



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

ADRIANA FERREIRA MENDONÇA

SEQUÊNCIA FEDATHI NA FORMAÇÃO DOCENTE: O CONCEITO DE FUNÇÃO

FORTALEZA

2017

ADRIANA FERREIRA MENDONÇA

SEQUÊNCIA FEDATHI NA FORMAÇÃO DOCENTE: O CONCEITO DE FUNÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M494s Mendonça, Adriana Ferreira.
Sequência Fedathi na formação docente : o conceito de função / Adriana Ferreira Mendonça. – 2017.
111 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

1. Sequência Fedathi. 2. Formação docente. 3. Conceito de função. I. Título.

CDD 370

ADRIANA FERREIRA MENDONÇA

SEQUÊNCIA FEDATHI NA FORMAÇÃO DOCENTE: O CONCEITO DE FUNÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ___/___/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a. Dr^a. Ana Maria Iório Dias
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a. Dr^a. Ivoneide Pinheiro de Lima
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho ao meu marido, Jorge Luiz, e a minha irmã (filha), Juliana.

AGRADECIMENTO

À FUNCAP, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, pelas orientações.

Aos professores componentes da banca examinadora, Ana Maria Iório Dias e Ivoneide Pinheiro de Lima, pelo tempo, colaborações e sugestões.

Aos professores participantes da pesquisa, Cláudia, Zelia e Wellington, pelo tempo concedido ao longo da investigação.

Aos colegas da turma de mestrado, Danielle Rodrigues, Denize Silveira, Lidiana Osmundo, pelas reflexões, críticas, sugestões recebidas e momentos de interação.

Aos meus dez irmãos e ao meu pai: Ari, Solange, Daniele, Fernanda, Daniel, Andréa, Arimatéia, Felipe, Maurício, Rafael e Juliana.

Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas!
(Mario Quintana)

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi verificar se a proposta Sequência Fedathi contribui para o ensino do conceito matemático de função. Os participantes desta pesquisa foram professores de uma escola da rede pública que fizeram uma formação para apreenderem os fundamentos da proposta. Especificamente, foram identificadas as concepções docentes acerca deste conceito, contribuindo com sua (re)construção, discutiu-se elementos históricos e epistemológicos. Analisou-se, ainda, as mudanças na prática docente após a formação continuada. A escolha da Sequência Fedathi foi associada à sua finalidade de orientar as ações docentes na elaboração e planejamento de aulas e, ainda, porque tem uma conexão muito forte com o ensino de conceitos, ao valorizar a resolução de problemas, a investigação, generalização e formalização. As produções de Andrade (2011), Fontenele (2013), Sousa (2015), Pinheiro (2016) e Borges Neto (2013, 2017) fazem parte do referencial acerca da proposta Fedathi, enquanto Descartes (1989), Kleiner (1989), Davis e Hersh (1986), Fischbein (2002) Ávila (2010) compõem a referencial sobre a intuição e a formalização de conceitos. Metodologicamente, esta pesquisa empregou os princípios da etnometodologia com suporte na pesquisa participante, o que permitiu a interação da pesquisadora com os participantes da pesquisa, flexibilidade para mudanças de percurso em decorrência das visões dos sujeitos e ênfase no processo. Os resultados apontam para mudanças significativas nas atitudes dos professores, ao considerarem que a proposta Fedathi contribui no ensino do conceito de função e que pode ser utilizada em contextos diversos, propiciando uma aula mais dinâmica, com a participação ativa dos alunos.

Palavras-chave: Sequência Fedathi. Formação de professores. Conceito de função.

ABSTRACT

The purpose of this paper was to verify if the proposed Fedathi Sequence contributes to the teaching of mathematical concepts, especially the function. In order to do so, this research specifically sought to identify the teaching conceptions about this concept, contributing to its (re) construction, discuss historical and epistemological elements and also analyze possible changes in teaching practice after continuing education. The choice of the Fedathi Sequence was associated with its purpose of orienting the teaching actions in the process of class preparation and planning, and also because it has a very strong connection with the teaching of concepts when valuing problem solving, research, generalization and formalization. The production of Andrade (2011), Fontenele (2013), Sousa (2015), Pinheiro (2016) and Borges Neto are part of our reference to the Fedathi proposal, while Descartes (1989), Kleiner (1989), Davis and Hersh (1986), Fischbein (2002) Avila (2010) make up the reference on intuition and the formalization of concepts. Methodologically, this research used the principles of ethnomethodology with support in the participant research that allowed the researcher to interact with the research subjects, flexibility for course changes due to subjects' views and emphasis on the process. The results point to significant changes in the teachers' attitudes that considered that the Fedathi proposal contributes to the teaching of the concept of function and that can be used in diverse contexts providing a more dynamic class with the active participation of the students.

Keywords: Fedathi Sequence. Teacher training. Concept of function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – Esquema para compreensão das fases da Sequência Fedathi.....	29
Figura 02 – Máquina de calcular.....	48
Figura 03 – Maturação na atividade para aplicação docente.....	67
Figura 04 – Alunos na fase de Maturação na sessão didática 2.....	78
Figura 05 – Alunos na fase de Solução na sessão didática 3.....	82

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	A PROPOSTA DE ENSINO SEQUÊNCIA FEDATHI	23
2.1	Sequência Fedathi para a formação do professor de Matemática	23
2.2	Sequência Fedathi na elaboração de conceitos matemáticos: o caso das funções.....	30
3	REVISITANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO	40
3.1	Elaboração de conceitos matemáticos para o ensino.....	40
3.2	Elaboração e formalização do conceito de função.....	44
3.3	A intuição na construção do conceito de função.....	48
3.4	Obstáculos epistemológicos	51
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DOS DADOS	55
4.1	Caracterização da pesquisa.....	55
4.2	Fases da pesquisa e categorias de análise.....	56
4.3	Descrição e análise dos dados.....	58
4.3.1	Planejamento de área e o período de formação continuada.....	58
4.3.2	Sessão didática 1 – Professora Zelia.....	73
4.3.3	Sessão didática 2 - Professora Cláudia.....	76
4.3.4	Sessão didática 3 – Professor Wellington.....	79
4.4	O que acontece após a aplicação da sessão didática?.....	83
4.4.1	Indo além do curso de formação continuada.....	84
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	86
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE A - CRONOGRAMA DE FORMAÇÃO CONTINUADA	93
	APÊNDICE B - ATIVIDADES PARA APLICAÇÃO I e II	94
	ANEXO A - PARTE I: Revisitando o conceito de funções	101
	ANEXO B - PARTE II: A Sequência Fedathi	108
	ANEXO C – Termo de autorização de uso de imagem e depoimentos	112

1 INTRODUÇÃO

É oportuno e necessário investigar a maneira como a formação de professores, seja inicial ou continuada, contribui para a prática docente e para a qualidade dos processos educativos no âmbito escolar. Vale destacar que as formações têm um caráter duplo: a melhoria das ações desenvolvidas pelo professor e da qualidade da aprendizagem para os alunos.

Assim, os desafios à formação de professores ampliam os argumentos favoráveis ao fortalecimento de ações para o aperfeiçoamento do desempenho docente que permitam a interlocução dos seus conhecimentos teóricos e práticos. É lícito dizer que a mudança provocada nos professores, decorrente da formação, “tem importância tanto para o professor individualmente, quanto para a sua ação docente, pois, na relação com seus alunos, ele ressignifica suas práticas, reconstrói seus signos e se modifica constantemente” (PINHEIRO, 2016, p. 51).

Therrien (2010) reporta-se ao profissional docente, que é mediador da aprendizagem e que deve ter em sua formação conhecimentos específicos e a habilidade do saber ensinar, ou seja, aspectos teóricos e práticos necessários em sua profissão. Nesta mesma perspectiva, Tardif (2014) discorre sobre os saberes docentes, argumentando que a prática é um espaço de produção, transformação e estimulação de saberes. Desta maneira, consideramos que

A formação continuada pode contribuir na formação do professor com vistas a suprir as carências de formação no âmbito didático-pedagógico. A necessidade surge da prática e enseja perspectivas de aprendizagem na formação continuada dentro de um ciclo de vida profissional, permitindo um amadurecimento pessoal que reconstrói a identidade profissional, na dimensão humana, política e social do professor. O profissional em exercício se constrói para aprender conhecimentos que preencham lacunas na formação inicial, para se atualizar e incorporar outros projetos nas atividades profissionais. (PINHEIRO, 2016, p. 54).

Especificamente na formação de professores de Matemática, ainda deparamos o ensino que prioriza os conteúdos em detrimento dos conhecimentos pedagógicos associados a esses conhecimentos. Nossa experiência como professora e gestora educacional, nos faz perceber as lacunas do processo formativo deste profissional.

Considerando que o conhecimento matemático se faz pela elaboração de conceitos e não por meio de práticas mecanizadas de repetição de exercícios e do uso de fórmulas em sua resolução, destacamos que o uso de conceitos no discurso matemático é fundamental para

a aquisição do conhecimento e que, para serem ensinados, necessitam de um domínio no âmbito disciplinar em várias perspectivas, seja epistemológica, histórica ou pedagógica.

Transpondo a diversificação de atividades, o ensino de Matemática deve ser norteado por estruturas que possibilitem a formulação de conceitos e, conseqüentemente, a compreensão das conexões que se estabelecem entre os diversos conceitos matemáticos. Por isso, a escolha das metodologias de ensino deve ser analisada cuidadosa e rigorosamente, conhecendo-se seus fundamentos e possibilidades para cada situação. Deste modo, buscamos aprofundar nosso estudo sobre a elaboração de conceitos no ensino de Matemática.

Vygotsky (2005), por exemplo, ensina a palavra como centro da questão. A linguagem desenvolvida pelas pessoas permite que sejam identificadas as características dos objetos e, como consequência, o conceito desse objeto. Essa identificação do conceito inicia-se na infância e somente na puberdade ocorre o amadurecimento dos conceitos com o desenvolvimento das funções intelectuais. Assim, a diferenciação entre os tipos de conceitos, espontâneos e científicos, deve ser tomada como elemento norteador da prática do professor de Matemática, porquanto esta disciplina se organiza com apelo em conceitos. Os conceitos científicos, segundo Sforni (2004, p. 84) “são abordados baseados na generalização” e, além disso, na elaboração desse tipo de conceito, ele é entendido “como um prolongamento da formação dos conceitos espontâneos e, com essa compreensão, organiza o ensino” (p. 84).

Vygotsky (2005) também destaca a generalização na apreensão de conceitos. Todo conceito é uma generalização que permite a identificação consciente das características comuns dos objetos matemáticos. A palavra *triângulo*, por exemplo, é uma generalização para todos os tipos de triângulos. Com amparo nessa compreensão, o aluno pode, com base em outros conceitos, inferir a existência de tipos específicos de triângulos (retângulo, acutângulo, escaleno, por exemplo). No caso do conceito de função, algo semelhante acontece: a palavra *função* representa todos os tipos de função, tais como afim, quadrática, trigonométrica ou mesmo aquelas que não recebem um nome específico. O entendimento deste conceito, que acontece por via de representações mentais e de sua formalização, implica o entendimento de todo tipo de função, acrescentando-se as características específicas de cada uma delas.

Sierpinska (1992) aponta as dificuldades de aprendizagem do conceito de função que devem ser observadas pelo professor de Matemática. Os obstáculos de natureza epistemológica identificados envolvem aspectos que se desenvolveram ao longo de sua evolução histórica, além daqueles surgidos na prática educacional. Tais obstáculos, segundo a

autora, devem ser considerados na prática docente de modo a não negligenciar sua existência, mas propor caminhos de superação destes pelo aluno.

Como exemplo dos obstáculos expressos por Sierpinska (1992) temos: (1) a maioria dos alunos tem dificuldade em lidar com aqueles conceitos sem aproximação com sua realidade, (2) a dificuldade em lidar com representações diversas do conceito de função, (3) reconhecer modelos matemáticos, (4) diferenciar as variáveis dependente e independente e (5) fazer generalizações. Trazemos a relação completa destes obstáculos no Capítulo 3 (Página 38).

Além dos obstáculos epistemológicos, ao tratarmos do conceito de função, observamos que dois fatores são determinantes para seu entendimento: intuição e formalização. Autores como Fischbein (2002) e Ávila (2010) consideram que os processos criativos sucedem pela intuição de conceitos. É também por intermédio da intuição que ocorre o desenvolvimento do raciocínio matemático. Em razão da natureza complexa do raciocínio fundado na intuição, contudo, se prioriza o ensino apoiado na formalização precoce de conceitos, antecipando-se o uso de fórmulas e cálculos.

A generalização do conceito de função, sendo um fenômeno do pensamento, também deve ser considerada em todo processo de ensino. O significado dado às palavras e aos símbolos no contexto de resolução de problemas acarreta um aprendizado no sentido de compreender o objeto matemático e os fatos que podem ser a ele relacionados.

Sobre a formação dos conceitos matemáticos, com origem nas relações entre os diversos registros que um objeto matemático pode ter, Duval (2009, 2011) exhibe o uso dos registros de representação semiótica. No caso das funções, podemos citar os registros gráfico, figural, forma analítica e a própria língua materna. Para que ocorra a aquisição dos conceitos, é necessário, segundo a autor, a mobilização de pelo menos dois registros de representação. Nesse sentido, dois aspectos do ensino de Matemática são evidenciados nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a falar e a escrever sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados; (BRASIL, 1998, p.56-57).

Os obstáculos enfrentados pelos alunos no uso das representações do conceito de função, já evidenciados em Sierpinska (1992), têm relevância na formação docente e muitos

reflexos na aprendizagem dos estudantes. Nas pesquisas realizadas por Duval (2009), por exemplo, uma atividade que solicitava aos alunos a mudança de uma representação algébrica para outra gráfica, foram identificadas dificuldades no uso da linguagem, principalmente quando as duas representações não tinham aproximação semântica. Todo conhecimento matemático está associado a representações que, ao favorecerem a formulação do pensamento matemático, devem ser valorizadas na prática docente.

Ante o exposto, observamos que as práticas tradicionais de ensino que priorizam os conceitos com pauta no excesso de formalismo, na não observância dos obstáculos inerentes a este conhecimento, ou, ainda, não atentam para os aspectos cognitivos dos alunos na aquisição de conceitos, não têm dado conta de responder às dificuldades dos alunos frente ao conceito de função. Nesse sentido, Therrien (2012) garante que os saberes especializados devem ser transformados pedagogicamente, refletindo sobre o que se ensina para, nas palavras do autor, “se admitir o pressuposto de que o professor transforma o conhecimento para torná-lo acessível a seus alunos (2012, p. 3).

Com efeito, adotamos em nossa pesquisa a proposta de ensino Sequência Fedathi que propõe ações a serem desenvolvidas pelo professor com a finalidade de melhorar sua prática dentro e fora de sala de aula. Esta proposta remete à necessidade de um planejamento adequado para cada aula, para toda sessão didática que for aplicada.

A proposta Fedathi tem um caráter de fortalecimento das ações docentes implicando a valorização da participação dos alunos em cada aula, em toda situação prevista na resolução de problemas. Outro fator que nos motiva a utilizar essa proposta de ensino é que ela tem uma conexão intensa com os elementos norteadores do ensino de conceitos matemáticos, especialmente o de função. Como exemplo, podemos citar o valor conferido à resolução de problemas, a investigação de situações, a interligação com generalizações e com a formalização das ideias matemáticas.

A literatura mostra que distintas abordagens são expressas sobre a formação do professor de Matemática e em situações mais específicas, como o ensino do conceito de função, busca-se tornar o ensino mais significativo. Nessa perspectiva, com o intuito de identificar os estudos relativos ao conceito de função e à formação docente, realizamos um levantamento em quatro repositórios:

- Banco de teses da Capes¹ e Repositório da Universidade Estadual do Ceará (UECE) no intuito de encontrar pesquisas que tratem da formação do professor de Matemática;
- Banco de dissertações do PROFMAT² com o propósito de buscar trabalhos sobre formação de professores na temática conceito de função; e
- Repositório da Universidade Federal do Ceará com o escopo de colher trabalhos acerca da Sequência Fedathi.

Brandim (2005) exprime que “a efetivação de qualquer mudança no campo educacional passa necessariamente pela formação dos professores” (p.134). Sua pesquisa teve como objetivo caracterizar a formação do professor de Matemática e compreender que aspectos possibilitaram a formação deste profissional no Programa de Formação Docente em Nível Superior - Magister. Seus resultados indicam que a preocupação com o ensino da Matemática se refere mais às metodologias e a conteúdos e menos à formação do professor.

Os participantes de sua pesquisa eram professores de Matemática e, em seus relatos, declararam não terem sido preparados para atuar como professores e que acabavam ensinando do jeito que aprenderam. Alguns relatam falta de preparo para as dificuldades de ensino e aprendizagem do conteúdo, manifestando sua insegurança ao tratarem de assuntos, como, por exemplo, Geometria. No geral, os professores participantes da pesquisa tinham os conhecimentos matemáticos constituídos formalmente pela experiência. Todos reconhecem a necessidade de formação em aspectos que permitam o aprofundamento dos assuntos ensinados e, ainda, conhecimento pedagógico (de conteúdo e curricular) (BRANDIM, 2005).

Neste raciocínio, Pinheiro (2008) expõe suas considerações sobre formação docente argumentando a importância dos saberes matemáticos, exprimindo destaque, também, para os saberes relativos ao ensino, de currículo e dos processos de aprendizagem. Segundo a autora,

Formar professores é trabalhar os saberes e as práticas em diversos níveis e situar, a partir dos saberes e das práticas, os pontos em que podem articular lógicas que são e permanecerão heterogêneas. Há saberes que não poderão ser postos diretamente numa prática, como há práticas que não poderão ser fundamentadas teoricamente em toda sua concepção. (PINHEIRO, 2008, p. 39).

¹ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

² Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, tendo o objetivo de aprimorar a formação docente e melhorar o ensino de Matemática em todos os níveis.

Assim, ela destaca que a integração dos saberes com a prática requer maior atenção na formação docente.

Pesquisa de Lima, (2008) tratou do conceito de função na formação inicial do professor de Matemática. Seu objetivo foi “descrever como os alunos do primeiro ano da Licenciatura em Matemática da UECE ressignificam o conceito matemático de função, diante de processo interventivo, baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel” (p. 18). A proposta alia os conhecimentos matemáticos e pedagógicos mediante a reflexão e ressignificação. A autora ressalta a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos (futuros professores) sobre conhecimentos matemáticos e de aprendizagem de conceitos.

No levantamento com os participantes da pesquisa, Lima (2008) verificou que o entendimento sobre o conceito de função é bastante heterogêneo com evidências de dificuldades e contradições. Por esse pretexto declara a necessidade de, na formação docente, desenvolver sua ressignificação. Acentua que por meio da aprendizagem significativa, a aprendizagem dos participantes se mostrou significativa.

Com destaque para a importância da formalização, Moura (2011) buscou identificar as contribuições de *sites* na formação do conceito de função e as implicações na aprendizagem dos alunos. Estes puderam, nessa pesquisa, formalizar o conteúdo da sala de aula e identificar tarefas do cotidiano, onde era possível aplicar o conceito de função. Para o autor, a formalização e o uso da internet são bons aliados para motivar a aprendizagem. Destacamos o fato de que a pesquisa de Moura (2011) aborda um assunto relevante para o ensino. A formalização de conceitos não acontece de maneira simples e requer do professor a busca por meios que atendam as especificidades do próprio conteúdo e também as dificuldades dos estudantes.

Castro (2015) teve como objetivo desenvolver material sobre o conceito função, tendo como público alvo professores da Educação Básica. A autora justifica sua busca com a ausência de material destinado aos professores e demanda “verificar junto aos professores que trabalham diretamente com o conceito quais as principais dificuldades enfrentadas no seu dia a dia e quais as dificuldades enfrentadas pelos alunos na apropriação deste conceito” (2015, p. 8).

A abordagem da pesquisa, no entanto, se limitou a essa verificação das dificuldades docentes seguida de uma análise de livros didáticos e de uma posterior resolução de problemas indicadas para professores, mas sem sua participação. Nessa pesquisa, o único

contato com os professores foi na aplicação do questionário que ensejava conhecer as dificuldades sobre o conceito de função.

Acerca de nossa temática, que une o conceito de função, as concepções docentes relativas a esse conceito e a proposta de ensino Sequência Fedathi, embora pertinente para a Matemática escolar, não encontramos nenhum trabalho, seja em teses, dissertações ou periódicos, embora, isoladamente, cada tópico exiba um vasto número de investigações. A Sequência Fedathi, objeto de várias pesquisas empíricas no ensino de Matemática, denota resultados significativos na formação docente. Encontramos o total de 39 investigações desenvolvidas no Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Ceará. Muitas delas são direcionadas à formação docente, com realização de formações e aplicação de sessões didáticas e oficinas pedagógicas que fortalecem os conhecimentos docentes sobre os temas estudados. No caso do conceito de função, encontramos um só trabalho (SOUZA, 2015) que privilegia uma proposta didática para uso do software *Geogebra* no ensino de função afim.

Souza (2015) verificou se o uso do *Geogebra* aliado à proposta de ensino Sequência Fedathi favorecia a formação dos conceitos referentes à função afim. Seus resultados foram satisfatórios na integração da proposta de ensino e do recurso tecnológico. Alguns elementos da Sequência Fedathi, como o emprego da pergunta na interação com os alunos, foram evidenciados na atitude docente. A proposta Fedathi também possibilitou a autonomia discente na resolução dos problemas, na medida em que o professor passou a valorizar a participação dos estudantes durante a aula. A pesquisa de Souza (2015) reafirmou a importância da mediação docente, destacando a noção de que “o aluno é protagonista e o professor é mediador, as aulas não são silenciosas, porém são interativas e participativas” (p. 102).

Consideramos, mediante a análise de seus fundamentos, que a proposta de ensino Sequência Fedathi tem potencial para diminuir as dificuldades na apreensão do conceito de função, pois fomenta o trabalho discente por via da resolução de problemas, da modelagem matemática e por ter concepções fundamentadas na formalização e na generalização, características intrínsecas ao conceito de função.

Assim, a indagação que esta pesquisa se propõe responder, valendo-se de um processo formativo docente voltado à (re)constituição do conceito de função por parte dos professores da Educação Básica, é: De que modo os fundamentos da proposta de ensino Sequência Fedathi favorecem a elaboração do conceito de função?

Por meio desta pergunta e dos estudos analisados, apontamos nosso objetivo de pesquisa, que é verificar se a proposta de ensino Sequência Fedathi contribui para o ensino do conceito de função. Especificamente pretendemos (1) identificar as concepções dos professores acerca do conceito de função, antes e depois da formação continuada, com apoio na Sequência Fedathi; (2) investigar os métodos utilizados pelos professores no ensino do conceito de função; (3) analisar se houve mudanças na prática docente após a formação desenvolvida na escola com um acompanhamento posterior à formação.

Esta pesquisa é de natureza qualitativa com abordagem etnometodológica. Escolhemos a observação participante por favorecer a interação dos participantes com o pesquisador, haja vista a flexibilização nas ações, permitindo, ao longo do processo, reflexões sobre o cotidiano das pessoas e a interpretação dos significados no contexto vivenciado (MENNELL, 1975; OLIVEIRA e MONTENEGRO, 2012).

O trabalho está estruturado em cinco capítulos. O capítulo 1 exhibe nossas ideias introdutórias incluindo a exposição da temática e formação docente no ensino de Matemática, além de nossos objetivos e metodologia da pesquisa.

A fundamentação teórica foi dividida em dois capítulos. O capítulo 2 exhibe um detalhamento sobre o conceito de função e inicia com a explanação deste conceito no ensino de Matemática. Destacamos, também, elementos que fortalecem o entendimento, tais como formalização, generalização e intuição. Por fim, sublinhamos os obstáculos epistemológicos que causam dificuldades ao professor no ensino do conceito de função. O capítulo 3 traz a fundamentação da proposta de ensino Sequência Fedathi em dois aspectos: o primeiro, mais amplo, sobre a formação do professor de Matemática e, o segundo é específico na contribuição desta proposta na elaboração de conceitos matemáticos, especialmente o de função.

O capítulo 4 exhibe os instrumentos e os procedimentos da pesquisa, englobando as fases e a descrição, a análise da formação continuada, bem como das sessões didáticas aplicadas pelos professores. Esta pesquisa empregou os princípios da etnometodologia, com suporte na pesquisa participante, que permite maior interação com os participantes, flexibilidade para mudanças no percurso em decorrência das visões dos sujeitos e ênfase no processo.

O capítulo 5 é destinado às nossas considerações finais. Nele apresentamos algumas contribuições da pesquisa e, ainda, uma reflexão de nossos resultados. Os resultados apontam para mudanças significativas nas atitudes dos professores, ao considerarem que a

proposta Fedathi contribui no ensino do conceito de função e que pode ser utilizada em contextos diversos, propiciando uma aula mais dinâmica, com participação ativa dos estudantes.

2 PROPOSTA DE ENSINO SEQUÊNCIA FEDATHI

A Sequência Fedathi contrapõe-se ao ensino tradicional, ensejando aos professores a apropriação de um modelo de ensino em que docente e discente se achem motivados e engajados nas situações de aprendizagem, e, ao final, ambos possam dizer que valeu a pena todo o esforço e a dedicação por sentirem em suas vidas o resultado das aprendizagens.

(Maria José Araújo Souza)

Neste capítulo tratamos da proposta de ensino Sequência Fedathi, de alguns de seus fundamentos e do modo pelo qual ela pode ser significativa na formação do professor de Matemática. Reportamo-nos, ainda, à importância desta proposta de ensino na elaboração de conceitos matemáticos, especificamente, do de função.

Tomamos como referência parte da produção acadêmica do Laboratório de Pesquisa Multimeios, que possui amplo conjunto de obras, incluindo teses, dissertações (ANDRADE, 2011; FONTENELE, 2013; SOUSA, 2015; SILVA 2015; PINHEIRO, 2016), artigos científicos (MENEZES, 2016; BORGES NETO et al., 2001) e livros (SOUSA, 2013; BORGES NETO, 2017). Ao abordar as ideias de generalização e formalização do conceito de função, apoiamos-nos em Vygotsky (2001), Polya (2006), Davis e Hersh (1986), Lima, E. (2010) Kaput (1999) e Kaput e Blanton (2011).

2.1 Sequência Fedathi na formação do professor de Matemática

A multiplicidade dos processos de ensino de Matemática engloba um conjunto de aspectos que devem ser observados na formação docente. Os saberes, o uso de metodologias e a adequação ao contexto vivenciado por alunos e professores, são alguns exemplos. Assim, a qualidade do ensino de Matemática em todos os níveis está associada a uma adequada formação do professor que crie oportunidades e momentos de reflexão sobre a práxis. Nesse sentido, devemos ter clara a ideia de que

Em alguns momentos, é necessário parar para aprender, reaprender ou mesmo dar novos significados à sua base conceitual e didática. Esta é a formação continuada que não pode ser entendida apenas no estreito conceito de treinamento, no sentido de modelagem de comportamento, mas como uma continuidade da formação profissional que se iniciou na graduação pela habilitação ao magistério. (PINHEIRO, 2016, p. 50).

Na perspectiva dos saberes docentes, Therrien (2011) concebe o professor como um sujeito que domina saberes oriundos de vários campos de conhecimento e que produz significados ao transformar pedagogicamente esses saberes. Essa transformação pedagógica dos saberes exige do professor conhecer e dominar os conhecimentos a serem ensinados numa interação dialógica com o aluno, permitindo a formulação do conhecimento.

Mediante sua experiência, na relação intersubjetiva com seus alunos, o professor permite que seus saberes possam dar significado aos dos estudantes, isto é, efetiva a transformação pedagógica que sustenta os saberes docentes. Assim, atentamos para uma formação que considere os saberes docentes e discentes na constituição de cada sujeito e que provoque mudanças em suas ações. A integração entre os saberes e os sujeitos é geradora de um ambiente mais favorável tanto para o ensino quanto para a aprendizagem. Therrien (2007), nesse sentido, afirma que, no trabalho docente, a mediação, a interação do professor com os estudantes e o conteúdo de ensino são componentes do processo educativo que fazem parte da instrução e da formação humana.

O “saber-ensinar” é, portanto, uma competência que deve ser objeto de formação específica tendo em vista que o bom ou mau desempenho docente pode afetar sua identidade e a de seus alunos. À vista disso, é necessária a integração dos conhecimentos disciplinares e do “saber-ensinar” nos aspectos teóricos e práticos de mediação pedagógica.

Com efeito, notamos que as especificidades dos processos de ensino demandam conhecimentos cada vez mais especializados que observem as singularidades das pessoas envolvidos nesses processos. Nossas discussões, embora centradas na formação do professor de Matemática, não estão dissociadas do aluno e dos saberes desses sujeitos, uma vez que as relações estabelecidas entre eles estão integradas de maneira indissociável.

A formação docente exige que tratemos de abordagens diferenciadas, associadas ao domínio dos assuntos ensinados que possam contribuir com o fazer em sala de aula. Nesse sentido, consideramos os estudos de Tardif (2014), que expressam a ideia de uma formação docente que contenha elementos de reflexão, discernimento e compreensão de situações problemáticas relativas ao contexto e às práticas profissionais. Para o autor,

Todo saber implica um processo de aprendizagem e de formação; e, quanto mais desenvolvido, formalizado e sistematizado é um saber, como acontece com as ciências e os saberes contemporâneos, mais longo e complexo se torna o processo de aprendizagem, o qual, por sua vez, exige uma formalização e uma sistematização adequadas (TARDIF, 2014, p. 35).

Tardif (2014) refere-se aos conhecimentos específicos do ofício do professor, argumentando que a prática deste profissional conduz a um espaço de produção, transformação e estimulação de saberes. Para o autor, o professor não é apenas um transmissor de informações já prontas, organizadas. O professor, detentor de saberes plurais, se constitui com origem nos conhecimentos de sua formação profissional, apoiado, ainda, nos saberes curriculares, disciplinares e experienciais (Quadro 01).

Quadro 01 – Saberes docentes

Saberes docentes	Descrição
Saberes da formação profissional	Transmitidos aos professores pelas instituições de ensino na formação inicial ou continuada. Estão associados aos conhecimentos educacionais e pedagógicos
Saberes disciplinares	Pertencentes aos diversos campos do conhecimento e o acesso a eles se dá pelas instituições educacionais.
Saberes curriculares	Apresentam-se sob a forma de programas escolares aplicados pelos professores.
Saberes experienciais	Resultantes do exercício da prática docente; são produzidos no espaço escolar, pelas relações com os sujeitos.

Fonte: Tardif (2014, p.48-49)

Em Tardif (2014), os professores sinalizam para o reconhecimento dos saberes advindos da experiência como o alicerce de sua competência, ou seja, é a experiência que determina as representações da realidade docente e, nas relações com os alunos, é que as competências e os saberes são legitimados. O professor, em suas interações com o ambiente escolar, principalmente com os alunos, exerce sua atividade num ambiente propício a muitas reflexões. Nessa interação, que exige do processo de ensino escolhas permanentes, Tardif (2014) discute, pois, a ação do professor na perspectiva de sua prática e de sua capacidade de desempenhá-la, reafirmando que os saberes experienciais são os que permitem sua integração com seu contexto de trabalho.

Nesse sentido, sendo o trabalho docente marcado pelas interações no espaço escolar, a participação dos alunos na sua aprendizagem requer do professor o emprego de objetivos de ensino que permitam sua permanente adequação com os alunos na escola, no planejamento de suas aulas e do processo avaliativo, reafirmando o que Tardif (2014) chama de professor ideal, ou seja, aquele que deve “conhecer sua matéria, sua disciplina e seu programa, além de possuir certos conhecimentos relativos às ciências da educação e à

pedagogia e desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos” (TARDIF, 2014, p. 39).

Embasados nas ideias dos saberes docentes, passamos a considerar a formação do professor de Matemática. Por meio do campo científico e profissional, que é a Educação Matemática, houve o favorecimento para um espaço de debate que suscita muitas reflexões acerca do uso de metodologias, aplicação de conteúdo e, ainda, discussões sobre a prática docente, permitindo associar à essa disciplina saberes de outras áreas ou mesmo ampliar os conhecimentos específicos da Matemática, contudo, numa visão mais ampla, capaz de produzir outros conhecimentos.

A proposta de Borges Neto et al (2001) para a formação do professor de Matemática implica a mudança de atitude com ações direcionadas para a mediação do conhecimento. Os objetivos de ensino só serão alcançados com suporte na condução de uma aula que motive os estudantes, propiciando a experimentação, explorando a curiosidade e valorizando erros e acertos.

Efetivamente, pois, o professor, na visão de Borges Neto et al (2001), “será um investigador de sua própria sala de aula”. Esse professor atende aos critérios do saber e do saber-fazer, à medida que entende que em sua formação, também é constituída em sala de aula, interage com o aluno e o estimula no trabalho colaborativo e cooperativo. O professor ao se apropriar de determinados princípios, torna-se, junto com os alunos e com os conhecimentos matemáticos, parte integrante na formulação dos saberes e não de assimilação mecânica de conteúdos, fórmulas ou expressões.

A formação de professores de Matemática deve, ainda, observar a linguagem utilizada em sala de aula. Por ser uma disciplina dominada pela simbologia, teoremas, demonstrações, é importante que se considere a maneira como são repassadas as informações para os alunos por meio de uma linguagem adequada ao nível cognitivo de cada aluno ou grupo de alunos.

Outro ponto de destaque nas pesquisas de Borges Neto et al (2001), é considerar o nível de prontidão dos alunos, ou seja, levar em conta os conhecimentos por eles já constituídos. Os conhecimentos prévios devem ser considerados no desenvolvimento da prática docente. Os saberes já acumulados e suas vivências devem ser observados pelo professor, sendo esses pontos indicadores para a atuação docente. O professor deverá, nesse sentido, levantar questionamentos, a fim de apreender as possíveis deficiências dos estudantes em relação aos conhecimentos anteriores que deveriam possuir.

Partindo dos elementos discutidos anteriormente – mediação, interação com o ambiente, saberes docentes e reflexão – trazemos a Sequência Fedathi, que tem como foco “orientar as ações desenvolvidas pelo professor na execução de um plano de aula ou sequência didática. A finalidade básica, a fim de promover a ressignificação da prática docente, é promover o ensino com ênfase na pesquisa, na investigação e na experiência através das mediações realizadas em sala de aula pelo professor” (MENDONÇA, 2017, p. 13).

Atentamos para o fato de que essa ressignificação da prática docente se dá de duas maneiras: internamente, quando o professor reflete a sua prática e compreende sua função de mediador do conhecimento, de facilitador da aprendizagem do aluno; externamente, na relação com os estudantes, ao pôr em prática os princípios da Sequência Fedathi.

A proposta de ensino Sequência Fedathi busca promover mudanças nas atitudes do professor, que passa a refletir sobre sua prática, acerca sua ação mediadora e a respeito da atuação dos estudantes que são favorecidos por meio de uma participação ativa sendo também investigadores do conhecimento (ANDRADE, 2011; SILVA, 2015; SOUSA, 2015).

Ao nortear as ações do professor, a Sequência Fedathi o conduz para a reflexão e também para a avaliação seu trabalho. Ao fim de cada etapa ou sessão didática, o professor, guiado pelos pressupostos dessa proposta de ensino, reconhece o ato de avaliar como necessário para a vivência de momentos posteriores ao ensino de cada assunto, uma vez que, além do aprofundamento de conteúdos matemáticos, a Sequência Fedathi propõe ao professor tornar-se um sujeito que investiga a própria prática.

A Sequência Fedathi, fundamentalmente, exprime quatro fases: tomada de posição, maturação, solução e prova (Quadro 02). O planejamento de uma aula baseada nesses pressupostos requer o cumprimento de cada uma dessas fases, que podem ocorrer mais de uma vez durante uma sessão didática (BORGES NETO, 2017; SOUZA, 2013).

Na tomada de posição, espera-se que professor exprima um problema generalizável e que o aluno, inicialmente, mobilize os conhecimentos necessários para resolução do problema que deve ter uma relação com os conhecimentos prévios, já conhecidos pelo professor, e o novo conteúdo a ser aprendido.

Na maturação, as ações docentes têm o sentido de orientar os estudantes, mas sem a interferência direta no processo. Os questionamentos advindos neste momento devem ser respondidos de modo a promover a curiosidade e o senso investigativo do aluno. A intervenção docente só há de efetivamente ocorrer se os alunos não conseguirem progredir na

busca de uma resposta para o problema. Nessa fase, os alunos identificam as variáveis envolvidas no problema que orientarão sua solução. Essa ocasião tem significativa influência da pergunta como estratégia de mediação didática (FONTENELE, 2013; SOUSA, 2015).

Quadro 02 – Descrição das fases da Sequência Fedathi

FASES	DESCRIÇÃO
Tomada de posição	Apresentação do problema.
Maturação	Compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema.
Solução	Apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema.
Prova	Apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado.

Fonte: Souza (2013).

Na solução, cabe ao aluno organizar e mostrar modelos e estratégias de resolução desenvolvidos na busca pela solução do problema. Nesta fase, espera-se que as ações do professor sejam “estimular e solicitar que os estudantes expliquem seus modelos e justifiquem a escolha de determinados caminhos” (SOUZA, 2013, p. 29). O professor deverá continuamente usar a pergunta na mediação para discutir os resultados expressos, indicando as lacunas observadas nos modelos que não satisfazem a solução do problema.

Na prova, fase final, o professor envolve-se com as generalizações do problema. A formalização dos resultados se dará mediante a “conexão entre os modelos apresentados e o modelo matemático científico a ser apreendido” (SOUZA, 2013, p. 33). Ao aluno cabe compreender a importância do uso de modelos na resolução de problemas a ensejarem a apreensão de mais conhecimento.

Os fundamentos desta proposta estão centrados na atitude docente, contudo, não podemos deixar de observar as implicações nas ações dos alunos, visto que as mudanças nas atitudes do professor refletem na dinâmica discente. O aluno estimulado pelo professor passa, como consequência, a ter autonomia e protagonismo na constituição de seus conhecimentos.

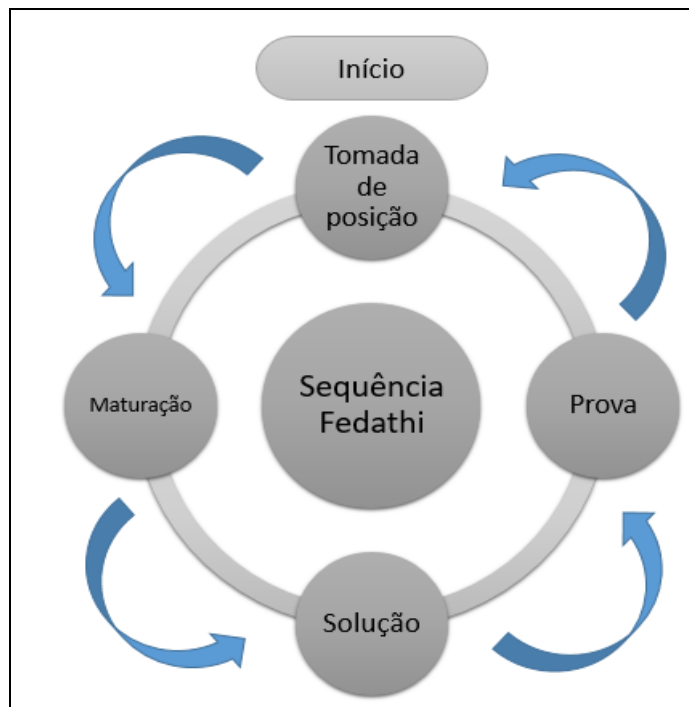
Ao se elaborar a sessão didática, a preparação deve ser muito bem pensada e organizada. O ponto de partida, que já caracteriza uma ação diferenciada do professor, é investigar os conhecimentos de seus alunos. A depender do assunto abordado numa sequência didática, deverá ser observado o nível de prontidão dos estudantes, ou seja, seu patamar

cognitivo e o que eles já sabem acerca desse assunto. Na Sequência Fedathi, esse momento é nomeado por *plateau* e corresponde aos conhecimentos prévios do estudante.

Plateau é uma palavra de origem francesa, cujo significado mais comum é planalto. Na vivência da Sequência Fedathi é utilizada como patamar, nivelamento ou base de equilíbrio do conhecimento do aluno, pensado no momento da preparação didática ou proporcionado pelo professor logo no início da aula sobre um conteúdo que precise de um nivelamento, ou seja, de uma base de conhecimento para ser ensinado (SOUSA, 2015, p. 57)

A elaboração de um conhecimento está imbricada com os conhecimentos já constituídos pelo aluno. Deve-se, portanto, dar uma atenção diferenciada a este aspecto dos ensinamentos já constituídos, pois, assim, pode-se evitar o fracasso escolar na aquisição de conteúdos. Para que isso aconteça, é necessário que o professor conheça bem o conteúdo a ser ensinado e quais os requisitos necessários ao aluno que permitirão sua aprendizagem. Essa ação investigativa do professor, além de contribuir na otimização de sua aula, confere ao ambiente escolar uma multiplicidade de possibilidades para o ensino e aprendizagem.

Figura 01 – Esquema para compreensão das fases da Sequência Fedathi



Fonte: Pesquisa direta

Outro aspecto da Sequência Fedathi que merece destaque na preparação de uma aula ou sessão didática é a atenção exigida em dois tipos de análise: teórica e ambiental

(SOUSA, 2015). A primeira diz respeito ao conhecimento do conteúdo, já considerando o *plateau* dos estudantes. Na segunda análise, a ambiental, o professor considera a realidade do local onde ministrará sua aula, o público envolvido, o nível de ensino e o tempo destinado às atividades. Envolve também o uso dos materiais e dos recursos que serão utilizados com base no assunto ou tema abordado. A escolha dos materiais a serem usados também é analisada neste momento, já que a escolha do local da aula pode influenciar as ações docentes.

Sendo assim, o trabalho do professor com observância mais criteriosa na preparação de aula, envolvendo as análises ora mencionadas, o *plateau* dos estudantes e os outros elementos constituintes da Sequência Fedathi, permitirá a vivência de todas as fases (tomada de posição, maturação, solução, prova) de modo consistente.

É importante destacar, ainda, o fato de que a formação, necessária no percurso de atuação do professor, não pode ser tratada como um treinamento de novas práticas. Segundo Becker, “o treinamento leva o professor a assumir uma prática, um conseguir, sem a compreensão, sem a teoria que lhe dá sentido e da qual se originou” (2012, p. 91). Novas práticas ou teorias devem ser incorporadas e consolidadas de maneira factual, de modo a legitimar as ações docentes. Não é o caso de aderir a uma nova proposta de ensino, mas de fortalecer a práxis docente com outros fundamentos e princípios antes não pertinentes.

Na perspectiva da proposta Fedathi, portanto, a docência se apoia num conjunto de concepções variadas sobre sua prática que vão além de conhecer os programas de ensino e a matéria a ser ensinada, embora esses pontos sejam muitos importantes na ação docente.

2.2 Sequência Fedathi na elaboração de conceitos matemáticos: o caso das funções

O pensamento matemático, em linha gerais, envolve situações onde estão os processos de generalização e formalização de conceitos, passando por demonstrações, provas e abstrações. Conforme Kaput, “é difícil apontar para sistemas matemáticos e contextos situacionais onde a atividade matemática não envolva esses dois processos. [...] A generalização e a formalização são intrínsecas à atividade matemática e ao pensamento - são o que tornam essa atividade matemática” (1999, p.5; tradução nossa)³.

³ “[...] it is difficult to point to mathematical systems and situational contexts where mathematical activity does not involve these two processes. [...] Generalization and formalization are intrinsic to mathematical activity and thinking—they are what make it mathematical.” (KAPUT, 1999, p.5)

Os diversos níveis de ensino sinalizam propostas que englobam tais características. O ensino de Álgebra, por exemplo, que ocorre desde os anos finais do Ensino Fundamental em formatos diferenciados e aprofundados de uma série para outra (BRASIL, 1998), exige do professor amplo domínio de competências associadas à capacidade de generalização e formalização para que possa, assim, transmitir os conteúdos a serem ensinados.

Quadro 03 – Objetivos do ensino de Álgebra para os ciclos de Ensino Fundamental

CICLOS	OBJETIVOS
3 ^o	Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.
4 ^o	Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades -, identificando as equações, inequações e sistemas; Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Fonte: BRASIL, 1998.

Nos ciclos descritos no Quadro 03, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam aos professores que proponham aos alunos situações diversificadas por meio das quais o aluno possa identificar as funções da Álgebra “ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas” (BRASIL, 1998, p.84). Nessa fase escolar, os alunos devem utilizar as representações algébricas para expressar regularidades e generalizações, como em sequências numéricas, por exemplo.

No Ensino Médio, as Orientações Curriculares para o ensino de Matemática, no bloco denominado *Funções*, mantêm o foco do ensino de Álgebra com direção para as generalizações e regularidades. O professor deve, portanto,

colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p. 70).

Com efeito, observamos, assim como Kaput (1999, p.2, tradução nossa)⁴, que, em muitos casos, “a álgebra escolar tem sido tradicionalmente ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desconectado tanto de outros conhecimentos matemáticos como do mundo real dos alunos”, não obstante existam as orientações que intentam o direcionamento para um ensino voltado para as ações mais práticas, relacionadas com o cotidiano dos estudantes.

Nesse sentido, o NCTM⁵ sinaliza algumas normas que devem nortear a organização do trabalho docente no que se refere ao ensino de Álgebra (KAPUT e BLANTON, 2011, p.8, tradução nossa)⁶:

- (1) compreender padrões, relações e funções;
- (2) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e
- (4) analisar a variação em diversos contextos.

Apoiado nessas normas, o professor pode utilizá-las como uma das possíveis vertentes para orientar estratégias de ensino relevantes para a aprendizagem de seus alunos no tocante à compreensão de conceitos no pensamento algébrico. A compreensão de padrões, a busca por regularidades em contextos diversos e o entendimento da linguagem algébrica que suscitam o reconhecimento de modelos matemáticos devem estar na Álgebra escolar.

Assim, consideramos importante apontar alguns estudos que referenciam o conceito de generalização para subsidiar e fundamentar a importância desse conhecimento na formação docente. Essas informações têm bastante utilidade para o aprofundamento dos estudos relativos ao conceito de função, nosso objeto de pesquisa.

O conceito de generalização é discutido sob diferenciados aspectos, em níveis de ensino distintos, que devem ser observados pelo professor em sua formação. É possível identificarmos seu sentido associado à abstração, à identificação de regularidades e padrões

⁴ School algebra has traditionally been taught and learned as a set of procedures disconnected both from other mathematical knowledge and from students' real worlds. (KAPUT, 1999, p.2).

⁵ National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]: organização de Educação Matemática. As normas mencionadas foram retiradas do documento *Principles and Standards* publicado no ano 2000 pela NCTM. É um documento que serve de referência para o ensino de Matemática.

⁶ (1) Understand patterns, relations, and functions; (2) Represent and analyze mathematical situations and structures using algebraic symbols; (3) Use mathematical models to represent and understand quantitative relationships; and (4) Analyze change in various contexts. (KAPUT, 2011, p.8)

ou como indução. Autores como Vygotsky (2001), Polya (2006), Davis e Hersh (1986) e Lima, E. (2010) exprimem algumas contribuições acerca do assunto.

Em Vygotsky (2001), a generalização está associada ao significado da palavra. O uso da palavra nas relações de generalidade só será alcançado dependendo do nível de desenvolvimento da pessoa. Por exemplo, a compreensão da sequência de palavras *mesa, cadeira, sofá, estante* associadas ao termo *mobília* não acontece ao mesmo tempo. A aprendizagem de cada termo não ocorre conjuntamente e o entendimento de conceitos generalizados deve ser considerado tão importante quanto o significado das palavras individualmente. Assim,

[...] a generalização de um conceito leva à localização de dado conceito em um determinado sistema de relações de generalidade, que são os vínculos fundamentais mais importantes e mais naturais entre os conceitos. Assim, generalização significa ao mesmo tempo tomada de consciência e sistematização de conceitos (VYGOTSKY, 2001, p. 292).

Outro aspecto discutido por Vygotsky (2005) relativamente à generalização foi a análise das percepções de semelhança e diferença, chegando à conclusão de que os sujeitos tomam consciência mais cedo da percepção de diferença. A causa disto estaria no fato de que as percepções de semelhança exigem generalidade e conceitualização mais avançadas. Essa generalização nos casos da semelhança pressupõe um conjunto de conceitos que abrange objetos semelhantes. A consciência da diferença pode aparecer de modos diversos sem precisar de generalizações.

Polya (2006) define generalização como “a passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento; ou a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contém o conjunto restrito” (p. 97). O autor considera que a generalização pode ser útil na resolução de problemas, haja vista que o problema geral se torna mais simples e permite o acesso a novos procedimentos de resolução.

Para Polya (2006), a generalização, assim como a particularização e a analogia, é instrumento da indução e permite uma visão mais ampla do objeto matemático que, “por tentativas, parte do esforço para compreender os fatos observados; baseia-se na analogia e é verificada por meio de outros casos particulares” (2006, p. 106). Segundo Polya (2006), muitas ideias matemáticas foram inicialmente encontradas por indução e só posteriormente foram demonstradas em sua generalização.

Por sua vez, Davis e Hersh (1986) consideram a generalização um fortalecimento, ou uma melhoria do caso particular e assinalam que “deveria ser cuidadosamente observado que, enquanto o geral inclui alguns aspectos do particular, não pode incluir todos os seus aspectos, pois cada particularidade garante privilégios adicionais” (1986, p. 166). Vejamos alguns exemplos trazidos pelos autores.

(1) A teoria geral das funções contínuas contém somente poucas informações interessantes sobre a função contínua particular $y=e^x$.

(2) Em um triângulo retângulo $c^2 = a^2+b^2$. Em um triângulo qualquer, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Nesse caso, a primeira conclusão pode ser obtida para $\cos C = 0$.

Em Lima, E. (2010) podemos ver um exemplo de generalização de funções na mesma disposição de Davis e Hersh (1986). A série de potências é definida como uma generalização natural dos polinômios. Uma série de potências corresponde a uma série de funções da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = (a_0 + a_1) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

Vemos, neste caso, que o sentido de generalização está associado à expressão que designa um conjunto de funções com uma característica em comum que pode ser particularizada com a substituição dos valores dos coeficientes e da variável x_0 .

Com base nas características da generalização, notamos que suas vantagens estão na consolidação das informações. Não nos referimos a uma consolidação como a simples memorização dos conteúdos, mas a que funciona como um meio para a elaboração de outros conceitos e que propicia a atribuição de significados e a interpretação crítica das informações, dos conteúdos.

O modelo de generalização da Sequência Fedathi aproxima-se daqueles apresentados por Polya (2006) e por Davis e Hersh (1986), que deixam explícito o fato de partir do particular para o geral, sendo o segundo caso o que permite a compreensão mais ampla do objeto de estudo.

As definições ora estabelecidas por parte de cada autor acerca da generalização resultam em relevantes para a compreensão de seu emprego na proposta de ensino Sequência

Fedathi, pois, sendo uma de suas características, a generalização existe ao longo de sua vivência, com a culminância na última fase, a prova, na qual o propósito é, desde o início, encaminhar o aluno para o processo de generalização dos modelos matemáticos desenvolvidos na resolução dos problemas.

Na tomada de posição, por exemplo, o professor deve exprimir situações generalizáveis para serem trabalhadas nas fases subsequentes, maturação e solução; na prova, quando o professor investe na formalização do conceito em estudo e valida os modelos matemáticos com observância no rigor da linguagem utilizada, espera-se que os alunos já tenham elementos mais sólidos para a aquisição de um saber.

Vale destacar a ideia de que a generalização empregada na Sequência Fedathi, com viés que consiste em partir de situações gerais para particulares, permite ao aluno a descoberta e a validação dos conceitos matemáticos. O sentido a ser percorrido pelo aluno é o da construção e da prova de conjecturas. Na fase da prova, os alunos são motivados a deduzir, com amparo em modelos gerais, modelos específicos aplicados em situações específicas (BORGES NETO et al., 2001).

Algumas pesquisas desenvolvidas com a Sequência Fedathi corroboram as informações destacadas quanto à pertinência da generalização na constituição do pensamento matemático. Assim, Sousa (2015, p.42) define a fase prova como o momento de formalização e generalização do modelo matemático a ser ensinado, sendo conduzida pelo professor. O autor destaca, entretanto, conforme já sinalizamos, a importância de o professor “selecionar ou criar um desafio que possibilite aos alunos pensar e utilizar estratégias e apresentar resultados que possam ser utilizados por ele (docente) no momento de formalização e generalização do conteúdo” (p.63).

Associado às questões levantados por Sousa (2015), destacamos, ainda, o fato de que, na generalização do problema, é fundamental que o professor faça uso das estratégias exibidas na solução, pois isto, além de motivar os alunos, promove a compreensão do modelo matemático sugerido pelos próprios alunos. Na prova, Sousa (2015) evidencia também que a maneira utilizada pelo professor para generalizar e a participação dos alunos merecem atenção nesse processo.

Alves (2011), na abordagem que trata do Cálculo a Várias Variáveis, também evidencia a fase de prova. Segundo o autor, houve a exploração cuidadosa da “revisão e generalização dos argumentos empregados nas fases anteriores” (p.380). Com relação a um dos sujeitos pesquisados, foi possível identificar suas estratégias de comparação e revisão

mostradas nas fases anteriores da proposta Fedathi. Esse processo foi também identificado com os outros sujeitos da pesquisa.

Outro experimento a ser destacado é o de Souza (2010). Ao descrever a proposta de ensino, a autora reúne alguns aspectos que considera fundamentais em sua aplicação (Quadro 04). No que tange ao professor, a generalização é um dos seus pontos de destaque. Esse aspecto configura um momento em que, já organizados e estruturados os conceitos, o professor encerra a prova sem dificuldades.

Quadro 04 – Aspectos da vivência pelo professor na Sequência Fedathi

Aspectos	Momento em que ocorrem
Planejamento Diagnóstico	Antecedem as etapas da Sequência Fedathi
Sequência de etapas Interação Experimentação Generalização	Vivência da Sequência Fedathi: interação, experimentação e generalização acontecem durante as etapas.
Avaliação	Posterior à vivência

Fonte: Adaptado de Souza (2010)

Essa particularidade da generalização evidenciada na Sequência Fedathi contribui de modo significativo para a aprendizagem de conceitos, especialmente daquele de função, pois, além de influenciar na capacidade de formular argumentos, estimula a experiência e propicia o desenvolvimento dos processos cognitivos que levam à generalização dos conceitos.

No campo das funções, vale destacar, é fundamental o reconhecimento do uso de variáveis e, na busca por regularidades, de sua generalização numa expressão matemática. Os processos intuitivos têm muita relevância na formulação do conceito de função, não obstante, há que se privilegiar a formalização e a generalização deste conceito.

O conceito de função, nosso objeto de estudo, por meio do uso de letras e de outros símbolos, generaliza as situações, possibilitando a feitura de modelos matemáticos, a utilização da mesma estratégia em situações diferenciadas e a efetivação de suas distintas representações.

Do ponto de vista mais prático, temos dois exemplos que recorrem à busca de padrões e de regularidades e, como a fase prova evidencia, a generalização do conceito envolvido. Vejamos:

Exemplo 1

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R\$1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R\$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R\$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então qual a expressão que relaciona V e x ? (Adaptada do Exame Nacional do Ensino Médio - 2009)

Resolução

Desconto	Preço por litro (x)	Litros de álcool vendidos por dia	Preço a pagar (V)
----	R\$1,50	10.000	$10.000 \times 1,50$
R\$0,01	$R\$1,50 - R\$0,01 = R\$1,49$	$10.000 + 100$	$10.100 \times 1,49$
R\$,002	$R\$1,50 - R\$0,02 = R\$1,48$	$10.000 + 200$	$10.200 \times 1,48$
R\$0,03	$R\$1,50 - R\$0,03 = R\$1,47$	$10.000 + 300$	$10.300 \times 1,47$
.	.		.
.	.		.
.	.		.
R\$0,0x	$R\$1,50 - R\$0,0x$	$10.000 + 100x$	$(1,50-0,0x).(10.000+100x)$

A expressão obtida pode ser simplificada:

$$V = (1,50 - 0,0x). (10.000 + 100x)$$

$$V = (150 + x). (100 + x)$$

$$V = 15.000 - 50x + x^2$$

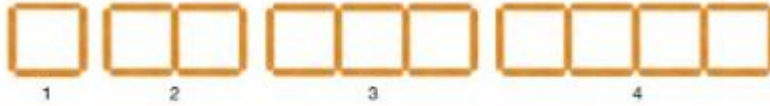
Comentário

Embora com maior nível de dificuldade, essa questão explora os processos intuitivos na busca das regularidades. Durante as fases de maturação e solução, os alunos devem explorar as variáveis x e V , encontrar uma relação entre elas e apontar seus modelos matemáticos. O professor deverá mediar as dúvidas e questionamentos que possam surgir ao longo da investigação. Além disso, há de estimular os alunos na experimentação de valores e na dedução do modelo para a situação proposta sem direcionar o pensamento dos estudantes, deixando-os refletir sobre suas ideias (MENEZES, 2016).

Na prova, quando ocorrem a formalização e a generalização, é importante que os alunos compreendam que a generalização permite o cálculo em situações diversas, para valores quaisquer, no entanto, não podem confundir generalização com fórmulas ou expressão matemática, já que o entendimento da relação funcional pode existir sem que o aluno consiga expressar na linguagem matemática os resultados.

Exemplo 2

A sequência de quadrados abaixo foi construída com palitos de sorvete. Note que o número de palitos utilizados varia de acordo com o número de quadrados.



- quantos palitos são necessários para construir a figura 10?
- quantos palitos são necessários para construir a figura 15?
- quantos palitos são necessários para construir a figura n ?

Resolução:

<p>a) Figura 1 = 4 palitos Figura 2 = 7 palitos Figura 3 = 10 palitos Figura 4 = 13 palitos ... Figura 10 = 31 palitos A figura 10 tem 10 quadrados.</p>	<p>b) Para a figura 15, teremos um total de 15 quadrados. Observe que o número da figura indica a quantidade quadrados. Observando a sequência de números, o resultado é o triplo do número de quadrados + 1. Nesse caso, fica mais simples calcular $3 \times 15 + 1 = 46$. A figura 15, terá 46 palitos.</p>	<p>c) A figura n terá n quadrados. O total de palitos depende da quantidade de quadrados. $4 = 3 \times 1 + 1$ $7 = 3 \times 2 + 1$ $46 = 3 \times 15 + 1$ Logo, a figura n terá $(3n + 1)$ palitos.</p>
---	---	---

Comentário

É importante determinar o modelo que caracteriza a sequência e encontrar uma equação que permita calcular o número de palitos. O professor pode ampliar a discussão e solicitar o número de palitos necessários para construir a figura 80, por exemplo, e, em seguida, analisar a relação entre as duas sequências de números obtidas, a que indica o número de quadrados e a que aponta a quantidade de palitos. É possível que os alunos não relacionem o número da figura com sua quantidade de quadrados. Isto posto, as ações do professor devem orientar, por meio de perguntas, essa percepção. De qualquer modo, é fundamental o professor ter em mente a ideia de que “as definições dos conceitos não são apresentadas no início da abordagem do assunto, mas podem ser exploradas pelos alunos, de modo que estes possam vivenciar sua construção, antes de ter contato com a definição formal” (PINHEIRO, 2016).

Na fase da prova, o professor deve envolver os alunos no processo que vai da noção intuitiva até a formalização, culminando na generalização do modelo. Ele deve notar que alguns alunos podem resolver a questão algebricamente para qualquer número de

quadrados envolvidos. Por isso, a linguagem simbólica utilizada deve ser reforçada e encorajada nos estudantes, que passarão a ter dificuldades na busca de resultados que compreenda números muito grandes.

Por meio dos exemplos dados, consideramos ser importante o fato de que o professor conduza os alunos a não incorrerem no erro de generalizações precipitadas ou generalizar um resultado ou uma propriedade com base apenas em alguns casos particulares. A argumentação lógica a ser trabalhada com os alunos deve levar em consideração o argumento de que a passagem do particular para o geral nem sempre ocorre espontaneamente ou de modo simplificado.

No ensino do conceito de função, o registro de leis gerais em linguagem algébrica deve ser acompanhado da compreensão de que o trato com os diversos registros de representação (língua natural, gráficos, tabelas, diagramas) exige um aprofundamento dos estudos que relacionam todas essas variáveis deste conteúdo.

Então, reforçamos a ideia de que, na formação do professor de Matemática, devem ser evidenciados elementos que permitam ao professor ensinar conceitos, especificamente o de função, fortalecendo o conhecimento do conteúdo e, ademais, com a inserção de uma metodologia de ensino que permita o envolvimento de professor e aluno na formulação do conhecimento.

3 REVISITANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO

Nesta sessão, discorreremos a respeito de alguns elementos pertinentes ao conceito de função que, pela sua importância no ensino, devem ser observados pelos professores em sua ação cotidiana.

Abordaremos, inicialmente, aspectos da elaboração de conceitos matemáticos, de modo geral, pertinentes para o ensino. Em seguida, cuidaremos da definição do conceito de função e algumas noções associadas permeando sua assimilação, que propiciam a formalização. Posteriormente, discutiremos a intuição na constituição do pensamento matemático, fator que influencia na compreensão docente e nas ações que se referem ao ensino do conceito de função. Finalmente, evidenciaremos a discussão que abrange o reconhecimento de obstáculos epistemológicos no alcance deste conceito.

3.1 Elaboração de conceitos matemáticos para o ensino

A apropriação e a manipulação de conceitos de modo consciente é uma realidade complexa e com muitos obstáculos. Na atividade escolar, para “apropriar-se do conteúdo do conceito e da forma de interação dele com a realidade não é um processo simples, exige uma mediação intencional sobre esses dois aspectos” (SFORNI, 2004, p. 73). Observando esse ponto de vista, entendemos a pertinência da compreensão docente dos elementos envolvidos no desenvolvimento de conceitos e sua influência no ensino.

Os conteúdos ensinados na escola, com sua multiplicidade conceitual, têm grande influência na formação do pensamento e desenvolvimento cognitivo discente. Deste modo, devemos observar que “o conhecimento científico e o domínio de conceitos mesmo representando uma organização complexa do pensamento humano, ao transformar-se em conhecimento escolar, marcado pela cultura escolar, podem ser assimilados pelos alunos” (SFORNI, 2004, p. 49).

Nesse sentido, a diferenciação proposta por Vygotsky (2001, 2005) acerca de conceitos espontâneos e científicos é por demais relevante em nossa discussão, sendo os do segundo tipo aqueles dos quais nos apropriamos ao longo da investigação. Os conceitos espontâneos são aqueles adquiridos nas práticas cotidianas da experiência pessoal do sujeito, enquanto os científicos são formados por meio do ensino formalizado sobre determinado

objeto de conhecimento. As motivações do sujeito para a aquisição desses dois tipos de conceitos são inteiramente distintas.

A aquisição dos conhecimentos científicos pode propiciar um círculo de conceitos e um vocabulário mais rico, tendo seu estudo importantes implicações para o ensino e aprendizado. A consciência se desenvolve, portanto, em meio aos conceitos científicos que possuem maior grau de generalização e abstração. A generalização se associa à formação de conceitos que evoluem juntamente com o significado das palavras (VYGOTSKY, 2001; 2005).

O que Vygotsky (2005) sugere é o ensino de novos conceitos de maneira consciente com origem naqueles já desenvolvidos no ensino escolar. Nesse sentido, o professor que segue a opção de ensinar conceitos diretamente, de modo mecânico, consegue apenas que os alunos assimilem palavras sem qualquer consistência, ocorrendo uma memorização que posteriormente causa dificuldades para o emprego de outros conceitos.

Estas ideias nos permitem acompanhar, mediada por um prisma raramente abordado em formações de professores de Matemática, a necessidade de aprofundamento sobre o desenvolvimento de conceitos. Com efeito, consideramos oportuno explorar os estudos de alguns pesquisadores que abordam o ensino de conceitos, notadamente os matemáticos.

Para Tall e Vinner (1981), por exemplo, os conceitos matemáticos, antes de serem objetivamente definidos, já eram parte da estrutura cognitiva de cada pessoa como imagens mentais e sua formalização ocorre mediante a experiência e as representações associadas, que irão, posteriormente, auxiliar no seu entendimento.

Os autores enfatizam que uma pessoa pode não se lembrar da definição do conceito, e que sua imagem pode estar associada a vários aspectos, como a ideia de função como uma regra ou como a correspondência entre dois conjuntos. Por isso, o professor deve trabalhar com as noções gerais da definição formal, antes de fazer uso das fórmulas e regras, para não restringir a imagem do conceito a essas regras de associação, já que a definição do conceito não influencia na cognição. Posteriormente, quando for necessário ampliar o contexto de ensino de funções, o aluno pode enfrentar dificuldades e ser incapaz de lidar com elas. Os autores acrescentam, ainda, que as imagens de um conceito possuem elementos que entram em conflito com a definição formal, sendo tais elementos sutis e de difícil percepção, causando, conseqüentemente, equívocos, ao ter a pessoa que lidar com a teoria formal.

Pais (2008), por sua vez, considera que a aprendizagem de conceitos é marcada por dificuldades relacionadas à não pertença imediata ou direta com a realidade. Acerca do estudo de conceitos, assinala que “o conceito é algo em permanente processo de devir, estamos sempre nos aproximando de sua objetividade, generalidade e universalidade, sem considerá-lo uma entidade acabada” (p.55). Deste modo, a formalização precoce de um conceito é um erro no qual não se deve incorrer, haja vista que sua formação envolve uma diversidade de outros conceitos e ocorre por meio de situações diversas, tendo implicações na constituição da imagem do conceito (TALL E VINNER, 1987; PAIS, 2008).

Destacamos, também, as pesquisas de Sfard (1992) e Normam (1992) que, ao abordarem as concepções do conceito de função, exibem amplas discussões pertinentes para a constituição dos saberes docentes. Essas pesquisas, desde que publicadas, se tornaram referências para outros estudos que abordam temática semelhante.

Nesse sentido, Sfard (1992) exprime as dificuldades e os equívocos de vários aspectos acerca do conceito de função. A autora dá atenção especial aos obstáculos que devem ser superados para propiciar a compreensão do conceito matemático de função e sua abordagem acerca das concepções matemáticas como operacional e estrutural (Quadro 05) amplia seus estudos, possibilitando amplo debate. Uma concepção operacional é aquela em que as noções matemáticas são dinâmicas, estão em movimento. Na concepção estrutural, as noções matemáticas têm um caráter formal; nessa concepção, geralmente, se utiliza de um conceito de partida já conhecido para chegar a outro.

Quadro 05 – Concepções operacional e estrutural

CONCEPÇÃO	SITUAÇÃO
Operacional: Descrição de uma sequência de cálculos	É uma fórmula $f(x) = 3x - 1$
Estrutural: Relação estática entre duas grandezas	Regra ou lei que indica como associar elementos de dois conjuntos A e B, na qual cada elemento de $x \in A$ de relaciona a um único elemento $y \in B$.

Fonte: Dados da pesquisa.

A autora advoga a ideia de que novos conceitos não devem ser introduzidos na concepção estrutural. Não seria proveitoso para o aluno ter contato com novos objetos matemáticos, sem que lhe seja dado tempo para formular seu conhecimento. Ressaltamos que a concepção estrutural não deve ser exigida dos alunos, se eles podem lidar com situações que

não a exigem. Ela acrescenta a ideia de que essa concepção tem poucas chances de permitir a apreensão adequada do conteúdo.

A citada pesquisa de Sfard (1992) concluiu que o tempo de amadurecimento dos conceitos matemáticos deve ser levado em consideração. O professor não há de esperar resultados imediatos na aquisição de conceitos, pois o amadurecimento das concepções estruturais demanda mais tempo. Dessa maneira, ante os resultados da autora, compreendemos a importância de estudos que se reportem da formação de conceitos e atentem para o desenvolvimento das habilidades discentes nos estádios de aprendizagem e desenvolvimento adequados, embora as ações dessa natureza sejam, na maioria das vezes, um grande desafio para a escola.

Assim, ampliando esta discussão, verificamos que Norman (1992) realizou um estudo com professores do ensino secundário, com o objetivo de identificar os saberes docentes sobre o conceito de função, suas concepções e como são postos em prática esses conhecimentos. Nesse sentido, categorizou o conhecimento docente em três vertentes: prático, pedagógico e o conhecimento do conteúdo – sendo o último o foco da análise de sua pesquisa.

De modo geral, Norman (1992) analisou quais conhecimentos o professor possui sobre exemplificação e caracterização de funções, habilidade de usar funções em contextos diversos e o tipo de expressão do raciocínio funcional. O primeiro propósito é saber de que maneira os professores definem, formal e informalmente, o conceito de função. Outro aspecto analisado é a forma como os professores aplicam funções em contextos diversificados. O último refere-se à capacidade do professor em deduzir propriedades e generalizações do conceito de função ou, ainda, analisar e interpretar situações matemáticas que envolvam representações gráficas e algébricas.

Foram observados os seguintes resultados: os professores têm dificuldade de identificar situações físicas que denotem relação funcional; preferem as representações gráficas às representações simbólicas e numéricas; não expressam conexões entre definição formal e informal; conhecem a evolução do conceito de função nos livros didáticos; sentem-se à vontade com a abordagem tradicional deste conceito. Esses resultados apontam para a necessidade de ampliação dos estudos relativos aos conhecimentos dos professores sobre funções e como esse conhecimento se manifesta em sala de aula.

Os resultados desses dois trabalhos (SFARD, 1992; NORMAN, 1992) nos permitem compreender pontos importantes que ainda representam lacunas no ensino do conceito de função. Explorar pesquisas, seus resultados, e buscar outras estratégias ou

possibilidades são atos, portanto, que devem ser observados com maior atenção no ensino de Matemática.

3.2 Elaboração e formalização do conceito de função

Podemos considerar, talvez com simplicidade exagerada, que o conceito de função se trata de um conceito matemático, que possibilita analisar como duas grandezas envolvidas em determinado fenômeno se relacionam. Para compreendermos a noção apresentada, devemos, além de entender como as grandezas se relacionam, dominar outros conceitos associados, como o de grandeza, por exemplo. Em outras modalidades mais elaboradas de apresentação deste conceito, há também a exigência de compreensão de outras noções que irão embasar um entendimento mais amplo e integral da ideia de função, permitindo seu uso em situações variadas.

Tratamos um conceito que não surgiu isoladamente, em um momento específico da história, e que precisa ser analisado sob uma óptica mais aprofundada, sendo pertinente para a prática do professor de Matemática conhecer o desenvolvimento histórico, epistemológico e, ainda, como a área de Educação Matemática promove estudos que ampliam e favorecem o ensino deste conceito.

É importante notar que a relevância do conceito de função ultrapassa sua relação com outros conceitos matemáticos e, de maneira muito abrangente, alcança outras áreas do conhecimento, tornando-se fundamental na formação do aluno dadas suas características e fundamentos que possibilitam a construção do pensamento matemático.

Nesse sentido, cabe observar que o conceito de função em sua maneira explícita não apareceu antes do século XVIII. Uma das razões para isso ter acontecido, de acordo com Kleiner (1989), foi a ausência dos pré-requisitos algébricos (chegar a um acordo sobre a continuidade dos números reais e o desenvolvimento da notação simbólica). No período que vai de 1.450 a 1.650, entretanto, muitos fatores permitiram a formalização desse conceito: ampliação do conceito de número, que abrangeu os reais e até os números complexos, com Bombelli e Stifel; a criação de uma álgebra simbólica, em Viète e Descartes; o estudo dos movimentos como um problema central na ciência, por Kepler e Galileu; a junção da Álgebra e da Geometria, com Fermat e Descartes (KLEINER, 1989, p. 283).

Quadro 06 – Concepções sobre o conceito de função

Ano	Matemático	Concepção
1637	Descartes	Equação em x e y que mostra dependência.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto da curva, máquina.
1718	Jean Bernoulli	Relação entre grandezas variáveis.
1748	Euler	Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes e variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; seqüência de valores; ordenadas não sujeitas a uma lei comum.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichelet	Correspondência: para cada valor de x (abscissa), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y; não é necessária uma mesma lei para todo o intervalo; y não precisa ser definido por uma expressão matemática explícita em x.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a uma determinada lei.
	Cantor	Subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a duas condições.

Fonte: Rossini (2006 p. 56).

O recorte histórico de elaboração do conceito de função a partir de Descartes percorre um caminho de três séculos até chegarmos à definição conjuntista apresentada por Bourbaki (Quadro 06); e esse conceito teve concepções diferenciadas ao longo de sua história (ROSSINI, 2006). Atualmente, nas definições apresentadas em livros didáticos, seja da Educação Básica ou do Ensino Superior, foram incorporados os preceitos de Bourbaki.

As definições contidas no Quadro 07 foram utilizadas na formação docente na escola *locus* de nossa pesquisa. Por meio das definições dos diversos autores propusemos uma discussão sobre os elementos utilizados por eles, comparações e críticas a cada definição apresentada (Ver capítulo 4). Não adotaremos em nossa pesquisa uma definição específica, pois consideramos mais pertinente a análise de todas ora mostradas e um detalhamento da simbologia necessária na formalização.

Quadro 07 – Definição do conceito de função em livros didáticos

AUTOR	DEFINIÇÃO
Lima, E. (2013)	Dados os conjuntos X, Y , uma função $f: X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “ y igual a f de x ”).
Stewart (2004)	Uma função é uma lei que associa cada elemento x em um conjunto D exatamente a um elemento $f(x)$, em um conjunto E . Em geral, consideramos as funções para as quais D e E são conjuntos de números reais.
Zahn (2009)	Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se função $f: A \rightarrow B$ a regra f que leva todos elementos de A a elementos de B de maneira única.
Iezzi e Murakami (2004)	Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
Paiva (2013)	Dizemos que uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y . A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de lei de associação, ou simplesmente lei entre x e y . Quando possível, essa lei é expressa por uma equação. [...] Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se função de A em B toda correspondência f que associa cada elemento de A a um único elemento de B .
Dante (2013)	Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função é uma regra que indica como associar cada elemento de elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.
Iezzi et al (2013)	Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B .

Fonte: Pesquisa direta.

Desse modo, observamos que o uso da linguagem matemática de um conceito, em geral, permite uma manipulação dos símbolos de modo mais eficiente. Nas demonstrações matemáticas, por exemplo, o conhecimento formal dos conceitos e de seus elementos constituintes é fundamental para o rigor do raciocínio matemático.

Além da simbologia (Quadro 08), outro fato a ser destacado numa função qualquer está nos elementos domínio, contradomínio e lei de formação. De acordo com Lima, E. (2013), esses “ingredientes” caracterizam todo tipo de função, ficando subentendidos, mesmo que não os expressemos explicitamente.

Quadro 08 – Símbolos relacionados ao conceito de função

SÍMBOLOS	SIGNIFICADO
$x \mapsto y$ ou $x \mapsto f(x)$	f transforma x em $f(x)$
f	Uma função qualquer
$f(x)$	Imagem de x pela função f
$(x, y) \in f$	Par ordenado pertencente a função f
$f: A \rightarrow B$	Função de A em B

Fonte: Adaptado de Lima, E. (2013).

Devemos também evidenciar no ensino de funções o fato de que vários registros são possíveis – língua natural, gráficos, tabelas, expressões algébricas, diagramas. A articulação entre esses registros, levando-se em conta o sentido e a congruência, pode favorecer a compreensão de conceitos e reduzir as dificuldades encontradas pelos alunos ao lidar com questões mais elaboradas e que envolvam registros variados (DUVAL, 2011, 2013).

Em Matemática, um mesmo conceito pode assumir diversos registros de representação. Esse fato é, para Duval (2009), um dos fenômenos causadores de obstáculos na aprendizagem, porque a compreensão matemática é comprometida se não houver a distinção entre um objeto e sua representação. Assim, a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação, ou na possibilidade da troca de registro. Essa mudança facilita a aquisição de um conceito, já que, ao lidar com as várias representações de um mesmo objeto matemático, o aluno passa a ter mais segurança na compreensão e na resolução de problemas. O esperado é que o indivíduo não confunda a representação de um objeto com o próprio objeto (DUVAL, 2011).

A articulação de registros é um caminho para a compreensão em Matemática. De acordo com Maranhão e Iglioni (2013), as conversões são as mudanças de registro mais eficazes na aquisição de um conceito. É importante ressaltar a ideia de que um fator importante no fenômeno da conversão é o sentido em que ela ocorre. Conforme Duval (2013), a conversão nem sempre se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada e, na maioria das vezes, o que sucede é a priorização de um dos sentidos. Na verdade, a passagem de um sistema de representação para outro sistema não ocorre de modo espontâneo (DUVAL, 2009).

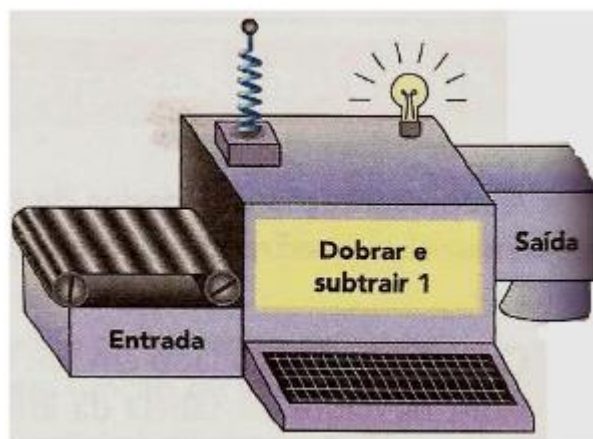
A compreensão de um conteúdo conceitual repousa, portanto, sobre a compreensão de ao menos dois registros de representação, e essa coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão – quando ocorre a passagem de um registro para outro em sistemas diferentes.

3.3 A intuição na elaboração do conceito de função

Exibimos a formalização do conceito de função em seu processo de elaboração e como é mostrado nos livros didáticos. Consideramos relevante, no entanto, discutirmos a intuição na constituição dos conceitos, especificamente do conceito de função.

É bastante comum nos livros didáticos a exploração intuitiva do conceito de função preceder sua definição (PAIVA, 2013; DANTE, 2013). Nessa abordagem, identificamos o fato de que a noção intuitiva está associada a exemplos práticos do cotidiano, a conexões com a própria matemática e, num caso muito frequente, à “máquina de calcular” (Figura 02). Em muitos casos, observamos uma introdução ao uso de “fórmulas” ou, mais coerentemente, de leis de formação, na tentativa de identificar relações entre grandezas variáveis. Verifica-se que a noção de intuitivo é caracterizada como algo simples ou fácil, cujo acesso acontece de modo rápido e evidente.

Figura 02 – Máquina de calcular



Fonte: Dante (2013)

Atentamos para o fato de que processos intuitivos, na realidade, não ocorrem de maneira simplificada, como a que observamos nos livros didáticos, e que há necessidade de

aprofundamento do entendimento das questões associadas ao ensino de conceitos matemáticos por meio da intuição. Nesse sentido, constatamos que, há muito tempo, muitos autores discutem a importância e a influência da intuição no pensamento matemático (DESCARTES, 1983; DAVIS E HERSH, 1986; FISCHBEIN, 2002; ÁVILA, 2010), sendo, por isso, algo a ser observado na prática docente de modo mais atento.

A intuição age sobre a percepção, permitindo a busca de significados, relações e possibilidades para as informações assimiladas. Descartes (1983), em *Regras para direção do espírito*, alia intuição e dedução, como atividades intelectuais, aos atos do nosso entendimento que nos permitem chegar ao conhecimento das coisas.

Por intuição entendo, não a convicção flutuante fornecida pelos sentidos ou o juízo enganador de uma imaginação de composições inadequadas, mas o conceito da mente pura e atenta tão fácil e distinto que nenhuma dúvida nos fica acerca do que compreendemos; ou então, o que é a mesma coisa, o conceito da mente pura e atenta, sem dúvida possível, que nasce apenas da luz da razão. (DESCARTES, 1989, p. 7)

A intuição, para Descartes (1983), é uma exigência para qualquer raciocínio e, por meio dela, ideias claras e perfeitamente determinadas não de se constituir no espírito.

Davis e Hersh (1986) afirmam que a palavra intuição é, em alguns casos, utilizada para identificar aqueles que tem uma percepção diferenciada da maioria, ou seja, poucas pessoas com o uso da intuição podem conceber o conhecimento matemático sem muito esforço. Os autores enumeram e tecem algumas críticas acerca de algumas categorias do significado e do uso da palavra intuição, conforme está na sequência.

- Intuitivo é o oposto de rigoroso: este uso não é convincente, pois, segundo os autores a própria definição de rigor é dada de maneira intuitiva.
- Intuitivo significa visual: a visualização pode nos levar a considerar de modo incontestável afirmativas passíveis de dúvida.
- Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração: intuitivamente plausível teria o significado de candidato a demonstração.
- Intuitivo significa apoiar-se sobre um modelo físico: o significado aproxima-se do sentido de heurístico, ou seja, permitirá descobertas.
- Intuitivo significa unificado ou integrado em oposição a detalhado ou analítico: o raciocínio dedutivo rigoroso e demorado pode ser menos convincente do que um raciocínio intuitivo.

Ao exemplificar a intuição no entendimento do conceito de número, por exemplo, Davis e Hersh (1986) exprimem que tentamos ensinar de uma maneira intuitiva e não formal, seja por via de exemplos ou resolvendo problemas. Nesse sentido, os autores consideram que a intuição “não é uma percepção direta de algo que existe externamente e eternamente. É o efeito na mente de certas experiências de atividade e manipulação de objetos concretos” (DAVIS E HERSH, 1986, p. 441). Está relacionada com as representações mentais que temos dos objetos matemáticos adquiridas pela experiência, isto é, intuição é uma aptidão que nos permite raciocinar e examinar objetos.

Sobre essa temática, Ávila (2010) considera que a criatividade da Matemática depende da intuição e da imaginação (em alguns casos, mais do que da dedução), sendo consideradas instrumentos tão importantes na invenção matemática quanto nas composições de um músico, por exemplo. Para esse autor,

A intuição é a faculdade mental que permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a intervenção do raciocínio. Os matemáticos frequentemente se referem a algum fato como "intuitivo", querendo com isso dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que "intuitivo" não é sinônimo de "fácil". Há muitas verdades profundas e difíceis que são apreendidas pela intuição. (p. 4)

Nesse sentido, a ideia de que o pensamento matemático se reduz aos seus aspectos lógico-dedutivos é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta (ÁVILA, 2010, p. 4).

As considerações de Fischbein (2002) acerca da intuição corroboram as ideias dos autores já mencionados, ou seja, para que exista um desenvolvimento produtivo do raciocínio matemático, os alunos devem aprender Matemática, formal e intuitivamente, sublinhando a importância da intuição na aprendizagem desta disciplina. A intuição está relacionada com um conhecimento imediato, classificado como “autoevidente” com algum um efeito de obrigatoriedade nas habilidades de raciocínio.

A intuição, como observado por Fischbein (2002), é um componente do raciocínio matemático produtivo, com destaque para a cognição intuitiva, aceita diretamente sem a necessidade de justificativas. Vale destacar, no entanto, a noção de que

As cognições intuitivas às vezes podem estar de acordo com verdades logicamente justificáveis, mas às vezes elas podem contradizê-las. Consequentemente, as intuições podem desempenhar um papel facilitador no processo instrucional, mas, muitas vezes, podem surgir contradições: as intuições podem se tornar obstáculos -

obstáculos epistemológicos (Bachelard) - nos processos de aprendizagem, resolução ou invenção. (FISCHBEIN, 2002, p. 232, tradução nossa)⁷

Podemos assinalar, portanto, que os métodos de ensino de conceitos matemáticos legitimados pelo uso da intuição – como o conceito de função – podem ser considerados para promover a ampliação dos saberes do professor, fator que possivelmente contribuirá para sua formação.

O professor precisa, no entanto, estar atento à tendência de, no currículo escolar, a contraposição entre rigor e intuição ser tratada de modo a dificultar a aprendizagem dos estudantes, porquanto as duas dimensões são interdependentes. A intuição está sempre na produção do conhecimento matemático e carece de maior atenção

3.4 Obstáculos epistemológicos

A publicação do artigo *On understand the notion of function*, de Anna Sierpinska (1992), trouxe para o ensino Matemática contribuições e novas possibilidades de debate e formulação sobre a temática dos obstáculos epistemológicos no ensino de funções. Os resultados de sua pesquisa apontam para a necessidade de uma visão mais atenta ao ensino de conceitos.

No artigo referido, observamos um conjunto de obstáculos epistemológicos que interferem na aquisição do conceito de função e que, por causa de sua importância, não devem ser evitados, mas superados. A ideia de obstáculo epistemológico desenvolvida por Bachelard (1996) está associada às dificuldades na elaboração do conhecimento, suas causas são diversas e têm um papel muito importante na constitui do conhecimento. Por isso, consideramos que

A identificação dos obstáculos, desde cedo, permitirá o emprego de estratégias que possam reduzir ou eliminar as dificuldades dos estudantes. Nesse sentido, é importante a observação dos conhecimentos prévios dos alunos, já que os antigos saberes podem funcionar com um obstáculo na aquisição de novos. (MENDONÇA, 2017, p. 91).

⁷ Intuitive cognitions may sometimes be in accordance with logically justifiable truths, but sometimes they may contradict them. Consequently, intuitions may play a facilitating role in the instructional process, but, very often, contradictions may appear: Intuitions may become obstacles – epistemological obstacles (Bachelard) – in the learning, solving, or invention processes. (FISCHBEIN, 2002, p. 232)

Desta maneira, o conjunto de obstáculos identificados por Sierpinska (1992) embasou uma parte da formação continuada por nós promovida em virtude das evidências de sua relevância na formação docente.

Quadro 09 – Obstáculos epistemológicos

01	A Matemática não está preocupada com problemas práticos
02	Técnicas de cálculo usadas na elaboração de tabelas não devem ser um objeto de estudo em Matemática.
03	Mudanças como fenômenos: destaca-se o modo como os objetos mudam, ignorando o que muda nos objetos. (Um esquema de pensamento inconsciente)
04	Elaboração do pensamento em termos de equações e de incógnitas calculadas a partir delas. (Um esquema de pensamento inconsciente)
05	Tratar a ordem das variáveis de modo irrelevante. (Um esquema de pensamento inconsciente)
06	Concepção heterogênea de número. (Uma atitude relativa ao conceito de número)
07	Uma filosofia pitagórica de número: tudo é número (Uma atitude relativa ao conceito de número)
08	Leis em Física e funções em Matemática não têm nada em comum; elas pertencem a diferentes domínios de pensamento. (Um esquema de pensamento inconsciente)
09	Proporção é um tipo privilegiado de relação. (Um esquema de pensamento inconsciente)
10	Forte crença na força das operações formais em expressões algébricas (Uma crença relativa aos métodos matemáticos)
11	Apenas relações descritíveis por fórmula analítica são dignas de receberem o nome de funções (Uma concepção de função)
12	Definição é uma descrição de um objeto também conhecido pelos sentidos ou percepção. A definição não determina o objeto; mas o objeto determina a definição. Uma definição não é vinculativa logicamente (Uma concepção de definição)
13	Funções são sequências (Concepção de função)
14	As coordenadas de um ponto são segmentos de reta (não números) (Concepção de coordenadas)
15	O gráfico de uma função é um modelo geométrico da relação funcional. Não precisa ser fiel, o gráfico pode conter pontos (x, y) de tal forma que a função não esteja definida em x. (Concepção de gráfico de função)
16	As mudanças de uma variável (Uma concepção de variável)

Fonte: Adaptado de Sierpinska (1992)

Alguns destes obstáculos (03, 04, 05, 08, 09) estão associados a esquemas do pensamento que ocorrem de maneira inconsciente, quando as situações são ensinadas (ou

aprendidas) por meio da imitação e repetição. Como exemplo do obstáculo 5, que trata das variáveis, temos o seguinte:

Quadro 10 – Questão envolvendo variáveis

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: <http://www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

- A) $y = 4300x$
- B) $y = 884905x$
- C) $y = 872005 + 4300x$
- D) $y = 876305 + 4300x$
- E) $y = 880605 + 4300x$

Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2011

Solução:

Sejam

y = quantidade de trabalhadores

x = número de meses a partir de janeiro

A função é do tipo $y = ax + b$ e há um aumento mensal de 4300 vagas.

I) Em fevereiro ($x = 2$) o número de trabalhadores com carteira assinada (y) era de 880.605.

Logo,

$$880.605 = 2a + b$$

II) Em janeiro ($x = 1$) o número de trabalhadores com carteira assinada (y) era de 880.605 – 4300 = 876.305. Logo,

$$876.305 = a + b$$

Resolvendo o sistema de equações, encontramos $a = 4.300$ e $b = 872.005$.

A função, portanto, será $y = 872005 + 4300x$.

Comentário:

O problema descreve uma situação que será representada por uma função afim ($y = ax + b$). É importante a identificação das variáveis envolvidas, quantidade de trabalhadores e número de meses a partir de janeiro, observando que, em $y = ax + b$, y é a variável dependente, enquanto x é a independente. O obstáculo associado seria a dificuldade em o aluno identificar os valores dados no problema e relacioná-los ao tipo de variável a que correspondem. Sierpiska (1992) nos alerta para a ordem das variáveis e da dificuldade dos estudantes nesse tipo de situação.

Nesse processo, podemos inferir que a relevância do reconhecimento dos obstáculos epistemológicos do conceito de função precisa ser observada pelo professor em sua prática escolar. Essa temática pode favorecer o ensino de conceitos de maneira mais significativa e evidenciando o potencial docente investigativo que, ao identificar os conhecimentos já adquiridos pelos estudantes, pode também apontar obstáculos e, assim, atuar na busca de sua superação.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DOS DADOS

Se a gente pudesse detalhar assim, cada um dos nossos conteúdos, era bom demais. (Professora CLÁUDIA)

Neste capítulo, apontamos informações da pesquisa incluindo campo, sujeitos, procedimentos e instrumentos utilizados, as fases e as categorias, além da apresentação e da análise dos dados. Destacamos, com observância aos objetivos da pesquisa, o modo como a Sequência Fedathi contribuiu na formação docente para ensino do conceito de função.

4.1 Caracterização da pesquisa

Este estudo, caracterizado como uma investigação de natureza qualitativa, se insere na abordagem etnometodológica do tipo observação participante, que se destaca pelo envolvimento dos pesquisadores e dos pesquisados. Esse tipo de pesquisa permite a análise das atividades do cotidiano das pessoas sem incorrer numa mera descrição dos fatos, mas numa análise interpretativa do processo, na qual a subjetividade do pesquisador é considerada na interpretação dos significados presentes no contexto vivenciado (MENNELL, 1975; OLIVEIRA e MONTENEGRO, 2012).

A etnometodologia exige do pesquisador posicionamento intelectual contribuindo para a análise e descrição criteriosas na distinção entre forma (como) e conteúdo (o quê) na interação dos sujeitos em estudo. Esse tipo de pesquisa prevê, ainda, a descrição detalhada do fenômeno e o subjetivismo que permite a compreensão e apreensão da realidade em estudo, permitindo maior interação dos participantes com o pesquisador e mais flexibilidade na pesquisa. Destaca-se, ainda, a ênfase no processo, analisando todas as ações no transcorrer da busca. Outro ponto relevante da pesquisa participante é a intervenção do pesquisador no ambiente pesquisado.

Nossa proposta de trabalho realizou uma formação docente que pretendeu inserir a proposta de ensino Sequência Fedathi nas atividades do professor de Matemática, notadamente no ensino do conceito de função. Com isso, pudemos escolher os instrumentos para coleta de dados. Utilizamos a observação direta em todas as reuniões, com anotações de campo, questionário, gravação de áudios e vídeos e relatórios das aplicações das sessões didáticas.

Ainda como fonte de dados, destaca-se o uso do ambiente TelEduc para discutir um dos pontos da formação docente – formalização e intuição de conceitos matemáticos – e para que os professores pudessem enviar suas propostas de sessão didática que utilizariam em suas aulas.

Na etnometodologia, é importante destacar, não há uma diretriz que oriente a análise de dados. Em razão desse fato, optamos por submeter os dados ao aparato metodológico fornecido pela Análise de Conteúdo que prevê a descrição, a inferência e a interpretação, respaldadas no referencial teórico (BARDIN, 2011), combinando o rigor da objetividade e a fecundidade da subjetividade.

Esta pesquisa teve como *locus* uma escola pública de Ensino Médio localizada em Fortaleza – Ceará. Foi desenvolvida com professores de Matemática que aplicaram a sessão didática na 1ª série desse nível de ensino. No período de realização da pesquisa, a escola contava 15 professores de Matemática, dos quais cinco foram os escolhidos como participantes, por atuarem no ensino do conceito de funções, tema de nosso estudo, havendo, ao longo do processo, a desistência de dois desses sujeitos.

Contamos, então, com a participação dos professores Cláudia, Zelia e Wellington, cujos nomes utilizados em nosso texto são originais com a devida autorização⁸ de cada um deles. Dois dos professores envolvidos eram do primeiro ano e o outro do segundo ano. Todos aplicaram a sessão didática em turmas de primeiro ano que foram escolhidas livremente por eles.

Vale destacar que nosso trabalho teve total observância aos horários e ao calendário anual da escola que indica suas atividades, tais como aplicação de provas, conselhos de classe, férias docentes e, no caso específico do ano de 2016, o período de greve da categoria de professores. O horário, portanto, destinado às discussões da formação que fizemos com os professores, foi o das reuniões do planejamento de área, que aconteciam todas as terças-feiras, no período da manhã.

4.2 Fases da pesquisa e categorias de análise

A pesquisa empírica, que compreendeu a formação docente objeto deste estudo foi constituída por três fases. A primeira engloba a preparação da formação continuada, com organização do material a ser usado – questionário, atividades, *slides* e seleção de livros. A

⁸ Modelo do termo de autorização assinado pelos professores consta nos Anexos.

segunda envolve a formação docente na escola *locus* da pesquisa e abrange os encontros realizados na escola, na plataforma TelEduc, o planejamento da sessão didática e a aplicação da proposta de ensino. Por fim, na terceira fase, constam a avaliação da aplicação pelos professores, por meio de relatórios e conversas individuais, e o possível retorno à sala de aula para uma nova aplicação.

Assim, com base no referencial teórico e na etapa empírica que envolveu as falas, ações docentes e o material coletado, foi possível, durante o processo investigativo, a identificação das categorias de análise da pesquisa. Estas foram agrupadas em dois temas centrais que foram subdivididos em categorias e subcategorias (Quadro 11). A categorização dos dados, com o propósito de produzir resultados válidos, seguiu as orientações da análise de conteúdo que prevê a elaboração de indicadores que permitem, posteriormente, a inferência e interpretação dos dados (BARDIN, 2011).

Quadro 11 – Categorias e subcategorias de análise

TEMAS	CATEGORIAS E SUBCATEGORIAS
Conceito matemático de função	1. Aspectos gerais do conceito de função 1.1. Domínio do conteúdo; 1.2. Intuição/Formalização;
	2. Aspectos históricos e epistemológicos do conceito de função 2.1. Desenvolvimento histórico/epistemológico do conceito; 2.2. Obstáculos epistemológicos no ensino/aprendizagem;
Formação para o uso de metodologias de ensino	3. Uso de metodologias de ensino 3.1. Conhecimento e uso de metodologias de ensino; 3.2. Tempo/espaço para uso de metodologias;
	4. A Sequência Fedathi 4.1. Princípios da Sequência Fedathi: conhecimentos prévios (<i>plateau</i>), uso da pergunta; 4.2. Vivência da Sequência Fedathi: tomada de posição, maturação, solução e prova.

Fonte: Pesquisa direta

A pertinência das categorias elencadas está fundamentada na escolha criteriosa propiciada pela Análise de Conteúdo. A divisão que propomos, tendo em vista os objetivos estabelecidos, está relacionada com a temática da pesquisa, que põe em destaque a formação docente para o conceito de função mediada pela Sequência Fedathi.

O primeiro tema agrega categorias que abordam dos conhecimentos docentes acerca do conceito de função – ideias evidenciadas nas falas, nos questionários e relatórios

que exprimem as concepções vivenciadas e reproduzidas em suas salas de aula. Destacamos os aspectos históricos e epistemológicos deste conceito, tendo em vista sua abrangência em aspectos diversos do conhecimento matemático de um conceito e sua importância para formação do professor de Matemática.

O segundo tema engloba as referências produzidas pelos docentes que revelam sua relação com o uso de metodologias de ensino e os elementos da escola, ou do sistema escolar, que promovem seu desenvolvimento profissional. Integra categorias que remetem ao conjunto de saberes apreendidos durante a formação e que foram evidenciados na vivência de aplicação da proposta Fedathi. São incluídas, ainda, neste tema as afirmações docentes de princípios que consideram já em uso em sua prática escolar.

Com as categorias listadas, buscamos exprimir todos os aspectos relevantes existentes nos dados, de modo a garantir a objetividade e a clareza dos resultados.

4.3 Descrição e análise dos dados

Conforme já dissemos, nossa pesquisa contou inicialmente com a participação de cinco professores. Posteriormente, tivemos, em definitivo, a participação de apenas três: Cláudia, Zelia e Wellington. Os dados e observações que reunimos foram extraídos dos momentos pedagógicos coletivos da escola, como o planejamento da área de Matemática, onde estão todos os professores dessa disciplina, e o período de formação com os professores participantes da pesquisa. Outras informações foram obtidas por meio das aplicações das sessões didáticas. Em vista disso, optamos por organizar a análise em dois momentos: o geral, envolvendo as considerações desses professores envolvidos em seu grupo de trabalho, durante o planejamento de área e no curso de formação continuada; e o específico, momento de aplicação da sessão didática fundamentada na proposta Fedathi.

4.3.1 Planejamento de área e o período de formação continuada

Semanalmente, às terças-feiras, o grupo de professores de Matemática da escola se reúne para o planejamento de área. Nesses encontros, sob a liderança e acompanhamento de um dos professores do grupo, o professor Mário, são discutidas ações diversas, como a avaliação dos alunos, que envolve a elaboração de provas, o cálculo de notas, o processo de recuperação e progressão parcial e o fechamento de conteúdos em cada bimestre. Essas

reuniões têm duração de três aulas e, eventualmente, têm o acompanhamento de um dos membros do Núcleo Gestor.

Quadro 12 – Conteúdo programático de Matemática 2

PERÍODO	CONTEÚDO	DETALHAMENTO
1º Bimestre	Linguagem dos conjuntos	Noção de conjunto; Operações com conjuntos;
	Conjuntos numéricos	Conjuntos numéricos; Intervalos;
	Introdução ao conceito de funções	Noções básicas sobre o conceito de função Domínio, contradomínio e imagem; Função crescente e decrescente;
2º Bimestre	Inversão de funções.	Função composta e inversa;
	Função polinomial do primeiro grau	Definição e propriedades de uma Função polinomial do 1º grau; Gráfico da função polinomial do 1º grau; Inequação do 1º grau.
3º Bimestre	Função polinomial do segundo grau	Definição e propriedades de uma Função polinomial do 2º grau; Gráfico de uma função polinomial do 2º grau; Inequações do 2º grau.
4º Bimestre	Função exponencial	Função exponencial; Equações exponenciais.
	Função Logarítmica	Logaritmo e suas propriedades; Equações logarítmicas; Função logarítmica.

Fonte: Plano anual da escola

Em nossas primeiras observações, realizamos a análise do plano anual da disciplina Matemática, dividida entre três professores em cada turma – Matemática 1, 2 e 3, sendo a Matemática 2 a que aborda o assunto funções (Quadro 12). Cada bimestre tem duração média de oito semanas que inclui o período de realização de avaliações. Assim, verificamos que, no plano anual, o tempo empregado para o ensino da parte introdutória ao conceito de função é dividido com os conjuntos numéricos.

Ordinariamente, o tempo destinado ao planejamento de área não envolve discussões acerca de metodologias para ensino dos conteúdos ou cuida das dificuldades inerentes ao ensino destes assuntos ao longo do ano letivo. O planejamento do conteúdo fica a cargo de cada professor, individualmente.

Os encontros da formação continuada que ministramos se deram durante essas reuniões de planejamento de área, sendo o primeiro realizado em 01 de março de 2016 (Ver cronograma em APÊNDICE A). O tópico inicial da formação foi a análise da definição do conceito de função nos livros didáticos, incluindo a obra utilizada pelos professores na escola.

Orientamo-nos por algumas definições, como as descritas no Quadro 07, conforme já mencionado no capítulo 3.

Quadro 13 – Definição do conceito de função em livros didáticos

AUTOR	DEFINIÇÃO
Lima, E. (2013)	Dados os conjuntos X, Y , uma função $f: X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “ y igual a f de x ”).
Stewart (2004)	Uma função é uma lei que associa cada elemento x em um conjunto D exatamente a um elemento $f(x)$, em um conjunto E . Em geral, consideramos as funções para as quais D e E são conjuntos de números reais.
Zahn (2009)	Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se função $f: A \rightarrow B$ a regra f que leva todos elementos de A a elementos de B de maneira única.
Iezzi e Murakami (2004)	Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.
Paiva (2013)	Dizemos que uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y . A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de lei de associação, ou simplesmente lei entre x e y . Quando possível, essa lei é expressa por uma equação. Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se função de A em B toda correspondência f que associa cada elemento de A a um único elemento de B .
Dante (2013)	Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função é uma regra que indica como associar cada elemento de elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.
Iezzi et al (2013)	Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B .

Fonte: Pesquisa direta

Nesta categoria dos aspectos do conceito de função, evidenciamos o fato de que os conhecimentos docentes estavam bem fundamentos, o que permitiu uma análise muito proveitosa das definições. Iniciamos observando alguns termos utilizados em referência à definição do conceito, como “lei”, “regra”, “aplicação”, “relação” e “correspondência”. A maioria dos professores utilizada o termo “lei” como modalidade simplificada de “lei de formação”.

O simbolismo também foi analisado. Notamos que alguns livros utilizam mais símbolos em sua definição do que outros. Esta referência foi julgada como um excesso de formalismo, que pode prejudicar o ensino, caso o professor não explore todos eles.

Outro foco de análise foi a que cada definição remete a um conjunto de conceitos relacionados ao que estávamos estudando. Estes conceitos relacionados, como domínio, contradomínio, imagem, par ordenado, dentre outros, devem ser motivo de aprofundamento pelo professor para permitir o ensino. Ainda com base nas definições apresentadas, os professores observaram que apenas um dos autores abordou o assunto “variáveis” e que a confirmação é de que os livros texto das escolas não exploram essa temática, bem como as “relações” derivadas do produto cartesiano.

Ao explorarmos o Quadro 13, pudemos inferir que os professores têm sólidos conhecimentos acerca do conceito de função. Este fato para nós foi muito relevante, porquanto possibilitou que examinássemos outras temáticas de igual importância ao longo da formação.

A continuidade da formação foi em 22 de março de 2016, pois tivemos o encontro de 15 de março de 2016 suspenso em virtude da Assembleia Geral dos professores que discutiu a greve desta classe de trabalhadores. Nessa data, a temática principal foi o conceito de função, incluindo o desenvolvimento histórico, tipos de representação e alguns obstáculos epistemológicos associados a este conceito (SIERPINSKA, 1992). Algumas análises sobre essa temática foram feitas em Mendonça (2017). Com efeito,

O que ficou evidenciado nos resultados foi que o saber docente, ante os obstáculos epistemológicos, é limitado e não favorece a busca de soluções que facilitem a aprendizagem. A compreensão do conceito como produção humana passível de erros e, conseqüentemente, geradora de obstáculos na transformação pedagógica mediada pelo professor, carece de algum aprofundamento, ou mesmo de esclarecimentos. (MENDONÇA, 2017, p. 93)

Os saberes sobre obstáculos epistemológicos (de ordem histórica e da prática escolar) são elementos fundamentais a serem observados na busca por melhorias do ensino de Matemática. Assim, “a ideia de obstáculo epistemológico, na didática da Matemática, está associada às dificuldades de aprendizagem, de modo que estas devem ser consideradas pelos docentes no ensino dos conceitos” (MENDONÇA, 2017, p.91).

Verificamos, no entanto, que as razões exibidas pelos professores se distanciam do conhecimento epistemológico de um conceito e dos obstáculos originados. Em alguns casos, as dificuldades postas em destaque estão relacionadas apenas com as dificuldades dos

estudantes, como, por exemplo, a falta de interpretação de textos ou a pouca familiaridade com assuntos básicos da Matemática.

Situações acerca dos tipos de representações – gráfico, tabela, lei de formação – também debatidas na formação, foram ampliadas e examinadas com detalhes. Os professores não apresentam dificuldades em reconhecer tais representações e sinalizam que, no ensino de Matemática, se prioriza um tipo de atividade que privilegia métodos mais simples de resolução e não exige muito raciocínio, quer do professor quer dos estudantes. Atividades que solicitem, por exemplo, a mudança do registro gráfico para a lei de formação, são evitadas ou reduzidas, por demandarem mais tempo e desenvolvimento cognitivo do aluno.

O terceiro encontro, realizado em 29 de março de 2016, abordou, além da proposta de ensino Sequência Fedathi, a análise do questionário que fora entregue bem anteriormente. O questionário, aplicado no início da formação, versava sobre os seguintes itens:

- Cite conceitos relacionados ao conceito de função.
- Onde se usam funções? Por que ensinar esse conteúdo?
- Que dificuldades você encontra no ensino e na aprendizagem do conceito de funções?

O terceiro questionamento foi analisado na perspectiva dos obstáculos epistemológicos, já evidenciados anteriormente. Os outros dois nos permitiram destacar de que maneira os professores compreendem o conceito de função e que tipo de relação expõem em sua prática de ensino. Buscamos verificar a articulação entre os conceitos matemáticos associados ao de função e as diversas representações vinculadas a este conceito, como domínio, contradomínio, imagem, variável, grandezas, gráficos, conjuntos, relação ou par ordenado. Notamos que alguns professores confundiram os conceitos relacionados com a própria definição ou com a aplicação do conceito de função. Vejamos:

Professora Cláudia: Que a cada x corresponde a um único valor de y .

Professora Zelia: São relações matemáticas que associam valores entre elementos ou conjuntos, existindo uma correspondência entre eles.

Ao serem perguntados acerca do uso e do porquê ensinar funções, verificamos a ideia do conceito de função como algo específico e interno à própria Matemática, numa visão de conteúdo que é útil apenas em outros conteúdos matemáticos.

Professor Wellington: Na álgebra [...] é uma definição primordial para a álgebra moderna.

Alguns deles apontaram para o uso no cotidiano e em todas as áreas do conhecimento, exemplificando a Química e a Física como casos de grandezas que se relacionam. Mencionaram, ainda, exemplos práticos como uma corrida de táxi ou abastecer o carro num posto de gasolina. Consideramos, portanto, que,

Sendo o conceito de função um dos mais importantes do currículo de Matemática na Educação Básica, observa-se que a superficialidade das respostas remete nossa análise para a ausência de conhecimentos que justifiquem o ensino desse conteúdo e possa, então, motivar a aprendizagem discente. (BORGES NETO e MENDONÇA, 2017, p.32).

Até esta fase da formação, dois pontos nos chamaram atenção ao observarmos os professores. O primeiro está relacionado ao tempo destinado às atividades escolares. Como nosso intuito foi apresentar e inserir na prática docente a metodologia de ensino Sequência Fedathi, percebemos que, na fala docente, ganha destaque a constatação da falta de tempo para o cumprimento de ações assinaladas no calendário escolar anual. Em suas palavras, falta tempo para cumprir o plano de curso, para concluir a conteúdo bimestral, para a formação dos professores, para fazer uso de atividades diferenciadas, como, por exemplo, uso de dinâmicas, jogos ou metodologias diversificadas.

O período de greve, iniciado no final do mês de abril, foi um agravante na organização docente. O calendário escolar ficou mais resumido, a escola adotou os sábados letivos, o que comprometeu o tempo destinado ao cumprimento do plano de curso anual, já que foi reduzido o número de aulas da carga horária escolar semanal. A fala da professora Cláudia, ao referir-se ao uso da Sequência Fedathi em sala de aula, evidencia e certifica esse fato:

Gostei demais da atividade, acho que o aluno se torna ativo e constrói sua aprendizagem, mas ainda assim nosso sistema com conteúdo demais e pouco tempo de aula não deixa que façamos uso do método costumeiramente. (Professora CLÁUDIA, Formação continuada, terceiro encontro da formação).

Em vista desse fato, os professores avançaram muito rápido com os conteúdos, isto é, “correram com a matéria a ser dada aos alunos”; isto, segundo os professores, não permite a interação dos estudantes com os assuntos estudados em cada período.

Coletivamente, constatamos que, a todo instante, ocorre a reorganização do trabalho docente em função do tempo pedagógico de que dispõem. Em suas ações diárias, nas relações com os alunos e com o grupo total de professores de Matemática, ocorre a ressignificação do tempo escolar, ou seja, a relação entre as ações determinadas *a priori* e as efetivamente realizadas está em constante mudança.

O segundo ponto de destaque, que evidenciamos com suporte na fala docente ao discutirmos a utilização de metodologias de ensino, é o pessimismo manifesto em seus discursos. O ensino tradicional mantém seu *status* de destaque como consequência da ação discente refletida na prática docente. Em outras palavras, novas maneiras de ensinar parecem não convencer os professores da mudança de atitude de seus alunos.

Se passa uma atividade, volta do mesmo jeito (Professor WELLINGTON).

A escola é só socialização (Professora ZELIA).

Eles nunca resolvem nada (Professora ZELIA).

[...] eu não sei é o que esses meninos estão fazendo dentro de sala (Professora CLÁUDIA).

Aí os meninos vão conversar, a gente se aborrece e vai fazer. (Professora CLÁUDIA).

A última fala da professora Cláudia foi proferida em um dos primeiros de nossos encontros de formação, ao discutirmos uma das fases da Sequência Fedathi, a maturação, quando o professor deixa os alunos pensarem e intervém o mínimo possível, apenas quando necessário, se algum aluno não conseguir avançar na busca pela solução do problema. Neste caso, a inquietação da professora Cláudia residia no fato de não estar acostumada a permitir as interações e discussões discentes.

De modo geral, os professores não usam (ou não conhecem) metodologias que possam ser utilizadas no ensino de Matemática. A proposta de resolução de problemas de George Polya (2006), por exemplo, era conhecida por apenas dois dos professores que participaram da formação.

Assim, as discussões sobre o emprego da proposta Fedathi nas ações docentes ganharam destaque ao fomentarmos algumas possibilidades de aplicação em sala de aula. Cada fase foi amplamente discutida e também analisada pelos professores, na perspectiva de que, ao experimentarem a proposta, identificaram algo novo no sentido da sistematização e da orientação das atitudes do professor.

Ao discutirmos a primeira fase, tomada de posição, o professor Mário a considerou como a mais difícil. Segundo o professor, a escolha de um problema desafiador e

que esteja no nível adequado dos alunos é uma tarefa muito difícil. No começo da aplicação, quando o docente deve pensar numa situação relacionada com o conteúdo, que privilegie os conhecimentos dos alunos, reside a maior dificuldade.

Sobre a maturação, a professora Cláudia se posicionou de modo a compreender a importância de proporcionar ao aluno momentos de aprendizagem com autonomia, no entanto, reconhece que a prática recorrente é a de

[...] dar toda a situação e querer que o aluno diga qual é a função, às vezes a gente prefere dar pronto, tudo pronto, acho que é por isso que o aluno tem dificuldade (Professora CLÁUDIA).

Nesse sentido, para aprofundarmos os estudos sobre a proposta de ensino, trabalhamos com dois materiais que chamamos de *Atividades para aplicação I e II* (APÊNDICES). A primeira era composta por 17 questões que abordavam o conceito de função; essas questões eram de fontes diversas, livro didático, ENEM, exames vestibulares. A segunda era de uma prévia para preparar da sessão didática que seria aplicada no final da formação. Nessa atividade, cada professor deveria inicialmente analisar todas as questões para, em seguida, escolher uma delas e mostrar que posição assumiria em cada fase mediante o problema escolhido. O Quadro 14 mostra as concepções iniciais dos professores após nossas primeiras discussões sobre Sequência Fedathi.

Constatamos que o entendimento das fases ainda não estava bem estruturado pelos professores. A tomada de posição, por exemplo, não prevê que o professor destaque os pontos principais da questão para auxiliar na resolução. Podemos observar, no entanto, que alguns dos professores compreenderam exatamente qual o propósito desta fase que é deixar os alunos livres para compreenderem a situação proposta, cabendo ainda o acordo didático que envolve, por exemplo, a formação de grupos.

Notamos nas indicações docentes a ausência de referência aos conhecimentos prévios dos estudantes na elaboração da sessão didática. Nenhum professor mencionou esse aspecto da Sequência na tomada de posição. Nas discussões iniciais da formação, elencamos alguns dos fundamentos da proposta de ensino, incluindo o *plateau*, ou seja, a importância de o professor considerar este elemento ao planejar sua aula, antecedendo as fases e a avaliação.

Quadro 14 – Concepções docentes sobre a Sequência Fedathi na fase inicial da formação

Fase da Sequência Fedathi	Concepções docentes
Tomada de posição	Apresentação, leitura do problema; Mostrar o problema a turma; Destacar os pontos principais da questão para auxiliar na resolução; Organização da sala em trios; Leitura e discussão da problemática; Deixar os alunos lerem a questão; Organização da sala; Contextualização;
Maturação	Fazer perguntas; Levantar questionamentos; Dizer aos alunos que eles estão no caminho certo; Leitura coletiva do problema; Pedir aos alunos que leiam novamente a situação para melhorar a compreensão;
Solução	Analisar os gráficos junto com os alunos; Observar a formação do sistema e os valores atribuídos; Montar equações; Estabelecer igualdade entre equações; Questionar os alunos sobre a razão de terem utilizado as respostas apresentadas. Analisar os resultados; Incentivar os alunos a apresentarem uma solução;
Prova	Mostrar/apresentar a resolução; Formalizar a função afim; Revisar o sistema de equações do 1º grau Mostrar a resolução através de gráfico; Encontrar o valor de n, onde as equações seriam iguais; Apresentar a solução, mostrando a formação da função afim; Interpretar o uso dos eixos ordenados; Adequar a solução apresentada, elaborando um modelo geral ou fórmula para resolução de problemas similares.

Fonte: Pesquisa direta

Na maturação, percebemos que a relevância do uso da pergunta e de questionamentos foi bem assimilada por todos. Muitos exemplos foram fornecidos de acordo com cada atividade escolhida, embora algumas das perguntas sugeridas, numa orientação do ensino tradicional, direcionassem as ações discentes, não permitindo muitas reflexões.

Imagem 03 – Maturação na atividade para aplicação docente

Maturação	<ul style="list-style-type: none"> . Leitura coletiva do problema; . Quais as grandezas envolvidas na situação? . Essa relação é uma função? . É uma função polinomial do 1º grau? Por que? . Podemos usar uma fórmula?
-----------	--

Fonte: Pesquisa direta

O professor, ao perguntar – *Essa relação é uma função polinomial do primeiro grau?* – em vez de *Essa relação é uma função de que tipo?* – não oferece muitas escolhas para o estudante pensar ou investigar.

Seguindo a análise desta etapa da formação, identificamos que a fase de solução foi a que teve um entendimento menos aprofundado. Nesta, o professor deve estimular os estudantes a apresentarem suas respostas por meio de modelos que possibilitem a generalização do conteúdo estudado. O professor deve, ainda, por meio de questionamentos, discutir as respostas, comparando-as, com atenção para os erros que possam surgir. Nesse sentido, apenas dois dos professores se aproximam do entendimento das ações necessárias ao prosseguimento desta fase. Algumas das atitudes descritas corresponderam às ações a serem realizadas pelos estudantes, como por exemplo, montar equações.

Na última fase, cuja finalidade é a formalização dos resultados indicados pelos alunos, os professores assimilaram muitas das noções discutidas na formação. A ideia de formalização ficou clara, entretanto, observamos que, no aspecto da generalização, não ficou evidente a elaboração de um modelo adequado de acordo com o conteúdo e a questão escolhida por parte de cada professor. O ponto de vista simplista que considera a prova como o momento para apontar a resposta correta revelou a necessidade de ampliação dos estudos sobre esta fase que permitam o entendimento da formalização matemática dos conceitos com uso de linguagem adequada.

Ainda sobre esta fase, alguns docentes põem destaque a sua definição de modo bastante objetivo e claro, demonstrando seu entendimento de como agir: além da formalização, que incorre em generalizações, o professor deve levar o aluno a perceber o uso do conceito em situações diversas daquela proposta na situação.

A revisão do conteúdo indicada nesta fase deve ser pensada em outro momento, no *plateau*, que acontece no início da Sequência Fedathi. É oportuno destacar o fato de que essa revisão pode se tornar o *plateau* de uma nova sessão didática, caso seja importante e necessária para o ensino de um novo conteúdo. Conforme observamos, a proposta Fedathi não se encerra com a prova.

Após a realização desta atividade, descrita no Quadro 14, o encontro seguinte foi realizado em 05 de abril de 2016. Neste, detalhamos um pouco mais cada fase da Sequência Fedathi, dando destaque para a elaboração de uma sessão didática. Para tanto, retomamos alguns conceitos já discutidos, como as representações do conceito de função e os conceitos relacionados que promovem seu aprofundamento.

O encontro do dia 19 de abril de 2016 foi diferenciado em virtude do reduzido tempo da discussão. Nesse dia, a escola reuniu todos os professores para uma reunião, que discutiu alguns pontos da greve da categoria no Estado do Ceará, que poderia acontecer com início no dia 26 de abril de 2016. Por esse motivo, no tempo que tivemos, tomamos algumas decisões para a semana seguinte da formação:

- (1) os professores mostraram-se inseguros quanto à aplicação da sessão didática em suas salas de aula. Em consequência, pediram que ampliássemos as discussões sobre a proposta Fedathi antes de planejarmos as aulas;
- (2) os professores escolheram as turmas nas quais aplicariam a sequência didática; cada professor optou por uma turma, levando em consideração aspectos diversos, como o horário da aula ou o comportamento dos estudantes;
- (3) a elaboração do plano de aula (sessão didática) seria feita após as discussões.

Desta feita, para ampliar algumas discussões realizadas na formação, reordenamos o cronograma para incluir as solicitações dos professores. Tivemos de considerar, no entanto, a greve dos professores, iniciada em 26 de abril de 2016; o retorno às atividades da escola se deu em 16 de agosto de 2016.

No retorno às atividades escolares, o cronograma foi mais uma vez reorganizado com nossas atividades da formação continuada retornando em 27 de setembro de 2016. O primeiro encontro, após o retorno, foi destinado para ajustes de planejamento e apresentação da plataforma TelEduc. Em decorrência do tempo mais restrito do calendário escolar que,

para compor os dias do ano letivo, inseriu alguns sábados nas atividades da escola, tivemos que adequar nosso tempo de modo a nos ajustar à nova proposta da escola.

A opção pelo ambiente virtual teve o intuito de encaminharmos algumas discussões fora do ambiente escolar para que os professores pudessem, além de debater temáticas da formação, postar seus planos de aula. Desse modo, o tempo programado para o TelEduc permitiu a ampliação de questões como o ensino intuitivo de conceitos matemáticos.

Com efeito, no encontro de 04 de setembro de 2016, ocorrido presencialmente, exploramos mais uma vez as fases da Sequência Fedathi, relacionando-as com o conceito de função. Em consonância com essa discussão, iniciamos um debate no TelEduc com o seguinte questionamento: *O que você compreendeu das etapas de Sequência Fedathi? O que há de novo nesta sequência de ensino? De que forma ela pode contribuir nas ações docentes?*

As respostas exibidas pelos professores conferem mais maturidade, ao tratarem da proposta Fedathi em comparação com a atividade do dia 29 de março de 2016. Eles conseguiram perceber a importância da mudança de atitude em sua atividade para permitir um ensino mais fecundo. De tal maneira, identificamos algumas características que apontam essas mudanças na concepção docente: valorização da preparação da aula (sessão didática), preocupação com as análises teórica e ambiental, destaque para a participação do aluno e ênfase no uso da pergunta. Vejamos:

Esta sequência de ensino exige mudança na postura do professor, através da elaboração de propostas de ensino que possam motivar o aluno a ser um construtor do próprio conhecimento. Propõe uma metodologia diferente em ensinar e aprender matemática, contribuindo para o desenvolvimento de conceitos que venham a melhorar a aprendizagem do aluno. (Professora ZELIA, TelEduc, 08/10/2016).

As etapas são claras, devemos separar situações-problemas do assunto que queremos abordar, preparar os estudantes para essa atividade, no sentido da organização da sala, do tempo destinado para a maturação, não oferecer a resposta, mas questionar suas respostas e finalmente deixar os estudantes exporem as soluções, confirmando os acertos e corrigindo os erros. Com certeza, a SF contribui para aulas mais interessantes e motivadoras e deixando o ensino da matemática mais prazeroso, onde o professor é coadjuvante nesse processo. (Professora CLÁUDIA, TelEduc, 10/10/2016).

Nessa metodologia de ensino, o professor organiza sua sequência didática de modo fazer com que seus estudantes estejam mais participantes na formalização dos conceitos dos conteúdos que são mostrados em sala de aula. De modo que ela contribui enormemente nas práticas docentes e sem dúvidas, como muitos trabalhos já vem mostrando, facilita o ensino de conteúdos matemáticos. (Professor WELLINGTON, TelEduc, 15/10/2016).

Os professores falaram também de suas dificuldades, ao reafirmarem que, na fase maturação, deixar os alunos sem a participação direta do professor não é algo que consigam

fazer com segurança. Assim, a compreensão da participação dos alunos na dinâmica da sala de aula entra em conflito com a prática docente. Em seu entendimento, ao passar as atividades, eles conversam entre si e, por isso, é mais urgente partir para a resolução dos problemas e evitar a dispersão dos alunos.

Na fase prova, o professor Mário analisou o uso da linguagem, destacando a ideia de que as ações docentes que favorecem a aprendizagem, tão importantes no contexto escolar, têm alcance nas ações dos estudantes, ou seja,

[...] ao tratarmos do uso da linguagem na formalização do conhecimento, devemos observar que a linguagem matemática, com seus símbolos e termos próprios, permite ao aluno maior liberdade (autonomia) quando ele vai usar um livro, por exemplo. (Professor MÁRIO, 04/10/2016).

Posteriormente, neste mesmo segmento da formação, aprofundando a fase prova, os diálogos tiveram ênfase na intuição, na formalização e na generalização. O entendimento desta fase pôde ser elucidado, embora dois tópicos por nós identificados necessitassem de mais esclarecimentos: (1) as afirmações docentes acerca da assimilação do conteúdo estavam ainda relacionadas com as dificuldades dos estudantes, isto é, não identificamos as dificuldades docentes relativas ao ensino; (2) alguns professores ainda não compreendiam o que significava generalização de um conceito.

A professora Claudia, por exemplo, declarou que os alunos não conseguem escrever/formalizar o conhecimento, ainda que em alguns casos eles consigam resolver mentalmente os cálculos matemáticos. Para ela, a formalização é um momento importante, mas muito difícil para o aluno.

Assim, em nossa interação com os professores, buscamos identificar e inserir no contexto de intervenção as dificuldades docentes inerentes ao ensino de conceito de função. Ao analisarmos o ensino formal, por exemplo, inserimos a perspectiva do ensino intuitivo, a qual sempre consta nos livros didáticos, a linguagem matemática utilizada e o modo como os professores trabalham essa temática. Com isso, pudemos verificar que noções os professores têm acerca dos próprios conhecimentos e como procedem perante suas dificuldades. Deste modo, ampliamos o debate sobre formação docente atrelada ao aprofundamento do conteúdo matemático e ao uso da proposta Fedathi por meio dos questionamentos:

- (1) De que forma o ensino intuitivo pode contribuir na aprendizagem dos alunos?
- (2) De que maneira a Sequência Fedathi pode contribuir para o ensino do conceito de funções?

Por meio destes questionamentos, com o olhar constantemente voltado para as ações docentes e seu reflexo na aprendizagem, examinamos com detalhes as concepções que norteiam sua prática. Assim, ao responderem à primeira pergunta, identificamos ideias bem semelhantes e com algum senso crítico norteando a realidade escolar. Segundo os professores, o ensino intuitivo de um conceito é importante, no entanto, conforme já mencionamos neste capítulo, o tempo destinado ao cumprimento do plano anual limita a possibilidade de inserção deste tipo de abordagem, assim como a incorporação de metodologias de ensino na prática docente. Acerca da concepção deste tipo de ensino, os professores afirmam:

É através da intuição que o aluno tem a percepção da informação, facilitando o processo de aprendizagem e a resolução de determinados problemas. Mesmo assim, a escola continua a valorizar o ensino formal, onde o professor trabalha com modelos prontos e formulas que devem ser adotadas pelos alunos, sem permitir que o aluno seja co-autor na busca pelo conhecimento. (Professora ZELIA, TelEduc, 08/10/2016).

O ensino intuitivo, com certeza exige mais tempo em sala de aula para as atividades, onde os alunos devem pensar, discutir entre si, ou seja, construir o conhecimento. Muito bom, um sonho para os professores, que apesar da correria desejam a aprendizagem de seus alunos. Mas infelizmente em nossas escolas o ensino formal é priorizado, devido uma série de fatores, entre eles o tempo, que mencionei acima. Temos uma grande quantidade de conteúdos que devem ser estudados e acabamos na correria deixando de priorizar a construção da aprendizagem pelo aluno. (Professora CLÁUDIA, TelEduc, 09/10/2016).

No meu ponto de vista, o ensino intuitivo contribui na aprendizagem dos alunos uma vez que possibilita o pensamento individual e coletivo de cada estudante sobre o conteúdo ministrado em sala de aula, dessa maneira o professor dá mais autonomia para o estudante pensar, refletir e raciocinar sobre a informação que pode ser mostrado como a SF permite por meio de resolução de problemas. Ao meu ver o aluno mais participativo na construção do saber tem mais facilidade em compreendê-lo ao invés de simplesmente o professor chegar com uma formula pronta e só manda-lo aplicar. (Professor WELLINGTON, TelEduc, 15/10/2016).

Suas falas são bastante objetivas e remetem à compreensão, já preconizada na proposta Fedathi, de que o professor deve propiciar ao estudante momentos de reflexão e de elaboração do saber. Esse entendimento, bastante discutido na formação, pôde ser assimilado pelos docentes com a observação da restrição do tempo. Aqui a mudança nas ações docentes ganha destaque mais uma vez na valorização da participação dos alunos com ênfase na reflexão, na descoberta e na autonomia.

Deste modo, o ensino intuitivo de conceitos, associado à proposta Fedathi que estabelece na fase prova a formalização do conhecimento, mediante a generalização, coaduna com as ideias manifestadas pelos professores ao longo da formação continuada. Posto isto,

destacamos as concepções docentes acerca da relação entre a proposta Fedathi e suas possibilidades para o ensino do conceito de função:

A SF propõe uma aprendizagem significativa onde o aluno é levado a pensar, refletir, raciocinar e propor soluções. Dessa forma, os alunos passam a entender melhor o conceito de função, não se limitando apenas ao conhecimento através de conceitos já formulados, prontos e acabados que aparecem na introdução de cada assunto em seu livro didático. (Professora ZELIA, TelEduc, 09/10/2016).

A partir de uma situação-problema o aluno passa organizar e construir a ideia da relação entre duas grandezas que formam uma função. Quando o estudante entende o conceito de função, fica fácil o entendimento da fórmula e o uso da mesma. Na verdade, alguns alunos resolvem intuitivamente algumas situações, mas se disser use a fórmula ($y=ax +b$) e faça substituições ele diz "professora sei o resultado, mas não sei usar a fórmula". Então usando a SF daremos oportunidade ao aluno de formular o conceito e não simplesmente oferecer uma fórmula. (Professora CLÁUDIA, TelEduc, 09/10/2016).

A SF contribui para ensino de funções, uma vez que essa metodologia, possibilita os alunos a participarem da maneira mais crítica e reflexiva nos conceitos da função; os passos possibilitam aos estudantes propor soluções e entenderem de forma mais ampla o conteúdo. (Professor WELLINGTON, TelEduc, 16/10/2016).

O ensino do conceito de função, permeado por definições e expressões, requer do professor a compreensão de um ensino baseado na investigação, na interpretação e no entendimento dos diversos conceitos relacionados. Verificamos que o ponto de vista dos professores ressalta muitos dos fundamentos da proposta Fedathi debatidos na formação, ao apontarem, por exemplo, que o uso de fórmulas como receita não possibilita a aprendizagem significativa de conceitos. A atitude docente que leva os estudantes a terem autonomia sobre sua aprendizagem foi evidenciada pelos professores que perceberam a importância de valorização da participação do estudante no ambiente escolar e, ainda, sua participação como mediador apoiado nos fundamentos da proposta de ensino.

Até aqui analisamos as categorias elencadas na perspectiva de grupo, na atuação dos professores em seu ambiente de trabalho por meio de um debate coletivo. A seguir, analisaremos as ações de cada professor em sua atuação perante a aplicação da sessão didática. Voltaremos a explorar a categoria que versa sobre a utilização de proposta Fedathi e a que considera os aspectos da formalização do conceito de função, podendo, em algum caso específico, examinarmos outras categorias.

4.3.2 Sessão didática 1 – Professora Zelia

A preparação da aula teve o planejamento da sessão didática, que previu as ações docentes em cada fase da Sequência Fedathi (Quadro 16). A sessão didática da professora Zelia ocorreu no dia 21 de outubro de 2016 e teve a aula registrada por meio do relatório de análise da sessão didática. A turma contou com um total de 23 alunos e foi organizada em duplas. Na aula planejada pela professora, foram considerados importantes elementos da proposta Fedathi, tais como o acordo didático e os conhecimentos prévios dos estudantes: “Eles [os estudantes] tinham já algum conhecimento o que levou a turma a ter mais domínio na resolução da situação apresentada pela professora” (Professora ZELIA, 22/11/2016).

Na situação proposta aos estudantes, aplicada após o conteúdo de funções já ter sido ensinado aos alunos, constavam quatro itens que deveriam ser analisados com base nos dados indicados.

Quadro 15 – Situação proposta na sessão didática 1

Um comerciante comprou um automóvel por R\$ 20.000,00, constatando que, ao final de cada ano de uso, o valor de mercado do veículo diminui para 90% do valor de um ano atrás. Veja na tabela a seguir os valores do automóvel até o final do 2º ano.

Tempo de uso do automóvel	Valor de mercado (R\$)
0	20.000
1	0,9. 20.000
2	0,9. 0,9. 20.000 = $(0,9)^2 \cdot 20.000$

- Determine o valor do automóvel ao final de 3 anos de uso.
- Determine o valor do automóvel ao final de x anos de uso.
- Indicando por y o valor de mercado do automóvel com x anos de uso, obtenha uma equação que relacione y e x.

Fonte: Sessão didática da professora Zelia

Trata-se de uma atividade que envolve porcentagem, além do conceito de função. As representações também estão presentes, tais como tabela, a língua natural e o uso da lei de formação. Nesta situação, podem ser considerados alguns obstáculos epistemológicos, tais como: discriminação entre as variáveis dependentes e independentes e os variados modos de expressar funções, representar funções e falar sobre funções. Desta maneira, todos esses elementos devem ser observados pelo professor na escolha do problema.

Inicialmente, a aplicação desta sessão didática traz uma reflexão sobre as interações necessárias de professor e aluno no ambiente escolar. A professora Zelia não era docente da turma onde aplicou sua atividade, o que para ela foi um ponto negativo. O entendimento de que a proposta Fedathi proporciona ao estudante, por meio das situações desafiadoras e da interação docente, uma ação contrária ao ensino tradicional de Matemática foi, neste caso, observado por ela.

Ela destaca, ainda, o fato de a turma com poucos alunos ter facilitado o diálogo, entretanto pondera que essa não é a realidade da escola que tem em suas turmas um elevado número de estudantes. Assim, segundo a professora, a quantidade de alunos – argumento corroborado pelos professores Cláudia e Wellington – implicaria resultados diferenciados na integração da Sequência Fedathi à prática docente.

Quadro 16 – Descrição da Sequência Fedathi na sessão didática 1

FASE	DESCRIÇÃO DAS AÇÕES DOCENTES
Tomada de Posição	O professor apresentará o problema aos alunos.
Maturação	Os alunos irão explorá-lo na busca de solução. Levantarão hipóteses, opiniões e buscarão estratégias para a resolução do mesmo. O professor poderá tirar dúvidas através de questionamentos como: - O valor de mercado do automóvel diminui ou aumenta com passar dos anos? - O valor de mercado poderá chegar a zero? - Essa função é crescente ou decrescente?
Solução	Os alunos apresentarão os modelos que podem levá-los às possíveis respostas. O professor irá analisar a solução junto ao grupo e irá concluir qual delas é a mais adequada para representar o problema proposto. Analisará também as respostas descartadas, identificando as possíveis falhas.
Prova	O conhecimento matemático será formalizado pelo professor. Este, fará uma conexão entre os modelos apresentados pelos alunos e o modelo científico existente, introduzindo a notação simbólica da linguagem matemática.

Fonte: Adaptado da sessão didática da professora Zelia

Em sala de aula, no desenvolvimento da sessão didática, foi observado o prosseguimento das fases, conforme o planejado, com alguns detalhes, que merecem destaque. Na maturação, de acordo com o relatório da professora, os alunos participaram da resolução da situação, mas não solicitaram seu auxílio. Na solução, alunos que tinham segurança nas respostas foram para o quadro mostrar seus resultados. Aqueles que

encontraram resultados diferentes dos já indicados não se sentiram à vontade para expor suas ideias. Esse fato, de acordo com a professora, não permitiu a análise de possíveis erros ou a comparação com as respostas já expressas.

Na prova, a professora formalizou os conhecimentos relativos ao conceito de função, atendendo ao uso adequado da linguagem, verificando que os alunos tinham bons conhecimentos matemáticos, contudo tinham dificuldades em formalizá-los.

Em análise final após a aula, a professora Zelia expôs suas impressões quanto a inserção da proposta Fedathi em suas aulas:

A reprodução da Sequência de Fedathi pode ser aplicada em sala de aula antes mesmo de mostrar qualquer conceito ou demonstração acerca do conteúdo que irá ser ministrado ou no fechamento dos tópicos estudados, que foi o nosso caso. Os alunos não solicitaram ajuda do professor enquanto resolviam os problemas (não sabemos ao certo qual a razão, se achavam-se seguros das questões propostas ou pelo fato do professor que aplicou a atividade não ser professor fixo na turma). (Professora ZELIA, Relatório Final).

A vivência das fases da Sequência Fedathi evidenciou a apropriação de uma nova modalidade de ensinar. Verificamos que a professora Zelia apreendeu de modo significativo as ideias concernentes à proposta de ensino, devendo haver, contudo, um aprofundamento em alguns pontos, como as atitudes ante a falta de entusiasmo dos estudantes. Neste caso, o uso da pergunta (proposta no plano de aula) foi pouco executado. A dúvida da professora quanto à participação dos estudantes, segurança ou falta de interação, poderia ser explorada durante as fases maturação e solução, o que permitiria maior participação e integração do grupo. Como propõe Silva (2015, p. 67), “no decorrer do desenvolvimento das atividades, o professor deveria munir-se de estratégias pedagógicas para preencher possíveis lacunas de silêncio, de passividade e de não participação”.

De modo geral, seu senso crítico foi fundamental para o empenho de outras sessões didáticas possíveis, tendo em vista que, em sua aula, a análise das ações poderá incidir no desenvolvimento de aulas posteriores. Destacamos, assim, a ideia de que, mediante a incorporação da proposta Fedathi em sua prática, a professora evidenciou em suas ações domínio de conteúdo, valorização da participação dos estudantes, uso da pergunta para mediar o ensino do conceito de função e, além disso, entendimento da formalização do conceito matemático que incorre em generalizações.

4.3.3 Sessão didática 2 – Professora Cláudia

A sessão didática da professora Cláudia ocorreu no dia 21 de outubro de 2016 e teve a aula registrada por meio de fotos e do relatório de análise da sessão didática. Sua aula foi planejada com o objetivo de verificar o entendimento dos estudantes sobre conceito de função que já havia sido trabalhado em outras aulas. A professora também objetivou observar se a aplicação da Sequência Fedathi poderia favorecer a aprendizagem dos alunos.

Foi pensado o *plateau* dos estudantes, pois a professora selecionou problemas de acordo com o nível do conteúdo já ensinado e que poderiam ser resolvidos mediante o conhecimento já elaborado. A turma foi dividida em grupos de cinco alunos para, segundo a professora, facilitar seu acompanhamento durante a aula.

O problema escolhido envolveu uma transformação do registro na língua natural para o registro na forma de expressão analítica e está associado a um dos obstáculos epistemológicos expressos no Capítulo 3 – Leis em Física e funções em Matemática não têm nada em comum; elas pertencem a distintos domínios de pensamento. Para o ensino desta situação, portanto, além do conhecimento do conteúdo matemático, o professor devia se apropriar destes outros elementos.

Quadro 17 – Situação proposta na sessão didática 2

Em um trecho reto de uma estrada, dois carros, A e B, viajavam no mesmo sentido com velocidades constantes de 1.400 m/min e 1.600 m /min, respectivamente. Em um ponto P o carro B ultrapassou o carro A.

Resolva os itens seguintes, considerando os carros no trecho reto.

- A) Obtenha a lei de associação que expressa a distância y , em um metro, entre os carros, em função do tempo x , em minuto, a partir do instante da ultrapassagem.
- B) Qual é a distância entre os carros, 6 minutos depois da ultrapassagem?
- C) Quanto tempo depois da ultrapassagem a distância entre eles era de 500 m?

Fonte: Sessão didática da professora Cláudia

A professora Cláudia também organizou sua sessão didática baseando-se nas fases da proposta Fedathi (Quadro 18). Em seu relatório, ela expõe a dinâmica desenvolvida em sala de aula, atentando para as informações assimiladas na formação docente. Observamos que, de acordo com a proposta Fedathi, suas intervenções na aula aconteciam apenas quando

os alunos não conseguiam ir adiante na resolução da situação proposta, incentivando a leitura e o uso de conhecimentos que eles já haviam adquirido.

Quadro 18 – Descrição da Sequência Fedathi na sessão didática 2

FASE	DESCRIÇÃO DAS AÇÕES DOCENTES
Tomada de Posição	Propor problemas de acordo com o nível dos alunos.
Maturação	Distribuir os problemas e proporcionar o tempo necessário para que os alunos desenvolvam suas soluções. Tomar o cuidado de não dar respostas e questionar as dúvidas através de perguntas: Como você chegou a esse resultado? Quais as grandezas dessa função? Que valor deve ser fixo e qual haverá variação?
Solução	Os alunos devem apresentar suas respostas no quadro. Havendo soluções diferentes discutir com os alunos onde houve erros, evidenciar os acertos das questões que não estão totalmente corretas.
Prova	De acordo com as respostas dos problemas, formalizar o conceito de função. Mostrar as variáveis existentes e a relação que ocorreu entre elas. Chamar atenção para o uso das equações, quando desejamos encontrar uma grandeza e as substituições necessárias entre elas.

Fonte: Sessão didática da professora Cláudia

Na maturação, por exemplo, a professora observou:

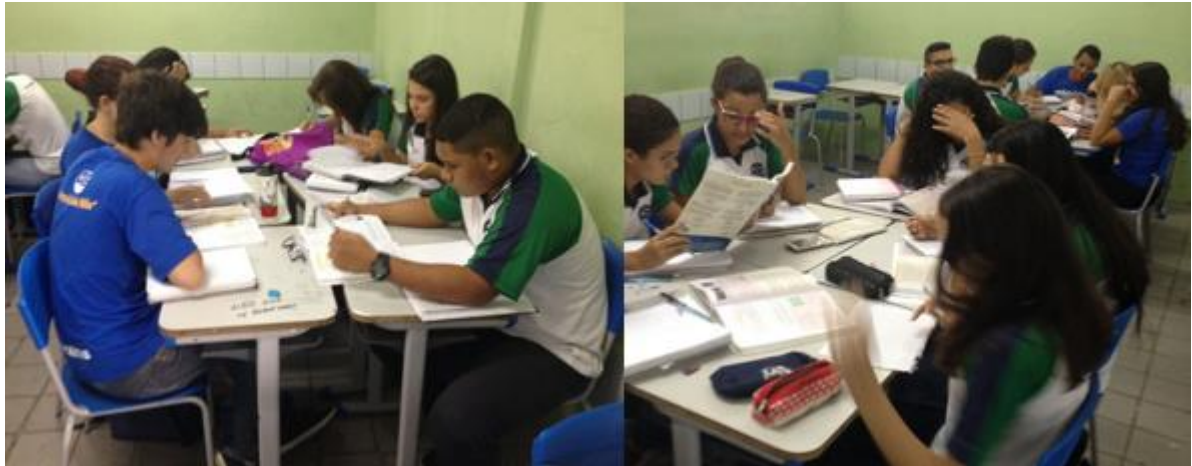
[...] alunos ajudando uns aos outros, discutindo as questões, ensinando a resolver operações de divisão. Alunos ansiosos em saber o resultado, pedi para lerem novamente, para responderem da maneira que quisessem, mas levassem em consideração o que tínhamos estudado sobre funções, a variação de uma grandeza em relação à outra. (Professora CLÁUDIA, Relatório).

Na solução, os alunos foram chamados a exibir seus modelos, mediante o raciocínio matemático adquirido com as explicações da professora sobre o conteúdo. Além disso, a professora destaca sua intervenção nesta fase apenas para esclarecer alguns erros cometidos pelos alunos após a exposição das respostas no quadro para refutar os modelos inadequados, com vistas à mobilizar “um número maior possível de situações que necessitem desse conhecimento, com vista à resolução” (SOUZA, 2010, p.93).

Ao longo da formação continuada, enfatizamos a relevância de, no ensino, observarmos o planejamento das ações em cada fase da proposta Fedathi. Este fato foi

evidenciado nas ações na professora Cláudia ao longo da aplicação da sessão didática e em outros momentos da formação continuada, conforme destacamos na sessão anterior.

Figura 04 – Alunos na fase de maturação na sessão didática 2



Fonte: Pesquisa direta

A professora Cláudia foi a mais participativa nas discussões, sempre com opiniões, sugestões ou dúvidas. Ao fim de sua experiência, aplicando uma sessão didática fundamentada na proposta Fedathi, ela acentua:

Mas que foi bacana, foi. Eu gostei muito. Eles [os alunos] gostaram de encontrar o erro nas outras equipes. Tinha três respostas diferentes, eu coloquei as equipes pra mostrarem as respostas. Eu gostei, acho que eles aprendem muito mais (professora CLÁUDIA, 22/11/2016).

Denota-se, pois, o fato de que a professora concebe a Sequência Fedathi como metodologia que torna o aluno ativo e permite que ele elabore sua aprendizagem. De modo geral, podemos reunir alguns aspectos relativos às atitudes da professora Cláudia em sua sessão didática: atenção com os conhecimentos prévios (*plateau*) dos estudantes, valorização das soluções apresentadas pelos alunos, cuidado com o tempo pedagógico de seu planejamento e uso da pergunta na interação com os alunos. Além destes aspectos, podemos enumerar, ainda, domínio do conteúdo ensinado e o fato de reconhecer a importância do ensino intuitivo, embora não faça uso em suas aulas em decorrência da falta de tempo para cumprir o plano de curso da Matemática.

4.3.4 Sessão didática 3 – Professor Wellington

A sessão didática do professor Wellington ocorreu no dia 13 de novembro de 2016 e teve sua aula gravada, permitindo que tivéssemos mais recursos para analisar os resultados da formação com a Sequência Fedathi.

A turma tinha um número reduzido de alunos – 20 no total. Inicialmente, o professor analisou a turma e afirmou que era uma turma apática, que não interagiu na aula. Mesmo estando receoso em aplicar sua sessão nesta turma, ele assinala que se surpreendeu com a atitude dos alunos diante da nova proposta; alunos que antes não participavam, tiveram um comportamento diferente e, durante a aula, se mostraram atuantes. Nas palavras do professor Wellington: “Gostei de aplicar. Uma coisa boa foi que mudou até minha relação com a turma” (Professor WELLINGTON, 22/11/2016).

Sua aula iniciou-se com a apresentação do tipo de atividade que seria feita pelos alunos. O professor estabeleceu um acordo com os estudantes, informando inicialmente que a atividade seria feita em grupos e, em seguida, explicando que seriam propostas duas questões a serem resolvidas e mostradas por parte de cada grupo. Então, para facilitar a compreensão e organização do momento com os estudantes, o professor Wellington fez a divisão da aula em dois momentos: o primeiro momento no qual os alunos iriam discutir e tentar chegar a uma solução; o segundo, ocasião na qual forneceriam as soluções encontradas.

Na formação dos grupos de trabalho, os alunos demoraram um pouco para se organizar, fato que provocou um atraso no início das atividades. O professor, para dar agilidade ao processo, realizou a tomada de posição, ou seja, a apresentação do problema, enquanto os alunos ainda se organizavam em grupos, fato que atrapalhou o momento inicial da aula.

Quadro 19 – Questão aplicada na sessão didática 3

Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT , enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT . O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$. Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo? (ENEM 2011, adaptada)

Em seu planejamento, notamos que o professor se preocupou com a escolha da situação que estava relacionada com o conteúdo já estudado pelos alunos. Assim, o *plateau* dos estudantes foi valorizado, permitindo a identificação de seu nível cognitivo.

Eu vou apresentar uma atividade e vocês vão tentar resolver. Vocês vão criar um modelo, seu, para resolver aquela questão. A gente vai tentar ver se a questão se desenvolve de acordo com os conhecimentos que vocês já têm. É um conteúdo que vocês já viram, não é nada novo. (Professor WELLINGTON, 13/11/2016).

Destacamos que o professor conseguiu a participação da maioria dos alunos na resolução da situação proposta. Nos grupos, a participação foi bastante intensa, embora os estudantes tenham se desestimulado na resolução em virtude da falta de compreensão do texto. A interpretação da pergunta por parte dos alunos foi um ponto que trouxe muita dificuldade para o professor. A maturação, fase da Sequência Fedathi que orienta o professor a não dar respostas, é bastante difícil de ser incorporada na prática docente. Ainda assim, observamos o esforço do professor em não oferecer respostas do problema, mediando as perguntas dos alunos, ao fazer uso de questionamentos diversos e ao orientá-los na busca de informações que favorecessem a solução do problema. Nos diálogos durante a maturação, observamos:

Professor: O que a questão está pedindo?

Aluno 1: [...] quanto falta pra não ter prejuízo.

Professor: O que você entende com isso, não ter prejuízo?

Aluno 1: Que não perca, não saia perdendo. Que o lucro seja maior do que o que foi produzido.

Professor: E tem que ser maior do que quanto?

Aluno 1: Maior do que o custo.

Professor: E você sabe quanto é o custo?

Aluno 2: 5Q

Professor: Olha aí, você já tem mais uma ideia.

Aluno 2: O CT é maior aqui?

Professor: É um caminho. Não posso dar a resposta.

Aluno 3: Eu parei aqui porque eu não tenho mais argumento pra resolver.

Professor: O que a questão está pedindo?

Aluno 3: O valor de Q.

Professor: Nessa questão, o Q representa o quê?

Aluno 3: A quantidade.

Professor: A quantidade de quê?

Aluno 3: Do produto.

Professor: Ele [a questão] quer saber só o número de Q?

Aluno 3: Quantos produtos ele [a fábrica] tem que produzir pra não ter prejuízo.

Professor: Você tem a expressão que dá o lucro e a que dá custo?

Aluno 3: Tem.

Professor: Então olhe aí e pense direitinho.

Embora algumas das respostas do professor Wellington induzissem o pensamento dos alunos no uso no conceito de função (Ele [a questão] quer saber só o número de Q?), sublinhamos o fato de que a intencionalidade do uso da pergunta evidencia um caminho de mudanças em suas ações com os estudantes. Além deste aspecto no uso dos questionamentos, consideramos que alguns dos equívocos na condução da aula ao vivenciar a Sequência Fedathi merecem ser frisados. Nesse sentido, verificamos, com base nos diversos diálogos, dois fatos que merecem destaque nas ações do professor nesta fase:

(1) a leitura do problema para os alunos – quando alguns estudantes diziam que ainda não haviam compreendido do que se tratava, o professor fazia a leitura da questão. Essa atitude não permitiu, ao longo da aula, a autonomia do estudante na elaboração de seu conhecimento por meio da leitura, da investigação e da interação com seus colegas de sala;

(2) “Não sei, não posso te dar a resposta” – essa fala do professor Wellington foi muito recorrente ao longo da aplicação da atividade. O professor parecia não estar pronto para as perguntas dos estudantes, que foram muitas. Na tentativa de não dar as respostas prontas, fundamento da Sequência Fedathi, ele causou um distanciamento com alguns estudantes que preferiram esperar as respostas ao final da aula.

Passando a analisar o momento da solução, o professor Wellington deixou os alunos bem à vontade. Alguns, ao mostrarem suas respostas, se sentiam como se estivessem realmente dando aula para os colegas de sala e não apenas apresentando um resultado para o

professor, ainda que demonstrassem insegurança para mostrar os modelos de solução. Nem todos os grupos tiveram representantes para apontar um tipo de solução.

Figura 05 – Alunos na fase de Solução na sessão didática 3



Fonte: Pesquisa direta

Nesta fase, pudemos observar o professor analisando e discutindo as respostas juntamente com os alunos. O professor cobrou, inclusive, organização da estruturação dos cálculos, fato que indica preocupação no emprego da linguagem matemática. As ações do professor Wellington durante a solução foram de valorizar a atuação individual e coletiva dos estudantes com incentivo à investigação das respostas, possibilitando a autonomia discente ao longo da aula.

Na última fase, a prova, o professor usou os erros das respostas de modo a propiciar a reflexão dos estudantes, mostrando os cuidados que deveriam ser tomados naquele tipo de situação trabalhada em sala de aula. No relatório de aplicação, o professor destaca:

A grande mudança que notei como professor foi o aumento do interesse na aula, como a experiência nova instigou a participação dos estudantes na sala de aula. Outro benefício da Sequência Fedathi é como ela permite uma organização melhor do professor no regimento da aula e como é mais perceptível a relação professor-aluno-saber com o uso dessa metodologia (Professor WELLINGTON, Relatório).

Outra observação relevante feita pelo professor, que remete às discussões do grupo de Matemática da escola, é o tempo necessário que o uso da proposta Fedathi demanda. Segundo o professor, “é difícil de ser usada ao longo de um ano letivo numa sala de aula sem o máximo de planejamento possível da parte do professor atuante” (Professor WELLINGTON, Relatório).

No contexto vivenciado por ele, podemos, então, elencar outras atitudes que se destacam em sua ação docente ao experimentar a Sequência Fedathi em sala de aula: interação com os estudantes, planejamento da sessão didática com destaque para os conhecimentos prévios, observância ao acordo didático. O uso de perguntas ao dialogar com os alunos, também evidenciado nas ações do professor, merecem, conforme enfatizamos, um aprofundamento do seu emprego.

4.4 O que acontece após a aplicação da sessão didática?

A parte final da formação contou com o retorno às discussões da aplicação da sessão didática dos professores, com o intuito de verificarmos seu desempenho, erros e acertos, na visão de cada professor, e o encaminhamento de uma nova aplicação. O encontro do dia 22 de novembro foi destinado a essa atividade.

Essa parte de nossa pesquisa foi prejudicada em decorrência de um conjunto de fatores: (1) o calendário da escola, por conta do período de greve, muito restrito em datas para essa atividade; (2) o período de recuperação escolar, que limita a quantidade de aulas de cada professor; (3) o professor Wellington, que não era efetivo na escola e sim professor temporário, teve seu contrato encerrado.

O diálogo em torno da atuação docente, detalhado nas sessões anteriores que tratam das sessões didáticas nesta pesquisa, aponta para a necessidade de aprofundamento sobre o uso da pergunta e formalização do conceito de função na fase final da Sequência Fedathi. A reflexão com os professores com suporte nessas ideias conduziu para a necessidade de uma nova aplicação, no entanto, não foi possível a conclusão de nosso cronograma.

Posterior aplicação poderá ainda ser realizada pelos professores mediante um curso de aprofundamento a ser realizado por nós, entretanto, seus resultados não poderão mais ser expostos nesta pesquisa.

Com relação ao professor Wellington, antes de sua saída da escola, ainda tivemos uma conversa sobre a execução de sua sessão didática. Fizemos uma análise dos vídeos e do relatório produzido mediante o material coletado – planejamento da sessão didática, relatório final, vídeo da aula. Com isso, foi possível a nova aplicação, no entanto, em uma escola que não era nosso *locus* de pesquisa. O professor, que também atuava em uma outra escola, pôde aplicar sua sessão didática e produzir um novo relatório com seus resultados. Vale destacar a

noção de que a aprendizagem do professor nesta formação proporcionou seu trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, conforme veremos adiante.

4.4.1 Indo além do curso de formação continuada

O emprego de metodologias de ensino deve ser incorporado à prática escolar, de modo que o professor possa atuar de modo natural, isto é, a integração de novas ideias deve ser consolidada à práxis, legitimando o fazer docente espontaneamente. Por conseguinte, destacamos, também, como resultado desta pesquisa, a indicação para a consolidação de práticas que relacionam o ensino de conceitos matemáticos mediante a proposta Sequência Fedathi.

A formação continuada que propusemos na escola Aduino Bezerra, ao inserir a Sequência Fedathi, buscava verificar as contribuições desta proposta no ensino do conceito de função. Assim, verificamos que o aprendizado ao longo da formação dos professores foi importante para a aplicação de uma sessão didática na qual o conteúdo era o conceito de função. Num caso particular, acompanhamos o professor Wellington, que vivenciou, após a formação continuada, uma experiência com a Sequência Fedathi em outra escola onde trabalhava.

Segundo ele, o uso de novas metodologias de ensino possibilita, ao professor de Matemática, novos horizontes para atuar nessa disciplina e promove a interação professor/aluno/saber. Nesse sentido, ampliando seus estudos e conhecimentos, desenvolveu a pesquisa intitulada *A Sequência Fedathi no ensino de função quadrática: uma experiência com alunos da 9ª série do ensino fundamental* cujo objetivo foi verificar as contribuições da Sequência Fedathi no ensino de função quadrática por meio da resolução de problema.

A sessão didática planejada pelo professor contou com a aplicação de cinco atividades distribuídas em três aulas e previu, em cada uma delas, muitos dos fundamentos da proposta Fedathi: acordo didático, *plateau*, pergunta, erro, por exemplo.

Aula 1 - O zero da função quadrática (Atividades 1 e 2).

Aula 2 - O gráfico da função quadrática (Atividades 3 e 4).

Aula 3 – Máximos e mínimos da função quadrática (Atividades 5 e 6).

É importante ressaltar que a vivência de cada uma das fases foi bastante detalhada em todas as atividades propostas. Na aula 1 (Quadro 20) o professor evidencia a participação dos estudantes na fase solução, na qual eles tiveram liberdade para expor os modelos desenvolvidos para cada atividade e, ainda, a possibilidade de interação com o grupo de alunos.

Quadro 20 – Atividades propostas na Aula 1

ATIVIDADES	
AULA 1	Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão: $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?
	Em um retângulo, uma dimensão excede a outra em 4 cm. Sabendo que a área do retângulo é 12 cm^2 , determine suas dimensões.

Fonte: Nascimento (2017)

De acordo com o professor Wellington, “essa metodologia possibilitou que os estudantes fossem mais participativos na sala de aula, uma vez que as discussões foram encorajadas e incentivadas pelo docente, fazendo o aluno ser fator primordial na aprendizagem” (NASCIMENTO, 2017, p.45).

Ao final da aplicação desta sessão didática, o professor verificou a melhora dos alunos no que tange a motivação e participação durante a aula, destacando os depoimentos de alguns estudantes que consideraram a aula mais dinâmica, permitindo discussões satisfatórias entre os alunos sobre o conteúdo ensinado.

Importante é afirmarmos que os conhecimentos acerca da proposta Fedathi foram assimilados e incorporados pelo professor em sua dinâmica escolar em situações que escapam a aplicação no formato de pesquisas – a que ele atuou como participante e que foi o próprio pesquisador.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizamos a investigação cujo objetivo foi verificar se a proposta de ensino Sequência Fedathi contribui no ensino do conceito de função, bem como analisar as possíveis mudanças nas atitudes docentes que podem ser provocadas por meio da proposta Fedathi. Para atingir nosso objetivo, realizamos uma formação continuada com os docentes da escola, seguida da aplicação de sessões didáticas pelos professores participantes da pesquisa.

Ao analisarmos os resultados, evidenciamos algumas nuances da postura docente relativas à sua formação quanto aos conhecimentos acerca do conceito de função e ao uso de metodologias de ensino que favorecessem as interações no ambiente escolar do professor com os estudantes.

Nesse sentido, o contexto definido ao longo da investigação nos possibilitou a identificação de muitas das ideias dos professores que, pela falta de tempo pedagógico, são pouco vivenciadas, como o uso de práticas de ensino diferenciadas com metodologias que motivem os estudantes em sua aprendizagem. Além disso, destacamos que os conhecimentos específicos da área da Matemática estão bem estruturados na organização escolar e pelos próprios professores em referência aos seus saberes. Carecem, no entanto, de aprofundamento na conjugação deste saber com outros aspectos também relevantes da formação docente.

Sobre tais aspectos, referimo-nos a situações que abrangem, por exemplo, a formalização e a generalização do conceito de função. Em nossa pesquisa, identificamos o fato de que o aprofundamento sobre estes elementos em muito favorece as concepções dos professores que se estendem a aprendizagem discente. Ainda sobre estes aspectos, verificamos que o ensino fundamentado nos processos intuitivos de conceitos matemáticos também concebe destaque às interações dos sujeitos com o saber.

É importante destacar que os fundamentos da proposta Fedathi foram assimilados pelos professores que conferiram sua relevância na atuação em sala de aula. Damos destaque ao planejamento da sessão didática que, embora demande tempo, imprimiu maior organização e, conseqüentemente, mais produção e participação dos estudantes. Acentuamos também o cuidado que os professores tiveram na preparação da aula quanto aos conhecimentos prévios dos alunos.

Com relação às fases da Sequência Fedathi, evidenciamos que a maturação e a prova foram as que apontaram as maiores dificuldades dos professores. A primeira porque exigiu uma participação mais ativa dos estudantes e convocou o professor a ser um

observador, atuando apenas quando os questionamentos dos alunos surgissem e provocassem um diálogo para promover a busca de soluções. Nesta fase, os professores não forneceram as respostas dos problemas, fato que foi de encontro às suas práticas usuais.

A segunda fase, prova, salientou as dificuldades docentes ao lidarem com o conteúdo de um modo novo. O conceito de função precisou de uma abordagem mais aprofundada com o entendimento do que é generalização e formalização. Embora a Sequência Fedathi promova essa relação do conteúdo com sua generalização, verificamos que ainda restaram lacunas a serem preenchidas e discutidas em outras situações.

Nesta fase, também, os professores precisaram estar atentos a um diálogo com as várias respostas encontradas pelos estudantes. Aqui coube a importância de valorização das ações das atitudes discentes, de seus erros e acertos. O erro passa a ser um promotor da aprendizagem, por isso foi oportuno considerar todas as situações expressas.

Ressaltamos que os equívocos evidenciados ao longo da sessão didática são suscetíveis a mudanças mediante um processo de aprendizagem mais detalhado em outras formações, já que os professores se mostraram abertos à continuidade do processo.

Aliar o ensino do conceito de função à Sequência Fedathi mostrou-se, ao fim da pesquisa, uma proposta de ensino que enriquece os saberes docentes e fomenta o ensino e a aprendizagem, motivando os sujeitos em sua interação. Deste modo, sublinhamos a importância desta pesquisa, ao realçar as mudanças nas atitudes docentes e, conseqüentemente, no comportamento de seus alunos. Com isso, consideramos ter atingido nosso propósito principal, além dos específicos. A Sequência Fedathi mostrou-se favorecedora do ensino do conceito de funções e promoveu, ainda, mudanças significativas das concepções docentes ao ensinar e ao aprender.

Esperamos dar continuidade a este trabalho em outras situações, com distintos conteúdos, e esperamos obter resultados semelhantes, já que a cada pesquisa a proposta Fedathi se consolida como um meio de promoção propulsor para o ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Francisco Regis Vieira. **Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis**. 2011. 398f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2011.
- ANDRADE, Viviane Silva de. **A sequência Fedathi e o ambiente virtual de ensino TeleMeios na determinação da equação de uma reta**. 2011. 186f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2011.
- ÁVILA, Geraldo. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral**. São Paulo: Blucher, 2010.
- BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico: contribuindo para uma análise do conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2011.
- BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Penso: 2012.
- BORGES NETO, H. **Sequência Fedathi no ensino de Matemática**. Curitiba: CRV, 2017. (Coleção Sequência Fedathi)
- BORGES NETO, H. et al. **A Sequência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**. XV EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste, São Luiz, 2001, p. 590-609.
- BRANDIM, M. R. L. **A formação do professor de Matemática no programa de formação docente em nível superior – Magister/UVA**. 2005. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza-CE, 2005.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: 5ª a 8ª série**. Brasília: MEC, 1998.
- _____. Secretaria de Educação Básica. 135 p. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Brasília: MEC, 2006.
- CASTRO, M. S. P. **O ensino de funções na Educação Básica, dialogando com o professor: uma proposta de abordagem**. 2015. 289f. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática, Rio de Janeiro, 2015.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2013.
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

DESCARTES, R. **Discurso do Método**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática**. org. MACHADO, Silvia D. A., Campinas, SP: Papyrus, p.11-33, 2013.

_____. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosane Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110p.

_____. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. 160p.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: **Didactics of Mathematics as a scientific discipline**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. **A sequência Fedathi no ensino da Álgebra linear**: o caso da noção de base de um espaço vetorial. 2013. 94f. – Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza (CE), 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática, ciência e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2004.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new Algebra with understanding. In: E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. p. 133-155, 1999. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

KAPUT, J. J; BLANTON, M, L. Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. In: **Advances in Mathematics Education**. Berlin: Springer, p. 5-23, 2011.

KLEINER, I. **Evolution of the function concept**: a brief survey. The College Mathematics Journal, 20(4), 282-300, 1989.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, v. 1, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, L. **A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de Matemática**. Fortaleza, 2008, 319f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza – CE, 2008.

MARANHÃO, Cristina S.A.; IGLIORI, Sonia B. Camargo. **Registros de Representação e números racionais**. In: Aprendizagem em Matemática. MACHADO, Silvia D. A. (Org.), Campinas, SP: Papirus, p.57-63, 2013.

MENDONÇA, A. F. O ensino com base na elaboração de conceitos matemáticos: saberes necessários. In: BORGES NETO, H.; MENDONÇA, A. F.; OLIVEIRA, D. R. **Formação docente: desafios e diálogos contemporâneos**. Curitiba: CRV, 2017.

MENDONÇA, A. F.; BORGES NETO, H. Formação do professor de Matemática: concepções sobre o conceito de função. In: ANDRADE, F.A.; SOUSA, A. P. P.; OLIVEIRA, D. S. **Docência, saberes e práticas**. Curitiba: CRV, 2017.

MENNELL, S. Ethnomethodology and the New "Methodenstreit". In: **Acta Sociologica**, Vol. 18, No. 4 (1975), pp. 287-302. 1975.

MENEZES, D. B. A aplicação de problemas sobre taxas relacionadas com a metodologia Sequência Fedathi. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo, 2016.

MOURA, M. J. A. **O uso do computador e da internet na construção do conceito de função: de fora para dentro da sala de aula**. 2011. 140f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande – PB, 2011.

NASCIMENTO, W. L. A Sequência Fedathi no ensino de função quadrática: uma experiência com alunos do 9º ano do ensino fundamental. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2017.

NORMAN, A. Teacher's mathematical knowledge of the concept of function. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. Guershon Harel and Ed Dubinsky (Eds.). Mathematical Association of America, vol. 25, 215-232, 1992.

OLIVEIRA, S. A.; MONTENEGRO, L. M. Etnometodologia: desvelando a alquimia da vivência cotidiana. In: **Cadernos EBAPE.BR**, v. 10, nº 1, artigo 7, Rio de Janeiro, Mar. 2012 p.129.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. São Paulo: Moderna, 2013

PINHEIRO, A. C. M. **A mediação docente na construção do raciocínio geométrico de alunos da licenciatura em matemática na disciplina desenho geométrico**. Fortaleza, 2008. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza – CE, 2008.

PINHEIRO, A. C. M. **Concepção e desenvolvimento de uma formação continuada de professores de matemática baseada na sequência Fedathi**. 2016. 136f. Tese (Doutorado

em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza - CE, 2016.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

SFARD, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Orgs.), **The concept of function** (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem conceitual e organização de ensino: contribuições da Teoria da Atividade**. Araraquara: JM Editora, 2004.

SIERPINSKA, A. On understand the notion of function. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. Guershon Harel and Ed Dubinsky (Eds.). Mathematical Association of America, vol. 25, 25-58, 1992.

SILVA, M. A. **Formação do professor reflexivo com a metodologia Sequência Fedathi para o uso das tecnologias digitais**. 2015. 115f. – Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza (CE), 2015.

SOUSA, F. E. E. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de Matemática por meio da Sequência Fedathi**. 2015. 283f. – Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza (CE), 2015.

SOUSA, F.E.E et al. **Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática**. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

SOUZA, M. J. A.. **Aplicações da sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais**. 2010. 231 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira Fortaleza-CE, 2010.

SOUZA, M. J. A. Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. In: SOUZA, F. Edison Eugênio *et al.* **Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de ciências e matemática**. Fortaleza: Edições UFC, 2013. p. 15.

SOUZA, A. M. **A sequência Fedathi para uma aprendizagem significativa da função afim: uma proposta didática com o uso do software Geogebra**. 2015. 156 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza-Ce, 2015.

STEWART, J. **Cálculo**, v. 2, 4 edição, São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2004.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 12, n. 2, 158-161, 1981.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

THERRIEN, Jacques. Trabalho docente e transposição pedagógica da matéria: alguns elementos da gestão dos conteúdos no contexto da sala de aula. In: **Formação e práticas docentes**. Fortaleza: UECE, 2007.

THERRIEN, J. Intersubjetividade e aprendizagem: a apreensão de saberes, sentidos e significados subjacente à racionalidade pedagógica. In: **Labirintos da mediação didática: saberes e profissionalidade docente**. XV ENDIPE, Belo Horizonte, 2010.

THERRIEN, J. Docência universitária: a racionalidade intersubjetiva de uma prática de formação profissional e cidadã. In: Ana Maria Iorio Dias; Eugênio Pacelli Leal Bittencourt; Sônia de Fátima Rodrigues Santos; Zenilda Botti Fernandes. (Org.). **Docência universitária: saberes e práticas em construção**. 1 ed. Belém: IFPA/Unama, 2011, v. 1, p. 156-167

THERRIEN, J. Ensinar a pesquisar - O que aprendem docentes universitários que orientam monografia? In: Carlinda Leite & Miguel Zabalza. (Org.). Ensino Superior: Inovação e Qualidade na Docência. VII Congresso Iberoamericano de Docência Universitária: **Livro de Atas**. 1 ed. Porto, Portugal: CIIE Centro de Investigação e Intervenção Educativas, 2012, v. 1, p. 120-132.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_____. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

ZAHN, M. **Teoria elementar das funções**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

APÊNDICE A – CRONOGRAMA DA FORMAÇÃO CONTINUADA

FORMAÇÃO CONTINUADA – ADAUTO BEZERRA - 2016

SEQUÊNCIA FEDATHI

Data	Descrição da atividade	Registro
01/03/2016	Conceito de função no livro didático	Registrado no caderno
15/03/2016	Conceito de função: história, representações, obstáculos epistemológicos.	Assembleia Geral do Professores Encontro suspenso.
22/03/2016	Conceito de função: história, representações, obstáculos epistemológicos. Slide 1	Áudio 1
29/03/2016	Proposta de ensino Sequência Fedathi Slide 2	Áudio 2
05/04/2016	Proposta de ensino Sequência Fedathi O que é uma sessão didática? Slide 3	Registrado no caderno
19/04/2016	Encaminhamentos para os próximos encontros.	Áudio 3
26/04/2016	Início da greve	
27/09/2016	Apresentação do novo cronograma e da plataforma Teleduc. Cadastro de alguns professores que tiveram problema com a inscrição	
04/10/2016	Revisão sobre o que é a Sequência Fedathi. Aprofundamento sobre a fase Prova. <u>Teleduc</u> : Elaborar uma sessão didática utilizando a SF e o conceito de função.	
11/10/2016	Análise da sessão didática	Registrado no caderno
18/10/2016	Aplicação	
25/10/2016	Aplicação	
22/11/2016	Discussão sobre a aplicação de cada professor; análise de alguns resultados.	Áudio 4
Dezembro	Período para discussão das aulas e remarcação de aplicação.	

APÊNDICE B – ATIVIDADES PARA APLICAÇÃO I e II**APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO DE FUNÇÕES****ATIVIDADES PARA APLICAÇÃO I****Professor:** _____**ATIVIDADE ESCOLHIDA:** _____

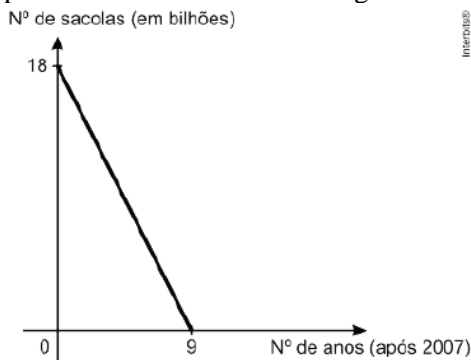
Etapa da SF	Postura do professor
Tomada de posição	
Maturação	
Solução	
Prova	

ATIVIDADES PARA APLICAÇÃO I

APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO DE FUNÇÕES

ATIVIDADE 1

(ENEM 2010) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano de 2007.



LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. *Galileu*. n.º 225, 2010.

De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

- a) 4,0
- b) 6,5
- c) 7,0
- d) 8,0
- e) 10,0

ATIVIDADE 2

(ENEM 2011) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R\$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R\$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R\$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R\$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

- a) $100n + 350 = 120n + 150$
- b) $100n + 150 = 120n + 350$
- c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
- d) $100(n + 350\ 000) = 120(n + 150\ 000)$
- e) $350(n + 100\ 000) = 150(n + 120\ 000)$

ATIVIDADE 3

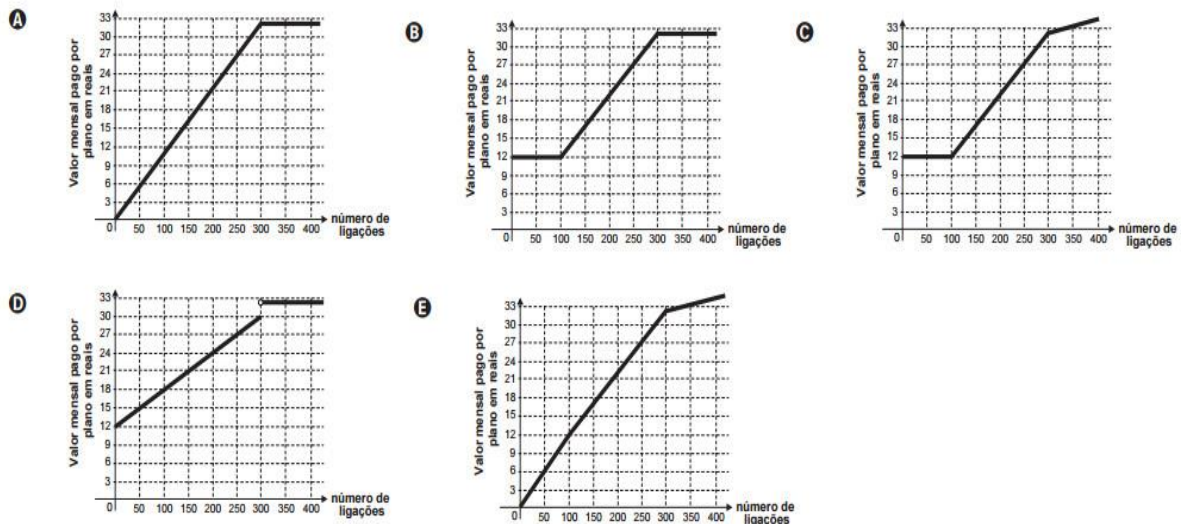
(ENEM 2011) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT , enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT . O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$.

Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

- A) 0
- B) 1
- C) 3
- D) 4
- E) 5

ATIVIDADE 4

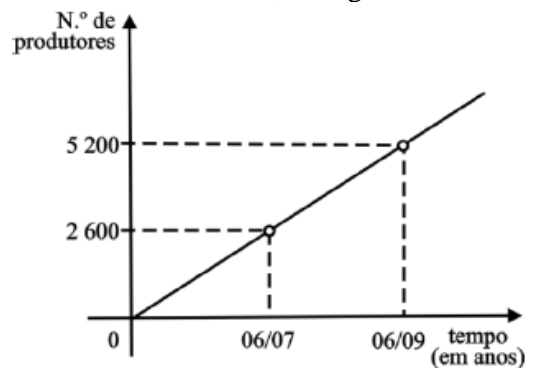
(ENEM 2015) Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R\$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R\$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R\$ 32,00. Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:



ATIVIDADE 5

(FAMECA SP/2010) Suponha que no gráfico esteja representado o número de produtores que adotaram o controle biológico de pragas em uma certa região, que passaram de 2600 em junho/2007 para 5200 em junho/2009. Admita que o aumento se mantenha nos próximos 3 anos. De acordo com a função representada no gráfico, o número desses produtores, em dezembro/2009, será igual a

- a) 5 800.
- b) 5 850.
- c) 6 500.
- d) 6 850.
- e) 7 000.



ATIVIDADE 6

Por volta do ano 2000 a.C., na Babilônia uma tábua que fornecia os quadrados e os cubos dos inteiros de 1 a 30. A mesma tábua ainda fornecia os valores de n^2+n^3 para esse intervalo de inteiros dado.

Inteiro	n^2	n^3	n^2+n^3
1			
2			
3			
4			
5			
...
28			
29			
30			

Essa tabela era essencial para os babilônios e eles utilizavam essas combinações para resolver equações do tipo $x^3+x^2 = a$. Esses conhecimentos e registros permitiram o posterior desenvolvimento do conceito de função, um dos mais importantes da matemática moderna.

A partir dos dados da tabela, resolva os itens abaixo:

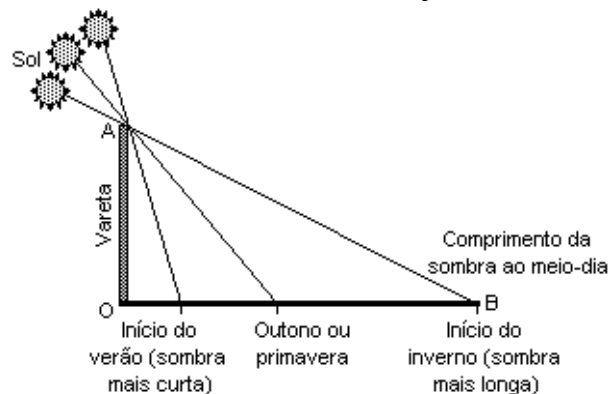
- Qual seria a solução da equação $x^3+x^2 = 252$?
- Se $x = 12$, qual seria o valor correspondente na tabela?
- Existe algum inteiro no intervalo de 1 a 30 que não tem correspondente na coluna n^2+n^3 ? Justifique.
- Represente os valores da tabela na forma de diagrama.
- Qual seriam as leis de correspondência entre os valores inteiros da primeira coluna e as outras colunas da tábua?

ATIVIDADE 7

(UERJ) Sabedoria egípcia.

Há mais de 5 000 anos os egípcios observaram que a sombra no chão provocada pela incidência dos raios solares de um gnômon (um tipo de vareta) variava de tamanho e de direção. Com medidas feitas sempre ao meio-dia, notaram que a sombra, com o passar dos dias, aumentava de tamanho. Depois de chegar a um comprimento máximo, ela recuava até perto da vareta. As sombras mais longas coincidiam com dias frios. E as mais curtas, com dias quentes.

(Adaptado da revista Galileu, janeiro de 2001.)



Um estudante fez uma experiência semelhante à descrita no texto, utilizando uma vareta OA de 2 metros de comprimento. No início do inverno, mediu o comprimento da sombra OB, encontrando 8 metros.

Utilizou, para representar sua experiência, um sistema de coordenadas cartesianas, no qual o eixo das ordenadas (y) e o eixo das abscissas (x) continham, respectivamente, os segmentos de reta que representavam a vareta e a sombra que ela determinava no chão.

Esse estudante pôde, assim, escrever a seguinte equação da reta que contém o segmento AB:

- a) $y = 8 - 4x$.
- b) $x = 6 - 3y$.
- c) $x = 8 - 4y$.
- d) $y = 6 - 3x$.

ATIVIDADES 8

Os 120 alunos que iniciaram o curso de administração de uma universidade contrataram os serviços de uma empresa organizadora de eventos para preparar a festa de formatura da turma ao final do curso. Para se resguardar de possíveis prejuízos com reprovação ou desistência de alunos, o contrato previa que cada formando que participaria da festa pagaria à empresa a quantia de R\$ 3.000,00, acrescido de R\$ 50,00 para cada colega que, por qualquer motivo, não participasse da festa.

A partir da situação hipotética apresentada acima, assinale a opção correta, considerando que x dos 120 alunos participarão da festa de formatura.

- a) Se 40 alunos não participarem da festa, então a despesa com a empresa de eventos para cada um daqueles que participar será superior a R\$ 6.000,00.
- b) A função, em termos da variável x , que descreve a despesa de cada um dos alunos que participarão da festa é uma função polinomial do 1.º grau, crescente.
- c) A empresa receberá a quantia de R\$ 360.000,00 somente se todos os 120 alunos participem da festa.
- d) A função que descreve, em termos da quantidade de participantes da festa, a quantia que a empresa receberá dos alunos é uma função polinomial do 2.º grau, com concavidade para cima.
- e) O valor máximo que a empresa poderá receber dos alunos é igual a R\$ 405.000,00.

ATIVIDADE 9

Para encorajar pessoas ao uso do sistema de transporte solidário, o Departamento de Trânsito de um Estado ofereceu um desconto especial no pedágio para veículos transportando 4 ou mais pessoas. Há trinta dias, durante o horário matinal de maior movimento de carros, apenas 157 veículos obtiveram o desconto. Desde então, o número de veículos com direito ao desconto aumentou numa razão constante. Hoje, por exemplo, 247 veículos receberam o desconto.

- a) Expresse o número de veículos com direito a desconto, em cada manhã, como função do tempo e construa o gráfico correspondente.
- b) Daqui a 14 dias, quantos veículos terão direito ao desconto?

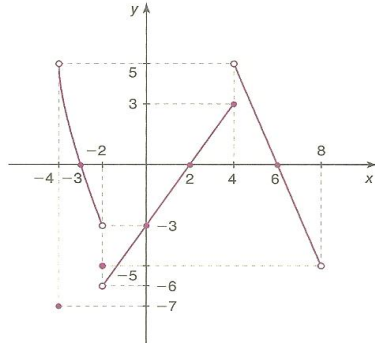
ATIVIDADE 10

(UNICAMP-SP) O custo de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial Q_0 fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância D percorrida nessa corrida. Sabe-se que, em uma corrida na qual foram percorridos 3,6km, a quantia cobrada foi de R\$8,25 e que em outra corrida, de 2,8km a quantia cobrada foi de R\$7,25.

- a) Calcule o valor inicial de Q_0 .
- b) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R\$75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?

ATIVIDADES 11 e 12

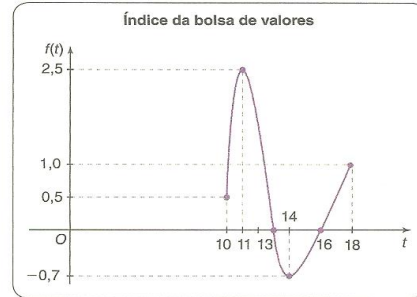
R.8 O gráfico abaixo representa uma função $f: [-4, 8[\rightarrow \mathbb{R}$.



- Determinar:
- $f(-4)$
 - $f(-2)$
 - $f(0)$
 - $f(2)$
 - $f(4)$
 - $f(6)$
 - os valores de x para os quais $f(x) > 0$;
 - os valores de x para os quais $f(x) < 0$;
 - os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

... e o símbolo "bolinha vazia" (○) exclui o ponto e o símbolo "bolinha cheia" (●) inclui o ponto.

R.9 O gráfico a seguir descreve o índice $f(t)$ da bolsa de valores de um estado, em porcentagem, em função do horário t , em hora, desde o início do pregão, 10 h, até o fechamento, 18 h, de determinado dia.



Dados fictícios.

- Qual foi o maior valor atingido pelo índice da bolsa de valores nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?
- Qual foi o menor valor atingido pelo índice da bolsa de valores nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?
- Em que horários desse dia o índice da bolsa de valores foi nulo?
- Durante quanto tempo do pregão o índice da bolsa de valores esteve positivo?
- Em que horários desse dia o índice da bolsa de valores esteve negativo?

ATIVIDADES 13 e 14

14 Em um trecho de uma estrada, a velocidade v de um caminhão, em quilômetro por hora, em função do tempo t , em hora, pode ser calculada por $v(t) = 6t + 60$.



Caminhões trafegando na Rodovia BR-116, Vitória da Conquista, BA. Foto de 2012. Nas rodovias brasileiras, a velocidade máxima permitida pode variar de 80 a 120 km/h, mas em alguns casos a velocidade máxima pode ser 60 km/h.

- Durante esse trecho, sejam t_1 e t_2 dois valores quaisquer do tempo, em hora. Mostre que se $t_1 > t_2$, então $v(t_1) > v(t_2)$.
 $t_1 > t_2 \Rightarrow 6t_1 > 6t_2$
 $\therefore 6t_1 + 60 > 6t_2 + 60 \Rightarrow v(t_1) > v(t_2)$
- De acordo com o que você demonstrou no item a, pode-se concluir que o caminhão esteve em movimento acelerado ou retardado? acelerado
 acelerado ou retardado, conforme a velocidade v do caminhão seja crescente ou decrescente, respectivamente.)

16 Você já deve ter ouvido falar da **Lei da Oferta e Procura** ou **Lei da Oferta e Demanda**. Essa lei foi estabelecida a partir de observações da relação entre a demanda (procura) de um produto por parte dos consumidores e a quantidade desse produto disponível (oferta) no mercado. Quando a oferta de um produto excede a demanda, seu preço tende a baixar; por outro lado, quando a demanda supera a oferta, o preço tende a subir.

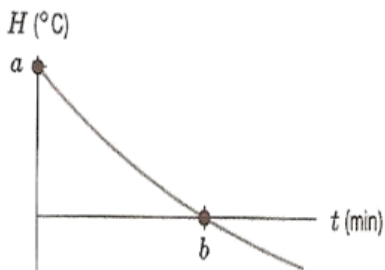
Por exemplo, suponha que o preço y da saca de feijão preto no Brasil, em determinado período, tenha variado de acordo com a produção x , em milhão de toneladas, segundo a função $y = -7x + 106$. (Nota: Saca é uma unidade de medida de massa equivalente a 60 kg, utilizada no Brasil para medir quantidade de grãos.)



Supondo que, nessa época, o preço do feijão preto obedecesse à Lei da Oferta e Demanda, o que se pode concluir a respeito da relação entre a quantidade de feijão preto disponível no mercado e a procura por esse produto, nessa época. Justifique sua resposta.

ATIVIDADE 15

Coloca-se um objeto ao relento em um dia frio no instante $t = 0$. A Figura abaixo apresenta a temperatura, $H = f(t)$, em graus Celsius.



- Explique o que significa $f(30) = 10$ em termos da temperatura.
- Explique o significado de a , a intersecção com o eixo vertical, e de b , a intersecção com o eixo horizontal em termos do objeto e do tempo t .

ATIVIDADE 16

Os produtos farmacêuticos devem especificar as dosagens recomendadas para adultos e crianças. Duas fórmulas de modificação da dosagem de adulto para uso por crianças são:

$$\text{Regra de Cowling: } y = \frac{1}{24}(t+1)a$$

$$\text{Regra de Friend: } y = \frac{2}{25}ta$$

onde a denota a dose de adulto (em miligramas) e t a idade da criança (em anos).

- Se $a = 100$, faça o gráfico das duas equações, no mesmo sistema de eixos, para $0 \leq t \leq 12$.
- Para que idade as duas fórmulas especificam a mesma dosagem?

ATIVIDADE 17

O manual de Imposto de Renda de 1997 estabeleceu as seguintes regras para cálculo do imposto

RENDA LÍQUIDA	ALÍQUOTAS	PARCELA A DEDUZIR
Até 10.800,00	Isento	
Acima de 10.800,00 até 21.600,00	15 %	1.620,00
Acima de 21.600,00	25 %	3.780,00

Isso significa que o Imposto de Renda a pagar é uma função da renda líquida x expressa por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 10.800 \\ 0,15x - 1.620, & \text{se } 10.800 < x \leq 21.600. \\ 0,25x - 3.780, & \text{se } x > 21.600 \end{cases}$$

Construa o gráfico dessa função.

ANEXO A – PARTE I: Revisitando o conceito de funções

1 O CONCEITO DE FUNÇÃO (INTUITIVO / FORMAL)

O conceito de função em alguns livros didáticos:

Lima (2013)

Dados os conjuntos X , Y , uma função $f: X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “ y igual a f de x ”).

Zahn (2009)

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se função $f: A \rightarrow B$ a regra f que leva **todos** elementos de A a elementos de B de maneira única.

Stewart (2013)

Uma função é uma lei que associa cada elemento x em um conjunto D exatamente a um elemento $f(x)$, em um conjunto E .

Em geral, consideramos as funções para as quais D e E são conjuntos de números reais.

Iezzi e Murakami (2004)

Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.

Iezzi et al (2013)

Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B** .

Paiva (2013)

Dizemos que uma variável y é dada em **função** de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y . A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de lei de associação, ou simplesmente lei entre x e y . Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.

[...]

Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se função de A em B toda correspondência f que associa cada elemento de A a um único elemento de B .

Observe que na definição de função exigimos que a cada elemento do domínio, seja associado um único (um e apenas um) elemento da imagem. A razão dessa exigência não se deve a nenhuma restrição matemática. É uma convenção que tem por origem as descrições de fenômenos físicos e biológicos que são feitas por funções do tempo, ou seja, funções cuja variável independente é o tempo. O tempo, como os físicos o concebem, é uma grandeza monótona estritamente crescente, isto é, que não volta nunca para trás e portanto, as relações

que descrevem fenômenos físicos, associam a cada tempo um só evento dando origem à definição de função na forma como a entendemos hoje.

Fonte: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap51s3.html>

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

“O conceito de função passou por evoluções acentuadas. O estudante de matemática perceberá bem esse fato ao atentar para vários refinamentos desse processo evolutivo que acompanham seus progressos escolares, desde os cursos mais elementares da escola secundária até os mais avançados e sofisticados em nível de pós-graduação” (EVES, 2011, p. 660)

Sabe-se da grande importância que é dada ao ensino de funções no currículo da educação brasileira. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) destacam o caráter integrador desse conteúdo tanto nas conexões internas à própria Matemática quanto em outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1999, p. 43). Os PCN+ sugerem que o professor busque desenvolver com seus alunos as competências associadas a representação e comunicação: “ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas” (PCN+, 2002, p. 27).

A definição atual que conhecemos do conceito de função desenvolveu-se ao longo do tempo e assumiu diferentes formatos que variaram de acordo com a época e com os conhecimentos já existentes até então. Segundo Zuffi, é um dos conceitos matemáticos que não é possível ser identificado através de concepções espontâneas, já que estas concepções “se mostram muito distantes do conhecimento especializado dos matemáticos e também do conhecimento escolar” (2002, p. 2).

A evolução deste conceito, de acordo com Kleiner (1989), remonta a 4000 anos e a ideia que foi desenvolvida nos últimos 300 anos tem uma conexão íntima com problemas de cálculo e análise. O autor compara a evolução do conceito de função com um cabo de guerra que possui os seguintes elementos: o geométrico (expresso na forma de curva) e o algébrico (expresso por uma fórmula – a chamada “expressão analítica”).

De acordo ainda com a pesquisa de Kleiner, o conceito de função em sua forma explícita não apareceu antes do século XVIII. Uma das razões para isso ter acontecido: a falta dos pré-requisitos algébricos (chegar a um acordo sobre a continuidade dos números reais e o desenvolvimento da notação simbólica).

Mas, no período que vai de 1450 a 1650, muitos fatores permitiram a formalização desse conceito: ampliação do conceito de número que abrangeu os reais e até os números complexos, com Bombeli e Stifel; a criação de uma álgebra simbólica, em Viète e Descartes; o estudo dos movimentos como um problema central na ciência, Kepler e Galileu; a junção da álgebra e da geometria, Fermat e Descartes (KLEINER, 1989, p. 283).

Muitos matemáticos têm seus nomes relacionados ao desenvolvimento do conceito de função. Oresme, Bernoulli, Newton, Leibniz, Euler, Cauchy e Fourier são mais alguns exemplos, além dos já mencionados, do amplo número de estudiosos que, embora não

pesquisando diretamente sobre o assunto, deram suas contribuições para a formalização desse conceito que é um dos mais importantes da Matemática. É importante que, através da história da Matemática, se possa resgatar as contribuições desses matemáticos.

Embora o conceito de função seja central na matemática, muitas pesquisas têm mostrado que também é um dos mais difíceis para os alunos compreenderem.

O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século passado, muitos matemáticos vêm defendendo o seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece apresentar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática (EVES, 2011, p. 660)

3 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval trata da importância da variedade de registros e da coordenação entre eles nas atividades matemáticas. Em matemática, um mesmo conceito pode assumir diversos registros de representação. Esse fato é, para Duval, um dos fenômenos causadores de obstáculos na aprendizagem. Segundo o autor, “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguirmos um objeto de sua representação” (2009, p.14). Mas vale ressaltar a afirmação de Duval (2011, p.9) que “os problemas específicos de compreensão que os alunos enfrentam na aprendizagem da matemática têm sua origem na situação epistemológica particular do conhecimento matemático, e não somente nas questões de organização pedagógica das atividades”.

Diante da grande diversidade de representações utilizadas em matemática, Duval (2003) usou a expressão “registro” para designar tais representações semióticas. Duval, em sua teoria faz referência aos tipos de transformação de uma representação semiótica. O termo **conversão** é utilizado para designar as transformações que ocorrem com mudança de sistema (registro), mas conservando-se os mesmos objetos matemáticos. O termo **tratamento** é usado para denotar as transformações que ocorrem dentro de um mesmo sistema.

No estudo de funções, uma atividade que solicite os zeros da função quadrática $y = x^2 + 3x + 2$ envolve um *tratamento*. Outra, que solicite o gráfico da mesma função, é uma *conversão*.

Segundo Duval (2003,14), a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro. Essa mudança de registro facilita a aquisição de um conceito. Ao lidar com as várias representações de um mesmo objeto matemático, o aluno passa a ter mais segurança na compreensão e na resolução de problemas. Duval (2009, p.14) afirma que “toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão”.

Para que um aluno entenda o conceito de função é necessário que ele compreenda outros conceitos, como o de par ordenado ou de relação, por exemplo. “Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações” (PCN, 1997, p 41).

Existe uma relação entre cada conceito e o objeto, fenômeno ou evento a que se refere. Isto é o que Davis (1990) classifica como *sistema conceitual*. A aquisição de um conceito se dará sempre mediante os outros conceitos. Eles estão entrelaçados (figura 1).. O que se espera é que o indivíduo não confunda a representação de um objeto com o próprio objeto (Duval, 2011).

A compreensão de um conteúdo conceitual, como já foi dito anteriormente, repousa sobre a compreensão de ao menos dois registros de representação e, essa coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. É importante considerar que o desenvolvimento cognitivo dos alunos em muito favorece a aprendizagem.

Gitirana et al. (2014, p.9), no estudo que trata das contribuições da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, afirma que

“O conhecimento conceitual emerge a partir de situações de caráter teórico ou prático; e um indivíduo não forma um conceito a partir da resolução de um único problema, nem tampouco de problemas similares. Cada problema traz em si vários conceitos embutidos, os quais precisam ser dominados para que se chegue a uma solução”.

Nesse mesmo estudo, a respeito da teoria de Vergnaud, as autoras falam da multiplicidade de conceitos envolvidos em uma mesma situação. Nesse caso, para se adquirir um conceito é preciso interagir com várias situações e que, segundo as ideias de Vergnaud, “não faz sentido a referência à formação de um conceito isolado, mas sim a um campo composto por diversos conceitos, suas representações e situações que se articulam, formando-se o que se denomina de um campo conceitual” (Gitirana et al., 2014, p.10).

A articulação de registros é um caminho para a compreensão em matemática. De acordo com Iglioni (2003), as conversões são as mudanças de registro mais eficazes na aquisição de um conceito. É importante ressaltar que um fator importante no fenômeno da conversão é o sentido em que ela ocorre. Conforme Duval (2003), a conversão nem sempre se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada e, na maioria das vezes, o que ocorre é a priorização de um dos sentidos. Na verdade, a passagem de um sistema de representação para outro sistema “não tem nada de evidente e de espontâneo para a maioria dos alunos e estudantes” (Duval, 2009, p.18).

No que concerne ao estudo de funções quadráticas, vários registros são possíveis: língua natural, gráficos, tabelas, expressões algébricas, diagramas. A articulação entre esses registros, levando-se em conta o sentido e a congruência, pode favorecer a compreensão de conceitos e reduzir as dificuldades encontradas pelos alunos ao lidar com questões mais elaboradas e que envolvam registros variados.

4 ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL

Leitura do texto: O que é uma variável? (FOSSA, 2011, p. 22-26, 33-38)

5 DETALHES...

- Uma função consta de três ingredientes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \rightarrow f(x)$.

- Domínio de uma função
[...]
- Uma pergunta do tipo “Qual é o domínio da função $f(x) = 1/x$?”, estritamente falando, não faz sentido. A pergunta correta seria: “Qual é o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que a fórmula $f(x) = 1/x$ define uma função $f:A \rightarrow \mathbb{R}$?” Porém, muitas vezes uma função é dada pela regra $x \rightarrow f(x)$ ou, simplesmente, $f(x)$ sem explicitarmos seu domínio e contradomínio; quando isso ocorrer, fica implícito que o contradomínio é \mathbb{R} e que o domínio é o “maior” subconjunto de \mathbb{R} para o qual faz sentido a regra em questão, ou seja, $f(x)$ é um número real.
- Chamamos os elementos do domínio da função f de variáveis independentes e os elementos da imagem de f de variáveis dependentes.
- Não confundir os símbolos “ f ” e “ $f(x)$ ”
O símbolo f indica a função enquanto o símbolo $f(x)$ indica a imagem de um elemento da função.
- Evitar expressões: $f(x)$ é crescente; o gráfico de $f(x)$; seja $f(x)$ uma função
- O símbolo Δ , o que significa? _____
- Função do 1º grau \rightarrow *função polinomial do 1º grau* \rightarrow *função afim*
Função do 2º grau \rightarrow *função polinomial do 2º grau* \rightarrow *função quadrática*

6 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NO ENSINO DE FUNÇÕES

Anna Sierpinska possui trabalhos relevantes e tem investigado o surgimento de obstáculos epistemológicos com estudantes de diversas áreas do conhecimento. A autora analisa os entraves na construção do conceito de função (SIERPINSKA, 1992). Segue abaixo uma tabela com os obstáculos identificados em uma pesquisa com 19 alunos.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS	
01	A Matemática não está relacionada com problemas práticos. COMENTÁRIO:
02	Técnicas de cálculo usadas para construção de tabelas de relações numéricas não são merecedoras de ser um objeto de estudo. COMENTÁRIO:
03	Quanto às mudanças como fenômenos: centralização no modo como as coisas mudam, ignorando que coisas mudam. (Um esquema de pensamento inconsciente) COMENTÁRIO:

04	Pensar em termos de equações e de incógnitas (Um esquema de pensamento inconsciente) COMENTÁRIO:
05	Considerar irrelevante a ordem das variáveis (Um esquema de pensamento inconsciente) COMENTÁRIO:
06	A concepção heterogênea de número (Uma atitude relativa ao conceito de número) COMENTÁRIO:
07	Uma filosofia pitagórica de número: tudo é número (Uma atitude relativa a noção de número) COMENTÁRIO:
08	Leis em Física e funções em matemática não têm nada em comum; elas pertencem a diferentes domínios (compartimentos) de pensamento (Um esquema de pensamento inconsciente) COMENTÁRIO:
09	Proporção é um tipo privilegiado de relação (Um esquema de pensamento inconsciente) COMENTÁRIO:
10	Forte crença na força das operações formais em expressões algébricas (Uma crença relativa aos métodos matemáticos) COMENTÁRIO:
11	Apenas relações descritíveis por fórmula analítica são dignas de receberem o nome de funções (Uma concepção de função) COMENTÁRIO:
12	Definição é uma descrição de um objeto também conhecido pelos sentidos ou percepção. A definição não determina o objeto; mas o objeto determina a definição. Uma definição não é vinculativa logicamente (Uma concepção de definição) COMENTÁRIO:
13	Funções são sequências (Concepção de função) COMENTÁRIO:
14	As coordenadas de um ponto são segmentos de reta (não números) (Concepção de coordenadas) COMENTÁRIO:
15	O gráfico de uma função é um modelo geométrico da relação funcional. Não precisa ser fiel, o gráfico pode conter pontos (x, y) de tal forma que a função não esteja definida em x . (Concepção de gráfico de função) COMENTÁRIO:
16	As mudanças de uma variável (Uma concepção de variável) COMENTÁRIO:

REFERENCIAS

- BOYER, C.B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- EVES, Howard. **Foundations and fundamental concepts of mathematics**. Mineola, New York: Dover, 1997.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: ed. UNICAMP, 2004.
- KLEINER, I. (1989). **Evolution of the function concept: A brief survey**. The College Mathematics Journal, 20(4), 282-300.
- ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SFARD, A. (1992). **Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function**. In E. Dubinsky & G. Harel (Orgs.), The concept of function (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function**. In: Dubinsky & Harel (Ed.). The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy, M. A. A. Notes, v. 25, p. 25 – 58, 1992.
- STEWART, Ian. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.
- STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas**. Portugal: Gradiva, 1992.
Tatiana Roque
- IEZZI, Gelson et al. **Matemática, ciência e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2013.
- PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. São Paulo: Moderna, 2013.

ANEXO B – PARTE II: A Sequência Fedathi

PARTE II - A Sequência Fedathi

A Sequência Fedathi vem sendo discutida e utilizada em várias pesquisas⁹. Caracteriza-se por ser uma metodologia que promove a mudança de postura do professor e a autonomia do aluno. De acordo com Santos (2007), essa sequência apresenta-se como “suporte teórico-metodológico com o objetivo de melhorar o ensino e a aprendizagem”. Andrade (2011), ao associar esta sequência ao ensino e à pesquisa, nos esclarece que “quanto ao ensino, a Sequência Fedathi orienta o processo de mediação pedagógica, e no que diz respeito à pesquisa, será utilizada na concepção das sessões didáticas realizadas”.

Ao analisar as referências já citadas anteriormente e outras que também tratam da Sequência Fedathi, percebe-se que seu objetivo principal é promover a mudança de postura do professor que passa a ser o mediador do processo de ensino (SANTOS; LIMA; BORGES NETO, 2013). Mas, observa-se, ainda, um conjunto de outras características que dão forma a essa proposta metodológica. Vejamos algumas delas:

- Favorece um ambiente investigativo, ou seja, o professor proporciona ao estudante a vivência do trabalho científico de um matemático diante de uma situação problema (SANTOS; LIMA; BORGES NETO, 2013);
- Estabelecimento do contrato didático “onde são esclarecidas as atitudes e comportamentos entre professor e aluno” (ROCHA, 2008);
- Estimula a intuição do estudante (ALVES; BORGES NETO; BARRETO, 2011);
- Possibilita conhecer o nível cognitivo do aluno em relação ao conteúdo a ser ensinado (plateau)¹⁰ (SOUSA, 2015);
- O uso da pergunta como estratégia de mediação e o uso do contraexemplo (SOUSA, 2015);
- Postura “mão no bolso”, na qual o professor leva o aluno a refletir, pensar; o professor não dá as respostas prontas, deixa o aprendizado sob responsabilidade do aluno (SOUSA, 2015);
- Estabelece uma relação entre os elementos professor-aluno-saber, sendo o professor mediador desse saber

⁹ SANTOS, 2007; SOUZA, 2010; ANDRADE, 2011; JUCÁ, 2011; FONTENELE, 2013; SOUSA, 2015.

¹⁰ Plateau: conhecimentos prévios dos alunos

- Possui quatro fases bem definidas: tomada de posição, maturação, solução e prova (SOUZA, 2010).

Algumas dessas características foram denominadas por Sousa (2015) como “princípios” da Sequência Fedathi. São eles: *plateau* dos alunos, acordo didático e postura “mão no bolso”. A esses princípios, o autor acrescenta a análise do ambiente e a análise teórica.

É importante nos debruçarmos um pouco sobre suas fases para podermos compreender o funcionamento dessa proposta metodológica de forma integral.

Ao propor uma situação (um problema) ao aluno o professor está na primeira fase, a *tomada de posição*. Nesse caso, antes de propor a situação aos alunos, o professor deve realizar um diagnóstico (o *plateau* citado anteriormente) que permita conhecer o nível cognitivo dos alunos.

A seguir, tem-se o período de *maturação*, onde o aluno, individualmente ou em grupo, debruça-se sobre o problema em busca de estratégias para encontrar uma solução. Nessa fase, o professor intervém de modo a responder ou criar questionamentos. Esta é também a fase que exige um tempo significativo da aula.

A *solução*, terceira etapa da sequência, tem como objetivo a apresentação e a organização de esquemas ou modelos que levaram o aluno à solução do problema. Após a intervenção do professor, que pode fazer uso de contraexemplos para permitir o confronto de ideias, ocorre a sistematização da situação que foi solicitada inicialmente.

Por fim, tem-se a *prova*. Nesse momento, acontece a formalização dos modelos apresentados pelos alunos utilizando a linguagem matemática formal.

As quatro fases da Sequência Fedathi deixam muito evidente qual o papel do professor no desenvolvimento da sequência de ensino. Fontenele (2013), resume no quadro abaixo a postura esperada do professor em cada fase da Sequência.

Quadro 1 - Comportamento docente segundo a Sequência Fedathi.

Postura Docente Esperada em Cada Fase da Sequência Fedathi			
Tomada de Posição	Maturação	Solução	Prova
<ul style="list-style-type: none"> • Apresenta uma situação desafiadora que esteja no nível dos alunos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Deixa os alunos pensarem sobre o problema/atividade proposto; • Observa o desempenho dos alunos (postura mão no bolso); • Se questionado responde com perguntas que estimulem a curiosidade e o instinto investigativo do aluno; • Não fornece a resposta pronta; • Intervém quando necessário, caso o aluno não consiga avançar. 	<ul style="list-style-type: none"> • Chama os alunos para apresentarem suas respostas; • Faz questionamentos que suscitem discussões com a turma; • Aponta e discute os possíveis erros de modo a favorecer a aprendizagem; • Compara os resultados apresentados. 	<ul style="list-style-type: none"> • Formaliza os resultados matematicamente; • Faz generalizações; • Expõe as definições formais ou teoremas.

Fonte: Fontenele (2013, p. 24)

Analisando um pouco mais as etapas acima mencionadas, observamos que desde o início o professor assume esse traço de mediador. Desde a apresentação da situação inicial, até a formalização dos resultados, fazendo questionamentos, discutindo, dando condições aos alunos para desenvolverem seu raciocínio. O aluno passa a ser o protagonista na construção de seu próprio conhecimento.

De acordo com Cunha (1989),

Unir ensino e pesquisa significa caminhar para que a educação seja integrada, envolvendo estudantes e professores numa criação do conhecimento comumente partilhado. A pesquisa deve ser usada para colocar os sujeitos dos fatos, para que a realidade seja apreendida e não somente reproduzida (p. 32).

Esse ambiente investigativo que caracteriza a Sequência Fedathi é facilmente identificado nas fases de maturação e solução. As ações do aluno são mediadas pelo professor, que favorece esse espaço de interação com a saber, com o conhecimento.

Nas palavras de Becker (2012),

O aluno deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma iniciação à “investigação científica”. Nesse sentido, sua atividade intelectual guarda semelhanças com o trabalho do matemático diante da pesquisa, entretanto, sem se identificar com ele. (p. 35)

O mesmo autor afirma, ainda, que “é preciso buscar problemas que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam estratégias pessoais de pesquisa” (p. 35). Na fase de solução, por exemplo, o professor exerce sua função mediadora apontando os possíveis erros, averiguando, indagando e comparando os resultados apresentados pelos alunos.

Dessa forma, a postura mediadora do professor, característica principal da Sequência Fedathi, em cada uma de suas fases, apresenta situações e condições para que o aluno construa os conceitos e desenvolva sua autonomia e amplie seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Francisco R. V.; BORGES NETO, Hermínio; BARRETO, Marcília Chagas. Uma aplicação da Sequência Fedathi no ensino de progressões geométricas e a formação do professor no IFCE. *Conex. Ci. e Tecnol. Fortaleza/CE*, v. 5, n. 1, p. 9-24, mar. 2011.
- CUNHA, M. I. *O Bom Professor e sua Prática*. Campinas: Papirus, 1899
- FONTENELE, F. C. F. *A Sequência Fedathi no ensino da álgebra linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial*. 2013. 93p. Dissertação (Mestrado em Educação: Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- ROCHA, Elizabeth Matos. *Tecnologias digitais e ensino de matemática: compreender para utilizar*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008.
- SOUSA, F. E. E. *O ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi: a pergunta como estratégia de mediação didática*. 2015. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.
- SOUZA, M.J.A. *Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais*. 2010. 231p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.
- SANTOS, Maria J. C.; LIMA, Ivoneide P.; BORGES NETO, Hermínio. *A sequência Fedathi: concepções e princípios para uso no ensino de matemática*. In: VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM), 2013, Montevideo, Uruguai.
- SANTOS, M. J. C. *Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial*. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

ANEXO C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS

Eu _____, CPF _____,

depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos, riscos e benefícios da pesquisa, bem como de estar ciente da necessidade do uso de depoimento colhidos em áudio, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), AUTORIZO, através do presente termo, os pesquisadores ADRIANA FERREIRA MENDONÇA do projeto de pesquisa intitulado “CONCEITO DE FUNÇÃO E SEQUÊNCIA FEDATHI NA FORMAÇÃO DOCENTE” a utilizarem as fotos de minhas aulas que se façam necessárias e/ou a colher meu depoimento sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Ao mesmo tempo, autorizo a utilização de meu nome original no relatório final da pesquisa.

Fortaleza, ____ de _____ de 2017

Pesquisador responsável pelo projeto

Participante da Pesquisa