamento docente pode transformar sobremaneira as práticas discentes.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. **Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros.** *EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA*. v. 13-3, 2011, P. 597-626, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive>. Acesso em: 16 abr. 2015.
- ALVES, F. R. V. **Insights: Descrição e possibilidades de seu uso no ensino do cálculo.** *Vidya, Santa Maria*, v. 32, n. 2, p. 149-161, jul./dez. 2012.
- ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**, 2011. 397 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- ARRUDA, J. S. ; DIÓGENES, R. . **Superfícies mínimas em  $R^3$  e o Problema de Plateau.** In: IV Semana Universitária da UNILAB, 2017, Redenção. Anais da IV Semana Universitária, 2017. v. 1.
- BARBOSA, G. O. **Raciocínio lógico formal e aprendizagem em cálculo diferencial e integral: o caso da universidade federal do ceará.** 1994. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1994.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa, Portugal: Edições 70, LDA [2009?].
- BARROSO, N. M.C. **Um modelo de ensino dos conceitos de cálculo para os cursos de engenharia fundamentado em uma epistemologia histórica e baseado na metodologia da engenharia didática: validação por meio do conceito de integral.** 2009. 187f. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.
- BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral.** 1999. 184f. Tese de doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.
- BECKER, F. **a epistemologia do professor de matemática.** Petrópolis, RJ: vozes, 2012.
- BLOCH, I.: *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université: savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation.* 2000. 390 f.. Tese doutorado. Université de Bordeaux 1. Bordeaux.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** porto, portugal: porto editora, 1994.

BORGES NETO, H. **Uma proposta lógico-constructiva-dedutiva para o ensino de Matemática**. 2016. 28f. Tese (Ascensão a Professor Titular) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

BORGES NETO, H.; CAPELO BORGES, S. **As Tecnologias Digitais no Desenvolvimento do Raciocínio Lógico**. *Linhas Críticas*, v. 13, n. 24, p. 77-87, 2007.

BORGES NETO, H. **TÓPICOS AVANÇADOS EM EDUCAÇÃO II - Sequência Fedathi: uma proposta de ensino lógico-dedutiva-constructiva**. 22/02 a 26/06 de 2018. Notas de Aula.

BORGES NETO, H. LIMA, I. P. SANTOS, M. J. C. **A Sequência Fedathi: Concepções e Princípios para uso no Ensino de Matemática**. Montevideo, Uruguai: VII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2013.

CARDOSO, R. P. L. **MASF: Modelo de Referência para aplicação da Sequência Fedathi na formação profissional e na produção de conteúdo**. 2015. 180 f. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará (Faculdade de Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza, 2015.

CATAPANI, E. C. **Cálculo em serviço: um estudo exploratório**. São Paulo: *Bolema/Unesp*, 2001, ano 14, nº 16. p.48-62.

CORNU, B. **Limits. Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Press.1991, p. 153-166;

COSTA, C. **Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: visualização**. In: ENCONTRO DA SEÇÃO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO, 11, 2002, Coimbra, Portugal. *Anais...* Coimbra, Portugal, 2002, p. 257-273.

CUNHA, Celso; CINTRA, Lindley. **Nova gramática do português contemporâneo: de acordo com a nova ortografia**. 6 ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2013. 762 p.

DA SILVA, C. A.; Da Silva, B. A. **A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10º, 2010, Salvador. *Anais...* Bahia: UCSal, 2010, p.1-11.

Descartes, R. **Regras para a direção do espírito**. Tradução J. Gama. Lisboa: Edições 70, 1985.

DE LIMA, S. A.; DA SILVA, S. C. R.; Junior, Guataçara dos Santos; De Almeida, Marina Ferreira Araújo. **O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de administração: Principais Dificuldades de Aprendizagem dos alunos**. *Anais do IV Simpósio Nacional de ensino de Ciências e Tecnologia*. Ponta Grossa, 2014.

DEMO, P. **Elementos metodológicos da pesquisa participante**. Em: Brandão, C. R. *Repensando a pesquisa participante*. São Paulo: Brasiliense, 1999.

Dreyfus, T. (1991). **Advanced mathematical thinking processes**. In: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* . p. 25-41. Dordrecht: Kluwer.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no início do superior**. 2003. Trabalho não publicado. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. *In*: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 25-41.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer. Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. **Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics**. Educational Studies in Mathematics, 1999. 1991. p. 38, 1-3, 111-133.

FARIA, W. **Mapas Conceituais: aplicações ao ensino, currículo e avaliação**. São Paulo: EPU, 1995.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathematics: an educational approach**. 2 ed. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1994.

FERREIRA, J. C; PIERMATEI FILHO, O. **Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado: imagem de conceito e definição de conceito**. *In*: CIBEM, 7., 2013, Montivideo, Actas... Montevideo, 2013. p. 1874-1881. Disponível em: <[www.ufjf.br/mestradoedumat/files/.../Produto-educacional-Juliano-Cezar-Ferreira.pdf](http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/.../Produto-educacional-Juliano-Cezar-Ferreira.pdf)>. Acesso em: 11/12/2016.

FONTENELE, F. C. F. **A Sequência Fedathi no ensino da Álgebra Linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I: a análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. 2013. 298 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. São Paulo. 2013.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1991.

IGLIORI, S. C. B.; ALMEIDA, M. V. **Educação matemática no ensino superior e abordagens de Tall sobre o ensino: aprendizagem do Cálculo**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17617/pdf>>. Acesso em: 11/12/2016.

JANZEN, Elen Andrea. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica**. 2011. 194 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

JUCÁ, A. M. **O Computador Como Ferramenta Para Mediação de Atividades a Distância de Reforço Escolar em Matemática**. Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Núcleo de Educação, Currículo e Ensino, linha de pesquisa Educação Matemática, da Faculdade de Educação-FACED da Universidade Federal do Ceará-UFC, junho 2004, Fortaleza (CE), p135.

JUNIOR, A. O. **Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de matemática – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática**, 2006.263 f.. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. São Paulo, SP: Artmed Editora, 1997.

LOPES, A. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, n.26/27, p.123-146, jun./dez. 1999. (Matemática Universitária)

MALTA, I. **Linguagem, leitura e matemática**. In: CURY, H. N. Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p.41-62.

MORELATTI, M. R. M. **Criando um ambiente construcionista de Aprendizagem em cálculo diferencial e integral I**. 2001. 260f. Tese (Doutorado em Educação)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

MOREIRA, M.A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. São Paulo: Cantauro Editora, 2010.

MOREIRA, W. **Revisão de literatura e desenvolvimento científico: conceitos e estratégias para confecção**. *Janus*, Lorena, v.1, n.1, p. 19-30, 2004. Disponível em: <<http://publicacoes.fatea.br/index.php/janus/article/view/1/1>>. Acesso em: 11/12/2016.

NÓBREGA-TERRIEN, S.; TERRIEN, J. **O estado da questão: sua compreensão na construção de trabalhos científicos: reflexões teórico-metodológicas**. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 15, n. 30, p. 5-16, jul./dez. 2004.

PINHEIRO, A. C. M. **A Mediação** In: BORGES NETO, H. (Org.) Sequência Fedathi: fundamentos. Fortaleza, CE: Edições CRV, 2018.

PRASLON, F. **Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement**. 2000. 27 f. Tese. Université de Paris 7. Paris;

QUEIRÓ, J. F. **Teoria dos Números**. Departamento de Matemática, FCTUC, Coimbra, Universidade de Coimbra, 2002.

REIS, F. S. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 302 f. Tese de doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas.

ROCHA, E.: **Tecnologias Digitais e Ensino de Matemática: Compreender para Realizar**. 2008. 200 f. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Ceará. 2008.

ROCHA, Elizabeth Matos. **Uso de instrumentos de medição no estudo da grandeza comprimento a partir de sessões didáticas**. Dissertação Curso de Pós-Graduação em Educação

Brasileira, Núcleo de Educação, Currículo e Ensino, linha de pesquisa Educação Matemática, da Faculdade de Educação-FACED da Universidade Federal do Ceará-UFC, junho 2006, 226 f. Fortaleza (CE), 2006. p. 208.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 450 f. Tese de doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

SANTANA, A. C. S. **Mão no bolso: postura, metodologia ou pedagogia?** In: BORGES NETO, H. (Org.) *Sequência Fedathi: fundamentos*. Fortaleza, CE: Edições CRV, 2018.

SFARD, A. **On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin**. *Educational Studies in Mathematics*, 1991. p. 22, 1-36.

SOUSA, F. E. E. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. 2015. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/14363> Acesso em: 21 Jul. 2018.

SOUSA, F. E. E. Aplicação da Sequência Fedathi e a exigência de um novo contrato didático. In: SOUSA, F. E. E. *et al.* (Org.). **Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática**. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

SOUSA, F. E. E. *et al.* (Org.). **Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática**. Fortaleza, CE: Edições UFC, 2013.

SOUZA, M. J. A. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediada por tecnologias digitais**. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010. Disponível em: <[http://www.teses.ufc.br/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=6521](http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=6521) > Acesso em: 21 Abr. 2015.

SOUZA, D. V. **O Ensino de Noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2016. São Paulo: [s.n.], 2016. 159f. Disponível em: [https://spo.ifsp.edu.br/images/phocadownload/DOCUMENTOS\\_MENU\\_LATERAL\\_FIXO/POS\\_GRADUA%C3%87%C3%83O/MESTRADO/Ensino\\_de\\_Ci%C3%A4ncias\\_e\\_Matem%C3%A1tica/Dissertacoes/O-Ensino-de-No%C3%A7%C3%B5es-de-C%C3%A1lculo-Diferencial-e-Integral-por-meio-da-Aprendizagem-Baseada-em-Problemas-Disserta%C3%A7%C3%A3o-e-Produto-Final.pdf](https://spo.ifsp.edu.br/images/phocadownload/DOCUMENTOS_MENU_LATERAL_FIXO/POS_GRADUA%C3%87%C3%83O/MESTRADO/Ensino_de_Ci%C3%A4ncias_e_Matem%C3%A1tica/Dissertacoes/O-Ensino-de-No%C3%A7%C3%B5es-de-C%C3%A1lculo-Diferencial-e-Integral-por-meio-da-Aprendizagem-Baseada-em-Problemas-Disserta%C3%A7%C3%A3o-e-Produto-Final.pdf) Acesso em: 10 Set. 2018.

TALL, D. Computer environments for the learning of mathematics. In: BICHLER, R. et al. (Eds.) **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluwer, 1994. p. 189-199.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. Differing modes of proof and belief in Mathematics. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS: UNDERSTANDING PROVING AND PROVING TO UNDERSTAND*, 2002, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, 2002. p. 91–107. Disponível em: <<https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002k-proof-3worlds.pdf>>. Acesso em: 11/12/2016.

TALL, D. **Thinking Through Three Worlds Of Mathematics**. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288, 2004d

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *In: TALL, D. O. (Ed). Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991, p. ?-?.

TORRES, A. L. M. M. **Sobre tecnologias, educação, formação e etnografia: a experiência do Laboratório de Pesquisa Multimeios da Faculdade de Educação (UFC)**. 2014. 207f. – Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza (CE), 2014.

VASSALLO NETO, Rafael. **A Didactical Proposal for the Teaching of Isometry and Dilation Mediated by Dynamic Geometry Software**. 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching. University of Algarve, Faculty of Sciences and Technology. Portugal: Ualg, 2015.

WROBEL, J. S.; ZEFERINO, M. V. C.; Carneiro, T. C. J. **Um mapa do ensino do cálculo nos últimos 10 anos do Cobenge**. Anais do XLI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Gramado, 2013.

ZARPELON, E.; DE RESENDE, L. M. M.; PINHEIRO, N. A. M. **Uso de Mapas Conceituais na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1: Uma estratégia em busca da aprendizagem significativa**. Anais do IV Simpósio Nacional de ensino de Ciências e Tecnologia. Ponta Grossa, 2014.

ZUCHI, I.: **A Abordagem do Conceito de Limite via Seqüência Didática: Do Ambiente Lápis Papel ao Ambiente Computacional**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina. 2005.

## APÊNDICE A - FORMULÁRIO DE CADASTRO GRUPO DE ESTUDO

### ÁREA DO CONHECIMENTO:

Matemática e Educação Matemática

### Denominação do Grupo de Estudo:

Grupo de Estudos de Cálculo Diferencial e Integral

### Dados do coordenador do Grupo de Estudo:

**Nome:** Daniel Brandão Menezes

**Titulação:** Mestre

**Curso /Centro/Instituição:** Matemática/ CCET/ U

**Telefone:** 85988718419

**Email:** [danielbrandao@multimeios.ufc.br](mailto:danielbrandao@multimeios.ufc.br)

### Tema de Estudo

O Tema do estudo será o Cálculo Diferencial e Integral de uma variável com a aplicação da metodologia Sequência, Teoria do Pensamento Matemático Avançado e uso da Tecnologia.

( ) Carga horária semanal: \_\_\_\_\_ horas **ou** ( x ) Carga horário mensal: 20 horas

### Objetivo

#### Objetivo Geral

Amadurecer os estudos de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável.

#### Objetivos Específicos:

Rever a Teoria de Cálculo Diferencial e Integral com o uso da metodologia Sequência Fedathi e a Teoria do Pensamento Matemático Avançado;

Oportunizar objetos de estudos inerentes ao Cálculo para que os alunos desenvolvam suas pesquisas;

Analisar se houve coerência e mudança de comportamento nos estudos dos alunos;

Escrever artigos e levar os alunos a comparecer a eventos na área da Matemáticos e da Educação Matemática propiciando a cultura de pesquisa acadêmica.

### Justificativa

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral motivou o surgimento deste grupo de estudos a partir de reflexões oriundas da prática em sala de aula obtidas, bem como, a preocupação com a notória dificuldade de aprendizado dessa disciplina por parte dos discentes, e a crescente importância dessa disciplina para o cenário científico e tecnológico, em que cada vez mais seus conceitos e aplicações se fazem necessários aos profissionais da área das ciências exatas e afins.

A experiência obtida com a condução dessa disciplina mostrou ser necessário procurar mecanismos tais como a metodologia de ensino Sequência Fedathi que auxiliem a mediação docente em aulas sobre o conteúdo de aplicações das derivadas com taxas relacionadas. Além disso, conduzir o curso sob essa prática metodológica ativa elaborada motiva melhorias no ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Este grupo busca, portanto, ampliar as reflexões sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral e da Matemática como um todo, podendo despertar diferentes percepções e atitudes na práxis docente, suscitando a vontade de reelaborar a forma de abordagem dos conceitos matemáticos discutidos por meio da Sequência Fedathi, Teoria do Pensamento Matemático Avançado, Redes de Petri e o uso das tecnologias, percorrendo caminhos favoráveis à reflexão discente sobre o conteúdo de Cálculo e buscando superar as dificuldades inerentes ao próprio conteúdo.

### Equipe do Grupo de Estudo

#### Docente/pesquisador

Membros	Curso	Instituição
Daniel Brandão Menezes	Matemática	UVA

#### Discente

Membros (discentes/bolsista)	Curso	Instituição

Em 26/04/2017



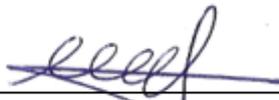

---

Assinatura do Coordenador(a) do Grupo

**Parecer da Coordenadoria do Curso em relação à proposta de criação do Grupo de Estudo :**

Conforme apreciação e deliberação do colegiado, a coordenação está de acordo com a proposta apresentada.

Em 27 de abril de 2017



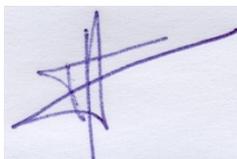
---

Assinatura do Coordenador(a) do Curso

**Parecer da Diretoria de Centro em relação à proposta de criação do Grupo de Estudo:**

Parecer favorável face a importância da atividade proposta.

Em 28 de abril de 2017



---

Assinatura do Diretor (a) de Centro

**APÊNDICE B – CARTA DE ANUÊNCIA****UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ****CARTA DE ANUÊNCIA**

Declaro, para os devidos fins, que concordo em participar do Projeto de Pesquisa, intitulado “O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da proposta metodológica Sequência Fedathi” sob a responsabilidade do Pesquisador Daniel Brandão Menezes, do Curso de Doutorado em Educação, na Faculdade de Educação - FACED, da Universidade Federal do Ceará, desenvolvendo as atividades que me competem, pelo período de execução previsto no referido Projeto.

---

**Assinatura**

---

**NOME****CPF Nº** \_\_\_\_\_**Fone(s) para contato** \_\_\_\_\_**E-mail** \_\_\_\_\_

**APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL SOBRE O GRUPO DE ESTUDOS****UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ****AVALIAÇÃO**

1. As atividades (desenvolvidas no Grupo de Estudos em Cálculo Diferencial e Integral) contribuíram para a ressignificação dos seus conhecimentos sobre as aplicações das Derivadas? Em quais aspectos ou tópicos do conteúdo?
2. Quais as maiores dificuldades sentidas ao estudar as aplicações da Derivada durante o Grupo de Estudos?
3. Você acha que a utilização do *software Geogebra* ajudou na aquisição dos conceitos de Derivada? Explique.
4. O que você achou da metodologia utilizada pelo professor na condução das aulas? O formato trabalhado contribuiu para sua aprendizagem?
5. Como descreveria a metodologia com a qual o professor conduziu as aulas? Explique tudo que foi observado por você no decorrer das aulas.
6. A metodologia abordada diferencia-se de outros estilos de aula de matemática que você vem estudando? Em que aspectos? Considera as diferenças positivas?
7. Que ações do professor, realizadas no decorrer das aulas, foram mais importantes para sua aprendizagem?
8. Que outras ações poderiam ter sido realizadas nas aulas, para melhorar ainda mais seu nível de aprendizagem? Justifique.
9. Como avalia sua participação nas aulas e atividades trabalhadas?
10. Comentários / sugestões / observações.

## APÊNDICE D – AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE DO USO DA SEQUÊNCIA

### FEDATHI



## UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Tópicos a serem avaliados pela Professora Doutora Maria José Araújo Souza e Professora Mestra Francisca Cláudia Fernandes Fontenele na pesquisa realizada pelo Professor Mestre Daniel Brandão Menezes:

#### 1 – Plateau

\*Como se dava a revisão de alguns conteúdos necessários ao aprendizado do novo conhecimento?

#### 2 – Tomada de Posição

\*Os problemas apresentados quando resolvidos generalizavam as resoluções para outras situações?

\*Os problemas eram bem entendidos e explicados.

#### 3 – Maturação

\*O aluno tinha tempo para pensar? Maturar?

\*O professor se intrometia nas ações do aluno independentemente se o aluno chamasse?

\*O professor dava logo as respostas? Como era feito?

#### 4 – Solução

\*Os alunos apresentavam suas soluções?

#### 5 – Prova –

\*O professor usava as soluções dos alunos para formalizar o conteúdo e dar a resposta ao problema?

#### 6 – Como foi a postura do professor no decorrer das aulas?

7 – Como foram as primeiras aulas? Eram aulas parecidas com as das que são planejadas na graduação?

8 – O uso de tecnologia, como foi dado? As atividades realizadas estiveram no mesmo formato das aulas?

9 – Houve dificuldade em se adequar ao perfil de aula que era conduzido pelo professor?

10 – Houve por parte dos alunos real aquisição de conhecimento? Dava pra se perceber um antes e depois?

### APÊNDICE E – PRÉ-TESTE

Curso	Disciplina	Nº Questões	Período / Ano / Semestre	
Matemática	Grupo de Estudos	06		
Professor		CPF	Turno	Data
Daniel Brandão Menezes			Manhã	
Aluno(a)			Nota	

#### QUESTÃO 1

Uma escada de 8m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?

#### QUESTÃO 2

Enche-se um reservatório, cuja forma é a de um cone circular reto, de água a uma taxa de 0,1 m<sup>3</sup>/s. O vértice está a 15m do topo e o raio do topo é de 10m. Com que velocidade o nível h da água está subindo no instante em que h = 5m.

#### QUESTÃO 3

Um ponto move-se sobre a semicircunferência  $x^2 + y^2 = 5$ ,  $y \geq 0$ . Suponha  $dx/dt > 0$ . Determine o ponto da curva em que a velocidade de y seja o dobro da de x.

#### QUESTÃO 4

O raio de uma esfera está variando, com o tempo, a uma taxa constante de 5 m/s. Com que taxa estará variando o volume da esfera no instante em que o  $r = 2m$ ?

#### QUESTÃO 5

Os lados x e y de um retângulo estão variando a taxas constantes de 0,2 m/s e 0,1 m/s, respectivamente. A que taxa estará variando a área do retângulo no instante em que  $x = 1m$  e  $y = 2m$ ?

## APÊNDICE F - PÓS-TESTE

Curso	Disciplina	Nº Questões	Período / Ano / Semestre	
Matemática	Grupo de Estudos	06		
Professor		CPF	Turno	Data
Daniel Brandão Menezes			Manhã	
Aluno(a)				Nota

### QUESTÃO 1

Suponhamos que o óleo derramado através da ruptura de um navio-tanque se espalhe em uma forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de 2 metros por minuto. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando seu raio for de 60 metros?

### QUESTÃO 2

Uma quadra de beisebol é um quadrado cujos lados medem 90 pés. Suponha que um jogador correndo da segunda para a terceira base tenha uma velocidade de 30 pés/s no instante em que está a 20 pés da terceira base. Qual é a taxa de variação da distância do jogador à base do batedor naquele instante?

### QUESTÃO 3

Um balão esférico é inflado de tal forma que seu volume cresce a uma taxa de  $3 \text{ cm}^3/\text{min}$ . Com que rapidez o diâmetro do balão estará crescendo quando o raio for de 1 cm?

### APÊNDICE G – AVALIAÇÃO 1 COM O USO DO SOFTWARE *GEOGEBRA*

Curso	Disciplina	Nº Questões	Período / Ano / Semestre	
Matemática	Grupo de Estudos	02		
Professor		CPF	Turno	Data
Daniel Brandão Menezes			Manhã	18/05
Aluno(a)				Nota

#### QUESTÃO 1

Sua empresa foi contratada para fazer um projeto para captação de água da chuva em uma residência. Para isso, deve ser construído um tanque cilíndrico para armazenar a água, com capacidade para 1.000 litros. Sua tarefa é determinar as dimensões que minimizarão o custo para construir esse reservatório.

- a) Descreva, sucintamente, como você irá levar o custo em consideração para resolver o problema;
- b) Escreva uma fórmula  $S(x)$  para a área do tanque em função da medida  $x$  do raio da base;
- c) Construa o gráfico dessa função no GeoGebra;
- d) Determine o valor de  $x$  que torna a área mínima e o valor da área mínima, explicando suas conclusões;
- e) Salve sua construção no GeoGebra, gravando-a como Atividade 1.
- f) Verifique, utilizando derivadas, os valores de  $x$  e da área mínima obtidos no item anterior.

#### QUESTÃO 2

Segundo a legislação ambiental de Minas Gerais, “consideram-se de preservação permanente, no Estado, as florestas e demais formas de vegetação natural situadas ao longo dos rios ou de qualquer curso d’água [...]” (Decreto nº 33.944, de 18 de setembro de 1992). Um fazendeiro possui uma propriedade próxima a um rio reto e deseja cercar a área de preservação determinada pelo decreto citado. Sua tarefa é determinar as dimensões do campo retangular a ser cercado, sabendo que não é necessário cercar ao longo do rio e que, dispondo de 1200 m de cerca, é possível atender a condição determinada na legislação, desde que seja cercada a área máxima.

- a) Verifique que, com diferentes formas de cerca, obtemos áreas diferentes do campo retangular;
- b) Obtenha as expressões para a área  $S$  e para o perímetro  $P$ , em função do comprimento  $x$  e da largura  $y$ , em metros, da cerca e a seguir, obtenha a expressão da área  $S$  apenas em função de  $x$ ;
- c) Construa o gráfico dessa função no GeoGebra;
- d) Determine o valor de  $x$  que torna a área máxima e o valor da área máxima, explicando suas conclusões;
- e) Salve sua construção no GeoGebra, gravando-a como Atividade 2.
- f) Verifique, utilizando derivadas, os valores de  $x$  e da área máxima obtidos no item anterior.