



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

FERNANDA MARIA ALMEIDA DO CARMO

**O ENSINO A DISTÂNCIA DO CONCEITO DE MEDIDA BASEADO NA
SEQUÊNCIA FEDATHI**

FORTALEZA

2022

FERNANDA MARIA ALMEIDA DO CARMO

O ENSINO A DISTÂNCIA DO CONCEITO DE MEDIDA BASEADO NA SEQUÊNCIA
FEDATHI

Dissertação apresentada a Coordenação
Programa de Pós-Graduação em Educação da
Faculdade de Educação da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do título de Mestre em Educação.
Área de concentração: Novas Tecnologias e
Educação a Distância.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Santos
Cerqueira.

Coorientador: Prof. Dr. Hermínio Borges
Neto.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C192e Camo, Fernanda Maria Almeida do.
O ensino a distância do conceito de Medida baseado na Sequência Fedathi / Fernanda Maria Almeida do Camo. – 2022.
92 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Gilberto Santos Cerqueira.

Coorientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

1. Sequência Fedathi. 2. Ensino de Matemática. 3. Educação a Distância. I. Título.

CDD 370

FERNANDA MARIA ALMEIDA DO CARMO

O ENSINO A DISTÂNCIA DO CONCEITO DE MEDIDA BASEADO NA SEQUÊNCIA
FEDATHI

Dissertação apresentada a Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação. Área de concentração: Novas Tecnologias e Educação a Distância.

Aprovada em: 16/03/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gilberto Santos Cerqueira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rui Eduardo Brasileiro Paiva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Ao meu grande amigo e segundo pai Simão
(em memória), que desde 2020 deixou imensa
saúde.

AGRADECIMENTOS

A Deus, a quem eu sempre recorria com todas as minhas forças quando eu não podia ajudar alguém de outra forma.

Aos meus pais, Francisco e Maria José, que sempre se esforçaram para que eu tivesse o privilégio de me dedicar exclusivamente aos estudos.

Ao meu querido professor e orientador Herminio, sempre perto (inventando mais coisas para a gente fazer – afinal, estamos num laboratório), compreensivo e com muito bom humor.

Ao meu noivo, André, a quem eu tive a sorte de conhecer, de segurar sua mão e de caminhar lado a lado nesse percurso.

Aos meus tios, José e Lasalette, que me acolheram tão bem, de modo que fosse possível eu buscar esse sonho.

Ao meu orientador Gilberto, sempre solícito, pelos cuidados com o cumprimento dos requisitos necessários.

Ao Laboratório MultiMeios, onde tive uma oportunidade de crescer e onde aprendi imensamente. A convivência com professores mais experientes e as situações a que fui submetida me fez cruzar algumas fronteiras de conhecimento.

Ao querido professor Tony Melo, que me ajudou a compreender alguns conceitos durante esta caminhada.

Aos professores e colegas do PPGE/UFC, Lis, Daniel, Ana Uchôa, Cristina, Eliana, Leide, Delano, Dina, Mazé Souza, Arnaldo, Vanísia, Milena, Gabi, Dani, Jéssica, Milínia, Airton, Dani Fernandes, Carlos e Wesley que tornaram a jornada mais leve e contribuíram com o meu crescimento profissional e humano.

A FUNCAP, pelo apoio financeiro em grande parte desse estudo.

Aos membros da banca, pelas sugestões de melhoria a esse trabalho.

Não é suficiente implementar tecnologia inovadora para produzir inovação no campo educativo. [...] Podemos reiterar práticas muito tradicionais dentro de tecnologias absolutamente inovadoras. Corre-se o risco de adotar o novo sem mudar o velho (LIMA, 2008, p. 107-108).

RESUMO

A informatização da sociedade, no âmbito das tecnologias digitais, trouxe novos paradigmas para a educação, incrementando a modalidade de ensino Educação a Distância. Os programas de ensino têm espaço para apresentar desenhos, linguagens e recursos educacionais e tecnológicos próprios. Nessa perspectiva, destaca-se a Educação a Distância do Laboratório MultiMeios, fundamentada na metodologia de ensino Sequência Fedathi. No caso do ensino de matemática, nessa proposta de Educação a Distância, ainda não há amplos saberes e conhecimentos consolidados. Com isso, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma proposta para o ensino a distância do conceito de Medida, baseada na Sequência Fedathi. Essa pesquisa é de caráter qualitativo e, da perspectiva do método, classifica-se como pesquisa exploratória, utilizando ainda a metodologia de pesquisa Sequência Fedathi. Assim, desenvolveu-se uma proposta didática para o ensino a distância do conceito de Medida, bem como um desenho didático no Ambiente Virtual de Ensino *Moodle* MultiMeios. Com essa pesquisa, observou-se uma reorganização dos conteúdos de Medida, constituído pelos conceitos de Grandeza, de Área e de Volume e obteve-se uma abordagem didática diferenciada do tratamento usualmente dado, com base na Teoria da Medida e no princípio Situação Generalizável. Produziu-se, também, material didático, a partir da elaboração de sessões didáticas de cada um dos referidos temas. Identificou-se, ainda, que a escolha das ferramentas nos ambientes virtuais deve levar em consideração, principalmente, a interação, a exemplo do TeleMeios e do Fórum. Concluiu-se que a Sequência Fedathi permite a construção conceitual e progressiva com participação ativa do aluno durante todo o percurso e que é a mediação do professor que faz toda a diferença, independente do ambiente, da tecnologia, dos meios e dos recursos que se utilize.

Palavras-chave: Sequência Fedathi. Ensino de Matemática. Educação a Distância.

ABSTRACT

The computerization of society, within the scope of digital technologies, has brought new paradigms to education, increasing the teaching modality Distance Education. The teaching programs have space to present their own designs, languages and educational and technological resources. In this perspective, Distance Education of the *Laboratório MultiMeios* stands out, based on the teaching methodology *Sequência Fedathi*. In the case of mathematics teaching, in this proposal of Distance Education, there is still not ample knowledge and consolidated knowledge. Thus, the objective of this research is to develop a proposal for distance learning of the concept of Measure, based on the *Sequência Fedathi*. This research has a qualitative character and, from the method perspective, it is classified as exploratory research, also using the *Sequência Fedathi* research methodology. Thus, a didactic proposal was developed for the distance learning of the concept of Measure, as well as a didactic design in the Virtual Teaching Environment Moodle *MultiMeios*. With this research, a reorganization of the Measure contents was observed, constituted by the concepts of Magnitude, Area and Volume, and a different didactic approach was obtained from the treatment usually given, based on the Measure Theory and the *Situação Generalizável* principle. Didactic material was also produced, based on the elaboration of didactic sessions on each of the aforementioned themes. It was also identified that the choice of tools in virtual environments should take into account, mainly, interaction, such as the *TeleMeios* and the Forum. It was concluded that the *Sequência Fedathi* allows the conceptual and progressive construction with the active participation of the student throughout the course and that it is the teacher's mediation that makes all the difference, regardless of the environment, technology, means and resources used.

Keywords: *Sequência Fedathi*. Mathematics Teaching. Distance Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Polígono Fedathi.....	33
Figura 2 - Fluxograma <i>PRISMA</i>	65
Figura 3 - Tela de Boas-vindas.....	69
Figura 4 - Unidade Ambientação.....	71
Figura 5 - Unidade Grandeza.....	73
Figura 6 - Área do terreno.....	75
Figura 7 - Triângulo <i>BOA</i>	77
Figura 8 - Volume de uma taça.....	78
Figura 9 - Unidade Medida.....	79

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	– Classificação das perguntas como estratégias de mediação na metodologia de ensino Sequência Fedathi.....	26
Quadro 2	– Atitudes docente e discente almejadas na fase Maturação.....	30
Quadro 3	– Elementos que constituem o AVE.....	39
Quadro 4	– Classificação do desenvolvimento de habilidades cognitivas por Borges Neto e Capelo Borges (2007, p. 85).....	41
Quadro 5	– Orientações para mediar discussões nos bate-papos educativos	44
Quadro 6	– Identificação dos estudos incluídos.....	66
Quadro 7	– Mediação da sessão didática Grandeza.....	74
Quadro 8	– Mediação da sessão didática Medida de Área.....	75
Quadro 9	– Exercícios para os alunos colocarem a mão na massa.....	77
Quadro 10	– Mediação da sessão didática Medida de Volume.....	78
Quadro 11	– Mediação da sessão didática Medida.....	79
Quadro 12	– Mediação para fecho da discussão de Medida em um bate-papo.....	80

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
AVE	Ambiente Virtual de Ensino
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
CC	Centro de Ciências
EaD	Educação a Distância
FACED	Faculdade de Educação
GEM ²	Grupo de Educação Matemática Multimeios
<i>GIF</i>	<i>Graphic Interchange Format</i>
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
LDB	Lei de Bases e Diretrizes da Educação Nacional
MD	Material Didático
<i>MOODLE</i>	<i>Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment</i>
PPGE	Programa de Pós-Graduação em Educação
<i>PRISMA</i>	<i>Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses</i>
PAPMEM	Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio
RNP	Rede Nacional de Ensino e Pesquisa
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
UAB	Universidade Aberta do Brasil
UFC	Universidade Federal do Ceará
UNILAB	Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
<i>URL</i>	<i>Uniform Resource Locator</i>
UVA	Universidade Estadual Vale do Acaraú

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO	20
2.1	A metodologia de ensino Sequência Fedathi	20
2.2	A Educação a Distância do Laboratório MultiMeios	34
2.3	Grandezas e Medidas	46
2.3.1	<i>Grandeza</i>	46
2.3.2	<i>Medida</i>	57
2.3.3	<i>Medida de Área</i>	58
3	METODOLOGIA	63
4	PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE MEDIDA E DESENHO NO AVE <i>MOODLE</i> MULTIMEIOS	68
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS	85

1 INTRODUÇÃO

A educação sempre foi um campo em aberto, vasto e de grande debate. Neste trabalho buscamos contribuir com essa discussão. Para isso, fizemos um recorte abordando o tema Ensino de Matemática. No entanto, ao fazer uma retrospectiva na área educacional de modo geral, desde o período de colonização, notamos a influência das questões sociais ao longo dos anos. Assim, tentando trazer algum resultado aos questionamentos de um dos temas mais atuais, a Educação a Distância (EaD), nos debruçamos diante do desafio de, incorporando os ambientes virtuais, pesquisar soluções que favoreçam o ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem matemática.

De modo particular, as discussões trazidas no âmbito dessa investigação inclinam-se sobre o ensino do conceito de Medida na modalidade EaD, apoiado na metodologia de ensino Sequência Fedathi. Neste capítulo, logo a seguir, discutimos as questões sociais que envolvem o processo educacional, mencionado anteriormente, contextualizando historicamente nosso trabalho. Após isso, delimitamos o tema da nossa pesquisa e a motivação em pesquisá-lo, apresentando a problemática, os objetivos e o envolvimento com o tema. Posteriormente, discutimos os trabalhos relacionados, mostrando a justificativa e a originalidade da pesquisa. A partir de agora apresentamos a contextualização.

A história da educação brasileira nos mostra que ela sempre esteve atrelada às questões econômicas, políticas e sociais. Focando nas questões sociais, observamos ainda no período de colonização, que os jesuítas conseguiram o fenômeno de aculturação dos povos indígenas através da educação. Depois de dois séculos de predominância, as reformas educacionais passaram então a atender aos propósitos políticos. Posteriormente, com as exigências sociais da Revolução Industrial, a substituição da escravidão pelo trabalho assalariado atribuiu à educação a tarefa de formar o novo tipo de trabalhador. Em seguida, com o golpe militar de 1964 foram baixadas algumas reformas apenas para ajustar a educação ao modelo econômico do capitalismo de mercado (SAVIANI, 2013).

Nos anos 1990, com o surgimento da Lei 9.394/96, Lei de Bases e Diretrizes da Educação Nacional (LDB), a educação é concebida como cidadania e mundo do trabalho e tem a finalidade de atingir o pleno desenvolvimento do educando, o preparo para o exercício da cidadania e a qualificação para o trabalho (BRASIL, 1996). Entretanto, a retórica neoliberal atribuiu papel estratégico para a educação, uma vez que o mundo empresarial tinha interesse na educação, pois desejava uma mão de obra qualificada. Nesse sentido, o Estado,

estando submetido aos interesses do capital, busca impor a mercantilização da educação enquanto, aos poucos, reduz os gastos públicos para a área (BIANCHETTI, 2001).

Não é difícil perceber que as mudanças no âmbito social sempre suscitam transformações nos sistemas educacionais. A expansão das tecnologias digitais trouxe novas formas de pensar a educação, pois nos tornamos a sociedade da informação e do conhecimento, em que a educação e a tecnologia se tornaram eixos centrais (LIMA, 2005). A LDB trouxe, entre suas disposições, a definição da EaD como uma modalidade de ensino, bem como o incentivo ao seu desenvolvimento em todos os níveis e nas demais modalidades de ensino (BRASIL, 1996). Mas somente com o Decreto Lei nº 9.057/2017 ampliou-se o conceito de EaD, considerando-a como uma modalidade educacional em que a mediação didático-pedagógica ocorre com a utilização de meios e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), com professores e estudantes desenvolvendo atividades educativas em lugares e tempos diversos (BRASIL, 2017).

Com a pandemia do novo coronavírus – COVID-19, as aulas presenciais foram substituídas por aulas em meios digitais, em caráter excepcional (BRASIL, 2020), disseminando o ensino remoto. Com relação à definição de EaD trazida em Brasil (2017), o ensino remoto pode ser considerado EaD, porém, bem distante de uma educação de qualidade, visto que a EaD conta com as orientações contidas nos Referenciais de Qualidade para Educação Superior a Distância, entre outros.

Importante ressaltar também que não há um único modelo de EaD, pois os programas de ensino têm espaço para apresentar desenhos, linguagens e recursos educacionais e tecnológicos próprios (BRASIL, 2007). Tem-se, por exemplo, o modelo da Universidade Aberta do Brasil (UAB), que foi instituído em 2006 com a finalidade de expandir e interiorizar a oferta de cursos e programas de educação superior e, também, com a intenção de consolidar a modalidade EaD no país (BRASIL, 2006).

Nessa perspectiva, destaca-se a EaD do Laboratório MultiMeios, da Faculdade de Educação (FACED), Universidade Federal do Ceará (UFC), uma proposta didática concebida e amparada teoricamente nos pressupostos da metodologia de ensino Sequência Fedathi, pioneira da EaD digital no estado do Ceará. No entanto, está “em contínua adequação para atender aos avanços das tecnologias e aos diversos modelos de ação a distância para o oferecimento de atividades educacionais amplas, com qualidade” (BORGES NETO *et al.*, 2021, p. 20).

Essa proposta de EaD do Laboratório MultiMeios, conforme Soares (2017), possui uma abordagem pedagógica estruturada entre o cognitivismo e o interacionismo, com foco:

- a) nos objetivos educacionais e a depender das intenções formativas que se estabelecem na prática do professor;
- b) na organização do conteúdo com vistas a favorecer as relações estabelecidas entre o aluno e o Ambiente Virtual de Ensino (AVE), aluno-aluno e aluno-professor, isto é, com foco numa mediação interativa favorecendo a colaboração entre os interagentes, bem como a autoria no AVE;
- c) além de uma organização e estruturação por meio de sequências didáticas, entre outros.

Cabe destacar que, nos ambientes virtuais as ferramentas precisam estar atreladas a uma metodologia de ensino, uma vez que elas não promovem, sozinhas, a aprendizagem. É neste momento que o professor faz toda a diferença, pois independente do ambiente de ensino, seja ele presencial ou virtual, os professores são atores indispensáveis no processo de ensino e de aprendizagem (SOARES, 2017).

No caso das licenciaturas presenciais em Matemática, pouco se sabe sobre a utilização da EaD nesses cursos, devido aos poucos estudos específicos nessa área. No curso de licenciatura em Matemática no qual fui formada, não houve utilização da EaD, visto que o curso não tinha uma proposta de implementação da EaD em sua carga horária ou estudos aprofundados acerca do uso das TDIC na educação, pois não integrava os conteúdos da grade curricular, até 2018, ano que concluí.

A motivação em pesquisar o tema surgiu através das discussões no Laboratório MultiMeios, do qual faço parte como estudante de mestrado, no eixo temático “Novas tecnologias e Educação a Distância”. Foi por meio dele que pude vivenciar discussões e debates:

- a) nos grupos de estudos Grupo de Educação Matemática MultiMeios (GEM²), TeleMeios e Segunda MultiMeios;
- b) em aulas e seminários, dentro das componentes curriculares ofertadas pelo MultiMeios durante o curso de mestrado;
- c) em ofertas de cursos de extensão na modalidade EaD, onde “a questão da formação docente corre passo a passo com a experimentação de projetos que buscam colocar em prática a EaD” (BORGES NETO *et al.*, 2021, p. 15), “Curso de extensão Projeto Fedathi: Proposta de ensino para formação de

docentes do ensino médio da rede pública de ensino”; e “Formação Sequência Fedathi” do Ciclo de Formação Didática Contínua e Continuada;

- d) no estágio nas disciplinas Educação a Distância 2020.1, Educação a Distância 2021.1 (*Racines* Beta), Educação a Distância 2021.2 (Raízes Beta 1) e Informática Educativa 2020.1, ofertadas pelo MultiMeios no curso de Licenciatura em Pedagogia (FACED/UFC);
- e) em conversas e diálogos com colegas e professores pesquisadores acerca das tecnologias educacionais, com utilização da Sequência Fedathi como metodologia de ensino em ambientes virtuais.

Essas discussões ocorridas no MultiMeios apontaram diversos caminhos e deram os direcionamentos desse trabalho, aos saberes de como explorar os recursos, as ferramentas e as plataformas digitais, sempre proporcionando um aprendizado horizontal. Tais oportunidades me fizeram refletir, ainda, sobre a importância de ampliar o meu campo profissional e, principalmente, conhecer a fundo uma modalidade educacional estabelecida na LDB que ganha cada vez mais amplitude.

Outro ponto a ser destacado é que, com a pandemia do novo coronavírus, apesar das discussões acerca da EaD terem surgido há muito tempo, percebeu-se que a formação de professores para o uso das TDIC ainda é precária. De acordo com Borges Neto *et al.* (2021, p. 14-15), “nenhum sistema educativo pode ser posto em funcionamento, se não providenciar antes de tudo o pessoal qualificado que irá dirigir e tutorear tais processos de aprender a distância” e com o desafio da “democratização do acesso a esse novo tipo de educação, que necessita de suportes tecnológicos adequados”, cabe destacar a necessidade de políticas públicas de implementação, com gestão e financiamento de projetos pedagógicos e significativas ações educativas, além do investimento na formação de professores para a EaD e no acesso à internet pelas diversas camadas sociais (LIMA, 2008).

Ainda, refinamos o estudo para o conceito de Medida, pois este conteúdo é um dos conceitos matemáticos essenciais e presentes no currículo escolar da educação básica, sendo fundamental que o professor o entenda com clareza e propriedade.

A partir da reflexão de todos esses elementos trazidos acima, pretendemos trazer uma discussão a respeito do ensino de Medida na EaD, com aporte na Sequência Fedathi, baseada nos seguintes questionamentos: Como ensinar o conceito de Medida a distância, baseado na Sequência Fedathi? Quais ferramentas, recursos devo utilizar? Como mediar e organizar didaticamente esse conteúdo no AVE?

Desse modo, temos como objetivo geral: desenvolver uma proposta para o ensino a distância do conceito de Medida, baseada na Sequência Fedathi. Com vistas a cumpri-lo, delimitamos outros três objetivos específicos: estudar os temas relacionados; identificar as ferramentas e recursos do AVE *Moodle* MultiMeios que mais se adequem à Sequência Fedathi e; apresentar a proposta didática, detalhando a mediação e o desenho didático.

Para justificar e mostrar a relevância dessa pesquisa buscamos identificar, através de uma Revisão Sistemática, estudos relacionados com o tema: EaD, Ensino de Matemática e Sequência Fedathi. Por meio dessa revisão bibliográfica, encontramos alguns trabalhos abordando a EaD no ensino de matemática e com aporte na Sequência Fedathi. O detalhamento dessa revisão sistemática se encontra no terceiro capítulo, onde está descrito todo o percurso metodológico da pesquisa e, a seguir, apresentamos resumidamente os trabalhos identificados.

A investigação de Moreira (2014) faz uma análise sobre o Material Didático (MD) utilizado no curso de Licenciatura em Matemática semipresencial do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), especificamente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, à luz da Sequência Fedathi. O curso foi ofertado no AVE *Moodle* e segue o modelo da UAB. A autora buscou verificar se o MD atendia as necessidades de autoaprendizagem remota, sob a visão dos tutores, e apoiou-se na Sequência Fedathi para averiguar, uma vez que ela lida com essa adequação didática. No entanto, o estudo constatou que o MD da disciplina analisada precisava se adequar aos moldes de EaD e de Matemática, e, ainda, de uma metodologia de ensino como a Sequência Fedathi, indicando a necessidade de reconstrução.

A Sequência Fedathi também foi investigada na mediação do ensino de Geometria Analítica Plana, através do AVE TeleMeios, especificamente, na determinação da equação de uma reta. Verificou-se nesse estudo que as sessões didáticas resultaram em um ganho de conhecimento matemático pelo aluno e que a Sequência Fedathi contribuiu para a mediação pedagógica no ensino do referido conteúdo nesse ambiente, proporcionando um ganho de autonomia perceptível por parte do aluno (ANDRADE, 2011).

O trabalho de Ripardo, Oliveira e Menezes (2020) teve por objetivo propor um curso a distância de matemática básica para alunos de nível superior da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). O curso tem a finalidade de sanar dúvidas a respeito dos conteúdos do ensino fundamental e médio, com vistas a garantir os conhecimentos prévios que os discentes precisarão para seguir seu caminho na graduação. A pesquisa trouxe a discussão de um questionário aplicado, com relação aos conhecimentos prévios dos alunos para, assim,

basear o curso ofertado na modalidade EaD, com o uso da plataforma *Moodle* e com aplicação da Sequência Fedathi, sendo o planejamento, a seleção de conteúdos e a organização do ambiente fundamentado na Docência Virtual e a perspectiva de ensino baseada na Sequência Fedathi.

Em Moreira *et al.* (2018) objetivou-se verificar se a Sequência Fedathi tem a função de transposição didática para a EaD *online* e se pode ser utilizada na construção de materiais didáticos de matemática nessa mesma modalidade educacional. Para isso, analisaram-se narrativas docentes sobre a aplicabilidade da metodologia de ensino Sequência Fedathi na produção de MD da disciplina de Cálculo I no curso de Licenciatura em Matemática semipresencial do IFCE. O estudo apontou que o MD dessa disciplina se encontra apenas parcialmente adequado ao seu público-alvo, necessitando de uma readequação em sua elaboração, de forma a incitar o discente a pensar, a levantar hipótese, a argumentar etc., uma vez que esses fatores não estavam presentes em boa parte do MD analisado. Por fim, constatou-se que a Sequência Fedathi é uma metodologia de ensino que pode ser adaptada à elaboração de MD para a Matemática e, além disso, para a EaD *online*, pois suas etapas podem ser adaptadas para essa modalidade, cabendo assim, maiores estudos, com vistas a acompanhar a sua eficácia pedagógica.

Com o objetivo de oferecer uma proposta pedagógica que potencialize o uso de ferramentas assíncronas em ambientes virtuais, Leal (2012) aplica dezenove Bate-papos, tomando como base a Sequência Fedathi para planejá-los e aplicá-los. Ao analisá-los, isto é, ao observar as mediações, a atitude do professor, as contribuições proporcionadas aos alunos e o comportamento do aluno diante da ferramenta e da metodologia aplicadas, percebeu-se que a utilização do Bate-papo na Educação tornou mais eficaz a participação do aluno, além do que, aliado a uma metodologia de ensino, é um recurso viável que busca variadas estratégias de ensino, como mediação realizada pelos alunos e incorporação de vídeos e imagens na discussão, entre outros. Além disso, verificou-se que a participação do professor, embora seja indispensável, deve ser menor que a do aluno. Ainda de acordo com a autora, diante das tantas mudanças tecnológicas, é preciso ficar atento às possibilidades educativas, sempre percebendo o aluno neste contexto.

Em sua tese, Jucá (2011) avalia o desenvolvimento do AVE TeleMeios no decorrer de um curso a distância sobre construções geométricas e com o professor mediando segundo a Sequência Fedathi. As aulas foram planejadas com base na Engenharia Didática e com a utilização do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*. Esse curso se concretizou em cinco aulas, com participação de cinco alunos. Verificou-se a efetividade do TeleMeios,

ambiente montado com a finalidade de interação entre os sujeitos e ativa mediação do professor, pois as construções geométricas foram elaboradas coletivamente com a participação de todo o grupo.

A partir desses estudos, vimos que o ensino a distância do conceito de Medida ainda é um tema pouco explorado, ao passo que esse é um conteúdo importante a ser dominado pelo professor, pois é um componente curricular da educação básica e que tem presença no cotidiano. Carvalho (2010, p. 168) afirma que a inclusão dos conteúdos Grandezas e Medidas se justifica por três razões: “os seus usos sociais, com suas utilizações nas técnicas e nas ciências; as conexões com outras disciplinas escolares; e as articulações com outros conteúdos da Matemática”, além de que, conhecimentos limitados desse campo restringem a capacidade das pessoas exercerem plenamente sua cidadania.

Em vista do exposto, a originalidade da pesquisa está na abordagem pedagógica dada para o conceito de Medida, diferente de como este conteúdo é comumente abordado, uma vez que está estruturada na Teoria da Medida. Em outras palavras, a estruturação do conteúdo se constrói enquanto Situação Generalizável, trazendo de forma ingênua para o nível de graduação um conceito sofisticado. Essa ideia foi trabalhada pela primeira vez no Laboratório MultiMeios em Vasconcelos (1984) e nos apoiamos nela.

A escolha do *Moodle* MultiMeios e do TeleMeios, que são AVE com finalidades educativas, dá-se pelas múltiplas possibilidades de interação, simulação e experimentação, elementos que favorecem a aprendizagem matemática. No caso do *Moodle*, este permite ao professor produzir um curso com grande liberdade, pois o ambiente não possui qualquer desenho/modelagem pré-definida, ou seja, é o professor quem o constrói da maneira que achar mais adequada. Por outro lado, optamos pela metodologia de ensino Sequência Fedathi pois, de acordo com Jucá (2011, p. 255),

A SF [...] estabelece um itinerário seguro para que o professor elabore e desenvolva suas aulas, valorizando o aspecto colaborativo, incentivando a simulação e a experimentação, levando os aprendizes a se aproximarem das mesmas atitudes de um matemático ao desenvolver seu trabalho.

Compreendemos que esse é um campo aberto e de ampla exploração acerca das potencialidades dos recursos e de tecnologias que estão dispostos aos ambientes escolares, aos professores e aos alunos. Os avanços ilimitados dos meios tecnológicos reinventam constantemente os ambientes virtuais, implicando novas exigências sociais e profissionais de formação (BORGES NETO *et al.*, 2021). A partir das lacunas encontradas e da atual

necessidade de reflexão do tema, adentraremos nessa discussão fundamental, interpretando e compreendendo o uso pedagógico das ferramentas em ambientes virtuais.

Neste capítulo contextualizamos historicamente o estudo, relatando a influência das questões sociais na área educacional, com destaque para os impactos da informatização da sociedade. Também, expomos o envolvimento pessoal e profissional com o tema, além de apresentar os objetivos e a justificativa da investigação. O capítulo seguinte contempla o aporte teórico, trazendo as principais referências para o desenvolvimento da proposta. Desse modo, com foco no ensino de matemática, discutiremos sobre: a Sequência Fedathi como metodologia de ensino; a proposta de EaD do Laboratório MultiMeios e; o tema matemático Grandezas e Medidas.

O capítulo 3 relata o percurso metodológico. Nele discorremos sobre os procedimentos e métodos de pesquisa adotados, de forma detalhada. Já o capítulo 4 apresenta a proposta desenvolvida, descrevendo-a meticulosamente. Desse modo, contém o planejamento e o desenho didático do curso no AVE *Moodle* MultiMeios. Por fim, trazemos as nossas considerações finais no capítulo 5, com o propósito de mostrar o intuito desse trabalho, suas possibilidades, seus limites e suas contribuições para o Laboratório MultiMeios, bem como para o campo da Educação Matemática. Sigamos, então, para o referencial teórico.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção apresentamos uma discussão sobre as teorias e trabalhos acadêmicos consolidados no âmbito científico para obtenção da fundamentação teórica dessa pesquisa. De modo específico, abordamos, na primeira parte, a metodologia de ensino Sequência Fedathi, de maneira mais direcionada ao ensino de matemática, traçando um pouco do seu percurso histórico, discutindo seus princípios, etapas, concepções e fundamentos. Na segunda parte, tratamos sobre a EaD elaborada, desenvolvida e consolidada no Laboratório MultiMeios e constituída a partir da Sequência Fedathi, pois, de acordo com Borges Neto (1999), é necessário um profundo conhecimento de tecnologia pelo professor que mediará por meio dos ambientes virtuais. Por fim, trazemos os conceitos matemáticos Grandezas e Medidas.

2.1 A metodologia de ensino Sequência Fedathi

A metodologia de ensino Sequência Fedathi, inicialmente, foi uma proposta metodológica para o ensino de Matemática, com base na Engenharia Didática, criada pelo Professor Hermínio Borges Neto, como resultado de seus estudos desenvolvidos no Pós-doutorado na França, no ano de 1996. “A palavra ‘sequência’, nessa metodologia, justifica-se pela sua organização, pela sua *ordenação*, pela *sucessão* de atividades em quatro etapas” (SOUSA, 2015, p. 40), que serão discutidas posteriormente, e a denominação Fedathi nasceu da junção da primeira sílaba de cada um dos nomes de seus filhos: Felipe, Daniel e Thiago.

O professor Hermínio foi docente do curso de Bacharelado em Matemática, no Centro de Ciências (CC) da UFC, onde se preocupou com questões relacionadas aos índices de reprovação e à evasão dos estudantes. Com isso, buscava estratégias para melhorar o processo de ensino e de aprendizagem matemática, dialogando com professores da área educacional, na época em que era coordenador do curso (SANTOS, BORGES NETO, PINHEIRO, 2019).

Desse modo, já havia uma aproximação desse professor com a Educação, mas somente no ano 1997, após aposentar-se no CC, entrou para a FACED/UFC, através de concurso. Além disso, também no final da década de 1990, foi estruturado na FACED o Laboratório de Pesquisa MultiMeios, também fundado pelo professor Hermínio. Esse laboratório, ao longo dos anos, foi se transformando e se expandindo, desenvolvendo atividades e pesquisas nas áreas de Educação Matemática, Informática Educativa, Educação a

Distância, Produção de *Software* Educativo e Inclusão Digital, apoiado na proposta teórico-metodológica Sequência Fedathi (TORRES, 2018).

A metodologia de ensino Sequência Fedathi também se desenvolveu ao longo do tempo, foi sistematizada e seu uso se expandiu para o ensino de diversas áreas do conhecimento, pois é constantemente estudada por professores, pesquisadores e alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da UFC desse laboratório, não mais estando somente nessas áreas citadas anteriormente, com uma quantidade considerável de trabalhos científicos¹ vale ressaltar.

Destacamos os trabalhos na Medicina, sendo alguns deles, Soares Neto *et al.* (2019), Nunes *et al.* (2020) e Campos Neto *et al.* (2021), no ensino de Anatomia. O primeiro, respectivamente, alcançou resultados significativos ao promover aprendizado; o segundo mostrou diferenças estatisticamente significativas ao comparar a Sequência Fedathi com o ensino tradicional; e o terceiro, também com um estudo comparativo, mostrou melhor desempenho acadêmico dos alunos e reduziu o índice de reprovação. A Sequência Fedathi também aparece em Letras Italiano, com Moraes (2013), que organizou o ensino dessa língua a partir da Sequência Fedathi; entre outros. Como destaca Santos, Borges Neto e Pinheiro (2019, p. 6), a Sequência Fedathi “desenvolveu-se durante três décadas e, atualmente, caminha para uma consolidação por meio das experiências em sala de aula vividas por seus pesquisadores da Matemática e também dos que atuam além das ciências exatas”.

Hoje, a Sequência Fedathi pode ser caracterizada como uma metodologia de ensino que “baseia-se no método científico, transposto a um ambiente de ensino” (BORGES NETO, 2020, p. 14), podendo ser utilizada em qualquer área do conhecimento, porém, ainda carecendo de estudos científicos para determinadas áreas. É “uma proposta metodológica com foco no ensino e na postura do professor, porém, considerando efetivamente a atuação do aluno no processo de aprendizagem” (SANTOS; BORGES NETO; PINHEIRO, 2019, p. 9). Em outras palavras,

A Sequência Fedathi é caracterizada, principalmente, por ter um olhar mais atento para as ações do professor dentro e fora da sala de aula, favorecendo a autonomia do aluno, que é estimulado ativamente durante este processo de ensino. Lembramos que a Sequência Fedathi tem como foco principal o professor, sua intencionalidade, seu comportamento, participação e interação com os alunos em sala de aula (BORGES NETO, 2017a, p. 5).

Nesse sentido, a Sequência Fedathi tem relações com teóricos das diversas áreas, como encontramos em Borges Neto (2019), apresentando diálogos com os autores: John

¹ A produção científica do MultiMeios pode ser acessada através do endereço: <http://multimeios.ufc.br>.

Dewey; George Polya; Felix Klein; Célestin Freinet; Jean Piaget; Lev Vygotsky; Burrhus Frederic Skinner; João dos Santos; David Ausubel; Paulo Freire; Imre Lakatos; Philip Davis & Reuben Hersh; Guy Brousseau e David Tall. Ainda, de acordo com Torres (2018), a Sequência Fedathi tem suporte nas contribuições de Michele Artigue e no intuicionismo de Brower.

Por seu idealizador ser matemático de formação, a Sequência Fedathi tem um forte embasamento em concepções matemáticas e se caracteriza como uma proposta lógico-dedutiva-construtiva, pois é uma metodologia de ensino que baseia a ação docente para a construção da argumentação lógico-dedutiva pelo aluno, permitindo, por meio das construções, que o aluno faça conjecturas, experimente antes de formalizar o conhecimento. No caso da aprendizagem matemática, a Sequência Fedathi preza por ações que caracterizam o fazer matemático, como: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, errar, abstrair, generalizar, construir e, por fim, formalizar (TORRES, 2018; BORGES NETO, 2016).

Uma vez que, formalizar não é um processo mecânico, conduzido por uma cadeia inquebrável das hipóteses às conclusões. Significa um conjunto de explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível e mais convincente, através de um processo de investigação e descoberta (DAVIS, HERSH, 1995). A Sequência Fedathi acredita que esse é o trabalho matemático, fundamentado nas correntes logicista, formalista e construtivista, necessário para a aprendizagem matemática. De modo geral, podemos dizer que esse é o trabalho de um investigador, no qual a Sequência Fedathi transpõe para situações de ensino.

Ainda, a Sequência Fedathi é pautada em princípios que conduzem o trabalho do professor, com vistas a melhorar sua atuação em sala de aula, destacamos: Acordo Didático; Concepção do Erro; Contraexemplo; Mão no Bolso; Mediação; Pergunta e Situação Adidática. Entre outros elementos, como o Plateau. Apresentaremos cada um deles a seguir.

Durante a vivência da metodologia de ensino Sequência Fedathi, ainda no início da sessão didática, Sousa (2015, p. 61-62) destaca que “o professor deve combinar com os alunos as normas inerentes à resolução da situação que será apresentada como desafio, bem como as regras gerais de convivência na sala de aula”. Essa ação, o **Acordo Didático**, é caracterizada ainda pelo autor como:

[...] O acordo didático significa, portanto, a combinação e os ajustes feitos entre professor e estudantes, de modo a garantir que cada uma das partes desenvolva na sala de aula o que for necessário, dentro da capacidade de cada um, para que o

ensino e a aprendizagem sejam efetivados em um ambiente harmônico, também levando em consideração as possíveis desavenças que normalmente acontecem em um espaço aberto à investigação, à pesquisa.

Assim, o Acordo Didático está numa perspectiva de conversa, de diálogo entre professores e estudantes com o intuito de combinar as normas que nortearão as atividades a serem realizadas. Desse modo, preza pela relação de cumplicidade, onde docente e discentes ficam cientes de seu papel em sala de aula (RODRIGUES, 2017). Diferentemente do Contrato Didático de Guy Brousseau, este é um conjunto de normas que

São regidas por um conjunto de obrigações recíprocas, explícitas ou implícitas, que envolvem alunos, professores e o saber ensinado. Este conjunto de disposições é definido como contrato didático, ou seja, se trata a princípio do conjunto de comportamentos do professor esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos aguardados pelo professor (BEZERRA, 2019, p. 204).

Em vista disso, o Contrato Didático está mais voltado ao estudo e à compreensão sobre o controle da escola e do professor sobre os alunos, no que diz respeito à aprendizagem, e isso indica uma forma diferente de interação entre professor e alunos daquela almejada pela Sequência Fedathi. No entanto, o Acordo Didático baseia-se nos estudos sobre Contrato Didático de Brousseau e, a partir dele, estabelece outras normas diante das relações professor, aluno e saber, pois o Acordo Didático visa, principalmente, a responsabilidade mútua entre ambas as partes da relação didática, e não apenas um conjunto de normas a serem seguidas (SOUSA, 2015).

Partindo agora para o princípio **Concepção do Erro**, de acordo com Borges Neto (2018, p. 61-62), o erro na educação, geralmente, está associado ao fracasso, ao mesmo tempo em que indica que algo não está correto. Logo, tem uma conotação negativa, pois é visto como uma prova de que não houve aprendizagem. No entanto, as respostas dos alunos, corretas ou não, revelam o que eles pensaram, o raciocínio que utilizaram e destaca:

O erro ajuda o professor na investigação do processo de ensino-aprendizagem quando nos permite verificar os tópicos com maior índice de dificuldade dos alunos no conteúdo proposto, e, desde então, poder fazer as intervenções concernentes para que esse quadro seja aos poucos aperfeiçoado, beneficiando o aluno. Caso contrário, ou seja, quando não é valorizado o erro cometido, e é simplesmente ignorado negativamente, causa uma série de efeitos negativos aos discentes, dentre eles: a desmotivação em tentar, quantas vezes necessário, estabelecer o conhecimento com origem naquele erro e a autonomia de tentar fazer sozinho quaisquer que sejam as atividades seguintes.

Com efeito, o erro faz parte do processo de aprendizagem e se faz necessário desmistificá-lo, interpretando-o a partir de uma outra concepção. É fundamental que o professor o analise e recorra a estratégias de ensino apropriadas para solucionar a questão,

promovendo a autonomia do aluno. Isto é, por meio da mediação do professor e da interação com os alunos, busca-se corrigir um erro, permitindo que o aluno possa pensar e repensar a questão, até chegar ao resultado correto. Logo, o erro indica ao professor a necessidade de um novo direcionamento com vistas a oportunizar o crescimento ao aluno (MELO, 2017).

Como podemos ver, essa concepção de erro não se trata de baixar o nível ou retardar um curso por causa dos erros cometidos. Menos ainda, passar por cima deles. Em vez de humilhar quem erra, podemos criticar com bons modos e de maneira produtiva, afirmando coisas do tipo: “Não entendi bem”, “Pode explicar novamente?”, “Parece que houve um engano” e jamais dizer “Está errado!”, seguido da apresentação da resposta correta (LIMA, 1991b).

Outro princípio é a **Mão no Bolso**. É “uma pedagogia que pressupõe ao educador atenção, segurança e ousadia, para saber quando intervir, e se deve fazê-lo” (SANTANA, 2019, p. 219). Ou seja, é uma ação de não intervenção direta para dar a oportunidade de o aluno tentar, pensar, errar etc., criando condições para que ele possa desenvolver seu raciocínio e, assim, tenha uma experiência significativa. Desse modo, o professor deve colocar a “mão no bolso” enquanto o aluno põe a “mão na massa”, isto é, enquanto o discente experimenta, pratica, tenta solucionar o que foi proposto, o professor fica sempre atento para mediar conforme a necessidade. Tal necessidade, para ilustrar, pode ser quando o aluno solicita ajuda ao professor ou quando o diálogo entre os alunos não está sendo produtivo, inclusive, podendo levar à dispersão (FONTENELE, 2018). Portanto,

O principal objetivo da metodologia “mão no bolso” é propor ao professor e aos alunos que pensem, raciocinem, criem hipóteses e realizem juntos uma educação com base na Sequência Fedathi. Deste modo, uma pedagogia “mão no bolso” convida o professor a mediar reflexões, sistematização e elaboração do raciocínio, visando à produção de conhecimentos e saberes (SANTANA, 2018, p. 19).

Quando o professor estiver tentado a solucionar um problema pelo aluno, sugere-se que ele coloque suas mãos no bolso e apenas o oriente, propondo novos questionamentos que permita o aluno ver o problema por outro ponto de vista e para que ele possa aprender por meio de suas próprias realizações. Daí a denominação Mão no Bolso (SANTANA; BORGES NETO, 2003).

A Sequência Fedathi envolve um processo de **Mediação**, enquanto ação docente, para inserir o discente na prática de pesquisador. Esse processo de mediação se refere aquele trazido em Vygotsky, considerando o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que se refere a distância entre o nível de conhecimento real, caracterizado pelo que o discente pode realizar de maneira independente, e o nível de conhecimento potencial, determinado

pelo que aluno é capaz de fazer sob a orientação de um indivíduo mais capaz, no caso, com o auxílio do professor (PINHEIRO, 2008).

De acordo com Vigotski (1998), mediação é o processo pelo qual a ação do sujeito sobre o objeto é mediada por um determinado elemento. É o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação – a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento (SOUSA, 2015, p. 44).

Portanto, a função mediadora do professor é um dos princípios fundamentais para o desenvolvimento da metodologia de ensino Sequência Fedathi. Como afirma Pinheiro (2018, p. 45),

Um dos papéis importantes do professor em um ambiente educativo é o da mediação. Segundo Borges Neto (1999), esta corresponde a atitudes tomadas pelo professor para orientar, direcionar as atividades do aluno na investigação, ou descoberta, ou redescoberta de um conceito. Essa mediação deve suceder o mais próximo possível, no sentido temporal, da necessidade do aluno, atuando de modo direto ou indireto.

Nessa perspectiva, é necessário que o professor assuma o papel de mediador, para que o aluno possa ser um agente ativo na construção de seu conhecimento. No entanto, nessa mediação não deve haver interferência direta na produção dos discentes, ao mesmo tempo em que não se deve deixar de encaminhá-los efetivamente para a construção dessa produção. Por isso, essa prática docente demanda um conjunto de habilidades, que vão desde a observação, passando pelo diálogo, até o conhecimento matemático e sobre o aluno (BORGES NETO, 2018).

A **Pergunta**, outro princípio da Sequência Fedathi, é uma estratégia de mediação e um elemento fundamental na ação mediadora, conforme nos mostra Sousa (2015). O uso da Pergunta pelo professor “proporciona ao aluno situações desafiadoras, que funcionam como um meio para desequilibrá-lo/equilibrá-lo e impulsioná-lo à investigação [...], para que ele se torne protagonista da sua própria progressão, da condição de simples espectador à postura de pesquisador” (SOUSA, 2015, p. 20). Desse modo, envolvendo o discente para a construção de seu próprio conhecimento, o docente utiliza a pergunta para instigar o aluno, para causar-lhe reflexões, tanto no caso de acertos como no caso de erros, enfim, para auxiliá-lo a solucionar o problema colocado, sem dar-lhe a resposta.

Ainda, destaca o autor, que é importante o professor saber como se posicionar diante das dúvidas e das interrogações dos alunos, respondendo-lhes com outras perguntas que causem dúvidas ou certezas, de acordo com a mediação que for necessária, sempre no

sentido de encaminhar o discente à resolução da situação apresentada. Ainda, esse mesmo autor classifica as perguntas feitas pelo professor, vejamos no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 – Classificação das perguntas como estratégias de mediação na metodologia de ensino Sequência Fedathi

Classificação	Conceito
Pergunta de rotina	“Feita corriqueiramente na sala de aula, como meio de comunicação, de orientação, de pedido, de repreensão do professor aos estudantes e várias outras formas de interação, que podem, inclusive, tratar sobre o tema de estudo, mas em situações não instigativas.”
Pergunta investigativa	“São utilizadas como forma de desafiar, de mobilizar os alunos, de levá-los a pensar sobre o problema proposto pelo professor, para que eles possam compreendê-lo e ir à busca de uma solução.”
Pergunta diagnóstica	“Esta se faz geralmente no início da aula, como forma de o professor saber o nível de conhecimento da turma. O início da aula também pode ser um momento de o docente fazer o nivelamento da turma e este pode ser iniciado por meio de perguntas, para ter certeza de onde pode começar o ensino do conteúdo proposto.”
Contraexemplo	“Se refere à pergunta ou à atividade que incita o aluno a refletir sobre sua resposta ou atitude diante do tema em estudo.”
Pergunta avaliativa	“Feita pelo professor como forma de verificar se o aluno está seguro do que está fazendo ou se aprendeu o que foi ensinado.”

Fonte: elaboração própria a partir Sousa (2015, p. 51).

O autor também destaca que as perguntas feitas pelos alunos são fundamentais, pois elas indicam sobre as certezas, as curiosidades, os anseios e as angústias dos alunos, além de permitir acompanhar os avanços dos discentes. Ademais,

A pergunta também pode ser feita em forma de contraexemplo que se refere a uma situação criada pelo professor diante da resposta ou pergunta do aluno. O contraexemplo, como sugere o próprio nome, é um exemplo contrário ou uma situação que contradiz o que o indivíduo afirmara ou apresentara (SOUSA, 2015, p. 47).

Entretanto, o **Contraexemplo**, também um princípio da Sequência Fedathi, pode ser colocado sob a forma de uma sugestão, isto é, sem o ponto de interrogação. Sua finalidade é fazer com que o aluno reflita sobre suas afirmações e/ou revise seus argumentos, ou seja, “o

emprego do contraexemplo também pode ser feito quando a resposta do aluno estiver correta, como forma de contrapeso, desafiando-o a argumentar a favor, a defender sua proposição ou solução” (SOUSA, 2015, p. 48). Dessa maneira, é utilizado predominantemente pelo professor, com vistas a levar o aluno a reflexão sobre sua ação.

Nesse caso, o Contraexemplo pode ser utilizado ao longo de toda a sessão didática e se configura como uma estratégia didática, pois pode ser utilizado para: suscitar questionamentos entre os alunos; levantar hipóteses sobre um determinado conhecimento; incentivar os alunos a buscar confirmações dos resultados encontrados por ele; e, ainda, refutar modelos inadequados, isto é, mostrar que uma afirmação é falsa (FERREIRA, 2018).

Outro princípio é a **Situação Adidática**. Enquanto na Situação Didática “existe uma convergência entre as atitudes do professor e as do aluno: enquanto este aprende, aquele ensina, tirando-lhe as dúvidas que possam existir na resolução dos problemas” (MENDONÇA, 2018, p. 23), a Situação Adidática é quando não se tem uma intenção didática explícita, quando não há controle do professor. Mesmo assim, há a existência do fenômeno de aprendizagem e por isso elas também são importantes no contexto escolar. Desse modo, o aluno precisará agir, podendo desenvolver suas potencialidades, sem a intervenção, com respostas prontas, do professor. Bezerra (2019, p. 208) exemplifica a presença de Situações Adidáticas na vivência da Sequência Fedathi:

[...] o aluno expõe suas ideias, proposições e reflete individualmente ou em grupo sobre a solução do problema, eis que, implicitamente, o professor permite ao estudante pensar de modo autônomo sem que lhe antecipe qualquer resposta ou resultado. Neste instante, passa a tomar forma o momento em que os alunos irão expor suas ideias em que suas construções pessoais gravitam basicamente em torno das situações adidáticas do tipo ação e formulação, sendo esta última não ainda formalizada, mas no campo das várias hipóteses sobre possíveis soluções.

Ou seja, identifica-se uma Situação Adidática na Sequência Fedathi quando “a partir da atividade, problema ou situação proposta, a aprendizagem ocorre quando o aluno trabalha de maneira autônoma, embora exista a intencionalidade docente de ensinar os conteúdos” (MENDONÇA, 2018, p. 24). Assim, o aluno poderá utilizar os conhecimentos que já possui mesmo na “ausência” do professor que assume a postura de mediador.

Um elemento inicial da metodologia de ensino Sequência Fedathi a se destacar é o **Plateau**. Ele é o estudo do professor em relação ao nível de conhecimento do aluno, aqueles que o discente já possui ou que deve ter sobre o conteúdo que será ensinado, considerados na Sequência Fedathi como uma base necessária. Essas informações permitem que o professor

saiba se os alunos têm os pré-requisitos necessários e se estão aptos ao estudo do conteúdo que se pretende trabalhar (BEZERRA, 2017). Ainda, o Plateau

É uma palavra de origem francesa, cujo significado mais comum é *planalto*. Na vivência da Sequência Fedathi é utilizada como patamar, nivelamento ou base de equilíbrio do conhecimento do aluno, pensado no momento da preparação didática ou proporcionado pelo professor logo no início da aula sobre um conteúdo que precise de um nivelamento, ou seja, de uma base de conhecimento para ser ensinado (SOUSA, 2015, p. 57).

Assim, segundo esse autor, o Plateau se refere aos conhecimentos básicos que os alunos devem ter como pré-requisito para o conteúdo a ser ensinado, que pode ser feito pelo professor. Trata-se de um ponto de equilíbrio do conhecimento, proporcionado pela ação docente, para que os alunos cheguem ao patamar necessário, ao nível de conhecimento básico necessário para a introdução do novo tema, que pode ser realizado tanto no momento da preparação da aula, quando o professor faz a análise do nível de conhecimento dos alunos, como no início da sessão didática, que corresponde a ação de nivelamento da turma.

O conceito de Plateau deve ser entendido como um ponto de equilíbrio, onde o professor pode garantir que se pode dar início a aula, pois é a partir dele que o docente tem a segurança de que a aula se desenvolverá bem.

Todos esses princípios devem se fazer presentes durante a vivência da metodologia de ensino Sequência Fedathi, que ocorre em quatro etapas: Tomada de Posição; Maturação; Solução; e Prova. A partir de agora vamos discutir cada uma delas.

A primeira etapa, chamada **Tomada de Posição**, é o momento da apresentação de uma situação-problema, devida e cuidadosamente escolhida. Isso quer dizer que essa situação-problema deve ser:

- a) generalizável, “ou seja, de uma circunstância possível de ser abstraída de seu contexto particular, para um modelo [...] genérico” (SOUSA *et al.*, 2013, p. 20) – essa situação generalizável significa que o modo de a executar também soluciona diversas outras situações, trabalhando-se uma matemática mais sofisticada (MENEZES, 2018) sendo, também, um problema que tem “foco na procura por regularidades, permitindo a reflexão ao nível de cognição da turma” (FELÍCIO; MENEZES; BORGES NETO, 2020, p. 28);
- b) desafiadora, isto é, não pode ser tão fácil, de modo que o aluno não se sinta motivado a solucioná-la, nem tão complexa a ponto de ele achar que não é capaz de resolver, pois ambos os casos o desestimulariam. Por isso a importância do Plateau, para que o professor tenha a perfeita visualização dos

conhecimentos que os alunos possuem, deixando-os numa base de conhecimento necessária, comum a todos os alunos (SANTOS, 2017).

A Tomada de Posição consiste em criar elementos para inserir o aluno na cultura de investigador para estruturar um saber que se pretende ensinar. E assim, essa etapa é essencial para o desenvolvimento da(s) etapa(s) seguinte(s) (SANTANA; BORGES NETO, 2003). É a partir dela que a exploração levará ao delineamento do saber em questão (FONTENELE, 2018). Além disso, vale destacar a importância de se estabelecer o Acordo Didático para que o desenvolvimento das etapas possa fluir da melhor maneira possível.

No mais, a situação-problema pode ser apresentada pelo professor de maneira verbal, escrita, por meio de jogos e manipulação de objetos (SOARES NETO *et al.*, 2020). Ele também pode fazer uso de qualquer artefato, tecnologia ou linguagem, a partir do instrumento metodológico e da dinâmica de sala de aula que o docente achar mais adequados para a abordagem da temática a ser estudada. Discutiremos isso um pouco mais adiante por meio do Polígono Fedathi.

A **Maturação**, segunda etapa da Sequência Fedathi, é o momento de o aluno se debruçar para buscar respostas. É o espaço para o aluno refletir e atuar de maneira investigativa sobre o que foi proposto na Tomada de Posição. Esse momento permite o amadurecimento das ideias e a troca de informações entre os estudantes, onde estes devem estar concentrados em identificar os dados/variáveis e elaborar estratégias de resolução (SANTOS, 2007). Além disso, o aluno está cognitivamente fazendo interações dos saberes antigos com o conhecimento que está a se construir. Em suma, esta é a fase em que o aluno está pensando, maturando, refletindo, agindo sobre a situação-problema que foi proposta, enfim, construindo seu conhecimento (MENEZES, 2018). Pois,

Para que haja a aprendizagem de um saber, entretanto, é preciso ir além da assimilação, sendo imprescindível que o problema proposto possa causar desequilíbrios, ou seja, traga elementos que provoquem dúvidas, de modo que, por meio da ação do aluno na busca pelo equilíbrio, possa haver a reorganização de seus esquemas de assimilação para dar conta da acomodação dos novos saberes (BORGES NETO, 2018, p. 87-88).

Ainda, segundo Fontenele (2018), a escolha da situação-problema para a Tomada de Posição é determinante para o êxito na etapa Maturação, uma vez que é a partir dela que podemos causar os desequilíbrios cognitivos piagetianos nos alunos, ainda considerando, sob a perspectiva de Vygotsky, o nível de desenvolvimento proximal dos alunos. A autora também destaca a importância do:

- a) Plateau, pois os alunos deverão utilizar seus conhecimentos prévios para relacionar com o que precisam saber e, desse modo, avançar;
- b) do Acordo Didático, uma vez que os alunos devem estar conscientes de sua participação ativa no desenvolvimento das atividades;
- c) da Mediação, já que é através das ações e da postura adequadas do professor, que é criado na sala de aula um ambiente propício à investigação.

Ou seja, sendo a essência da Sequência Fedathi, deve-se encaminhar o aluno a agir como um investigador. Em decorrência, durante esse percurso surgirá dúvidas, ideias, *insights*, hipóteses e outras ações mentais que o matemático vivencia (NASSERALA, 2014). A partir disso, podemos apresentar atitudes docente e discente que são almeçadas para a fase Maturação, veja o Quadro 2 a seguir.

Quadro 2 - Atitudes docente e discente almeçadas na fase Maturação

Professor	Aluno
<ul style="list-style-type: none"> - Iniciar discussões com o aluno sobre a atividade proposta na Tomada de Posição. - Adotar a Pedagogia Mão no Bolso para observar como os alunos desenvolvem suas ações. - Respeitar o tempo de maturação do aluno, tendo paciência para esperar que chegue a solução. - Instigar a participação ativa dos estudantes, buscando manter a motivação provocada na Tomada de Posição. - Usar Perguntas e Contraexemplos para lidar com dúvidas e dificuldades dos discentes. - Propor a colaboração em equipe. - Saber analisar os possíveis erros dos alunos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Adotar posição investigativa ante a atividade proposta pelo professor. - Debruçar-se sobre a atividade e mobilizar seus conhecimentos prévios, analisando com calma a situação proposta. - Identificar e compreender as variáveis envolvidas no problema. - Exercitar seu raciocínio: levantar hipóteses, testar estratégias, questionar etc. - Ter iniciativa para expor dúvidas e dificuldades ao professor. - Reconhecer sua forma de organizar as informações, delinear estratégias, identificando o que precisa ser melhorado no modo como conduz sua maneira de aprender. - Compreender que as dificuldades e erros fazem parte da aprendizagem, porém precisam ser superados.

Fonte: BORGES NETO (2018, p. 89).

Para o aluno se debruçar sobre a situação-problema, conforme Santana e Borges Neto (2003), o professor se afasta para que o aluno possa pensar e, assim, adota a Pedagogia Mão no Bolso, observando como os alunos estão se desenvolvendo e sem fornecer respostas prontas aos questionamentos dos alunos. Para isso, ele se utilizará de Perguntas e de Contraexemplos. Ademais, o docente não apenas aponta os erros, pois não está interessado simplesmente na emissão de respostas corretas, mas instiga os alunos a repensar, a refletir o problema para que o erro seja superado. Vale enfatizar também que o professor deve respeitar o tempo de maturação dos alunos, do contrário, interromper esse processo acarretaria prejuízos para a compreensão do conteúdo. Portanto, o aluno passa a adquirir autonomia e conhecimentos que não se esgotam nessa etapa, porém, ela é fundamental para a aprendizagem e para o êxito das etapas seguintes.

A **Solução**, terceira etapa da metodologia de ensino Sequência Fedathi, ainda segundo esses autores, é o momento da organização, da estruturação, da representação de esquemas e/ou modelos, bem como o momento de exposição para o grupo, das respostas encontradas pelos alunos, para que possam ser comparadas, rebatidas e discutidas, por meio da Mediação do professor, que continuará a se utilizar, especialmente, de Contraexemplos, valorizando todas as soluções independentemente de estar certa ou errada. Por meio disso, os alunos deverão perceber que a construção do conhecimento envolve confrontação de ideias, erros e acertos. As ideias poderão ser expostas por meio de desenhos ou esquemas, de maneira escrita ou verbal. Desse modo,

O aluno deve pensar e refletir sobre as realizações desenvolvidas no decorrer da fase da maturação, avaliar suas respostas por meio de ensaios, erros e tentativas. [...] O professor deve analisar as distintas modalidades de representação apresentadas pelos alunos, para, baseado nelas, buscar o apoio do novo conceito matemático implicado (MENEZES, 2018, p. 47).

O tipo de Solução apresentada dependerá do que foi proposto na Tomada de Posição, que pode ser a resolução de um exercício, uma demonstração ou uma discussão. É importante que o professor esmiúce o percurso apresentado pelo aluno, analise o pensamento que foi elaborado por ele, para ajudá-lo a não cometer os mesmos erros e a visualizar, de forma sistematizada e da maneira mais coerente, a solução, pois é nessa etapa que o conhecimento científico a ser estabelecido começa a se delinear (BORGES NETO, 2018).

Por fim, a etapa **Prova** é o momento de sistematizar a situação-problema apresentada na Tomada de Posição. O professor formaliza e sintetiza o conhecimento, utilizando a linguagem técnica, a partir das soluções apresentadas pelos alunos, envolvendo-os e direcionando-os à generalização de um conceito. Assim, o professor faz uso das

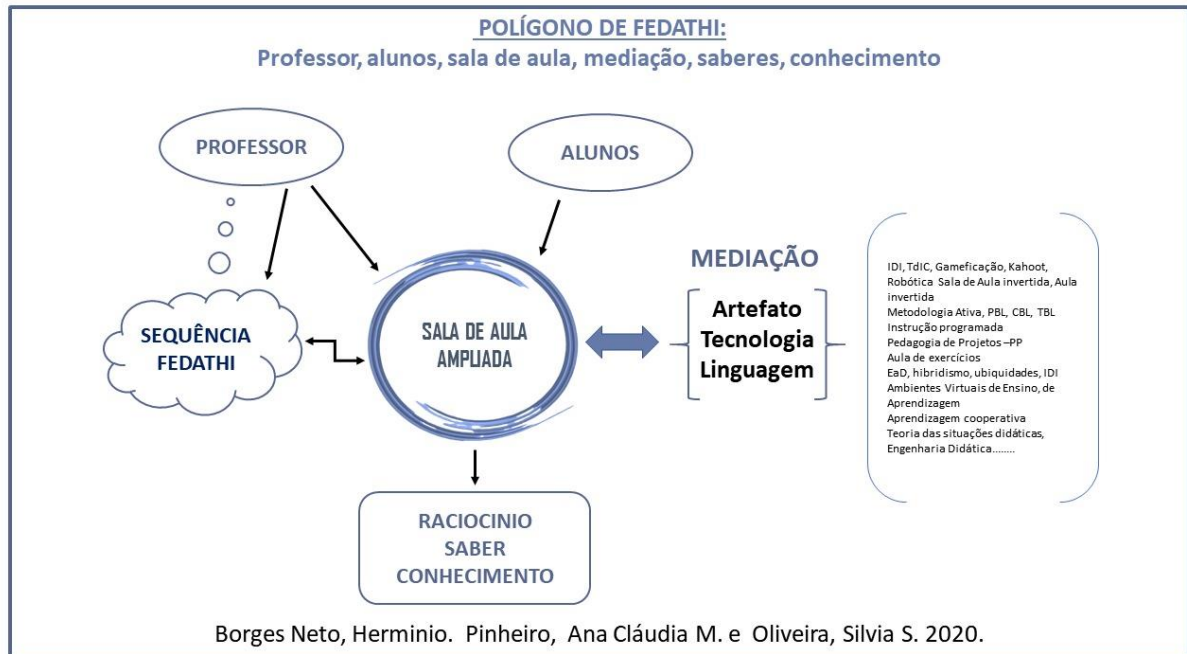
similaridades e diferenças dos caminhos percorridos, que podem ter sido redundantes, obscuros, incompletos, que podem ser melhorados ou até mesmo de uma resposta completa, para apresentar o modelo geral sob uma argumentação lógico-dedutiva, com precisa definição. Ou seja, a solução mais otimizada (SANTANA, BORGES NETO, 2003).

Ademais, ocorre ainda uma revisão, uma verificação dos elementos que poderiam ter ocasionado alguma incompreensão acerca do novo saber. Pois, “o objetivo da fase da Prova é estabelecer interações cognitivas entre o que foi pensado e exposto (conjecturado) pelos alunos e as verdades explicadas pelo professor, almejando o máximo aprendizado possível” (BORGES NETO, 2018, p. 102). Portanto, essa etapa é caracterizada por retomar as discussões realizadas com a finalidade de sistematizar o conteúdo proposto na Tomada de Posição (MENEZES, 2018).

Podemos perceber que, na Sequência Fedathi, o professor passa a ser o mediador do processo de ensino, sendo uma proposta que se apresenta de forma construtiva para o ensino de Matemática. Assim, as mudanças que ocorrem nas atitudes do professor refletirão na dinâmica dos alunos. Pois, ao obterem espaço para experimentarem e ao serem estimulados e motivados pelo professor, como consequência, os discentes passam a ser autônomos e a serem protagonistas na constituição de seus conhecimentos (BORGES NETO, 2017a).

Para a Sequência Fedathi, o conhecimento é obtido quando o aluno, por meio de investigações, busca respostas e as organiza, objetivando solucionar um desafio proposto pelo professor, que medeia e cria um ambiente favorável para que isso aconteça (BORGES NETO, 2017b). Com tal propósito, essa metodologia de ensino pode organizar e efetivar “ações pedagógicas com a utilização dos mais variados aparatos, inclusive as tecnologias digitais e as metodologias ativas, considerando todos os elementos e sujeitos que pertencem e agem durante a ação pedagógica” (BARBOSA, 2020, p. 22). Para isso, destaca-se o Polígono Fedathi na Figura 1 a seguir.

Figura 1 – Polígono Fedathi



Fonte: Borges Neto; Pinheiro; Oliveira (2020).

No Polígono Fedathi podemos identificar seis variáveis: a sala de aula ampliada; professor; alunos; a metodologia de ensino Sequência Fedathi; a mediação, que pode se utilizar, entre diversas possibilidades, das metodologias ativas; e a tríade: raciocínio, saber e conhecimento. Segundo Barbosa (2020, p. 22-23), o professor “age mediando a ação educativa na sala de aula ampliada através de artefatos, linguagens e tecnologias diversas, objetivando o desenvolvimento contínuo do raciocínio, saber e conhecimento dos estudantes”.

Cabe, nesse momento, abrir um parêntese para destacar que a Sequência Fedathi não se caracteriza como metodologia ativa. Carvalho *et al.* (2021, p. 45178, tradução nossa) afirma que “embora a Sequência Fedathi não seja uma metodologia ativa, mas sim uma metodologia centrada no professor, é uma ferramenta importante para promover a aprendizagem significativa”. Nesse sentido, por meio de discussão ocorrida no dia 11 de janeiro de 2021 com todos os alunos pesquisadores do MultiMeios no encontro da Segunda MultiMeios, é oportuno enfatizar que, enquanto as metodologias ativas estão centradas no uso de estratégias e de instrumentos para tornar o aluno protagonista de sua aprendizagem, sem direcionamentos de como fazer, numa sessão didática que utiliza a metodologia de ensino Sequência Fedathi, o professor pode inserir qualquer dinâmica na sala de aula, seja um artefato, uma tecnologia ou uma linguagem, haja visto que ela está centrada na postura, nas ações, na prática docente, de modo a permitir ao aluno construir seu próprio conhecimento.

Ademais, é saber mediar os instrumentos metodológicos que permite ao professor fazer a escolha da ferramenta de mediação mais adequada (informação verbal)². Conforme Borges Neto e Santana (2001, p. 7),

Um dos caminhos que enseja a possibilidade de gerar maior produtividade no ensino-aprendizagem pode estar na diversificação dos modos de abordagem de cada tema apresentado pelo professor, a partir da qual se pode adaptar o nível de aprofundamento desejado.

Ainda, Barbosa (2020) afirma que a efetivação desse ambiente representado pelo Polígono Fedathi pressupõe imersão e incorporação da postura fedathiana por parte do professor. Isto está entre as dificuldades de utilização da metodologia de ensino Sequência Fedathi, pois se faz necessário o desenvolvimento de uma postura mediadora pelo professor. Ou seja, a mudança de concepção é um desafio considerável, haja visto que a Sequência Fedathi, de acordo com Torres (2018), rompe com os paradigmas de sala de aula, pois ela orienta a ação docente para uma mudança de postura, para uma atitude de mediação, abrindo espaço para o aluno agir como um investigador na construção de seu próprio conhecimento, onde eles podem e devem interagir entre si e com professor.

Isso requer imersão, na teoria e na prática, o que não é tarefa fácil. Pois, para a adoção ou mudança de atitude, de postura, é necessário que as concepções e ideias estejam internalizadas. Como afirma Torres (2018), a Sequência Fedathi é uma proposta de formação e não simplesmente uma proposta de reaplicação. Nesse sentido, Fontenele (2018) conferiu que os fatores cognitivos, sociais, afetivos e metacognitivos influenciam a aprendizagem em conjunto, à medida em que o docente não apenas segue as fases da Sequência Fedathi, mas também, põe em prática os princípios pedagógicos imprescindíveis para a criação de um ambiente favorável a investigação e a construção do conhecimento.

Ou seja, conforme Sousa (2015), a Sequência Fedathi é mais que uma sequência de passos, prima pela postura do professor, através de princípios que ele deve internalizar, no sentido de proporcionar aos alunos oportunidades de experimentarem, de tentarem, de investigarem, tornando-os protagonistas na busca de seu próprio conhecimento.

2.2 A Educação a Distância do Laboratório MultiMeios

² Informação verbal fornecida por Hermínio Borges Neto na Formação Sequência Fedathi, do Ciclo de Formação Contínua e Continuada, realizado pela Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB) e pelo Laboratório de Pesquisa MultiMeios da UFC, transmitido no Youtube em setembro de 2020.

O Laboratório MultiMeios sempre buscou estar em conexão com os debates acerca das compreensões sobre a Educação potencializada pelas escolhas e conduções das interfaces, metodologias e práticas em EaD. É deste contexto que surge a proposta de EaD desse laboratório, ao mesmo tempo em que suas interfaces, metodologias e práticas imbricadas dialogam com as políticas públicas e a legislação brasileira para a modalidade de ensino EaD, perpassando pelo conhecimento acerca dos seus fundamentos históricos e sociais (SOARES, 2017).

Na EaD desenvolvida no Laboratório Multimeios, destacam Torres e Borges Neto (2018), os cursos são estruturados numa proposta que busca um *design* didático intencional, sistematizado e flexível. Além disso, toma a mediação docente como o grande desafio nos ambientes virtuais, pois acredita-se que as interações nesses processos só ocorrem se os professores souberem conduzir as interfaces digitais, na medida em que souberem potencializar o uso pedagógico em cada ferramenta. Dessa forma, a partir dos processos de mediação e de interação se pode construir uma aprendizagem dialogada, coletiva e colaborativamente, no qual os professores, junto aos discentes, exploram os novos recursos, (re)criando, elaborando, desenvolvendo as melhores estratégias e contribuindo com a aprendizagem. Contudo, isso nos implica a pensar em um ensino centrado no estudante, no reforço das interações e na flexibilidade pedagógica.

Elementos didáticos, tais como, o desenho didático, a proposta de ensino, a organização das sequências didáticas e a mediação influenciam diretamente nos processos de aprendizagem. Por isso, para potencializar a comunicação síncrona e assíncrona³, os diálogos com a Sequência Fedathi nos aspectos de autonomia, protagonismo estudantil, conhecimento, problematização da tecnologia, interação, colaboração e cooperação são alguns pressupostos que direcionam as práticas do MultiMeios (SOARES, 2017).

Por serem mais elaborados conceitualmente, é importante apresentar e discutir os termos interação/interatividade, colaboração e cooperação. Para Pereira (2004, p. 58-59),

Colaborar significa uma ação entre sujeitos que buscam um mesmo objetivo em uma atividade, ou seja, é um trabalho conjunto, em que as atividades realizadas contribuem entre si. Cooperar vem da ação de um sujeito que co-opera a favor da atividade de um outro(s) sujeito(s), auxiliando de alguma forma para obter uma informação ou realizar uma tarefa.

³ Ferramentas síncronas são aquelas que requerem a comunicação dos usuários em tempo real e precisam estar conectados no momento da interação, enquanto as assíncronas permitem que a comunicação entre os sujeitos aconteça, sem que eles estejam conectados ao mesmo tempo (LEAL, 2012, p. 75).

Em espaços colaborativos, os participantes interagem intensivamente, trocando informações e se comunicando de forma rápida. O aluno deixa de ser um receptor passivo e se torna capaz de expressar suas ideias e questionamentos. O professor, por sua vez, converte-se em um mediador de saberes coletivos e, assim, os conteúdos são constituídos colaborativamente por professores e alunos (SANTOS, 2010).

Já a aprendizagem cooperativa, “de acordo com Panitz (1999, p.1), [...] pode ser definida como ‘uma estrutura de interação designada para facilitar a consecução de um produto final ou objetivo específico por meio do trabalho conjunto em grupo’ (LIMA, 2008, p. 35). A aprendizagem cooperativa é um sistema mais diretivo e tem maior controle do professor. Em contraste, o processo de aprendizagem colaborativo é centrado no aluno, que exerce suas atividades com autonomia.

Essa autonomia está na aprendizagem que se desenvolve na medida em que professor(es) e alunos se manifestam, realizando suas atividades de maneira interdependente, buscando superar obstáculos e utilizando as potencialidades do ambiente virtual, aprendendo em colaboração com os demais e de maneira autônoma. Portanto, nos ambientes virtuais, as ferramentas síncronas e assíncronas viabilizam a expressão de opiniões, o esclarecimento de ideias e conceitos, a negociação, permitindo ainda tirar conclusões e resolver problemas (SANTOS, 2010).

A escolha entre uma proposta cooperativa ou *colaborativa* se faz com amparo na maturidade dos alunos, sua autonomia e sua capacidade de controlar as aprendizagens. A proposta cooperativa reserva ao professor ou formador um maior controle da aprendizagem e convém ao perfil dos mais jovens, aos menos autônomos, que ainda não adquiriram suficiente maturidade cognitiva e ainda possuem um repertório restrito de estratégias de aprendizagem. Esse controle deve ocorrer no sentido de proporcionar ao aluno o desenvolvimento gradual das habilidades de colaboração e maior autonomia (LIMA, 2008, p. 36).

De acordo com a autora, no que diz respeito aos objetivos compartilhados, a cooperação está no sentido de divisão. Isto é, cada participante é responsável por uma ação ou subtarefa e a soma delas conduz o grupo ao objetivo, cada membro dá sua contribuição a consecução do objetivo coletivo. Já na colaboração há um sentido maior de participação, em que cada membro buscará atingir por si próprio as metas do grupo, o que resultará tanto em produções coletivas como individuais.

As tarefas a serem cumpridas no processo colaborativo são compostas por um conjunto de atividades ou subtarefas em um cenário de aprendizagem que leva à exploração do conteúdo, elaboração das representações, comunicação de ideias e construção de conhecimentos. Contrariamente às tarefas cooperativas, elas não são fragmentadas para serem distribuídas entre os participantes. Os alunos realizam,

para eles e por eles próprios, o conjunto das tarefas, apoiando-se no grupo e nos recursos (LIMA, 2008, p. 37).

Na cooperação há uma interdependência intensa dos alunos, pois a contribuição de um não faria sentido sem as outras, que completam o trabalho. Na colaboração, o que importa aos participantes de um grupo é compartilhar e juntar as ideias, encontrando junto ao grupo inspiração, suporte e apoio. Assim, sendo um processo mais democrático do que a cooperação, fornece maior abertura e responsabilidade partilhada e caracteriza-se por relações mais igualitárias entre os agentes do processo de aprendizagem (SANTOS, 2010).

As ferramentas *Wiki* e Fórum, por exemplo, tem sua natureza radicalmente colaborativa, pois promovem interações tanto autônomas, como solidárias e democráticas e, conseqüentemente, desenvolve saberes colaborativos⁴. Ademais, a aprendizagem colaborativa reduz a solidão vivenciada por alunos e professores que se encontram fisicamente distantes, favorecendo um ensino a distância mais efetivo e democrático (LIMA, 2008).

Segundo Leal (2012), para que um ambiente virtual seja interativo, é preciso que haja diálogo síncrono e assíncrono entre os participantes e com os variados recursos disponíveis: vídeos, textos, imagens, sons etc. No caso da EaD, a interação dos sujeitos é algo fundamental para o desenvolvimento das atividades e para a aprendizagem, pois é por meio da interação que os conteúdos são explorados, maturados e reformulados. Assim, o aluno alcança mais informações e consegue transformá-las em conhecimento.

A interatividade trata de reorientar a concepção de emissor, que impõe mensagens fechadas e lineares a um receptor passivo, mas que disponibiliza possibilidades de participação e de intervenção sobre a mensagem passada ao receptor. Dessa maneira, o emissor deve explorar as potencialidades interativas, oferecendo informações que permitam ao receptor ampla liberdade de associações, combinações e significações. A interatividade digital permite a interação com a máquina, com o conteúdo e com outras pessoas, assim, viabiliza possibilidades de diálogo e interações para a construção do conhecimento (LIMA, 2008).

Conforme Soares (2017, p. 71), as práticas em EaD devem ser pensadas e potencializadas a partir de intervenções e mediações com viabilidade e sustentabilidade. Desse modo, problematizando as ações didáticas baseadas mais na reprodução de conteúdo do que numa educação autônoma e crítica, a autora caracterizou o AVE. Para isso e com vistas a melhor entendimento, também caracterizou o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA):

⁴ Um conjunto de conhecimentos, habilidades e atitudes relacionadas à colaboração [...]. Esses saberes são plurais, dinâmicos, heterogêneos e se encontram em constante desenvolvimento, podendo ser intencionalmente promovidos no exercício de atividades colaborativas de grupo, especialmente a escola (LIMA, 2008, p. 43).

Todo ambiente virtual presente na web, cuja finalidade seja promover o contato entre aprendiz e os materiais que podem subsidiar seu processo de aprendizagem, a saber: *sites* variados, interfaces presentes nos ambientes virtuais, mídias digitais, dentre outros que estejam em diálogo com a finalidade de promover interlocuções entre o aprendiz e a aprendizagem.

A concepção do AVA, segundo a autora, está relacionada as potencialidades de qualquer ambiente na *web*, *softwares* livres ou proprietários, com comunicação síncrona e assíncrona e que promova interação entre o aprendiz e a aprendizagem mediada pelo próprio AVA, sem relação direta com uma proposta de ensino ou com a presença do professor. Sua interface promove e instiga uma aprendizagem aberta e autodidata, já que é o compartilhamento de conhecimentos por meio de um ambiente virtual que caracteriza o AVA. Ou seja, o que se observa nesse ambiente é a relação usuário-máquina e não necessariamente uma abordagem pedagógica evidente, com uma intenção sistematizada e intervenções didáticas pensadas.

No entanto, a mediação pedagógica é indispensável frente as possibilidades das tecnologias digitais na implementação de uma dinâmica que se oponha aos sistemas instrucionais, baseado na primazia do ensino como mero repasse de informação (LIMA, 2008). Todas as ferramentas e atividades “precisam estar aliadas a uma metodologia que favoreça uma aprendizagem baseada na construção do conhecimento pelo aluno, mediado pelo professor e que favoreça o desenvolvimento da autonomia” (COSTA, 2013, p. 37). Assim, considerando a docência imprescindível para potencializar e ampliar a aprendizagem do aluno em ambientes virtuais, Soares (2017, p. 78) caracteriza o AVE:

Todo ambiente virtual que possui abordagem pedagógica, proposta didática (planejamento, sequência de atividades lineares ou hipertextuais, avaliação), intenção formativa e mediação interativa (tecnologia-professor-aluno), com vistas a uma aprendizagem contextualizada e significativa.

Para uma melhor compreensão, apresentamos o Quadro 3 a seguir, abordando mais detalhadamente esses elementos que constituem o AVE.

Quadro 3 – Elementos que constituem o AVE

Elementos	Caracterização
Abordagem pedagógica	“Diz respeito à abordagem do processo, bem como à compreensão de educação, ensino e aprendizagem. É ela quem vai conduzir todos os processos didáticos no ambiente virtual, por isso precisa constantemente ser revista em seus objetivos de formação, nas dimensões humana, política e social.”
Proposta didática	“Corresponde à sistematização do ensino no AVE, bem como à organização dos objetivos de ensino e estratégias para a configuração do ensino e da aprendizagem no AVE, a partir das intenções educativas sinalizadas na proposição de conteúdos, das escolhas de interfaces, da configuração de atividades e experiências no ambiente virtual, além das ponderações sobre a avaliação, fatores que compõem o desenho didático do ambiente virtual.”
Intenção formativa	“Diz respeito à compreensão e valoração que se atribui ao ensino (ZABALA, 1998) enquanto processo imbricado de significados.”
Mediação interativa	“Assume um caráter essencial em uma prática educativa que valorize os saberes dos indivíduos aos quais se destina, como um processo compartilhado de autorização e de construção de autorias, no qual todos os sujeitos interagem e constituem-se como aprendentes, sem limitar-se, contudo, à mediação da tecnologia, à relação entre alunos, ou entre professores e alunos.”

Fonte: elaboração própria a partir de Soares (2017, p. 79-80).

A partir dessa discussão, a autora destaca que os conceitos AVA e AVE não estão em lados opostos, porém, é importante discuti-los para evitar possíveis confusões conceituais a respeito da caracterização e da abordagem metodológica utilizada nos ambientes virtuais, uma vez que eles atendem a objetivos diferentes para a prática educativa, ao passo que se tenha clareza de suas características, potencialidades e contribuições. Ainda, a respeito da organização do ambiente virtual, a autora enfatiza que ele deve estar dividido em unidades temáticas para uma melhor conexão do aluno com o AVE, com utilização de materiais digitais, como imagens, *GIF*, vídeos, *links*, áudios etc., que devem ter ligação entre si, que ampliem a discussão e despertem a atenção do aluno.

Além disso, para que os alunos se sintam inseridos no ambiente, é importante criar o espírito de grupo, de comunidade, pois é preciso que os alunos vivenciem o AVE.

Ainda, é essencial que se tenha, em um primeiro momento, um fórum de apresentação, pois ele caracteriza o momento de chegada e de compartilhamento sobre as expectativas de aprendizagem. Assim, podemos aproximar os alunos, bem como conhecê-los, junto as suas histórias, preferências, vivências e experiências formativas.

Também é importante disponibilizar uma pasta Material de Apoio, que contenha informações úteis, por meio de leituras sugeridas não obrigatórias, relacionadas à temática do curso e/ou de apoio à realização das atividades propostas. O incentivo ao uso dos canais de comunicação interno ao ambiente é, do mesmo modo, essencial. Outro aspecto importante é solicitar o preenchimento completo das informações no perfil do ambiente, para que os alunos possam se aproximar conforme seus interesses.

A idéia principal do perfil é fazer com que os alunos e os formadores possam se conhecer mesmo que a distância, é possível inserir texto e imagem. Favorece ainda a escolha de parceiros para o desenvolvimento de atividades do curso (formação de grupos de pessoas com interesse em comum) (LEAL, 2012, p. 72).

Vale ressaltar que a interface é apenas um meio, a ação do professor é o que tornará o aluno autônomo e protagonista do processo de aprendizagem. Além disso, o *feedback*, o retorno rápido do professor para seus alunos e vice-versa, torna a aprendizagem mais dinâmica e eficiente. Portanto, para se atingir um objetivo por meio de um ensino intencional é imprescindível a presença do professor. E a Sequência Fedathi favorece este aspecto, pois ela trata da postura docente durante o processo de mediação e da interlocução de aprendizagens na organização do ensino, corroborando, assim, com a arquitetura do AVE e com as estratégias pedagógicas pensadas (LEAL, 2012).

Nesse sentido, Borges Neto e Capelo Borges (2007) destacam que ao se interagir com as máquinas se deve tomar algumas atitudes, necessárias ao desenvolvimento da autonomia, da capacidade de criar e trabalhar com hipóteses. Assim, o professor precisa atentar para alguns cuidados para que, como mediador, se possa desenvolver o raciocínio lógico dos discentes, bem como a capacidade de eles pensarem e construírem seus próprios conhecimentos. A inclusão de novas tecnologias em ambientes de ensino e de aprendizagem exige conhecimento para a sua adequada e produtiva utilização.

Essa concepção muda o papel do professor, que indiscutivelmente é fundamental, mas não é apenas o de transmitir conhecimento, mas de criar as condições para que o aluno seja desafiado e aprenda a pensar e agir. O professor também deverá ser capaz de fazer uma avaliação metacognitiva das produções dos alunos, verificando que estratégias de aprendizagem utilizaram. Deverá ainda fazer com que os alunos tomem consciência sobre seus processos de resolução de problemas e a que modalidades de pensamento recorreram durante a elaboração daquele conhecimento,

para que possam transferir as mesmas estratégias de um dado conteúdo para outros (BORGES NETO; CAPELO BORGES, 2007, p. 82).

Ademais, os autores enfatizam que para se trabalhar com situações mais gerais e mais complexas é oportuno decompor o raciocínio em etapas. O desenvolvimento de habilidades cognitivas necessita de atenção especial do professor, pois ele precisa identificá-las e utilizá-las adequadamente. Apresentamos no Quadro 4 a seguir, a classificação trazida por esses autores.

Quadro 4 – Classificação do desenvolvimento de habilidades cognitivas

<i>Ao acaso</i>	“Uma resposta dada ao acaso implica uma escolha intuitiva, pois a pessoa que responde não possui nenhum procedimento lógico a priori, nenhuma pista ou indício. É apenas um ‘chute’.”
<i>Tentativa e Erro</i>	“Após testar alguns procedimentos aleatórios, a pessoa isola os que não levaram às respostas certas e tenta outros até acertar. Não levanta, necessariamente, hipóteses.”
<i>Ensaio e Erro</i>	“A pessoa tem uma hipótese, que testa para tentar a solução correta. Não é um procedimento aleatório, é algo pensado e submetido a teste, intencionalmente.”
<i>Dedução</i>	“Procedimento tentado só após uma inferência ou análise a priori de tentativas já adotadas em algumas outras situações ou mesmo nessa.”

Fonte: elaboração própria a partir de Borges Neto e Capelo Borges (2007, p. 85).

Assim, os autores mostram que há a necessidade de uma mediação adequada para que as atividades didático-pedagógicas propiciem estimulações que, na medida que o aluno procura obter uma resposta, refletindo e decidindo qual a mais adequada para aquela determinada situação, esteja desenvolvendo seu raciocínio lógico, pensando, elaborando, interpretando, construindo e resolvendo, o que ocorre, especialmente, nos planos do *Ensaio e Erro* e da *Dedução*.

Na discussão sobre uma modelagem para AVE a partir da Sequência Fedathi, Soares (2017) destaca que no momento inicial tem-se o Acordo Didático, a Tomada de Posição junto a problematização e ao Plateau. É importante, também, explorar o potencial comunicativo imbricado no ambiente utilizado, disponibilizar um Cronograma e trabalhar, de maneira organizada, a inserção de variadas mídias.

Além disso, Costa (2013) ressalta que é importante apresentar a dinâmica do curso, as ferramentas utilizadas e outras informações gerais. É necessário, então, ter uma

unidade de ambientação para tratar dessas questões. Com relação as etapas da Sequência Fedathi no ambiente virtual, a Tomada de Posição

É uma etapa imprescindível para o desenvolvimento de toda a sequência, tendo em vista que neste momento o professor deve esclarecer aos alunos todos os aspectos que nortearão seu percurso no AVE, além de instigá-los ao debruçamento sobre uma situação desafiante, problematizadora (SOARES, 2017, p. 122).

Desse modo, o texto da Unidade é a Tomada de Posição. Apresenta-se uma situação, uma questão de partida, a ser desenvolvida, ou seja, a pergunta geradora da discussão. Para esse desafio proposto na Tomada de Posição tem-se, na Maturação, as estratégias para promover esse desenvolvimento. As ferramentas e leituras sugeridas, que devem estar dispostas em cada unidade, auxiliarão nesse processo.

De acordo com Soares (2017), a Maturação nos processos educativos voltados para a EaD é importante para o desenvolvimento da autonomia, bem como para os processos de colaboração. Por isso, a importância da utilização de diferentes ferramentas para os múltiplos caminhos e aprendizagens que serão desenvolvidos pelos alunos. Para a Solução, a autora sugere, considerando interfaces potencializadoras, o Fórum de discussão, o Bate-papo e a *Wiki*, para desencadear diálogos e debates, bem como a escrita colaborativa, promovendo a reafirmação e revisão de conceitos e, assim, construir o conhecimento.

É oportuno destacar que pode ser realizado, alternativamente, um Webinário. Nesse caso, é importante destacar o ambiente TeleMeios, pois, já utilizado em sessões didáticas para o ensino de matemática, este

É um ambiente telemático arquitetado com a utilização de rotinas de softwares livres, dotado de uma interface que permite a comunicação através de texto, som, imagem e e-mail, incorporando, desse modo, todos os recursos empregados, atualmente, na educação a distância e vai além ao possibilitar o compartilhamento total de aplicativos (JUCÁ, 2011, p. 7).

No caso da etapa Prova nos AVE, o professor pode recorrer também, ao Fórum, Bate-papo, *Wiki*, Webinário, com a intenção “de que os alunos revisitem seus percursos e observem as mudanças e permanências nos conceitos evidenciados em seus conhecimentos prévios e Plateau” (SOARES, 2017, p. 132). Com isso, a autora ressalta que essas compreensões formuladas ao longo da sequência também podem ser organizadas de maneira que se tenha um produto das reflexões alcançadas. Podem ser incentivados, também, a elaboração de vídeos, animações, textos, utilizando os recursos disponíveis no ambiente ou inseridas em outras redes, na forma de síntese das discussões realizadas para a sistematização dos conceitos.

Pode ser, ademais, um trabalho final, que pode ser escrito, utilizando a ferramenta Tarefa, ou um Webinário, por exemplo, convidando um aluno para apresentar a solução que ele encontrou e o professor medeia até a sistematização. Nesse sentido,

A prática de EaD do Laboratório MM possui: uma abordagem pedagógica estruturada entre o cognitivismo e o interacionismo, a depender das intenções formativas atribuídas às interfaces; uma proposta didática amparada teoricamente nos pressupostos da Sequência Fedathi [...]; a sistematização do ensino na qual estão evidenciadas a compreensão sobre o processo de ensinar, a organização do conteúdos com vistas a favorecer o sentimento de pertença entre o aprendiz e o AVE, além da organização do trabalho por meio de Sequências Didáticas; a mediação interativa, que favorece a colaboração entre os interagentes, bem como a autoria no AVE (SOARES, 2017, p. 135).

Portanto, a partir da modelagem trazida no trabalho dessa autora, a metodologia de ensino Sequência Fedathi permite estruturar o AVE, planejar e aplicar estratégias coerentes com a intenção formativa do professor, ao mesmo tempo em que traça reflexões e desenvolve práticas alternativas em EaD. Em vista do exposto, as estratégias de aplicação especificadas anteriormente, podem ser ressignificadas, reformuladas para outras proposições e intenções, pois é a utilização, especialmente, dos princípios, bem como das quatro etapas que permitem atingir um objetivo almejado.

No caso do ensino de matemática, os exercícios são necessários, pois “se refere ao conhecimento matemático subjacente aos procedimentos algorítmicos e técnicas de resolução, que precisam ser exercitados após compreensão da essência do conteúdo trabalhado” (FONTENELE, 2018, p. 84). A partir disso, podemos inferir que, ao se escolher um determinado conteúdo para a construção conceitual em sala de aula, devemos definir sua essência, não insistindo em detalhes irrelevantes, que deverão ser colocados como exercícios. Além disso, o objetivo dos exercícios deve ser sempre de desenvolver habilidades, de ser útil para emprego posterior, bem como fornecer prática, pois é preciso colocar a mão na massa.

No entanto, as questões propostas não podem ser meros exercícios de fixação. Devem ser disponibilizadas sem excesso, pois mais vale ficar tentando solucionar um problema genuíno, embora leve mais tempo, do que resolver muitos exercícios mecanicamente. Devem ser situações novas e desafiadoras, levando em consideração o conhecimento que o aluno já adquiriu para não provocar perda de autoconfiança.

Com relação ao uso das ferramentas, o Fórum é uma ferramenta assíncrona onde há um questionamento inicial, uma questão de partida, em que os alunos, como em qualquer ferramenta, irão responder, podendo utilizar diferentes linguagens, interagindo com o comentário dos demais e promovendo, assim, a discussão, que será mediada pelo professor

(COSTA, 2013). Com relação a ferramenta Bate-papo, Leal (2012, p. 83) traz essa discussão, a partir das contribuições da Sequência Fedathi e afirma que “a ferramenta *chat* oferece para professores e alunos um momento de colaboração e conquista do conhecimento; e que a possibilidade síncrona deste recurso favorece positivamente a ‘tempestade’ de ideias que surge no grupo durante a discussão”. A seguir, apresentamos no Quadro 5 orientações gerais para a mediação em um Bate-papo educativo.

Quadro 5 – Orientações para mediar discussões nos Bate-papos educativos

Tomada de Posição	“Exibe-se um problema que pode ser na modalidade de questionamento, um tema ou um grupo de questões para os alunos da sala de bate-papo.”
Maturação	“Os alunos devem buscar compreender a questão apresentada buscando identificar os possíveis caminhos que possam levá-lo a uma reflexão sobre o assunto. Feitas suas interpretações, deverão expor suas impressões através de alguma mídia (texto, imagens, emoticon, link vídeo etc), posicionando-se e maturando os novos questionamentos surgidos durante a discussão.”
Solução	“Com suporte nas opiniões expostas pelo grupo, cada aluno deverá organizar suas ideias sobre o que pensavam no início do questionamento exposto e depois da discussão realizada, (re)formulando suas hipóteses.”
Prova	“Após as discussões realizadas a respeito das questões levantadas pelos alunos, o formador deverá apresentar uma informação que faça o ‘fechamento’ da discussão. É nessa etapa que o novo saber deverá ser compreendido, assimilado e sistematizado pelo aluno.”

Fonte: elaboração própria a partir de Leal (2012, p. 47-48).

Conforme a autora, apresentar uma situação-problema é o ponto de partida para a maturação das informações, sendo assim, uma questão deve ser expressa para iniciar a discussão. No momento da Maturação os alunos expõem opiniões, concordam e discordam com os demais colegas e a participação do professor é mínima. Ele deixa os alunos a vontade, apenas fornece subsídios que contribuam para o amadurecimento das ideias, para sua aprendizagem e não permite que se perca o foco da discussão. Na Solução, os alunos reforçam suas ideias, respaldando seus argumentos:

Com base em várias opiniões publicadas e no desencadear da discussão, os alunos conseguem maturar suas ideias, reformulá-las e até mesmo reforçar aquilo no que acreditam. O texto previamente lido pelos participantes do bate-papo tem como função referenciar a discussão e orientar os alunos a organizar os pensamentos (LEAL, 2012, p. 51).

Já na etapa Prova, a autora destaca que com amparo nos pensamentos suscitados, os alunos chegam a novas conclusões e sistematizam seu conhecimento. É importante que haja a inserção de mídias durante o Bate-papo, incorporando mais de uma linguagem e saindo do formato convencional, e que ele não seja feito no formato de questionário. Isso potencializa o uso do Bate-papo na Educação. Além disso, o fechamento das discussões é indispensável para que os alunos possam visualizar as contribuições da aula. Assim, o professor assume o papel de mediador durante toda a discussão e realiza intervenções, tanto técnicas como pedagógicas, apenas quando solicitado ou quando percebe que há necessidade.

Ainda, a autora enfatiza que os alunos demoram entender o funcionamento de um Bate-papo educativo, da dinâmica de que todos falam ao mesmo tempo e, ainda, que pouco se percebe a presença do professor, apesar de sua mediação ser indispensável, especialmente quando os alunos fogem do assunto central. Assim, a autora alerta para a dificuldade de leitura dos comentários e sugere que esta deve ser dinâmica. Entretanto, ela é desenvolvida ao passo que se tem familiaridade com esse recurso. Além disso, para o bom andamento da discussão, outro aspecto fundamental é a conexão com a internet.

Tais pontos levantados não devem ser modificados, melhorados ou retirados dos debates, sugere a autora, mas precisam ser esclarecidos para os alunos. Por isso, o professor deve orientar sobre alguns cuidados que devem ser tomados nas aulas via Bate-papo. Ainda de acordo com autora, muitos temas são desencadeados durante as discussões em um Bate-papo. Quanto a isso, é oportuno destacar que os alunos entrarão com muitas dúvidas pertinentes ao assunto, algumas serão sanadas e muitas outras surgirão.

No que diz respeito ao processo de avaliação na EaD baseada na Sequência Fedathi, Costa (2013) assegura que este é contínuo e formativo, não visa apenas uma nota, mas um aprendizado significativo construído pelo aluno, através da mediação do professor. Por isso, o docente precisa acompanhar os alunos individual e diariamente no ambiente, acessando-o no mínimo uma vez por dia, para dar um retorno rápido, pois não há horário específico para os alunos realizarem e postarem suas atividades, excetuando-se as atividades síncronas. No entanto, pode-se trabalhar com prazos.

Esses prazos se apresentam como uma forma de organização e orientação linear das atividades. Todavia, o aluno inicia por onde quiser e achar melhor, visto que as atividades têm datas fixas apenas para acabar. Desde o primeiro dia de curso as atividades já ficam todas disponíveis. Apesar disso, o curso é flexível para as mudanças que forem necessárias.

No tocante a avaliação é realizada de forma contínua, verificamos tudo que os alunos fazem nos AVE, desde quantas vezes acessam os ambientes, o que fazem quando entram, se cumprem os prazos, se interagem com os outros alunos, se os textos elaborados são de qualidade, se são críticos em seus comentários... Tudo isso é visto e avaliado durante o período da disciplina (COSTA, 2013, p. 14-15).

Assim, destaca a autora, essa forma de avaliação não está atrelada ao ensino presencial, como encontramos em alguns cursos a distância. A EaD do MultiMeios trabalha com um processo de avaliação formativo e processual, que perpassa cada atividade ao longo do curso e não apenas em momentos singulares, pois um teste não prova que o aluno compreendeu. A avaliação busca identificar se houve uma experiência significativa, que leve à compreensão do assunto, ao desenvolvimento da autonomia e ao protagonismo dos estudantes.

2.3 Grandezas e Medidas

Nessa subseção introduzimos o conteúdo matemático que será abordado na proposta do curso. Iniciamos por Grandeza, conceituando-a, diferenciando Grandeza discreta e Grandeza contínua, exemplificando e apresentando uma estrutura matemática feita por Bellemain e Lima (2002). Logo após, trazemos o conceito de Medida como é abordado na Teoria da Medida, com base em Halmos (1950). Por fim, trazemos o conceito de área, sua estrutura matemática, apresentada por Lima (1995) e Bellemain e Lima (2002).

2.3.1 Grandeza

Grandeza é tudo aquilo que se pode pesar, medir e contar. De acordo com Bellemain e Lima (2002) a Grandeza também pode ser vista como uma propriedade dos objetos; o aspecto de sua conservação, isto é, o fato de que mesmo que o objeto mude de posição ou de forma, algo pode permanecer constante, que pode ser usado como critério para ordenar uma coleção de objetos.

Segundo o Instituto de Pesos e Medidas do Estado de São Paulo (2021), ainda, “Grandeza pode ser definida, resumidamente, como sendo o atributo físico de um corpo que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado”.

Em Bellemain e Lima (2002, p. 43), as Grandezas são vistas como classes de equivalência, como por exemplo, as classes de equivalência de superfícies que têm a mesma área. Eles explicam:

De um ponto de vista estritamente matemático, a relação de equivalência “ter mesma área” (que permite considerar a área enquanto grandeza), é definida pela escolha de uma unidade seguida da medida das superfícies: duas superfícies de mesma medida têm mesma área.

O conceito de Grandeza atribui significado a outros conceitos matemáticos como os de número, pois “o conjunto numérico adequado para a construção da medida de uma grandeza deve ser o conjunto dos reais, face ao conhecido fenômeno da existência de quantidades incomensuráveis” (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 100). Ou seja, no caso das Grandezas geométricas, estas relacionam a geometria, a álgebra e os sistemas numéricos.

As Grandezas são classificadas em dois tipos: as discretas e as contínuas. Lima (1991a, p. 7) as diferencia e exemplifica:

[...] as *discretas* (como um rebanho) e as *contínuas* (como o tempo, o peso e a distância). Comparar uma grandeza discreta com a unidade significa efetuar uma *contagem*; o resultado é sempre um número inteiro. Se, entretanto, a grandeza é contínua, compará-la com a unidade é *medi-la*; o resultado da comparação (medida) é um número real. Se a grandeza contínua que se quer medir é comensurável com a unidade escolhida, a medida é um número racional; se é incomensurável, sua medida é um número irracional.

Uma estrutura axiomática para o conceito de Grandeza foi feita por Bellemain e Lima (2002, p. 99-117), apresentaremos ela a seguir.

Para estruturar esse modelo matemático os autores inicialmente consideraram as Grandezas escalares e admitiram a Teoria dos Conjuntos, as regras lógicas e o conjunto dos naturais $\mathbb{N} = (1,2,3,4, \dots)$, com sua estrutura de semigrupo aditivo ordenado e comutativo. Além disso, o modelo axiomático apresentado por eles tomou o conjunto \mathbb{Q}^+ dos racionais estritamente positivos para valores das medidas.

Para construir o conceito mais geral de Grandeza de maneira formal, os autores buscaram tornar logicamente precisa a expressão “o atributo A de elementos de um conjunto”. E, para isso, o caminho seguido por eles foi definir uma relação de equivalência entre dois elementos de um conjunto e, em seguida, considerar o conjunto das classes induzido por essa relação, isto é, cada uma delas passando a ser “o atributo A ”. Por exemplo, para definir o comprimento de um segmento de reta, num dado universo $U = \{AB, CD, EF, \dots\}$ de segmentos de reta, recorre-se a relação de equivalência “ter o mesmo comprimento”, a ser verificada entre dois segmentos de reta, e então, forma-se o conjunto $U = \{AB, CD, EF, \dots\}$ das classes de equivalência de U com respeito a essa relação de equivalência, e cada uma dessas classes, AB , passa a ser, então, o comprimento de AB .

O procedimento adotado pelos autores para uma Grandeza arbitrária G iniciou por tomar um conjunto $G = \{x, y, z, \dots\}$. Então, definiram uma relação de equivalência \sim entre os elementos de G . Ou seja, uma relação que satisfaça, para quaisquer elementos x, y e z de G , as seguintes condições:

Axioma 1. $x \sim x$ (reflexividade);

Se $x \sim y$ diz-se que x e y são equivalentes com respeito à Grandeza G . Na interpretação do exemplo dos segmentos de reta, tem-se: AB e CD são equivalentes com respeito ao comprimento ou, simplesmente, AB e CD têm o mesmo comprimento (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Axioma 2. $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ (simetria);

Axioma 3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitividade).

Em seguida, os autores admitiram a existência de uma relação em G , simbolizada por $<$ tal que, para dois elementos quaisquer x e y pertencentes a G , ocorre uma e só uma das situações:

Axioma 4. $x < y, x \sim y$ ou $y < x$ (tricotomia).

Se $x < y$ diz-se x é menor do que y . No caso dos segmentos de reta $AB < CD$ deve-se ler AB tem comprimento menor do que CD . A transitividade dessa relação é também suposta (BELLEMAIN; LIMA, 2002):

Axioma 5. $\forall x, y \in X, x < y, y < z \Rightarrow x < z$.

Utilizando os axiomas de 1 a 5, os autores deduziram duas proposições, válidas para quaisquer x, y, z no conjunto G :

Proposição 1. $x < y$ e $y \sim z \Rightarrow x < z$.

Proposição 2. $x \sim y$ e $y < z \Rightarrow x < z$.

Neste ponto, os autores ressaltaram o fato de que toda relação de equivalência num conjunto G permite definir o conjunto das classes de equivalência que são constituídas tomando-se, para cada elemento x em G , a classe x de todos os elementos equivalentes a x . Formaram, então, o conjunto $G = \{x, y, z, \dots\}$, denominado um “domínio de quantidades de Grandeza G ”. Os elementos x, y, z, \dots de G são “quantidades da Grandeza G ”, ou, nos casos em que a Grandeza G é subentendida, simplesmente “quantidades”. Também, chamam-se os elementos (x, y, z, \dots) de G de “valores da Grandeza G ”, ou apenas Grandezas. No mais, quando se está lidando com mais de uma Grandeza, a expressão “domínio de quantidades da Grandeza G ” é, em geral, simplificada para “Grandeza G ”, ou mesmo, “ G ”.

Pelo Axioma 4, todos os elementos do conjunto G passam a ser comparáveis, obtendo-se uma relação de ordem total. Assim, os autores transportaram para o conjunto G das classes de equivalência, essa relação de ordem definida no conjunto base G . Para duas classes quaisquer x, y pertencentes a G , definiram

$$x < y \Leftrightarrow \exists x \in x, \exists y \in y: x < y.$$

As Proposições 1 e 2 garantem que a definição acima não depende dos representantes x e y escolhidos nas classes x e y , respectivamente, assegurando que a relação de ordem acima está bem definida. Além disso, a igualdade $x = y$, sendo uma igualdade entre dois conjuntos, significa que todo elemento de x pertence a y e, reciprocamente, todo elemento de y pertence a x . Dessa maneira, para $x = y$, se $x \in x$ e $y \in y$, então $x \sim y$ (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Os axiomas e propriedades que regem as relações \sim e $<$ foram traduzidas pelos autores em proposições relativas ao conjunto G das classes e podem ser demonstradas sem dificuldades.

Proposição 3. A relação \sim no conjunto G é uma relação de equivalência, ou seja, é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Proposição 4. Para quaisquer $x, y \in G$, verifica-se uma e só uma das alternativas: $x < y$; $x = y$; $y < x$.

Proposição 5. Para quaisquer $x, y, z \in G$, $x < y, y = z \Rightarrow x < z$.

Proposição 6. Para quaisquer $x, y, z \in G$, $x = y, y < z \Rightarrow x < z$.

Resulta das propriedades enunciadas que a relação $<$ é uma relação de ordem estrita no conjunto G , pois, em virtude da Proposição 4, dois elementos quaisquer de G são sempre comparáveis (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Assim, destacaram os autores, as Grandezas que satisfazem as propriedades acima podem ser chamadas *Grandezas ordinais*, sendo possível aritmetizar tais Grandezas, isto é, estabelecer uma função que associe a cada quantidade um número. Mas, para essa correspondência, é necessário que haja isomorfismo entre as estruturas de ordem nas Grandezas nos números reais, ou seja, se uma quantidade é menor do que outra o número associado a primeira quantidade deve ser menor do que o número associado a segunda.

Os autores destacaram que o maior interesse da exposição feita residiu nas Grandezas que, além de ordinais, admitem uma operação de adição entre as suas quantidades. Essas Grandezas, ordinais e aditivas, são chamadas “Grandezas mensuráveis”. No que se segue, os autores procuraram axiomatizar uma operação de adição que modelize, por

exemplo, a operação de colocar um segmento de reta com a origem coincidindo com a extremidade de outro, alinhados, para produzir uma combinação de dois segmentos.

Assim, iniciaram por introduzir axiomáticamente uma adição em G , definindo-a, no entanto, apenas para elementos x, y que sejam distintos. Esta última restrição reflete a impossibilidade física de se efetuar a combinação dita anteriormente com apenas um segmento de reta (BELLEMAIN; LIMA, 2002):

Axioma 6. Para dois elementos distintos quaisquer de G define-se um elemento de G , simbolizado por $x \oplus y$, que satisfaz as seguintes condições para qualquer $z \in G$, desde que as adições estejam definidas:

- i) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (associatividade);
- ii) $x \oplus y = y \oplus x$ (comutatividade);
- iii) $x \sim y$ e $z \sim w \Rightarrow (x \oplus z) \sim (y \oplus w)$;
- iv) $x < x \oplus y$;
- v) $x < y \Rightarrow \exists w \in G : y = x \oplus w$.

Os autores, utilizando o procedimento padrão, transportaram para o conjunto \mathbf{G} das classes de equivalência de G relativamente à relação \sim , definindo uma operação binária em \mathbf{G} , por meio dos representantes das classes de \mathbf{G} . Para contornar a dificuldade na definição de $x \oplus y$, em que é necessário supor $x \neq y$, e, além do mais, possibilitar a adição de um número qualquer de parcelas, os autores introduziram outro axioma:

Axioma 7. Para cada $x \in G$, existe um número infinito de elementos $y \in G$, tais que $x \sim y$ e $x \neq y$.

Esse axioma equivale ao requisito de que as classes de \mathbf{G} possuem um número infinito de elementos. Com base no que admitiram anteriormente é possível definir a operação binária desejada (BELLEMAIN; LIMA, 2002):

Definição 1. Sejam x e y elementos de \mathbf{G} . Tomem-se $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$, efetue-se a adição $x \oplus y = z$ e considere-se a classe \mathbf{z} do elemento z . Por definição, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Primeiro, foi destacado pelos autores que é possível efetuar a operação $x + x$, pois o Axioma 7 permite a escolha de representantes distintos na classe \mathbf{x} . Em seguida, foi notado que é possível transportar as propriedades da adição válidas do conjunto base G , para o conjunto das classes \mathbf{G} , enunciado no que se segue.

Proposição 7. Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{G}$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

Proposição 8. Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{G}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

Proposição 9. Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{G}$, $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{z} < \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

Proposição 10. Para quaisquer $x, y \in G$, $x < x + y$.

Proposição 11. Para quaisquer $x, y \in G$, $x < y \Leftrightarrow \exists z \in G: y = x + z$.

Proposição 12. Para quaisquer $x, y, z \in G$, $x < y, y = z \Rightarrow x < z$.

Proposição 13. Para quaisquer $x, y, z, w \in G$, $x < y, z < w \Rightarrow x + z < y + w$.

Completada a axiomatização da adição de quantidades de uma Grandeza, os autores passaram a considerar uma multiplicação de uma quantidade por um número $n \in \mathbb{N}$. A ideia é considerar uma operação do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ sobre o conjunto G (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Dado um natural n e um elemento x de G definem $n x = x + x + x + \dots + x$ (n vezes).

Mais rigorosamente, definem tal operação usando a regra de recorrência:

$$1x = x$$

$$(n + 1)x = nx + x, n = 2, 3, 4, \dots$$

Nessa definição, sendo o operador a multiplicação, a primeira linha diz que 1 multiplicado pela classe x é igual a própria classe x . Na segunda linha dessa definição, usando recorrência, temos à esquerda da igualdade (utilizando o leitor como referência) $n + 1$ multiplicado pela classe x , que é igual a $n x + x$, à direita da igualdade. Note que os dois sinais de adição que aparecem nessa igualdade têm naturezas distintas e estão em mundos diferentes. No lado esquerdo, esse sinal de adição $n + 1$ é a adição que aprendemos ao estudarmos os Axiomas de Peano, está relacionada com a ideia de sucessor. Já o sinal de adição do lado direito da igualdade é o operador de classes da Definição 1.

Do ponto de vista matemático, os autores definiram uma ação do monoide cujo conjunto base é o conjunto dos números naturais e cuja operação binária é o produto usual (produto usual de números reais) sobre o conjunto das classes de equivalência definidas pela relação de equivalência \sim , o conjunto G . Em outras palavras, é uma ação do monoide dos naturais com a multiplicação usual sobre o conjunto G das classes de equivalência.

Ao utilizar essa ação os autores obtêm ganhos significativos. Um deles, é que se ganha, de imediato, uma identificação envolvendo dois sinais distintos de mundos distintos (a igualdade da segunda linha). Um segundo ganho significativo é que se tem uma distributividade tal qual como funciona na adição e multiplicação de números reais, por exemplo. Uma outra contribuição também significativa é que, em decorrência dessa identificação que os autores fizeram, das Proposições 14 à 26 se ganha um arcabouço teórico

de propriedades que permitem ter uma estrutura de anel, mais especificamente para esse trabalho, um anel booleano, que é o espaço adequado onde trabalhamos Teoria da Medida.

As propriedades abaixo foram apresentadas pelos autores:

Proposição 14. Para todo $x, y \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n \in \mathbb{N}$, são válidas as igualdades:

$$\text{i) } (m + n)x = mx + nx;$$

$$\text{ii) } (mn)x = m(nx);$$

$$\text{iii) } n(x + y) = nx + ny.$$

Proposição 15. Para todo $x \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n \Leftrightarrow mx < nx$.

Proposição 16. Para todo $x \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m = n \Leftrightarrow mx = nx$.

Proposição 17. Para todo $x, y \in \mathbf{G}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $x < y \Leftrightarrow nx < ny$.

Proposição 18. Para todo $x, y \in \mathbf{G}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $x = y \Leftrightarrow nx = ny$.

As proposições acima fornecem as regras de uma “álgebra das quantidades” ou uma “álgebra das Grandezas” no caso de os coeficientes serem números naturais. A etapa seguinte que os autores percorreram é a extensão dessa álgebra para os coeficientes no conjunto \mathbb{Q}^+ dos racionais estritamente positivos (BELLEMAIN; LIMA, 2002). Para isso, os autores introduziram a divisão de uma quantidade por um número natural e iniciaram por observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, pode ser definido um operador:

$$\begin{aligned} f_n: \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G} \\ x &\rightarrow f_n(x) = nx \end{aligned}$$

A Proposição 17 mostra que, se $x < y$ então $nx < ny$. Assim, a função f_n é injetiva de \mathbf{G} em \mathbf{G} (BELLEMAIN; LIMA, 2002). Os autores adotaram, então, o seguinte axioma:

Axioma 8. (Divisibilidade) Dados $x \in \mathbf{G}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $y \in \mathbf{G}$ tal que $x = ny$.

O elemento y acima definido é dito a **n -ésima parte de x** sendo simbolizado por $y = \frac{1}{n}x$. Como a função f_n é injetiva, o elemento y é único. Pôde-se, então, ser definido o **operador n -ésima parte**, a saber, a função $g_n(x) = \frac{1}{n}x$ (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

O coeficiente $\frac{1}{n}$ na expressão de g_n não é o número racional $\frac{1}{n}$, mas apenas uma notação que caracteriza de forma conveniente o operador g_n (BELLEMAIN; LIMA, 2002). A identificação deste operador com o número racional é o objetivo das etapas que se seguem da explanação dos autores. Para isso, eles desenvolveram regras operatórias com os coeficientes $\frac{1}{n}$ que imitam aquelas já obtidas para os coeficientes naturais. Foi preciso, no entanto, que os

autores contornassem expressões do tipo $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\mathbf{x}$ ou do tipo $\left[\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right]\mathbf{x}$, pois ainda não seria possível atribuir significado a tais expressões.

As primeiras propriedades que serão mencionadas resultaram diretamente da definição do operador g_n (BELLEMAIN; LIMA, 2002):

$$n\left(\frac{1}{n}\mathbf{x}\right) = \mathbf{x},$$

$$\frac{1}{n}(n\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Outras propriedades se seguiram e são demonstradas pelos autores:

Proposição 19. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se:

- i) $\frac{1}{m}\mathbf{x} + \frac{1}{n}\mathbf{x} = \frac{1}{mn}[(m+n)\mathbf{x}]$;
- ii) $\frac{1}{m}\frac{1}{n}\mathbf{x} = \frac{1}{mn}\mathbf{x}$,
- iii) $\frac{1}{m}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \frac{1}{m}\mathbf{x} + \frac{1}{m}\mathbf{y}$.

Demonstração da primeira igualdade:

$$i) mn\left[\frac{1}{m}\mathbf{x} + \frac{1}{n}\mathbf{x}\right] = mn\left(\frac{1}{m}\mathbf{x}\right) + mn\left(\frac{1}{n}\mathbf{x}\right) = n\left[m\left(\frac{1}{m}\mathbf{x}\right)\right] + m\left[n\left(\frac{1}{n}\mathbf{x}\right)\right] = n\mathbf{x} + m\mathbf{x} = (n+m)\mathbf{x}.$$

Proposição 20. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se:

- i) $\frac{1}{m}\mathbf{x} < \frac{1}{n}\mathbf{x} \Leftrightarrow n < m$,
- ii) $\frac{1}{m}\mathbf{x} = \frac{1}{n}\mathbf{x} \Leftrightarrow m = n$,
- iii) $\frac{1}{n}\mathbf{x} < \frac{1}{n}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y}$,
- iv) $\frac{1}{n}\mathbf{x} = \frac{1}{n}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Demonstração da primeira parte da proposição:

(\Leftarrow) Suponha-se que $n < m$. Se não se tem $\left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x} < \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x}$, dever-se-á ter $\left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x} = \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x}$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x} < \left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x}$. No primeiro caso, virá $mn\left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x} = mn\left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x}$, donde resulta $n\mathbf{x} = m\mathbf{x}$ e, portanto, $n = m$, contrariando a hipótese. No segundo caso, deduz-se que $mn\left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x} < mn\left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x}$, que implica na desigualdade $m\mathbf{x} < n\mathbf{x}$ e, portanto, $m < n$, o que contradiz a hipótese (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

(\Rightarrow) Seja $\left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x} < \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x}$. Suponha, por absurdo, que não ocorre $n < m$. Deverá, então ser $m = n$ ou $m < n$. No primeiro caso tem-se, de imediato, $\left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x} = \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x}$,

contradizendo a hipótese. Na segunda alternativa, levando em conta a proposição direta resulta $\left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x} < \left(\frac{1}{m}\right)\mathbf{x}$, contrariamente à hipótese. Logo, $n < m$, como se queria provar (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Neste ponto, os autores trataram de compor dois operadores f_m e g_n sendo $m, n \in \mathbb{N}$. Uma propriedade útil para essa definição foi dada na:

Proposição 21. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $m\left(\frac{1}{n}\mathbf{x}\right) = \frac{1}{n}(m\mathbf{x})$.

Definiu-se, então,

$$f_m \circ g_n : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow (f_m \circ g_n)(x) = m\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}(mx).$$

O operador acima foi representado por $(f_m \circ g_n)(x) = \frac{m}{n}x$.

Novamente, neste ponto, os autores advertiram que o coeficiente da Grandeza x na definição acima não representa um número racional e sim uma notação para o operador composto de uma multiplicação por um número natural m com uma divisão pelo número natural n . Seguindo etapas análogas às que foram seguidas quando se tratava de $n\mathbf{x}$ e de $\left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{x}$, podem ser demonstradas as proposições que se seguem.

Proposição 22. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, tem-se:

- i) $\frac{m}{n}\mathbf{x} + \frac{p}{q}\mathbf{x} = \frac{mq+np}{nq}\mathbf{x}$,
- ii) $\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}\mathbf{x}\right) = \frac{mp}{nq}\mathbf{x}$,
- iii) $\frac{m}{n}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \frac{m}{n}\mathbf{x} + \frac{m}{n}\mathbf{y}$.

Proposição 23. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, tem-se:

- i) $\frac{m}{n}\mathbf{x} < \frac{p}{q}\mathbf{x} \Leftrightarrow mq < np$,
- ii) $\frac{m}{n}\mathbf{x} = \frac{p}{q}\mathbf{x} \Leftrightarrow mq = np$,
- iii) $\frac{m}{n}\mathbf{x} < \frac{m}{n}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y}$,
- iv) $\frac{m}{n}\mathbf{x} = \frac{m}{n}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

As condições sobre m, n, p e q da Propriedade i) foram apresentadas da forma indicada pelo fato de que nessa exposição ainda não tinham sido atribuídos significados para relações do tipo $\left(\frac{m}{n}\right) < \left(\frac{p}{q}\right)$ (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Proposição 24. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{G}$ e para todo $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, tem-se $\frac{m}{n}\mathbf{x} = \frac{km}{kn}\mathbf{x}$.

Os autores destacaram que a proposição acima permite que se possa eliminar fatores primos comuns aos números que compõem o par ordenado representado por $\frac{m}{n}$. Dado um par ordenado $\frac{m}{n}$, o procedimento referido permite definir um par ordenado $\frac{m'}{n'}$, denominado par ordenado reduzido de $\frac{m}{n}$, em que m' e n' são primos entre si e $m = km'$ e $n = kn'$, para algum número natural k .

Proposição 25. Seja x um elemento qualquer de \mathbf{G} . Se m e n são primos entre si e se $\frac{m}{n}x = \frac{p}{q}x$, então, existe um número natural k tal que $p = km$ e $q = kn$.

Proposição 26. Dois operadores $f_m \circ g_n$ e $f_p \circ g_p$ têm o mesmo efeito sobre um elemento de \mathbf{G} se, e somente se, os pares reduzidos de $\frac{m}{n}$ e de $\frac{p}{q}$ forem iguais.

As proposições que foram enunciadas até aqui permitiram que se considere o conjunto dos operadores $f_m \circ g_n$, para m e n arbitrários, e que nesse conjunto se possa definir a relação de equivalência induzida pela Proposição 26. Com isso, foi possível definir um espaço F de classes de operadores sobre \mathbf{G} denominadas “operadores de fracionamento” ou “operadores racionais” (BELLEMAIN; LIMA, 2002). Os autores tomaram, então, as operações de adição e decomposição de classes de operadores induzidas pelas igualdades válidas para quaisquer $f_m \circ g_n$ e $f_p \circ g_p$:

$$[(f_m \circ g_n) + (f_p \circ g_p)](x) = \frac{m}{n}x + \frac{p}{q}x = \frac{mq + np}{nq}x,$$

$$[(f_m \circ g_n) \circ (f_p \circ g_p)](x) = \frac{m}{n} \left(\frac{p}{q}x \right) = \frac{mp}{nq}x.$$

É possível provar que o espaço $\langle F, + \rangle$, constituído pelo conjunto F e pela operação de adição, é um semigrupo comutativo. Igualmente, é um semigrupo comutativo o espaço $\langle F, \circ \rangle$ e, além disso, é válida a distributividade da operação de composição relativamente à adição (BELLEMAIN, LIMA, 2002).

Os autores consideraram, portanto, o conjunto \mathbb{Q}^+ dos racionais estritamente positivos, munido das operações usuais de adição e multiplicação de racionais. Verifica-se, por meio de uma demonstração simples, que existe um isomorfismo entre as estruturas $\langle F, +, \circ \rangle$ e $\langle \mathbb{Q}^+, +, \cdot \rangle$. Em outros termos, é possível provar a existência de uma identificação entre o espaço de operadores de fracionamento e os números racionais estritamente positivos.

Por simplicidade, os autores sempre supõem que os números naturais que definem o operador $f_m \circ g_n$ são primos entre si, ou seja, são pares ordenados reduzidos; além disso

para tornar mais leve a linguagem, dizemos o “operador $f_m \circ g_n$ ” em vez de “a classe do operador $f_m \circ g_n$ ”.

Uma observação é feita pelos autores. Na construção do sistema axiomático exposto poderia ter sido considerado como conjunto dos coeficientes o conjunto dos naturais em vez do conjunto dos racionais positivos. Então, ter-se-ia uma estrutura para o conceito de Grandeza constituída pelos múltiplos naturais de uma unidade \mathbf{u} , ou seja, do tipo $\mathbb{N} \mathbf{u}$. Assim, essa estrutura incluiria o próprio sistema dos números naturais, que podem ser entendidos como quantidades de uma Grandeza ou, simplesmente, como Grandezas. Desse modo, a unidade usada seria o número 1. Esse é o modelo abstrato das chamadas **Grandezas discretas**.

No entanto, adotando o conjunto dos números racionais para os coeficientes, como foi apresentado, vê-se, similarmente, que os racionais positivos podem ser interpretados como Grandezas. Neste caso, temos um modelo abstrato de Grandeza indefinidamente divisível que possui continuidade. De fato, apenas quando se toma, nesse tipo de sistema axiomático adotado, os números reais como o conjunto dos coeficientes do sistema, pode-se obter um modelo abstrato para as **Grandezas contínuas** (BELLEMAIN, LIMA, 2002).

Essa é a axiomática construída pelos autores que considera uma Grandeza como um conjunto de objetos, ditos quantidades dessa Grandeza, no qual está definida uma relação de ordem, uma operação interna de soma de duas quantidades e uma operação externa de produto de uma quantidade por um número racional estritamente positivo. Os axiomas adotados permitiram construir uma Grandeza, ou um “domínio de quantidades”, como um semiespaço vetorial, $\mathbb{Q}^+ \mathbf{u}$, constituído pelos múltiplos, $r \mathbf{u}$, de uma dada quantidade \mathbf{u} , escolhida arbitrariamente como **unidade de medida**.

Além disso, de acordo com os autores, tais axiomas delimitaram as regras de uma “álgebra de quantidades” na qual são válidas, por exemplo, igualdades do tipo $200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$, em que expressa igualdade entre duas quantidades da Grandeza comprimento, isto é, uma igualdade entre dois comprimentos. Ou seja, é uma igualdade que expressa um mesmo comprimento representado em duas unidades diferentes, no caso, o centímetro e o metro. Ou ainda, $2 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = (2 + 5) \text{ cm} = 7 \text{ cm}$, que envolve a operação de adição de duas quantidades, um conceito primitivo na estrutura matemática que foi apresentada. A validade dessa cadeia de igualdades resulta das regras adotadas como axiomas no mencionado sistema lógico, bem como da definição de 2 cm e 5 cm , cada um deles sendo um produto de um número racional por uma quantidade. Do ponto de vista formal, a álgebra utilizada nesse

exemplo é inteiramente análoga à álgebra dos polinômios, na qual $2x + 5x = 7x$ (LIMA, 1995).

2.3.2 Medida

Trazemos a definição de Medida como está em Halmos (1950, p. 30-31, tradução nossa), no seu livro *Measure Theory*.

Uma **função conjunto** é uma função cujo domínio é uma classe de conjuntos. Uma função conjunto de valor real estendida μ definida em uma classe \mathbf{E} de conjuntos é **aditiva** se, sempre que

$$E \in \mathbf{E}, F \in \mathbf{E}, E \cup F \in \mathbf{E} \text{ e } E \cap F = \emptyset, \text{ então } \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Uma função conjunto de valor real estendida μ definida em uma classe \mathbf{E} é **finitamente aditiva** se, para cada classe finita e disjunta $\{E_1, \dots, E_n\}$ de conjuntos em \mathbf{E} cuja união também está em \mathbf{E} , temos

$$\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i).$$

Uma função conjunto de valor real estendida μ definida em uma classe \mathbf{E} é **contavelmente aditiva** se, para cada sequência disjunta $\{E_i\}$ de conjuntos em \mathbf{E} cuja união também está em \mathbf{E} , temos

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Uma **Medida** é uma função conjunto μ de valor real estendida, não negativa e contavelmente aditiva, definida em um anel \mathbf{R} , e tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Em vista da identidade,

$$\cup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup \dots \cup E_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots,$$

uma Medida é sempre finitamente aditiva.

Apenas para lembrar, um **anel** (ou **anel booleano**) de conjuntos é uma classe \mathbf{R} não vazia de conjuntos tais que

$$E \in \mathbf{R} \text{ e } F \in \mathbf{R}, \text{ então } E \cup F \in \mathbf{R} \text{ e } E - F \in \mathbf{R}.$$

Ou seja, um anel é uma classe de conjuntos não vazia, fechada sob a formação de uniões e diferenças.

Vejamos um exemplo trivial de uma medida:

Seja f uma função não negativa de valor real estendida dos pontos de um conjunto X . Seja o anel \mathbf{R} composto por todos os subconjuntos finitos de X ; define-se μ por

$$\mu(\{x_1, \dots, x_n\}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \text{ e } \mu(\emptyset) = 0.$$

Outros exemplos menos triviais:

Se μ é uma Medida em um anel \mathbf{R} , um conjunto E em \mathbf{R} é dito ter **medida finita** se $\mu(E) < \infty$; a Medida de E é **σ -finita** se existe uma sequência $\{E_n\}$ de conjuntos em \mathbf{R} tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ e } \mu(E_n) < \infty, n = 1, 2, \dots$$

Se a Medida de cada conjunto E em \mathbf{R} é finita (ou σ -finita), a Medida μ é chamada **finita** (ou **σ -finita**) em \mathbf{R} . Se $X \in \mathbf{R}$ (ou seja, se \mathbf{R} é uma álgebra) e $\mu(X)$ é finito ou σ -finito, então μ é chamado de **totalmente finito** ou **totalmente σ -finito**, respectivamente. A Medida μ é chamada **completa** se as condições

$$E \in \mathbf{R}, F \subset E \text{ e } \mu(E) = 0$$

implica que $F \in \mathbf{R}$.

2.3.3 Medida de Área

Utilizamos Lima (1995, p. 51-53) e Bellemain e Lima (2002) para apresentar uma estrutura matemática para o conceito de Área de superfícies planas, para o processo de medir área. Inicialmente, os autores convencionaram que o termo superfície significa um conjunto limitado do plano euclidiano. O ponto de partida foi definir uma função f , chamada **função área**, em um conjunto \mathbf{S} de superfícies, com valores em \mathbb{R}^+ (os números reais não negativos) e que possua certas propriedades julgadas apropriadas para caracterizarem a Grandeza área, a saber:

i) **positividade**: se A tem interior não vazio, $f(A) > 0$;

Ou seja, uma figura de interior não vazio tem Área positiva (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

ii) **aditividade**: $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, se A e B são “quase disjuntos”, isto é, se $A \cap B$ contém, quando muito, pontos de suas fronteiras;

Isto é, se duas figuras A e B têm em comum, no máximo, pontos de suas fronteiras, então, a Área da figura $A \cup B$ é a soma da Área de A com a Área de B (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

iii) **invariância por isometrias**: se uma figura plana A é transformada em outra, B , de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterada em B , então, $f(A) = f(B)$.

Em outros termos, se uma figura plana A é transformada em outra B , de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterada em B , então, A e B têm a mesma Área (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Adotadas as propriedades acima, os autores impõem a questão matemática de caracterizar o domínio \mathcal{S} da função f . Eles destacaram que, se são exigidas as condições acima para a função área, não é possível medir todo subconjunto do plano. Desse modo, é preciso saber quais superfícies são mensuráveis por f . Esse é um tema próprio da Teoria da Medida, que é contornado pelos autores ao convencionarem que \mathcal{S} satisfaz a axiomas que asseguram que as figuras planas da matemática escolar são mensuráveis, entre outros:

Axioma 1. Se $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{S}$, então $A \cup B \in \mathcal{S}$ e $A \setminus B \in \mathcal{S}$.

$A \setminus B$ representa a diferença dos conjuntos A e B , que é o conjunto dos elementos de A que não estão em B (LIMA, 1995).

Axioma 2. Os quadrados pertencem a \mathcal{S} .

Axioma 3. Se A é limitado e $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ com $A_n \in \mathcal{S}$, para todo n , então, $A \in \mathcal{S}$.

Os autores tomaram, então, um quadrado U para superfície unitária. Para quadrado unitário é, em geral, escolhido aquele cujo lado é um segmento unitário, isto é, de comprimento 1. Portanto, sejam U esse quadrado e f_U a função área tal que $f_U(U) = 1$. Estabelece-se, assim, a terminologia: $f_U(A)$, é a Medida de Área da superfície A , na unidade de medida U . Com isso, uma figura A que se possa construir como união finita de quadrados unitários quase disjuntos pertence a \mathcal{S} e o valor $f_U(A)$ é o número de quadrados unitários contidos na figura (LIMA, 1995).

Na etapa seguinte da construção da função f_U , os autores ressaltaram um instrumento fundamental que são as fórmulas de área. Se A é um quadrado qualquer cujo lado tem comprimento de medida inteira a , pode-se ver, de imediato, que $f_U(A) = a^2$. Por subdivisão apropriada do lado do quadrado U , deduz-se que, se A tem lado racional a , também será $f_U(A) = a^2$. Esta mesma fórmula vale mesmo se a é irracional. Para se deduzir tal fato, no entanto, é necessário que se adote mais uma propriedade a ser verificada pela função f_U . A função f_U que o satisfaça poderá ser calculada em quadrados de lado com medida irracional e, mais geralmente ainda, em superfícies de fronteiras curvas. Uma formulação possível é:

Axioma 4. Aditividade para uniões enumeráveis: se $A \in \mathcal{S}$ e $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ com $A_n \in \mathcal{S}$ e $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$, então, $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A_n)$. (Expressão da Área como a soma de uma série).

O cálculo do valor $f_U(A)$ envolve a passagem ao limite de uma sequência de valores que são as somas parciais da série $\sum f_U(A_n)$, onde A_n é uma das figuras que compõem A . Dessa forma surge o conceito de Área aproximada de uma superfície. O valor $f_U(A)$ é, na prática, obtido pelo valor de somas parciais de $\sum f_U(A_n)$ com a aproximação desejada (LIMA, 1995).

Tais axiomas permitem, por outro lado, a demonstração de que uma função área f_U satisfazendo às condições acima referidas está definida em todos os quadrados, triângulos e em todas as superfícies que se decompõem em uniões finitas de triângulos cujos interiores sejam disjuntos dois a dois. Em suma, em toda superfície poligonal. Mais ainda, uma figura plana A , mesmo não poligonal, isto é, com fronteiras curvas, que pode ser definida como união enumerável de superfícies mensuráveis, é mensurável (LIMA, 1995).

O autor destaca que, se a superfície unitária for mudada, é possível deduzir que a função f_U , definida em \mathcal{S} da forma indicada acima é única. Para isso, os autores consideraram, então, f_W uma função área, definida em \mathcal{S} (satisfazendo, então, aos axiomas de positividade, aditividade e invariância por isometrias), tal que $f_W(W) = 1$. A superfície W é uma nova superfície unitária. Seja $\lambda = f_W(U)$ e tome a função $g = 1/\lambda f_W$. Vemos que g é também uma função área definida em \mathcal{S} . Temos, portanto, $g(U) = (1/\lambda)f_W(U) = (1/\lambda) \cdot \lambda = 1$. Mas sabemos que a única função área que atende a essas condições é f_U . Logo, $g = f_U$, isto é, $(1/\lambda)f_W = f_U$ e, portanto, $f_W = \lambda f_U$. Isto é, dadas duas funções área quaisquer, f, h , definidas em \mathcal{S} , elas diferem apenas por um fator de proporcionalidade. A questão que o autor põe neste ponto é a de explicitar uma estrutura matemática em que se defina o termo *área*.

Dada uma função área f , definida em \mathcal{S} , verificamos sua sobrejeção, isto é, dado um valor real positivo μ , existe uma superfície A , tal que $f(A) = \mu$. Mas f não é injetiva, pois há um conjunto de superfícies de \mathcal{S} , representado por $\mathcal{S}(f)_\mu$, tal que, para toda superfície B em $\mathcal{S}(f)_\mu$, tem-se $f(B) = f(A) = \mu$ (LIMA, 1995).

O conjunto das superfícies mensuráveis \mathcal{S} pode ser dividido em classes disjuntas. Além disso, essas classes de equivalência não dependem da função área escolhida. Em outras palavras, partir de outra função área, h , (que é igual a λf , para algum λ), podemos ver que $\mathcal{S}(f)_\mu = \mathcal{S}(h)_\mu$, para todo μ . Concluimos que \mathcal{S} se divide em classes disjuntas \mathcal{S}_μ . O conjunto dessas classes $\underline{\mathcal{S}}$ é o **conjunto das áreas**. Dada uma superfície A , sua classe, \underline{A} , é a **Área \underline{A}** , isto é, o conjunto de todas as superfícies que **têm a mesma Área** que A , quando medidas por qualquer função área (LIMA, 1995).

Nesse conjunto de classes \underline{S} constituído, os autores puderam definir uma relação de ordem e duas operações, a adição de duas classes e a multiplicação de uma classe por um número, que satisfazem a propriedades análogas às de um espaço vetorial unidimensional sobre os reais. O conjunto S é uma estrutura matemática que permite o tratamento abstrato do conceito de Área, sendo um caso particular de um “domínio de quantidades” (LIMA, 1995).

2.3.3.1 Cálculo de Áreas: Integral de Riemann

Para rever a introdução do conceito de Integral de Riemann, utilizado no cálculo de Áreas, utilizamos Guidorizzi (2001, p. 302-311).

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ tende a L , quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, e escrevemos $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ε mas não da particular escolha dos c_i , tal que $|\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L| < \varepsilon$ para toda partição P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$.

Tal número L , que quando existe é único, denomina-se integral de Riemann de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x) dx$. Então, por definição $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$.

Se $\int_a^b f(x) dx$ existe, então diremos que f é integrável segundo Riemann em $[a, b]$.

Ainda por definição, $\int_a^a f(x) dx = 0$ e $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ ($a < b$).

Teorema 1. Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então,

- $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- kf é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.
- Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ então $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Podemos definir a Área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Seja, então, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam \bar{c}_i e $\bar{\bar{c}}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\bar{c}_i)$ é o valor mínimo e $f(\bar{\bar{c}}_i)$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Uma definição para a Área de A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação por falta da Área de A e que $\sum_{i=1}^n f(\bar{\bar{c}}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação por excesso, isto é, $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \leq \text{Área de } A \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{\bar{c}}_i) \Delta x_i$.

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x) dx$, quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, nada mais natural do que definir a Área de A por $\text{Área de } A = \int_a^b f(x) dx$.

Da mesma forma define-se Área de A no caso em que f é uma função integrável qualquer, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

2.3.3.2 Cálculo de Volumes: Aplicações da Integral

Também trazemos Guidorizzi (2001, p. 411-412) para introduzir cálculo de Volumes utilizando integral.

Sabendo que $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ é a fórmula que fornece o Volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x , do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Observemos que $A(x) = \pi [f(x)]^2$ é a Área de interseção do sólido com o plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto de abscissa x . Assim, o Volume mencionado anteriormente pode ser colocado na forma $\text{volume} = \int_a^b A(x) dx$.

Seja, portanto, B um sólido qualquer, não necessariamente de revolução e seja x um eixo escolhido arbitrariamente. Suponhamos que o sólido esteja compreendido entre dois planos perpendiculares a x , que interceptam o eixo x em $x = a$ e em $x = b$. Seja $A(x)$ a Área de interseção do sólido com o plano perpendicular a x no ponto de abscissa x . Suponhamos que a função $A(x)$ seja integrável em $[a, b]$. Definimos, então, o Volume do sólido por $\text{Volume} = \int_a^b A(x) dx$.

Exposto o referencial teórico, no capítulo seguinte descrevemos o percurso metodológico da pesquisa.

3 METODOLOGIA

A pesquisa é de caráter qualitativo, pois trata-se do desenvolvimento de uma proposta didática com as temáticas: EaD, Sequência Fedathi e o conceito matemático Medida. É do tipo exploratória, uma vez que envolve um estudo profundo acerca da metodologia de ensino, da mediação nos ambientes virtuais, das tecnologias, dos usos pedagógicos das ferramentas e recursos e da reorganização do conteúdo para constituir a referida proposta.

De acordo com Haguette (2007), a pesquisa qualitativa fornece uma compreensão profunda de determinados fenômenos sociais, dando maior relevância ao aspecto subjetivo, face à configuração das estruturas sociais e, assim, enfatiza-se a especificidade de certos fenômenos. Com relação ao método, Gil (2002, p. 27) afirma que as pesquisas exploratórias “são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizado especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado [...]”. Além disso, “as pesquisas exploratórias têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e idéias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores”.

O AVE selecionado foi o *Moodle* instalado em nossos servidores e mantido pelo próprio laboratório, denominado *Moodle MultiMeios*, nosso *lócus* de pesquisa, onde foi delineado o curso “Introdução ao conceito de Medida segundo a Sequência Fedathi”. A palavra *Moodle* vem de *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* e sua tradução livre quer dizer Ambiente de Aprendizagem Dinâmico Modular Orientado a Objeto. É uma plataforma, gratuita, de código aberto, que permite aos educadores produzir cursos *online*, desenhar ambientes personalizados, dispendo de ferramentas colaborativas em um espaço privado (MOODLE, 2020). E o público-alvo da proposta são licenciados ou licenciandos em Matemática, pois exige conhecimentos matemáticos prévios.

Para cumprir os objetivos, utilizamos a Metodologia de Pesquisa Sequência Fedathi, que “está direcionada para o pesquisador com o papel de mediador, de modo que os princípios da Sequência Fedathi serão observados sob a óptica de um método científico” (MENEZES, 2018, p. 53) Assim, esse método sistematiza procedimentos com vistas a orientar o caminho para a resposta de um determinado problema, quando cumpridos rigorosamente e de maneira imparcial, e é constituído por quatro etapas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

Na primeira etapa, denominada Tomada de Posição, ocorre a apresentação da relevância do tema, a justificativa e a originalidade da pesquisa, assim, realiza-se o estado da

arte para identificar o que ainda não foi pesquisado, que está em aberto, para então preencher lacunas. Também, expõe-se o propósito e a função da pesquisa, as questões e os objetivos, bem como o *locus* e os sujeitos da investigação. Ademais, apresenta-se a fundamentação teórica do problema, isto é, o estudo do tema, da área específica em que a investigação foi delimitada. (MENEZES, 2018; SANTOS *et al.*, 2019).

Dessa forma, no primeiro momento dessa pesquisa, delimitamos o problema, definindo a problemática, as questões de pesquisa e os objetivos geral e específicos, apresentados anteriormente no capítulo introdutório. Também, nesse início de caminhada se constrói o referencial teórico com base nas leituras pré-estabelecidas, preferencialmente, com base nos trabalhos do MultiMeios e das áreas específicas em que se enquadram nosso trabalho.

Assim, realizamos estudos sobre a Sequência Fedathi, sobre EaD e sobre o conceito de Medida, referencial teórico exposto no capítulo anterior. Para a justificativa e, conseqüentemente, para apresentarmos a relevância e originalidade da investigação, realizamos a revisão sistemática para o levantamento bibliográfico dos trabalhos correlatos.

Optamos pelo sistema *PRISMA*, que em sua tradução quer dizer Principais Itens para Relatar Revisões Sistemáticas e Meta-análises, pois é uma das abordagens metodológicas mais amplas referente as revisões. Ela constitui-se por um *checklist* de vinte e sete itens que devem ser incluídos no trabalho de revisão e em um fluxograma que apresenta quatro etapas: Identificação, Seleção, Elegibilidade e Inclusão (MOHER *et al.*, 2015). Nesse trabalho utilizamos apenas o fluxograma. Em Carmo *et al.* (2020), esse fluxograma é utilizado para coletar trabalhos que abordassem a temática pesquisada, baseando-se nos critérios de inclusão definidos, a fim de, posteriormente, analisar esses estudos, e para apresentar de maneira mais detalhada as informações a respeito da seleção, exclusão e inclusão de pesquisas.

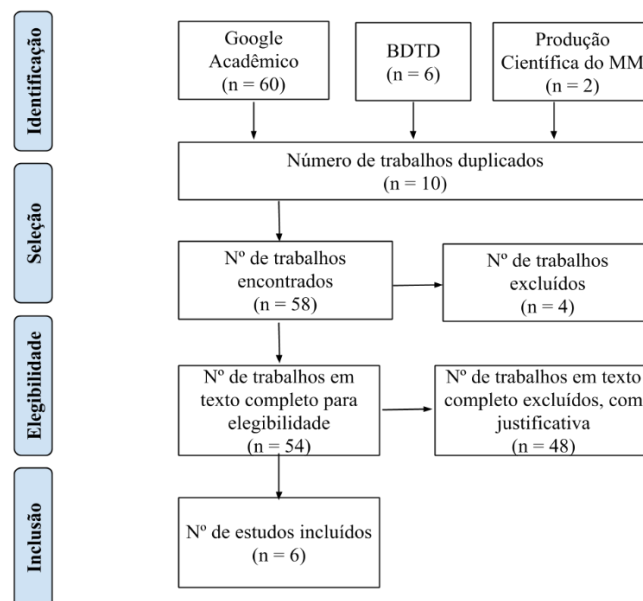
Desse modo, as bases de dados selecionadas foram: o *Google Acadêmico* (1); a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) (2); e a Produção Científica do MultiMeios⁵ (3). Pois estas são abrangentes, uma vez que a BDTD identifica trabalhos acadêmicos dos mais variados repositórios institucionais, assim como o *Google Acadêmico* que, além disso, inclui artigos científicos. Já na Produção Científica do MultiMeios, encontramos todos os trabalhos realizados no âmbito do Laboratório MultiMeios. A busca foi feita com as palavras-chave “Educação a Distância”, “Ensino de Matemática” e “Sequência Fedathi” e os critérios de inclusão dos estudos foram:

⁵ Disponível em: <http://blogs.multimeios.ufc.br/pre-print/>.

- a) pesquisas que abrangessem os três temas Ensino de Matemática, Educação a Distância e Sequência Fedathi;
- b) investigações publicadas a partir do ano de 2010, pois buscamos pesquisas mais recentes para tratar do tema;
- c) trabalhos científicos do tipo tese, dissertação e artigo científico.

Encontramos um total de sessenta resultados na base de dados *Google Acadêmico*, seis na BDTD e dois na Produção Científica do MultiMeios. Desse total de sessenta e oito trabalhos encontrados, dez eram repetidos, sendo, neste caso, encontrados um total de cinquenta e oito estudos. Desses, dois datavam de anos anteriores à 2010, outros dois eram do tipo relato de experiência. Assim sendo, estes quatro foram excluídos. Tais informações estão representadas na Figura 2 a seguir.

Figura 2 – Fluxograma PRISMA



Fonte: MOHER *et al.* (2015).

Portanto, cinquenta e quatro trabalhos foram selecionados para leitura completa. Após essa ação, quarenta e oito estudos foram excluídos, em razão de não abordarem os três temas buscados. Ao final, foram inclusas seis pesquisas que estão apresentadas no Quadro 6 a seguir.

Quadro 6 – Identificação dos estudos incluídos

Ano	Título	Autor	Base de dados	Tipo
2011	Construções geométricas no ambiente virtual de ensino TeleMeios com mediação na Sequência Fedathi	Jucá	1, 2 e 3	Tese
2011	A Sequência Fedathi e o ambiente virtual de ensino TeleMeios na determinação da equação de uma reta	Andrade	1, 2 e 3	Dissertação
2012	Uma proposta pedagógica para uso do bate-papo virtual no ensino	Leal	1 e 3	Tese
2014	Análise da visão do professor-tutor sobre a adequabilidade do material didático de matemática à luz da Sequência Fedathi: o caso da licenciatura em matemática	Moreira	1, 2 e 3	Dissertação
2018	A Sequência Fedathi como transposição didática na produção de material didático online: o caso da disciplina de cálculo matemático	Moreira <i>et al.</i>	1 e 3	Artigo
2020	Curso preparatório matemática básica CIMENG – Uma nova proposta do ensino da matemática básica para ingressos em graduações de exatas	Ripardo, Oliveira, Menezes	1	Artigo

Fonte: elaboração própria.

A descrição, isto é, um breve resumo dessas investigações foi feito no capítulo 1, pois abordamos a justificativa da pesquisa. A partir desses trabalhos identificados acima é que pudemos identificar as lacunas deixadas por eles e, assim, justificar e mostrar a relevância de nossa pesquisa.

Em seguida, partimos para a Maturação, nessa etapa deve ser elaborado um modelo de resolução para o problema e, assim, um esboço do objeto de pesquisa. O que deve ser formulado é uma tentativa de resposta à um problema, com base num sistema formal, ou seja, foi modelizada uma estratégia, sistematizada num plano formal, que será levada para

aplicação e análise posteriormente (MENEZES, 2018). Nesse caso, construímos o curso e a sua proposta didática no *Moodle* MultiMeios, a partir da metodologia de ensino Sequência Fedathi e da prática de EaD do MultiMeios. O que foi feito e como foi feita a proposta do curso, isto é, a proposta detalhada está apresentada no capítulo 4 a seguir.

Para a terceira etapa do método, temos a Solução que, de acordo com Menezes (2018, p. 27), nessa etapa “há o uso dos instrumentos metodológicos, tais como entrevistas, filmagens, observação, aplicação de sessões didáticas etc.”. Posto isso, haverá a vivência, numa continuação posterior dessa pesquisa, para testar e ajustar a proposta elaborada. Por conseguinte, na quarta e última etapa, nomeada Prova, deve ser realizada a análise dessa vivência, efetivando o amadurecimento e a reflexão (MENEZES, 2018; SANTOS *et al.*, 2019). Assim, poderemos observar o que poderá ser melhorado, modificado ou reformulado.

O próximo capítulo objetiva apresentar a construção do curso, que tem como base a literatura e os aspectos abordados no capítulo 2, Referencial Teórico, descrevendo a dinâmica e a abordagem de ensino utilizada para introduzir o conceito de Medida a distância.

4 PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE MEDIDA E DESENHO NO AVE *MOODLE* MULTIMEIOS

Nessa seção apresentamos a mediação de cada uma das sessões didáticas que compõem a proposta pedagógica e apresentamos, detalhadamente, o desenho didático do curso, justificando a escolha das ferramentas e dos recursos, bem como as intenções pedagógicas de seus usos. Iniciemos, então, a discussão.

O conhecimento deve ser conquistado por meio da compreensão, da construção de sua sistematização. É preciso dar ênfase às ideias matemáticas e não aos conhecimentos técnicos, tornando o aluno ativo. No que diz respeito a matemática, o objetivo do curso é introduzir o conceito de Medida. A abordagem desse conceito tem por base as ideias de Vasconcelos (1984), em sua pesquisa realizada no Laboratório MultiMeios, que faz uma abordagem para os Anéis de Dedekind, usando um dos princípios da Sequência Fedathi: Situação Generalizável. Em sua dissertação, ele mostrou como se pode ensinar esse conteúdo, estudado apenas nos cursos de doutorado por ser um conteúdo sofisticado, para alunos de graduação.

A Situação Generalizável é caracterizada por partir de uma situação simples e permitir que, paulatinamente, aquele determinado conceito possa ser desdobrado, refinado, até se chegar ao conceito mais sofisticado. É característica também desse princípio que, em situações posteriores, caso o aluno sinta necessidade, ele possa retornar e recorrer a essa situação. Desse modo, trabalha-se apenas com o essencial. O que não for essencial deve ser trabalhado como atividade ou exercício, com o intuito de que os alunos pratiquem, coloquem a mão na massa. Portanto, nesse caso, buscamos ensinar de forma ingênua e sofisticada, o que significa Medida.

Lembramos que o conceito de Medida é antigo e que as crianças estão estudando na escola, porém, sem situações que possam ser generalizadas. Por isso, proporemos situações didáticas sobre Teoria da Medida, de um modo mais coerente e adequado que, inclusive, pode ser adaptado às crianças também.

Para a construção do curso “Introdução ao conceito de Medida segundo a Sequência Fedathi”, a Sequência Fedathi foi a orientação metodológica, a guia para o desenvolvimento e organização didática das atividades do curso. Ademais, utilizamos como base os estudos trazidos no referencial teórico (capítulo 2), sendo os principais: Borges Neto (2016, 2017a, 2017b, 2018, 2019) sobre Sequência Fedathi, tanto na perspectiva das concepções de educação e com base na prática, assim como na proposta metodológica; Lima

(1995) e Bellemain e Lima (2002), cujo estudo aborda o conceito de Área e Grandeza e seu ensino, além de Lima (1991a) que versa sobre o estudo de Medida e Forma; Soares (2017) e Costa (2013) que apresentam a prática de EaD do Laboratório MultiMeios, assim como Lima (2008) e Leal (2012) que trazem o aprofundamento teórico acerca de elementos como colaboração, cooperação, interação e potencialidades das ferramentas; entre outros. A partir desses estudos desenvolvemos a proposta e o desenho didático desse curso.

Ainda no planejamento, é necessário definir quais ferramentas e com que objetivo serão utilizadas, observando, contudo, o seu pleno funcionamento e como potencializá-lo no processo educativo (LIMA, 2008). Além disso, é preciso traçar as estratégias de mediação com vistas a construção de determinado conhecimento pelo aluno, uma vez que apenas utilizar as ferramentas, sejam elas novas ou não, não garante maior qualidade na aprendizagem.

Apresentamos a seguir a proposta didática do curso ao discutir aspectos da mediação e como ela está desenhada no AVE Moodle MultiMeios. Lembramos que a organização do ambiente é dividida em unidades temáticas, com vistas a uma melhor conexão do aluno com o AVE. Vejamos a tela inicial do curso no Moodle MultiMeios.

Figura 3 – Tela de Boas-vindas

The screenshot shows the Moodle interface for the course 'Introdução ao conceito de Medida segundo a Sequência Fedathi'. The page includes a navigation menu on the left with options like 'Página inicial', 'Painel', 'Páginas do site', 'Meus cursos', 'Graduação', 'Mais...', 'Cursos', and 'Pesquisa'. The main content area displays a welcome message 'BEM-VIND@S!' and a cartoon illustration of a cowboy on a horse and a person at a computer. Below the illustration, it says 'Laboratório MultiMeios - UFC' and provides instructions: 'As atividades já começaram e só tem data para acabar... Fiquem atent@s ao cronograma! Para dúvidas e reclamações utilizem o Fórum permanente: "fala que eu te ouvo".' It also includes a link to 'Fórum permanente: "fala que eu te ouvo"' and 'TeleMeios: ambiente para webinários'.

Fonte: Moodle MultiMeios (2022).

Em cada unidade do curso no Moodle MultiMeios temos: um título – os módulos são nomeados com os seus respectivos temas; uma imagem, um GIF ou um vídeo – não

apenas para ilustrar, mas para refletir e; uma questão de partida que irá gerar a discussão a ser desenvolvida, aquilo que se pretende desenvolver, ou seja, a Tomada de Posição. Todos esses elementos devem ter ligação entre si.

A escolha dos recursos do ambiente para distribuição das atividades ou exercícios a serem realizados em cada unidade tem sempre o objetivo de os alunos se apropriarem dos conceitos a serem ensinados. Além disso, as ferramentas devem ser dispostas de forma a permitir a comunicação multidirecional e interativa, centrada na autonomia discente (BRASIL, 2007).

Foi criado o **Fórum permanente: “fala que eu te ouvo”** com a finalidade de ser um espaço para os alunos sanarem suas dúvidas entre si e com os professores, a respeito das atividades e dos conteúdos de modo geral e durante todo o curso. Nele, os estudantes poderão conversar, falar, marcar encontros síncronos, reclamar etc. E os docentes irão “escutar”.

Logo abaixo, disponibilizamos o ambiente que será utilizado para todos os Webinários que ocorrerão ao longo do curso, o AVE TeleMeios. Esse ambiente, que possui *plugin* para o Moodle MultiMeios em desenvolvimento na pesquisa de mestrado de André Santos Silva (OLIVEIRA *et. al.*, 2021), foi escolhido por proporcionar ampla possibilidade de interação e disponibilizar diversos recursos, tais como: Bate-papo, áudio, vídeo, quadro branco, entre outros e, seu diferencial, o compartilhamento de aplicativos (SANTOS, 2010). Podendo ainda ser integrado com a Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP), ambiente para *web* conferência também disponível no Moodle (SILVA *et al.*, 2021).

Destacamos que as sessões didáticas não devem ultrapassar duas horas de duração, pois, do contrário, o encontro torna-se exaustivo e menos produtivo. Por esse motivo, o planejamento foi feito com vistas a não extrapolar este tempo. Em seguida, disponibilizamos a primeira unidade do curso, **Ambientação**, ação indispensável na EaD do Laboratório MultiMeios.

A importância da ambientação, nessa proposta de EaD, está na concepção de que a plena vivência e autonomia do aluno não podem ser alcançadas se o estudante desconhecer o ambiente que utilizará. Vejamos na Figura 4 abaixo o desenho dessa primeira unidade.

Figura 4 – Unidade Ambientação

The screenshot shows a Moodle course interface. On the left, there is a sidebar with a navigation menu. The main content area is titled 'AMBIENTAÇÃO (Até XX/XX/202X)'. It features a cartoon image of Patrick Star and SpongeBob SquarePants. Below the image, there is a question: 'Vamos nos conhecer melhor e entender um pouco mais desse curso?'. The page includes a sidebar with navigation options like 'Administração do curso' and 'Material de apoio'. The main content area lists resources: 'Fórum: Apresentação', 'Material de apoio', and 'Cronograma'.

Fonte: Moodle MultiMeios (2022).

Na unidade **Ambientação** se faz necessário organizar os conteúdos, os subsídios bibliográficos, o cronograma e dispô-los aos estudantes. Detalharemos eles mais adiante. Além disso, nessa unidade disponibiliza-se o **Fórum: Apresentação** para que os alunos contem suas experiências e expectativas, possam dizer a que vieram e o que esperam. Dessa maneira, somam-se vivências, bem como aproximam-se os alunos no intuito de iniciar um espírito de comunidade, de grupo.

O **Material de apoio** é onde os estudantes encontram leituras sugeridas para maior aprofundamento do tema. Nele encontram-se dois livros: *Measure Theory*, de Halmos (1950), e *Um Estudo da Noção de Grandeza e Implicações no Ensino Fundamental*, de Bellemain e Lima (2002). Além disso, temos um texto com orientações para o Bate-papo para que os alunos compreendam o seu funcionamento e assim possam melhor explorar essa ferramenta quando forem utilizá-la no curso.

Temos, também, a disposição do **Cronograma** de atividades, postado por meio do recurso *URL* (sigla para *Uniform Resource Locator*, que em tradução livre quer dizer Localizador Uniforme de Recursos), pois é interessante que esses documentos estejam em plataformas de armazenamento na nuvem. Nesse caso específico, encontram-se no *OneDrive* da docente, vinculado ao *e-mail* institucional do Laboratório MultiMeios.

No **Webinário de chegada** faz-se o Acordo Didático. Além disso, explica-se as atividades e ferramentas disponibilizadas, de maneira curta e clara, uma vez que os alunos

poderão não ter familiaridade com esse ambiente. Assim, eles poderão melhor explorar o ambiente e melhor compreender as possibilidades comunicativas disponíveis.

Esta prática se justifica principalmente em virtude do olhar que o Laboratório MM destina ao percurso traçado pelo aprendiz, que deve ser autônomo, com vistas a conhecer a proposta de formação e a intencionalidade de cada um dos conteúdos estudados, atividades propostas e interfaces utilizadas (SOARES, 2017, p. 109).

Ainda, incentivaremos o uso das ferramentas que permitem enviar mensagem privada, mensagem em grupo e/ou a ferramenta de *e-mail*, todas dentro do ambiente *Moodle MultiMeios*. Nesse AVE os alunos conseguem ter acesso a tudo que precisam, agregados num único ambiente. Também solicitaremos o preenchimento das informações de perfil, com o intuito de possibilitar a aproximação de pessoas com base em seus interesses. Ademais, incentivaremos o uso dos recursos câmera e microfone durante os Webinários, bem como a participação e a interação com os colegas ao longo de todo o curso. Os textos explicativos dentro do ambiente são minimalistas, pois as atividades e ferramentas serão explicadas no primeiro encontro, não havendo, assim, necessidade de repetir. Partimos, agora, para a segunda unidade.

Criamos, então, a unidade **Grandeza**, onde buscaremos abordar o conceito mais genérico de Grandeza, trabalhando com o intuitivo, à medida que, no decorrer das atividades as ideias serão, pouco a pouco, refinadas.

Figura 5 – Unidade Grandeza

MoodleMM Português - Brasil (pt_br)

Importar
Reconfigurar
Banco de questões

GRANDEZA (Até XX/XX/202X)

Fonte: elaboração própria.

O que é Grandeza?

Leituras
Aqui está o livro-texto utilizado como base, [Medida e Forma](#), e uma leitura complementar sobre [Área](#).
Webinário: [O que é Grandeza?](#)
Data: DD/MM/202X - De XXh às XXh

Vídeoaula: [Áreas](#)
Webinário: [Medida de Área](#)
Data: DD/MM/202X - De XXh às XXh

Tarefa: [Exercícios](#)
Fórum: [Poste aqui as atividades](#)
Webinário: [Discussão dos exercícios](#)
Data: DD/MM/202X - De XXh às XXh

Vídeoaula: [Volume](#)
Webinário: [Medida de Volume](#)
Data: DD/MM/202X - De XXh às XXh

Fonte: Moodle MultiMeios (2022).

Na unidade **Grandeza** encontram-se as **Leituras**, contendo materiais direcionados a auxiliar o aluno na maturação, a saber: o livro utilizado como base, *Medida e Forma*, de Elon Lages Lima e um texto complementar, de Paulo Figueiredo Lima, *Considerações sobre o Ensino do Conceito de Área*. Apoiando-se em Moreira (2014), como se utiliza a Sequência Fedathi, as leituras disponibilizadas devem ajudar o aluno a desenvolver competências que o levem a refletir, a argumentar, a levantar hipóteses, ou seja, que também sejam recursos de apoio ao desenvolvimento do raciocínio matemático construído pelo discente.

A pergunta geradora da discussão **O que é Grandeza?** é a questão de partida, a ser desenvolvida. Vejamos, com detalhes, a proposta para o **Webinário: O que é Grandeza?**

Quadro 7 – Mediação da sessão didática Grandeza

GRANDEZA
Situação-problema: O que é Grandeza?
Objetivo: estudar o conceito de Grandeza e conhecer a diferenciação entre Grandezas contínuas e Grandezas discretas.
Ferramenta: TeleMeios.

Fonte: elaboração própria.

Questiona-se o que é Grandeza para, a partir disso, iniciar as discussões acerca desse conceito. Considerando o que for trazido pelos alunos, apresenta-se algumas Grandezas, isto é, dá-se alguns exemplos e faz-se os seguintes questionamentos: Qual o mais pesado? Qual o mais alto? Entre outras perguntas do tipo, conforme as respostas dos alunos. Posteriormente, indaga-se: Como definimos isso matematicamente?

Com o intuito de chegar à definição de discretas e contínuas, dá-se exemplos de Grandezas discretas e contínuas e observa-se quais são as características que cada exemplo dado tem, bem como as diferenças entre eles. Para isso, pode ser utilizado, por exemplo, perguntas do tipo: Uma *pizza* é uma Grandeza discreta ou contínua? O que estamos considerando, a *pizza* completa ou seus pedaços?

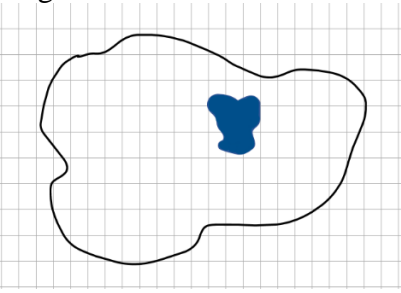
Ao trabalhar com alunos licenciados ou licenciandos em matemática partimos do pressuposto de que eles têm os conhecimentos básicos necessários para acompanhar o curso. De todo modo, com essa atividade é possível colocar os alunos numa base de conhecimento comum para que, dessa maneira, possamos partir de um ponto equilíbrio, garantindo que todos tenham condições de acompanhar. O Plateau!

Durante as discussões e atividades propostas no curso, o aluno terá a possibilidade de fazer e refazer o problema, de realizar ensaios, de errar, de levantar e elaborar hipóteses, de fazer inferências e de tirar conclusões (BORGES NETO, 2016). E, segundo Davis e Hersh (1995), é assim que a matemática é criada, propagada e compreendida. De fato, aprendemos por meio de experiências, de descobertas e da resolução de problemas. A aprendizagem é uma construção de significados pelos alunos, é o desenvolvimento de posturas, de atitudes e de comportamentos com relação aos saberes ensinados na escola (FONTENELE, 2018; SANTANA, BORGES NETO, 2003).

Na atividade seguinte temos a **Videoaula: Áreas**, por meio da ferramenta *URL*. Trata-se de uma videoaula⁶ sobre área, do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), disponível no *YouTube*. É sempre interessante inserir vídeos de qualidade.

Encontramos, na atividade seguinte, o **Webinário: Medida de Área** com a finalidade de apresentar uma atividade razoável para os estudantes fazerem medida. Assim, os docentes poderão visualizar os conceitos que os alunos já têm. Abaixo, detalhamos a proposta para essa sessão didática.

Quadro 8 – Mediação da sessão didática Medida de Área

MEDIDA DE ÁREA
<p>Situação-problema:</p> <p style="text-align: center;">Figura 6 – Área do terreno</p>  <p style="text-align: center;">Fonte: elaboração própria.</p> <p>No terreno acima a parte azul representa uma lagoa. Cláudia pretende comprá-lo para plantar. Logo, ela precisará medi-lo para saber o quanto de adubo será necessário comprar. Efetue o cálculo.</p>
<p>Objetivo: estudar o processo de medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F, isto é, comparar F com uma unidade de área e exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área.</p>
<p>Ferramentas: TeleMeios e <i>GeoGebra</i>.</p>

Fonte: elaboração própria.

Na mediação, faz-se a discussão sobre o processo de medir área, isto é, o de fixar uma superfície unitária (unidade de área) e, aos poucos, chegar à função área (generalizável), a partir da questão dada. Posteriormente, pergunta-se: Como é feita a função? Desse modo,

⁶ Disponível em: <https://youtu.be/-GmQdEpN8SY> <https://youtu.be/-GmQdEpN8SY>.

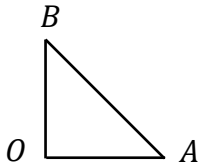
com base em Fontenele (2018), trabalharemos com a parte conceitual e, assim, o formalismo na Sequência Fedathi será introduzido de modo menos abrupto do que a simples explicitação de todo o conteúdo na lousa pelo professor, sem a participação ativa e reflexiva dos alunos. No mais, nesse momento, pode ser feita uma revisão de Integral, pois o conceito de Medida perpassa o conceito de Integral e ela pode ser vista como um caso particular, e pode-se utilizar o *GeoGebra*, *software* de geometria dinâmica.

Nessa situação, caso o aluno tente calcular a Área multiplicando a base pela altura, utilizando a malha quadriculada, serão contadas coisas a mais. Por meio de situações como essa é possível levantar discussões para ir, aos poucos, desmontando o argumento que o aluno tem de modo que se chegue ao conceito mais refinado, isto é, ao conceito generalizável de Medida.

Na ferramenta **Tarefa: Exercícios** disponibilizamos as situações-problema para os estudantes colocarem a mão na massa, pois é essencial que eles façam exercícios, uma vez que precisam pensar e refletir. Os exercícios têm o intuito de fornecer aos alunos a prática, a habilidade para estabelecer melhor compreensão e agregar mais conhecimento por meio do aprender fazendo.

Ao selecionar os exercícios, lembramos: “mais vale um conjunto reduzido de atividades, de modo que permita o aluno pensar do que um bloco de atividades de fixação” (BORGES NETO; SANTANA, 2001, p. 9). Os exercícios se encontram todos juntos, tanto sobre Comprimento, sobre Área, como sobre Volume. Os alunos os farão à medida que conseguirem.

Quadro 9 – Exercícios para os alunos colocarem a mão na massa

Atividade 03: EXERCÍCIOS
Ferramenta: Tarefa.
<p>1) (CARAÇA, 1951) Seja o triângulo retângulo BOA isósceles, isto é, em que $OA = OB$. Encontre a medida da hipotenusa AB tomando como unidade o cateto AO.</p> <p style="text-align: center;">Figura 7 – Triângulo BOA</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">Fonte: Caraça (1951).</p> <p>2) Deduzir as fórmulas de Área do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio.</p> <p>3) Deduzir as fórmulas de Volume do cubo, paralelepípedo, cilindro, cone, esfera.</p> <p>4) (GUIDORIZZI, 2001) Calcule o Volume do sólido cuja base é a região $4x^2 + y^2 \leq 1$ e cujas seções perpendiculares ao eixo x são semicírculos.</p>
Discussão dos exercícios
Ferramenta: TeleMeios (Webinário).

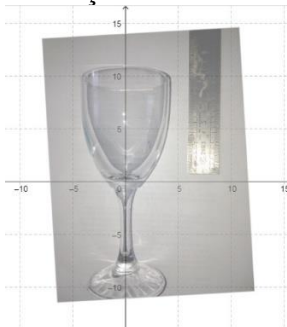
Fonte: elaboração própria.

Criamos o **Fórum: Poste aqui as atividades** para os próprios alunos postarem suas soluções. Para isso, os alunos poderão inserir equações matemáticas, fotos, vídeos, áudios etc. explicando as ideias que delinearão a sua solução. Feito isso, com o intuito de promover interação, proporemos nesse fórum que os alunos corrijam as soluções uns dos outros, com a indicação de nomes pelo(s) professor(es).

Prosseguindo, com o objetivo de clarear as dúvidas que, possivelmente, irão surgir na tentativa de solucionar essas questões e de discutir as ideias diversificadas que, provavelmente, aparecerão no fórum, teremos o **Webinário: Discussão dos exercícios** para realizar um fecho das atividades trabalhadas com os estudantes a respeito de Medida de Área, em um momento síncrono. Nesse momento, por exemplo, pode-se convidar um aluno para apresentar a solução encontrada.

Do mesmo modo explora-se o conceito de Volume. Disponibilizamos uma **Videoaula⁷: Volume**, também do PAMEN/IMPA, por meio de uma *URL*. Em seguida temos o **Webinário: Medida de Volume** para iniciarmos a discussão a respeito.

Quadro 10 – Mediação da sessão didática Medida de Volume

MEDIDA DE VOLUME	
Situação-problema:	
<p>Figura 8 – Volume de uma taça</p>  <p>Fonte: <i>GeoGebra</i> (2022).</p>	
Como calcular o Volume de uma taça?	
Objetivo: estudar o processo de medir a quantidade de espaço que um sólido S ocupa, isto é, comparar S com uma unidade de Volume e exprimir quantas vezes o sólido S contém a unidade de medida.	
Ferramentas: TeleMeios e <i>GeoGebra</i> .	

Fonte: elaboração própria.

Para iniciar a discussão sobre Volume, questionaremos de que modo podemos calcular o Volume de uma taça. A partir dos caminhos que os estudantes trouxeram, a mediação será feita de modo a fazerem-lhes perceber que o processo de medir Volume é o mesmo de medir Área, questionando: Qual a semelhança entre calcular o Volume dessa taça e calcular a Área que fizemos anteriormente? O que muda? Assim, resgatando e recorrendo ao que já foi estudado, vamos avançando mais.

Ou seja, os alunos devem começar a enxergar que a ideia é tomar algo como unidade padrão e contar. E, também, introduzindo a aplicação da Integral para o cálculo de

⁷ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=lwyICLN0yI8>.

Volumes, questionaremos: Qual a diferença entre fazer Integral e fazer os cálculos na mão? Isso para que os alunos percebam que a Integral é uma ferramenta para calcular Volume. Novamente, a parte conceitual aqui é tratada com base na Teoria da Medida, com situações generalizáveis, podendo ser utilizada em qualquer nível, bastando, para isso, fazer as adaptações necessárias/adequadas.

As tarefas sobre Volume já foram dispostas anteriormente e o professor continuará mediando as soluções postadas no fórum, não necessariamente nesse momento, mas de acordo com o avanço dos alunos. Caminharemos, então, para a última unidade do curso.

Figura 9 – Unidade Medida

Fonte: Moodle MultiMeios (2022).

Na unidade final, **Medida**, iniciamos com o **Fórum: O que é Medida?** Vejamos a proposta desse fórum com mais detalhes.

Quadro 11 – Mediação da sessão didática Medida

MEDIDA
Situação-problema: O que você acha que significa Medida?
Objetivo: conceituar Medida.
Ferramenta: Fórum.

Fonte: elaboração própria.

Para iniciar a discussão temos esse questionamento sobre o que os alunos acham que significa Medida. Assim, eles trarão suas intuições e/ou suas soluções que serão mediadas pelo(s) professor(es) e discutirão entre si. Além de que, com ela, poderemos visualizar a compreensão dos estudantes a respeito do tema, levando o fecho dessa discussão para o **Bate-papo: Vamos discutir?** Esse momento é importante, pois é um momento de reflexão, em grupo, após o estudo de um determinado assunto, no caso do ensino a distância, em um momento síncrono. Vejamos ele abaixo.

Quadro 12 – Mediação para o fecho da discussão de Medida em um Bate-papo

Atividade 06: FECHO DA DISCUSSÃO
Situação-problema: O que podemos identificar como característica comum nas situações estudadas?
Objetivo: chegar a uma ideia geral de Medida.
Ferramenta: Bate-papo.

Fonte: elaboração própria.

Escolhemos o Bate-papo em vez do Webinário por alguns motivos, tais como: os alunos precisarão ler e escrever, não ficarão só ouvindo. Isso significa que o aluno precisará interagir, precisará ficar atento e poderá refletir. Além disso, caso ele não compreenda algo, poderá ler novamente, quantas vezes quiser. Outro ponto positivo é que eles se sentirão mais à vontade para interagir, pois não há o fator de interromper quem estará falando.

O questionamento apresentado acima será o tema para iniciar a discussão. Além desse, com base em Leal (2012), é necessário delinear algumas intervenções a serem feitas durante o bate-papo. Assim, explora-se os principais temas, tais como: Como mediríamos no \mathbb{R}^4 ? Como fizemos para medir Área e Volume? O que mudou e o que não mudou de um para o outro? Como definimos isso, então? Com a finalidade de fazer os alunos perceberem que um se reduz ao outro e que o conceito estudado pode ser utilizado em qualquer espaço. Ou seja, utilizar situações que eles possam enxergar em outros contextos. Poderemos, ainda, acrescentar mais temas extraíndo-os do Fórum que será respondido.

Destacamos que a formalização do conceito de Medida dependerá do nível dos alunos, com base no que será estudado, no aprofundamento que será dado aos conteúdos. Ou seja, generalizar-se-á até o ponto que se pode generalizar. De qualquer modo, se chegará a

uma definição precisa desse conceito e, caso os alunos venham a fazer um curso mais a frente, a mudança estará apenas no refinamento da linguagem.

O tratamento usualmente dado pelos professores e pelos textos escolares ao conceito de Área na escola é o de fixar a superfície unitária de uma vez por todas – muitas vezes, sem compreender seu significado e sua escolha arbitrária; identificar a Área e calculá-la. Ou, ainda, o enfoque é dado no estudo das unidades, no sistema métrico decimal e nas conversões de unidades (LIMA, 1995). Do mesmo modo, o tratamento comumente dado ao conceito de Volume é o de reconhecer a fórmula e aplicá-la; de manipular expressões algébricas seguido da utilização da fórmula; e de transformar unidades (MORAIS; BELLEMAIN; LIMA, 2014).

Além disso, em geral, no cálculo de Área já é tomado, logo no início, um quadrado para a unidade padrão. Mas poderia ser um retângulo, por exemplo. A arbitrariedade dessa escolha não é explorada. E, quando o aluno vai para a graduação, a disciplina de Cálculo I trabalha com retângulos (que não são quadrados, no caso da Integral). Nesse caminho se perde a generalidade que se poderia ter. Os conhecimentos anteriormente obtidos pelos alunos são abandonados em vez de se ter uma abordagem mais adequada no qual se possa utilizá-los para acrescentar e avançar mais.

De maneira oposta, a abordagem de ensino aqui proposta tem a finalidade de possibilitar a construção conceitual de Área e de Volume com base na Teoria da Medida e segundo a Sequência Fedathi. O conceito de área, enquanto matemática, consiste na tarefa de construir funções áreas definidas em classes cada vez maiores de subconjuntos do plano. Esse conceito vem sendo estendido para o conceito mais geral de Medida em conjuntos abstratos, constituindo a Teoria da Medida. É ela e a Sequência Fedathi que nos dá a trilha para a abordagem pedagógica desses conceitos (LIMA, 1995).

A proposta foi criada para que o aluno venha a conhecer e chegar a uma definição precisa dos conceitos Comprimento, Área, Volume e de suas medidas, com clareza e propriedade. Para isso, a proposta parte de Grandeza e expande o conceito de pesar, medir, contar, dando uma estrutura matemática e sempre explorando o conceito de Medida.

Nosso trabalho possibilitou uma reorganização dos conteúdos de Medida, constituído pelos conceitos Grandeza, Medida de Área e Medida de Volume, dando uma abordagem didática diferenciada daquela comumente vista em sala de aula. O que foi possível, sobretudo, por meio da Situação Generalizável. É esse princípio e, portanto, a abordagem do conceito de Medida aqui proposta que permite a sua utilização em qualquer nível de ensino, embora o nosso foco esteja na graduação.

Observamos também que a Sequência Fedathi permite uma construção conceitual e progressiva, com participação ativa do aluno durante todo o (per)curso. Essa construção progressiva, consequência da Situação Generalizável, refere-se a não anular ou abandonar o que foi estudado outrora, mas sim resgatá-lo e, com a possibilidade de o aluno recorrer a ele quando tiver necessidade, acrescentar, avançar e agregar mais conhecimento.

Foi criado, por se tratar de uma proposta para a EaD, o desenho didático no AVE Moodle MultiMeios à medida que se desenvolvia a proposta. A partir dela identificamos que a escolha das ferramentas nos ambientes virtuais deve levar em consideração, principalmente, a interação, a exemplo do AVE TeleMeios, seguido da ferramenta Fórum, que pode ser intensificada por meio da mediação do professor, como foi proposto aqui. Pois, como é um curso a distância e como utilizamos a Sequência Fedathi, foi colocado, ao máximo possível, momentos que os alunos pudessem “falar” para que eles sejam agentes ativos e não passivos, no qual eles apenas assistem e, em seguida, fazem determinada atividade.

Foi possível também a criação de figuras para a inserção no ambiente, visto a necessidade e a intenção de causar reflexão sobre o conceito de Medida. Produzimos, ainda, material didático gerado pelas situações-problema e pelas sessões didáticas dos conceitos de Grandeza, de Área, de Volume e de Medida, que constituem a proposta didática. Outro resultado, de caráter inovador para o PPGE/UFC, é a divulgação dessa pesquisa e de seu desenvolvimento em *blog* (no *Blog* da Fernanda⁸) no formato *e-book*.

Destacamos, no entanto, que na concepção da EaD do MultiMeios os cursos têm flexibilidade para alterações no seu decorrer, caso haja necessidade. Porém, no primeiro dia de curso tudo fica disponível, apenas com datas para acabar. Pois, embora o curso tenha uma disposição linear de atividades, uma vez que temos tendência a seguir as atividades na ordem como estão dispostas no ambiente, o aluno pode iniciar de onde quiser e achar melhor. No capítulo seguinte indica-se o que consideramos como a maior contribuição dessa pesquisa, quais lacunas desejamos preencher e apresentamos as perspectivas futuras.

⁸ Endereço para acesso: <http://blogs.multimeios.ufc.br/fernandacarmo>.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo buscou contribuir com as discussões cada vez mais imprescindíveis na modalidade EaD e, principalmente, diminuir a lacuna de estudos referentes ao ensino de matemática em ambientes virtuais, com delimitação para o ensino do conceito de Medida baseado na Sequência Fedathi. Além disso, contribui com o desenvolvimento dessa metodologia de ensino e pesquisa, mostrando as vantagens de seu uso seja para o planejamento, para o desenho de um curso no AVE, para orientar a prática pedagógica do professor, bem como para mostrar uma trilha de investigação científica. Não só a partir de pressupostos teóricos, que muito contribuem para a realização de um estudo, mas também com suporte em práticas vivenciadas e em outras pesquisas, principalmente, na EaD com aporte na Sequência Fedathi.

Sendo a Sequência Fedathi uma proposta de formação, não se sugere a reaplicação fiel da proposta aqui desenvolvida. Ao contrário, esse trabalho pretende incutir reflexões acerca do ensino de matemática e do ensino a distância, podendo servir como trilha referencial para a organização de outros cursos, por outros profissionais docentes, em outros ambientes virtuais e até mesmo no ensino presencial, visto que a proposta didática não mudaria. No entanto, cada experimento ocorre com determinadas variáveis, assim, o professor pode e deve adaptar às particularidades de sua realidade.

De cunho teórico, esta pesquisa perpassou pelas etapas de concepção, escolha de ferramentas, produção de material, desenho didático no AVE *Moodle MultiMeios*, até chegar ao desenvolvimento de uma proposta para o ensino do conceito de Medida na EaD utilizando a Sequência Fedathi e, assim, superando a problemática no modelo de ensino tradicional que se situa nessa modalidade e no ensino de matemática. Dessa forma, a ênfase está em tópicos relacionados a criação de um ambiente de ensino favorável a investigação e a construção conceitual, a partir de princípios que tornam a ação docente questionadora, dialógica e reflexiva.

Percebeu-se que, com a utilização da metodologia de ensino Sequência Fedathi, ainda no planejamento é fundamental identificar a essência do conteúdo, reorganizá-lo e ter os objetivos de cada sessão didática, bem como um objetivo geral, bem definidos. Isto porque a Tomada de Posição só pode ser elaborada se o professor souber qual é o seu ponto de partida e qual é o seu ponto de chegada. Outro aspecto importante é que a escolha das ferramentas e recursos no AVE sempre deve levar em consideração, primordialmente, o aspecto de interação, que é o caso do TeleMeios e de outra ferramenta bastante recorrente nessa

proposta, o Fórum, que pode ficar ainda mais interativo com a mediação do professor, como foi proposto aqui.

Também, é preciso cautela na escolha de cada um dos exercícios, sempre tendo em vista o porquê de disponibilizá-lo ao estudante, assim como nas mídias que serão inseridas nos ambientes virtuais, uma vez que elas não têm a intenção de apenas enfeitar, mas sim de causar reflexão. Além disso, é possível perceber que é a mediação do professor que fará toda a diferença, independente do ambiente, da tecnologia, dos meios e dos recursos a se utilizar.

Destacamos que as tecnologias e os ambientes virtuais estão em constante desenvolvimento, mudança e aperfeiçoamento e, por isso, demandam análises permanentes no que diz respeito a ação educativa nos diferentes níveis de ensino. Desse modo, precisam de um olhar permanente e crítico de pesquisadores na busca por melhorias, principalmente, no que diz respeito à interação e à aprendizagem, com foco na autonomia e na construção do conhecimento pelo próprio estudante.

Como perspectiva futura, pretendemos analisar essa proposta a partir de sua vivência. Isto é, como segunda parte dessa pesquisa, almejamos aplicá-la por meio de uma pesquisa de campo, a fim de testá-la, avaliá-la e ajustá-la, na intenção de continuar e aprofundar o que até aqui foi desenvolvido.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Viviane Silva de. **A Sequência Fedathi e o Ambiente Virtual de Ensino Telemeios na determinação da equação de uma reta**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- BARBOSA, Jéssica de Castro. **Raízes: concepções teóricas, pedagógicas e tecno-práticas de um Objeto Educacional Digital (OED) baseado na Sequência Fedathi**. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.
- BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. **Um estudo da noção de Grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Natal: SBHMata, 2002.
- BEZERRA, Antonio Marcelo Araújo. **A formação matemática do pedagogo: a relação entre o raciocínio matemático e as estratégias na solução de problemas matemáticos**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.
- BEZERRA, Antonio Marcelo Araújo. A Sequência Fedathi na perspectiva da teoria das situações didáticas de Brousseau. *In*: BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi: interfaces com o pensamento pedagógico**. Fortaleza: CRV, 2019, p. 203-214.
- BIANCHETTI, Roberto Gerardo. **Modelo neoliberal e políticas educacionais**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2001.
- BORGES NETO, Hermínio; CAPELO BORGES, Suzana Maria. As tecnologias digitais no desenvolvimento do raciocínio lógico. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 13, n. 24, p. 77-87, jan./jun. 2007.
- BORGES NETO, Hermínio; TORRES, Antonia Lis de Maria Martins; ARAÚJO, Ana Cláudia Uchôa; MOREIRA, Marília Maia (org.). **EaD no estado do Ceará: história, memória e experiências formativas I**. Curitiba: CRV, 2021.
- BORGES NETO, Hermínio. **O protagonismo do professor**. Redenção: UNILAB – Laboratório de Pesquisa MultiMeios/UFC, 2020. 20 slides.
- BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi além das ciências duras**. Curitiba, PR: CRV, 2017b.
- BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi: fundamentos**. Curitiba: CRV, 2018.
- BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi: interfaces com o pensamento pedagógico**. Curitiba: CRV, 2019.
- BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi no ensino de matemática**. Curitiba: CRV, 2017a.

BORGES NETO, Hermínio; SANTANA, José Rogério. Fundamentos epistemológicos da Teoria de Fedathi no ensino de matemática. *In: XV EPENN – Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste: Educação, Desenvolvimento Humano e Cidadania. Anais [...].* São Luís (MA), 2001.

BORGES NETO, Hermínio. Uma classificação sobre a utilização do computador pela escola. **Educação em Debate**, Fortaleza, ano 21, v. 1, n. 27, p. 135-138, 1999.

BORGES NETO, Hermínio. **Uma proposta lógico-dedutiva-constructiva para o ensino de Matemática**. 2016. Tese (Apresentada para o cargo de professor titular) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

BRASIL. Decreto nº 5.800, de 8 de junho de 2006. Dispõe sobre o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB. **Diário Oficial da União**, Poder Executivo, Brasília, DF, 9 jun. 2006.

BRASIL. Decreto nº 9.057, de 25 de maio de 2017. Regulamenta o art. 80 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Poder Executivo, Brasília, DF, 26 mai. 2017.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Poder Legislativo, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação a Distância. **Referenciais de qualidade para educação superior a distância**. Brasília, 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/legislacao/refead1.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2020.

BRASIL. Portaria nº 343, de 17 de março de 2020. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do Novo Coronavírus – COVID-19. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 18 mar. 2020. Seção 1, p. 39.

CAMPOS NETO, Francisco Herculano; BORGES NETO, Hermínio; TORRES, Antônia Lis de Maria Martins; MENDES, Débora Letícia Moreira; JOAQUIM, Davide Carlos; FELIPE, Letícia Pereira; LEITE, Ana Caroline Rocha de Melo; GIRÃO, Virgínia Cláudia Carneiro. The application of the Fedathi Sequence in teaching human Anatomy: a successful change of attitude. **International Journal of Development Research**, v. 11, n. 11, p. 51924-51929, 2021. Disponível em: <https://www.journalijdr.com/sites/default/files/issue-pdf/23321.pdf>. Acesso em: 09 fev. 2022.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Biblioteca Cosmos, 1951.

CARMO, Fernanda Maria Almeida do; FAUSTINO, José Airton de Oliveira; LIMA, Maria Vanísia Mendonça de; FELÍCIO, Milínia Stephanie Nogueira Barbosa; BORGES NETO, Hermínio; CERQUEIRA, Gilberto Santos. The Didactic Contract from the Perspective of the Theory of Didactical Situations: An Integrative Review. **International Journal for Innovation Education and Research**, v. 8, n. 7, p. 123-134, 2020. Disponível em: <https://www.ijer.net/ijer/article/view/2460>. Acesso em: 10 mar. 2021.

CARVALHO, Elaine de Farias Giffoni de; SCIPIÃO, Lara Ronise de Negreiros Pinto; ALMEIDA NETO, Carlos Alves de; ANDRADE, Wendel Melo; MARQUES, Kelly Cristina Vaz de Carvalho; SANTOS, Cleidivan Alves dos; CERQUEIRA, Gilberto Santos; SANTOS, Maria José Costa dos. Subsidiating the training of the mathematics teacher. **International Journal of Development Research**, v. 11, n. 3, p. 45173-45178, mar. 2021. Disponível em: <https://www.journalijdr.com/subsidiating-training-mathematics-teacher>. Acesso em: 03 fev. 2022.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de (coord.). **Matemática: ensino Fundamental**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

COSTA, Zayra Barbosa. **O processo de avaliação na disciplina Educação a Distância do Curso de Pedagogia da Universidade Federal do Ceará**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. Portugal: Gradativa, 1995.

FELÍCIO, Milínia Stephanie Nogueira Barbosa; MENEZES, Daniel Brandão; BORGES NETO, Hermínio. Formação Fedathi Generalizável: metodologia de formação de professores. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, n. 19, p. 24-40, 2020. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2906>. Acesso em: 09 fev. 2022.

FERREIRA, Flávia de Carvalho. Contraexemplo. *In*: BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi: fundamentos**. Curitiba: CRV, 2018, p. 49-54.

FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. **Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma análise da mediação docente em aulas de Álgebra Linear**. 2018. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

GEOGEBRA. **T&M. 3 Volume of a Wineglass**. Áustria, 2022. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/pkbz5pur>. Acesso em: 14 fev. 2022.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo: vol. 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HAGUETTE, Teresa Maria Frota. **Metodologias qualitativas na sociologia**. 11. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

HALMOS, Paul Richard. **Measure Theory**. New York: Springer, 1950. Disponível em: https://59clc.files.wordpress.com/2012/05/paul_r-_halmos_measure_theory_graduate_texts_inbookfi-org.pdf. Acesso em: 05 jan. 2022.

INSTITUTO DE PESOS E MEDIDAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Conceitos: Metrologia e Qualidade**. Disponível em:

<https://www.ipem.sp.gov.br/index.php/cidadao/conceitos-metrologia-e-qualidade>. Acesso em: 24 set. 2021.

JUCÁ, Adelmir de Menezes. **Construções Geométricas no Ambiente Virtual de Ensino Telemeios com mediação na Sequência Fedathi**. 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

LEAL, Viviane Pereira Lima Verde. **Uma proposta pedagógica para uso do bate-papo virtual no ensino**. 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 1991a.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1991b.

LIMA, Paulo Figueiredo. Considerações sobre o Ensino do Conceito de Área. *In: Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática*, 1995, Recife. **Anais [...]**. Recife, 1995.

LIMA, Tereza Cristina Batista de. **Ação educativa e tecnologias digitais: análise sobre os saberes colaborativos**. 2008. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008.

LIMA, Tereza Cristina Batista de. Novas tecnologias: a sociedade do conhecimento e as novas formas de pensar a educação. *In: ALBUQUERQUE, Luiz Botelho (org.). Currículos contemporâneos: formação, diversidade e identidades em transição*. Fortaleza: Editora UFC, 2005, p. 487-498.

MELO, Virlane Nogueira. **Sequência Fedathi e Análise de Erros aplicadas ao ensino de frações**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

MENDONÇA, Adriana Ferreira. Situação Adidática. *In: BORGES NETO, Hermínio. Sequência Fedathi: fundamentos*. Curitiba: CRV, 2018, p. 23-26.

MENEZES, Daniel Brandão. **O ensino do cálculo diferencial e integral na perspectiva da Sequência Fedathi: caracterização do comportamento de um bom professor**. 2018. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

MOHER, D.; LIBERATI, A.; TETZLAFF, J.; ALTMAN, D. G. Principais itens para relatar Revisões sistemáticas e Meta-análises: a recomendação Prisma. Tradução de Taís Freire Galvão e Thais de Souza Andrade Pansani. Brasília: **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, 24(2), abr-jun 2015, p. 335-342. Título original: Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses: the PRISMA Statement.

MOODLE. **Sobre o Moodle**. Austrália, 2020. Disponível em: https://docs.moodle.org/38/en/About_Moodle. Acesso em: 10 mai. 2020.

MOODLE MULTIMEIOS. **Introdução ao conceito de Medida segundo a Sequência Fedathi**. Fortaleza, 2022. Disponível em: <https://hbn.multimeios.ufc.br/moodle/course/view.php?id=89>. Acesso em: 07 fev. 2022.

MORAES, Mariza Silva de. **Cotejo didático-organizacional entre as plataformas de ensino**: Moodle, Teleduc e Telemeios para a implementação da licenciatura a distância em Letras Italiano, na Universidade Federal do Espírito Santo. 2013. Relatório de Pós-Doutorado – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

MORAIS, Leonardo Bernardo; BELLEMAIN; Paula Moreira Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. Análise de situações de volume em livros didáticos de matemática do ensino médio à luz da teoria dos campos conceituais. **Educ. Matem. Pesq.**, v. 16, n. 1, p. 25-46, 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/15278>. Acesso em: 18 fev. 2022.

MOREIRA, Marília M.; JOYE, Cassandra R.; ARAÚJO, Ana Cláudia U.; BORGES NETO, Hermínio. A Sequência Fedathi como transposição didática na produção de material didático online: o caso da disciplina cálculo matemático. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO SUPERIOR A DISTÂNCIA, 2018, Natal. **Anais [...]**. Natal: SEDIS-UFRN, 2018. Disponível em: https://esud2018.ufrn.br/wp-content/uploads/185158_1_ok.pdf. Acesso em: 07 jul. 2020.

MOREIRA, Marília Maia. **Análise da visão do professor-tutor sobre a adequabilidade do Material Didático de matemática à luz da Sequência Fedathi**: o caso da licenciatura em matemática do IFCE. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

NASSERALA, Alessandro Mendonça. **Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na Sequência Fedathi**: o caso da Integral Imprópria. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

NUNES, Bruna Marques Barreto; SOARES NETO, Josaphat; UCHÔA, Francisco Ewerton de Paula; FORTE; Guilherme Aguiar; PIMENTA, Helder Bindá; BARRETO, João Erivan Façanha; TEIXEIRA, Claudio Silva; SILVA, Ivan do Nascimento da; CERQUEIRA, Gilberto Santos. Sequence FEDATHI and TBL (Team Based Learning) improve the learning of human anatomy. **FASEB**, v. 34, abr. 2020. Disponível em: <https://faseb.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1096/fasebj.2020.34.s1.08982>. Acesso em: 10 mar. 2021.

OLIVEIRA, Vinicius Cardoso; SILVA, Milena Borges de Lima; SILVA, André Santos; BORGES NETO, Hermínio. Integração do software TeleMeios com o ambiente Moodle no contexto educacional. **Revista Encontros Universitários da UFC**, v. 6, n. 2, 2021. Disponível em: <http://periodicos.ufc.br/eu/article/view/74531>. Acesso em: 02 mar. 2022.

PEREIRA, Viviane de Oliveira. **Bate-papo na internet**: algumas perspectivas educativas. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2004.

PINHEIRO, Ana Cláudia Mendonça. **A mediação docente na construção do raciocínio geométrico de alunos da licenciatura em matemática na disciplina Desenho Geométrico**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008.

PINHEIRO, Ana Cláudia Mendonça. A mediação. *In*: BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi**: Fundamentos. Curitiba: CRV, 2018, p. 37-47.

RIPARDO, Orlando Richard Lopes; OLIVEIRA, Gabrielly de Sousa; MENEZES, Daniel Brandão. Curso preparatório matemática básica CIMENG – Proposta do ensino da matemática básica para ingressos em graduações de exatas. **Atlante**: Cuadernos de Educación y Desarrollo, jun. 2020. Disponível em: <https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/06/matematica-basica.html>. Acesso em: 17 ago. 2020.

RODRIGUES, Iliane Maria Pimenta. **Sequência Fedathi e Aprendizagem Cooperativa no Ensino de Matemática**: reflexões metodológicas sobre a postura docente. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

SAVIANI, Dermeval. **História das ideias pedagógicas no Brasil**. 4. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2013.

SANTANA, Ana Carmem de Souza. Mão no Bolso: postura, metodologia ou pedagogia? *In*: BORGES NETO, Hermínio (org.). **Sequência Fedathi**: fundamentos. Fortaleza: CRV, 2018, p. 15-21.

SANTANA, Ana Carmen de Souza. **Uma proposta de ciclos formativos em Educomunicação baseados na práxis fedathiana**: o case do CRID. 2019. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

SANTANA, José Rogério; BORGES NETO, Hermínio. Sequência Fedathi uma proposta de mediação pedagógica na relação ensino/aprendizagem. *In*: VASCONCELOS, José Gerardo (org.). **Filosofia, Educação e Realidade**. Fortaleza: Edições UFC, 2003.

SANTOS, André Silva; ARAÚJO, Carlos Henrique Delmiro de; FAUSTINO, José Airton de Oliveira; FELÍCIO, Milínia Stephanie Nogueira Barbossa; MENEZES, Daniel Brandão; BORGES NETO, Hermínio. Fedathífico – *Software* gerenciador de trabalhos científicos baseado na Sequência Fedathi. *In*: ENCONTROS CIENTÍFICOS, 2019, Fortaleza. **Anais [...]**. Fortaleza: Universidade de Fortaleza – UNIFOR, 2019. Disponível em: <https://uol.unifor.br/oul/conteudosite/?cdConteudo=9709307>. Acesso em: 29 set. 2020.

SANTOS, Javilane Almada dos. **TeleMeios**: Ferramentas Interativas para o Ensino a Distância. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

SANTOS, Joelma Nogueira dos; BORGES NETO, Hermínio; PINHEIRO, Ana Cláudia Mendonça. A origem e os fundamentos da Sequência Fedathi: uma análise histórico-conceitual. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 6, n. 17, p. 6-19,

2019. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/1074>. Acesso em: 04 fev. 2022.

SANTOS, Maria José Costa dos. A formação do professor de matemática: metodologia sequência fedathi(sf). **Revista Lusófona de Educação**, n. 38, p. 81-96, 2017.

SANTOS, Maria José Costa dos. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

SILVA, Milena Borges de Lima; OLIVEIRA, Vinicius Cardoso; SILVA, André Santos; BORGES NETO, Herminio. TeleMeios integrado a RNP como diferencial na educação. **Revista Encontros Universitários da UFC**, v. 6, n. 2, p. 1408-1408, 2021. Disponível em: <http://periodicos.ufc.br/eu/article/view/74531>. Acesso em: 04 fev. 2022.

SOARES NETO, Josaphat Santos; SANTOS, Maria Jose Costa dos; BORGES NETO, Herminio; LUCENA, Jalles Dantas de; MORANO, Domingos Antônio Clemente Maria Silvio; FREITAS, Francisco Orlando Rafael; CASTRO FILHO, Luiz Alexandre Porto; CERQUEIRA, Gilberto Santos. Fedathi Sequence a teaching tool for the teaching of Anatomy of the sensory system. **FASEB**, v. 33, abr. 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1096/fasebj.2019.33.1_supplement.606.25. Acesso em: 10 mar. 2021.

SOARES NETO, Josaphat; SANTOS, Maria José Costa dos; CERQUEIRA, Gilberto Santos; SOUZA, Emmanuel Prata. A Sequência Fedathi e o uso de tecnologias digitais 3D como recursos metodológicos para o ensino de anatomia humana: uma revisão integrativa. **Research, Society and Development**, v.6, n. 10, p. 1-24, 2020. Disponível em: <https://www.rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/8141>. Acesso em: 09 fev. 2022.

SOARES, Raianny Lima. **A prática de Educação a Distância desenvolvida pelo Laboratório de Pesquisa MultiMeios: diálogos com a Sequência Fedathi**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

SOUSA, Francisco Edison Eugenio de. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. 2015. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

SOUSA, Francisco Edison Eugenio de; VASCONCELOS, Francisco Herbert Lima; BORGES NETO, Hermínio; LIMA, Ivoneide Pinheiro de; SANTOS, Maria José Costa dos; ANDRADE, Viviane Silva de (org.). **Sequência Fedathi: uma Proposta Pedagógica para o Ensino de Ciências e Matemática**. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

TORRES, Antonia Lis de Maria Martins; BORGES NETO, Hermínio. A perspectiva de educação aberta desenvolvida pelo Laboratório de Pesquisa MultiMeios/Faced/UFC. In: CAVALCANTE, Maria Juraci Maia; HOLANDA, Patrícia Helena Carvalho; TORRES, Antonia Lis de Maria Martins (org.). **Tecnologias da Educação: Passado – Presente – Futuro**. Fortaleza: Edições UFC, 2018, p. 79-93.

TORRES, Antonia Lis de Maria Martins. **Laboratório de Multimeios entre gigas e megabytes: (re)criando percursos formativos**. Fortaleza: Edições UFC, 2018.

VASCONCELOS, Cleiton Batista. **Uma abordagem natural para Anéis de Dedekind.** 1984. Dissertação (Pós-Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1984.