A INTUIÇÃO NA SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Francisco Regis Vieira Alves [1]
Endereço: Rua Monsenhor Otávio de Castro, nº 21,ap. 402, CEP: 60.150-050
fregis@etfce.br

Hermínio Borges Neto [2]
Endereço: Rua Leonardo Mota, nº 988, apt. 500, CEP: 60.170-040
hermínio@ufc.br

RESUMO

Resumo Neste trabalho, pretende-se discutir aspectos filosóficos, psicológicos e matemáticos sobre o papel da intuição no ensino/aprendizagem de Matemática. Para tanto, identificam-se diversos autores que apontam elementos característicos e essenciais desta forma de raciocínio; dá-se ênfase, todavia, às concepções do filósofo Mário Bunge. Tanto ele como os outros pensadores consultados sustentam a possibilidade de manifestação de formas e níveis variados desta faculdade psíquica. Em seguida, busca-se adequar as categorias da intuição aos níveis da Sequência Fedathi – (SF), por meio de exemplificações e do uso particular do conceito matemático de progressões aritméticas – (PA). A escolha deste conceito se justifica a partir do tratamento conceitual deficiente encontrado nos livros didáticos do ensino médio. Finalmente, após a apresentação desta proposta, espera-se fornecer algumas reflexões e implicações didático-pedagógicas ao professor de Matemática em formação.

Palavras-Chave: Sequência Fedathi, Intuição, Ensino e Conhecimento matemático

ABSTRACT

This work aims at discussing philosophical, psychological and mathematical aspects on the role of the institution concerning mathematics teaching and learning. To achieve this objec-tive, we identify several authors who point at special and essential elements of this way of thinking; however emphasis is given to the concept of philosopher Bunge (1996). Bunge, as well as other philosophers we referred to, supports the possibility of manifestation of varied ways and levels of this psychic faculty. Then, we seek to adapt the institution categories to the Fedathi Sequence levels, by means of exemplifications and the particular use of arithmetic progress mathematical concept. The choosing of this concept is justified by the deficient con-ceptual treatment found on text-books of High School. Finally, after presenting our purpose, we hope to have provided some didactic-pedagogical reflection and implication to those in the process of becoming a math teacher.

Keywords: Fedathi sequence, Intuition, Mathematical knowledge.

[1] Licenciado e Bacharel em Matemática – UFC, Mestre em Matemática Pura e Mestre em Educação com ênfase no ensino de Matemática. Doutorando em Educação com ênfase no ensino de Matemática em nível superior – UFC e professor do curso de Licenciatura em Matemática do IFET/CE.

[2] Mestre em Matemática Pura, Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Pós-doutorado em Educação Matemática na Universidade Paris V e coordenador do programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará – UFC.

1. INTRODUÇÃO

Intuição matemática [3] sempre foi assunto que inspirou as mais profundas reflexões, os mais intensos debates e questionamentos relacionados ao seu papel e à espécie de ligação que a mesma possibilita entre homem e objeto matemático.

De fato, matemáticos (KLEIN, 1893; HA-DAMARD, 1945; POINCARÉ, 1899, 1904; POLYA, 1945; RUSSELL, 1910) e filósofos (BUNGE, 1996; BERGSON, 1911; LAKATOS, 1978; OTTE, 1993; RUSSELL, 1921; TOULMIN, 1958) debruçaram-se sobre várias questões intrigantes, relacionadas à intuição, e parte destas questões, ainda hoje, suscitam profícuas implicações para o ensino/aprendizagem de Matemática. (FISCHBEIN, 1987; TALL, D & VINNER, S. 1981)

Observamos certa desconfiança generalizada entre aqueles que se detinham na investigação de natureza filosófica, psicológica e, por que não dizer matemática. Tal suspeita se referia, por exemplo, à natureza do conhecimento matemático, obtido por meio da intuição. Neste aspecto, Russell (1910, pg. 13) explica que intuição conduz apenas a *crenças* e não à *certeza*, quando declarava que *instinto, intuição ou insight, é o que primeiro conduz às crenças e, subsequentemente, a razão confirma ou refuta.* Numa posição contrária, encontramos outros filósofos para quem *a verdade matemática é fundada na intuição, não na lógi-ca, não na prova.* (OTTE, 1993, p. 283)

Na comunidade dos matemáticos, é antiga a discussão em torno da credibilidade atribuída ao conhecimento matemático, obtido por meio deste *gênero de fenômeno psíquico* (BUNGE, 1996, p. 191) que denominamos intuição. Neste contexto, o historiador matemático Ivor Grattan Guiness lembra que, entre os matemáticos, o lugar da intuição no pensamento matemático, foi outro tema de debate. De fato,

> *Poincaré dava ênfase a esta, enquanto os logicistas queriam evitá-la em seus fundamentos, embora pre-sumivelmente, eles admitissem a intuição na criação da matemática. Certamente, esta, desempenhava um papel na seleção de coisas indefiníveis.* (GRATTAN, 2000, p. 359)

[3] Azcárate (2006, p. 30) lembra a afirmação de Platão de que a intuição proporcionava a ligação das nossas almas com o mundo das formas. Outras figuras emblemáticas destacadas pelo autor em sua tese, que se interessaram profundamente pela intuição foram: Descartes, Kant e Husserl.

Neste excerto, observamos uma disputa de longa duração entre as correntes filosóficas, conhecidas por *logicistas* e *intuicionistas*[4], que buscavam definir o papel desempenhado pelo raciocínio intuitivo (a primeira procurava enfraquecer, enquanto a segunda defendia o fortalecimento do papel da intuição) para o contributo na edificação dos fundamentos das teorias matemáticas daquela época controversa.

Vejamos outros exemplos de concepção partilhada por alguns matemáticos, começando por Felix Klein (1849-1925) que, num de seus artigos, assim se manifestava:

> *A intuição ingênua, por outro lado, foi especialmente ativa durante o período de gênese do Cálculo Integral. Assim, vemos Newton assumir sem hesitar sobre a existência, para todo caso, da velocidade de um ponto móvel, sem questionar a si mesmo sobre se- quer a possibilidade de uma função descontínua e sem derivada* (1893, p. 15).

Mais adiante, explica a diferença entre o que ele nomeou 'intuição ingênua' (*naive intuition*) e outra expressão tratada por ele como 'intuição refinada' (*refined intuition*), acrescentando que:

> *Em minha opinião, a raiz deste assunto pertence ao fato de que a intuição ingênua não é exata, enquanto a intuição refinada não é propriamente uma intuição, porém, surge a partir do desenvolvimento de axiomas, considerados perfeitamente exatos* (KLEIN, 1893, p. 15).

Klein[5] fornece exemplos ilustrativos e argumenta que, quando pensamos num ponto, não pintamos em nossa mente um ponto matemático abstrato, porém, substituímolo por algo concreto. Por exemplo, quando imaginamos uma linha, não descrevemos para nós próprios, seu comprimento sem uma espessura. Quando, porém, consideramos uma faixa com determinada extensão, esta possui sempre uma tangente, isto é, podemos sempre imaginar uma linha reta que possui uma pequena porção em comum com uma curva (ilustração 1). Para Klein, *as definições matemáticas* neste caso são aproximativas e, indiscutivelmente, neces-sárias para a atividade matemática.

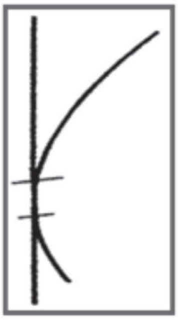

Ilustração 1: Desenho sugerido por Klein (1893).

4 Ernest (1991, p. 21) explica que a corrente filosófica, logicista, tomava a Matemática como sendo uma parte da Lógica. Além disto, todo o saber matemático poderia ser reduzido às regras ordinárias da Lógica. Por outro lado, a corrente filosófica, intuicionista, desacreditava do poder infalível da lógica, uma vez que parte dele se fundava na intuição.

5 A argumentação desenvolvida por Félix Klein (1849-1925) apresenta íntima dependência com a diversidade de representações mentais que o indivíduo possui e consegue mobilizar por intermédio da percepção. A existência destas representações mentais no processo perceptivo é assumida por Morais (2006, p. 20).

Talvez o mais autêntico defensor rigoroso da intuição como instrumento de descoberta e invenção matemática tenha sido Henri Poincaré (1854-1912). As posições dele são memoráveis, mas cabe recordar as concepções sobre o ensino de Matemática, quando declarava que

> *O objetivo principal do ensino de Matemática é desenvolver certas faculdades do espírito e, entre elas, a intuição não é a menos preciosa. É por meio dela que o mundo matemático preserva o contato com o mundo real; e mesmo quando a matemática pura po-de triunfar, é necessário sempre combinar o abismo que separa os símbolos da realidade* (POINCARÉ, 1904, p. 160).

Apesar da discussão filosófica em torno da intuição, percebemos a importância que Klein e Poincaré[6] atribuí-am ao apelo intuitivo, apesar de apontarem suas limitações e o potencial de causar confusões. Couturat (1901, p. 114) descreve a desconfiança dos matemáticos quando recorriam à intuição. Neste sentido, ele lembra:

> *Leibnitz insistia que não se pode raciocinar sobre a figura e substituir a demonstração por uma simples inspeção. É mesmo necessário aprender a raciocinar sem nenhuma figura (...). O valor da demonstração não pode depender da figura.*

Assim, vemos claramente a perspectiva de descrédito atribuída ao recurso de imagens, símbolos e figuras, como elementos que alimentam a imaginação e o raciocínio; quando, no entanto, realizamos uma demonstração, cobrindo o percurso entre *premissa* e *tese*, executando, de forma precisa, cada ilação, cada inferência necessária, estaremos desenvolvendo um raciocínio estritamente lógico, isto é, isento da *intuição*?

Lakatos (1978, pg. 79) responde a este questionamento da seguinte forma:

> *Outro problema que vale ser esclarecido é a relação entre indução de dedução na lógica cartesiana. Ambas as inferências são baseadas na intuição, que transmitem verdade (das premissas às conclusões) a retransmitem falsidade (das conclusões para as premissas).*

Desta forma, mesmo quando realizamos uma *indução* ou uma *dedução* matemática, modelos frequentes numa *prova* e numa *demonstração*, vemos que a intuição intervém em cada passo executado pelo matemático. De fato, *devemos estar convencidos de considerar as duas funções essenciais do intelecto, como sendo a faculdade de dedução e indução* (BERGSON, 1911, p. 231). Além disto, *a dedução não funciona, a menos que exista uma intuição especial por trás. O mesmo podemos dizer sobre a indução* (BERGSON, 1911, p. 234).

Portanto, mesmo que provisoriamente, evidenciamos o papel que a intuição desempenha para a evolução, sistematização

6 Ferreirós, J. & Gray, J. (2006, p. 70) destacam o termo intuitive-conceptual, fazendo referência ao ponto de vista da Matemática e do estilo cognitivo de Bernhard Riemann e Felix Klein, de natureza reconhecidamente elevada.

e formalização do saber matemático. Questionamos agora: de que forma tal capacidade psíquica se manifesta em cada indivíduo? É correto afirmar, em virtude dos exemplos apresentados por Poincaré e Klein, a existência de classes ou categorias do raciocínio intuitivo? De que modo estas classes evoluem ao longo do ensino da Matemática?

Dentre os autores que sustentam a existência de diversas classes de intuições, elencamos: Bergson (1911), Bunge (1996) e Fischbein (1987).

Bergson (1911, p. 302) explica que duas das operações elementares da mente são *percepção*[7] e *memória*. Segundo ele, em ambas intervém a intuição. Por outro lado, ele declara, *explicitamente, que a existência de diversas classes de intuições não prova a existência um método para se obter conhecimentos seguros de uma maneira direta* (BUNGE, 1996, p. 191). Finalmente, o pesquisador israelense Efraim Fischbein (1920-1998) fornece enorme variedade de exemplos em Matemática, pelos quais vemos a manifestação direta do raciocínio intuitivo, destacando inclusive os conflitos psicológicos, ordinários, entre os estudantes.

Fischbein (1987, p. 156) explica situações (ilustração 2) em que o aluno não aceita que figuras como esta abaixo, não pode ser um paralelogramo, pois que, para ele, a desigualdade entre os ângulos é a marca registrada do *paralelogramo*. Um conflito que requer o conhecimento e a utilização precisa da *definição formal* para ser resolvido.

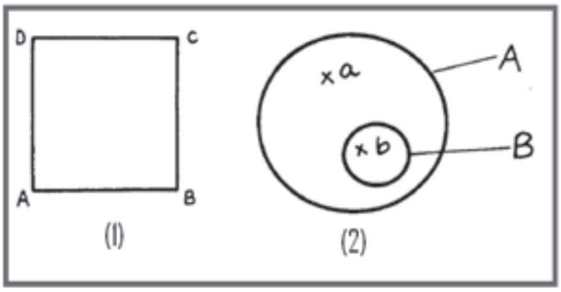

Ilustração 2: Situações comentadas por Fischebein (1987).

Podemos citar outro exemplo comum da lógica proposicional quando declaramos que $B \subset A \; .\equiv. \; \forall x$ tal que $x \in B \Rightarrow x \in A$ (leia-se: B está contido em A). A mesma inferência pode ser observada por inspeção na figura 2; na *definição formal*, entretan-to, de inclusão de conjuntos, sabemos que todas as propriedades dos elementos de B devem ser comuns às propriedades dos elementos de A. Tais propriedades não são incluidas de modo específico na figura, bastando tomar a relação entre quadrados e retângulos.

Em todas as situações possíveis em que buscamos o uso da intuição, percebemos sempre aquela sensação interior do insight, de um conhecimento que se manifesta de forma não completamente esclarecida, de modo inconsciente e súbito, não governado pelas leis da Lógica. Mill (1889, p. 222) reforça nossa argumentação, quando diz que:

> *Sentimos que um procedimento intelectual que conduz a uma generalidade compreensiva é de grande importância do que outra que se refere apenas a um fato isolado. O espírito é conduzido, mesmo sem ter consciência, a conceder mais atenção ao próprio procedimento e a considerar mais de perto o valor da experiência invocada como um fundamento da inferência.*

Toda a discussão anterior encontra um significado de vital importância quando restringimos nosso olhar ao âmbito pedagógico de manifestação do saber matemático, uma vez que, *para o professor de matemática, é de importância fundamental identificar estas forças intuitivas e levá-las em consideração no processo instrucional* (FISCHBEIN, 1987, p. 206).

Desta forma, poderíamos extrair diversas implicações pedagógicas com base nas reflexões apresentadas; visando, contudo, a respeitar o poder de síntese deste trabalho, sublinhamos a preocupação que o professor necessita manifestar para a valorização e mesmo o conhecimento da intuição em sua prática didático-metodológica.

Particularmente, observamos que o professor de Matemática tem como objetivo principal promover a construção do conhecimento matemático do aluno por meio da evolução do seu *raciocínio*; o que é, porém, um *raciocínio*? Como mobilizá-lo? Além disto, se a sua prática não for essencialmente a *formalista*[8], ele tenciona utilizar, por exemplo, o *lúdico*, que apresenta como com-ponente a intuição; a que vem a ser, no entanto, a intui-ção, como já questionava Immanuel Kant (1724-1804) há séculos?

O professor aspira, naturalmente, a exibir uma metodologia eficiente; mas que espécie de intuição será mais suscetível de ser trabalhada nesta ou naquela abordagem? Que níveis intuitivos instigar em momentos distintos de uma *sessão didática*?

Pretendemos responder algumas destas perguntas enquanto outras serão deixadas para futura discussão; em todos os casos, entretanto, o mestre nunca pode perder o sentimento de busca pela simplicidade e sintonia cognitiva com seus alunos.

2. A INTUIÇÃO AO LONGO DOS NÍVEIS DA SEQÜÊNCIA FEDATHI

A proposta teórico-metodológica apresentada por um grupo de Educadores Matemáticos do Estado do Ceará (BORGES et al, 2001, p. 3) denominada *Sequência Fedathi* reclama um movimento de transformação do *savoir savante au savoir enseigné*, descrito por Chevallard (1991, p. 20). Tal movimento é chamado no meio científico de *transposição didática interna* (DORIER, 2003, p. 3) que se inicia com o contato inicial do professor com o *saber matemático* apresentado de forma científica e isento de preocupações didáticas, passando para adaptação do conteúdo que envolve os objetos matemáticos visados, na direção do ensino, finalizando-se com o saber ensinado (*savoir enseigné*), *que contempla o saber realmente abordado em classe* (DORIER, 2003, p. 5).

[7] No contexto em que discutimos o termo percepção, este merece uma atenção especial, uma vez que, num âmbito filosófico, são conhecidos dois princípios atribuídos à percepção. O primeiro é internalista que caracteriza-a como um processo que resulta de idéias, imagens ou conceitos dados a priori pelo entendimento. O segundo princípio é o externalista que mantém a hipótese da existência externa ao organismo, a qual pode ser apreendida pelos sentidos (MORAIS, 2006, p. 20 e 21).

[8] Corrente filosófica que concebia a Matemática apenas como um sistema formal, de manipulações e deduções que utilizavam símbolos sem a necessidade de um sentido (KUIPER, 2004, p. 33).

Além disto, quando analisamos o uso de tal proposta como metodologia de ensino, no que se refere à aprendizagem de Matemática, ou, mais especificamente, na constituição progressiva do *raciocínio*, cremos na importância de levar-se em consideração dois pontos: o primeira diz respeito ao tipo, nível ou natureza do *raciocínio* que será promovido pelo professor durante uma sessão didática.

Uma vez definido, na etapa inicial do momento didático, o tipo de *raciocínio* que deve ser priorizado, o segundo ponto, não menos complexo, relaciona-se à prática comum de exprimir a situação-problema no início da *Sequência Fedathi*, o que será discutido pelos alunos e pelo professor na aplicação da seqüência de ensino.

No que concerne ao primeiro ponto, evidenciamos um problema na literatura sobre a natureza do *raciocínio*, que naturalmente é o objeto principal a ser atingido pelo ensino em uma aula. Nossa preocupação é conse-quência das considerações de Brousseau (2005, pg. 14) quando alerta para a noção de que *este termo é largamente usado por professores de todas as áreas e por pesquisadores, com uma diversidade de significados.*

Brousseau (2005, p. 15) adverte, ainda, para a idéia de que *cada uso deste termo é relacionado com a abordagem teórica ou prática que passa a determinar seu sentido e pode tornar seu uso inapropriado em outras áreas.* Ademais, cabe lembrar que a Lógica é a ciência do raciocínio, entretanto*, a palavra raciocínio, como a maior parte dos termos científicos usuais empregados em linguagem comum, é repleta de ambiguidades* (MILL, 1889, p. 3).

Diante das considerações acerca da diversidade de significados do vocábulo *raciocínio*, apontadas pelo didata francês, reforçadas pelo filósofo e economista inglês Stuart Mill (1806-1873) buscaremos definir uma classificação do *raciocínio intuitivo*, de acordo com as relações didáticas pretendidas na *Sequência Fedathi* (exemplificada na próxima seção).

Com isto, possivelmente, poderemos enfraquecer a concepção dos professores de Matemática de que "aprender Matemática significa compreender os modelos das *demonstrações e das provas"*. Brousseau referenda nossa afirmação, quando adverte para o fato de que, *em Matemática, o ensino do raciocínio tem sido concebido como a apresentação de modelos de provas, as quais devem ser reproduzidas pelos estudantes*. (2005, p. 14)

Para conseguirmos superar alguns entraves didáticos, como esta concepção apontada por Brosseau, buscare-mos adaptar a determinados momentos de ensino, os tipos ou categorias da intuição, inspirando-nos nas reflexões do filósofo argentino Mario Bunge.

Bunge começa descrevendo a intuição como percep-ção, atribuindo a característica de *percepção rápida de uma coisa, um acontecimento ou símbolo*. Nela, segundo Bunge (1996, p. 121) identificamos um caráter de dependência da acuidade visual, da percepção, da memória e experiência.

A primeira categoria descrita por ele é a *intuição sensível,* que é pré-científica, mas tem lugar no trabalho científico. A visão responde por parte de nossas percepções, as quais, seja no caso do professor ou no do aluno, são privadas e dependem da experiência individual. Neste aspecto, Russel (1910, p. 120) lembra que uma sensação visual nunca é pura. Além disto,

> *Outros sentidos são também estimulados em virtude de leis dos hábitos. Este tipo de coisa tem a ver com nossas crenças em observar os objetos e não são somente sensações visuais.*

Os elementos presentes na descrição fornecida por Bertrand Russell (1872-1970) manifestam-se frequentemente nos hábitos do professor e do aluno, com suporte nas experiências vivenciadas, por meio do significado adquirido e as imagens mentais privadas que cada um edifica ao longo das relações que mantém com a Matemática. Outra característica da *intuição*, como percepção, refere-se à compreensão clara do significado e das relações mútuas de um conjunto de símbolos; advertimos, porém, para a *idéia de que o que aparenta ser psicologicamente óbvio não tem por que ser logicamente imediato.* (BUNGE, 1996, p. 123) Por exemplo, temos o caso da conjectura de Christian Goldbach (1690-1764) ao propor que qualquer número maior do que dois é soma de dois primos.

Evidenciamos, facilmente, isto nas relações aritméti-cas: , que envolvem relações mútuas e combinações de símbolos; raciocinando intuitivamente, contudo, não chegamos a uma conclusão confirmadora dessa propriedade desde a percepção, apenas em alguns casos particulares. *Além disto, usando um computador encontramos cerca de um bilhão de exemplos; mas podemos intuir que tal conjectura é sempre verdadeira? Ainda não temos, até agora, uma resposta para tal pergunta* (DEVLIN, 1998, p. 39).

Finalmente, a última característica da intuição como *percepção* é descrita como a *capacidade de interpreta-ção correta de símbolos artificiais*. Bunge faz referência a uma prática *standard* em Matemática, que é a formulação de simbologia e/ou o estabelecimento de notação da linguagem numa teoria axiomática formal.

A linguagem é um instrumento que desempenha um papel imprescindível na *Lógica Simbólica*. Neste aspecto, *a Lógica Simbólica tem se tornado não apenas essencial para qualquer filósofo logicista, mas também, para a compreensão das generalidades em Matemática* (RUSSELL, 1921, p. 13).

Além disto, a evolução do sistema de representação simbólica significa a própria evolução e o aumento da complexidade das formas de pensamento empregadas em Matemática, *uma vez que este constitui a forma de os indivíduos exteriorizarem suas representações mentais sobre a matemática.* (DUVAL, 1996, p. 2) Dentre as for-mas de pensamento utilizadas na atividade matemática, destacamos o processo mental de abstração, o qual desempenha há séculos um papel imprescindível para esta evolução.

Com efeito, evidenciamos que, durante o século XIX, o processo de abstração da abstração foi tomado para estender a Matemática, porém com um pequeno grupo de matemáticos profissionais capazes de apreciar os maiores e novos desenvolvimentos desta ciência;

> *contudo pensar em elevados níveis de matemática pode causar em muitas pessoas uma recusa em relação à matemática moderna. O aumento dos níveis de abstração não causa, por eles mesmos, maiores dificuldades em matemática. A cada nível de abstração, o mecanismo atual de se fazer matemática continua o mesmo, somente o nível da abstração muda* (DE-VLIN, 1998, p. 76).

Com base nas palavras do matemático Keith Devlin, obtemos uma noção do tipo de atividade mental requerida em pesquisa matemática, quando ele se refere ao processo de *abstração da abstração*. Em tal processo, a intuição desempenha seu papel, embora suas manifestações apresentem caráter mais sofisticado.

Podemos lembrar que Tall (1989, p. 2) caracteriza três diferentes tipos de *processo de generalização* em Matemática para um nível mais avançado e a necessidade de *abstração da abstração*. Consequentemente, a intuição matemática é requerida em cada um deles.

Por outro lado, na frente pedagógica de manifestação do saber matemático, estará claro, para o professor de Matemática, o significado cognitivo do termo *abstração*? Quais os tipos, ou, poderíamos chamar, classes, de abstração? Para prevenir possíveis más interpretações deste termo, trazemos uma caracterização fornecida por Mill (1889, p. 294) quando explica que, *de acordo com os aspectos comuns da classificação, a abstração está aí incluída*. Mais adiante, Mill acrescenta:

> *Quando é dito que, para classificar, deixamos de lado todas as circunstâncias em que os indivíduos diferem e retemos somente aquelas em que eles concordam; separando uma porção do que está contida em uma idéia complexa e tornando-a objeto de consideração, de análise, esse é o processo que nomeamos de abstração, pelo menos parte dele.*

Encontramos uma concepção semelhante em Boole (1958, p. 314) quando aconselha:

> *O processo de raciocínio precisa ser cuidadosamente analisado. Aparentemente a abstração é feita de todas as peculiaridades de um indivíduo o qual suas conclusões se referem, e a atenção é confinada a estas partes.*

Como uma das formas de manifestação da abstração, Bunge ressalta a *capacidade de representação ou intuição geométrica* que, para ele, é a habilidade de representar ou imaginar virtualmente objetos ausentes, e também construir réplicas visuais, modelos dinâmicos, feitos de forma abstrata.

Em se tratando de teorias matemáticas mais complexas, percebemos a imposição do processo de abstração; contudo, *sentimos a nossa própria limitação no que se refere à capacidade de representação, principalmente, na ausência do objeto* (BUNGE, 1996, p. 153); mas, quando conseguimos representar mentalmente um obje-to, evidenciamos que o processo de abstração caracteri-zado anteriormente foi alicerçado, pelo menos em parte, na *intuição geométrica*.

Tratar do processo de abstração exige discutir nossa memória. Bunge lembra nossa limitada capacidade de memorização. Quando raciocinamos sobre um conheci-mento ou um objeto matemático familiar, nem sempre dispomos de representações mentais adequadas, produzidas pelo processo abstrativo e mobilizadas pelo raciocínio intuitivo; se dispusermos, porém, de representações, a ativação será viabilizada pela nossa maior ou menor capacidade flexível de memória.

Neste aspecto Bergson (1911, p. 53) ensina que *quando recorremos a memória, nosso pensamento move-se por meio do sentimento do "déjà vu"*. Nosso pensamento se constitui das crenças construídas, a partir de nossas relações vivenciadas. Assim, a capacidade de representação e, consequentemente, de abstração, alimentada eventualmente pela *intuição geométrica* do aluno, dependerá das situações didáticas propostas pelo professor que promovam um acionamento adequado do seu arquivo cognitivo de informações.

Finalmente, com a intenção de facilitar nosso entendimento do uso da intuição numa sessão de ensino, evidenciamos que Bunge descreve a relação entre a intuição e a atividade criativa que alguns denominam de insight, quando fala da imaginação criadora que, para ele, apresenta uma base inventiva, fundada na inspiração.

Ele acentua que *qualquer matemático ou investigador nas ciências físicas ou naturais concordará que sem imaginação, sem inventividade, sem a capacidade para conceber hipóteses e propostas, não se podem efetuar mais do que operações mecânicas e ordenar, manipular aparatos e aplicações de algorítmicos de cálculo* (BUN-GE, 1996, p. 138).

Assim, podemos observar que, além de problemas de ordem filosófica, a faculdade psíquica ou *mecanismo cognitivo* (TOULMIN, 1958, p. 221) que chamamos de *intuição*, se manifesta no sujeito, sob formas, níveis e momentos distintos durante sua aprendizagem, inclusive como um componente necessário na criação e inventividade do aluno.

Referendando-nos no que foi discutido, deixando de lado determinadas dificuldades de ordem epistemológica, buscaremos conceber formas de adaptação dos diferentes tipos de raciocínio intuitivo aos momentos didáticos previstos na *Sequência Fedathi* – (SF), que passaremos a caracterizar.

2.1. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI – (SF).

Passamos a descrever a utilização da metodologia de ensino Sequência Fedathi, considerando os diferentes tipos de categorias de intuição, descritos há pouco. Utilizaremos o conceito de progressões aritméticas – (PA) para uma discussão em caráter teórico de aplicação da Sequência. A escolha deste conceito decorre das adver-tências preocupantes sobre os livros didáticos de Mate-mática, formuladas por Lages (2001). Para o início de nossa aplicação em caráter teórico, apresentamos a descrição da primeira etapa da Sequência.

• **Nível 1** <u>Tomada de posição – apresentação do problema ou de um teorema.</u> Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema, descrita na ilustração 3, para o grupo de alunos, que devem possuir meios de atacar o problema envolvido mediante a aplicação do conhecimento a ser ensinado.

Comentários: No nível 1, a lição que podemos extrair indica que não há necessidade de o professor explicitar ou apresentar aos alunos um problema. Este deve ser descoberto pelos próprios alunos; todavia, eles já devem saber o que é uma progressão. Este momento didático requer o emprego da *intuição ingênua* de que tratamos no início de nosso trabalho. Além disto, a atividade argumentativa dos alunos deve ser fortemente estimulada no momento inicial.

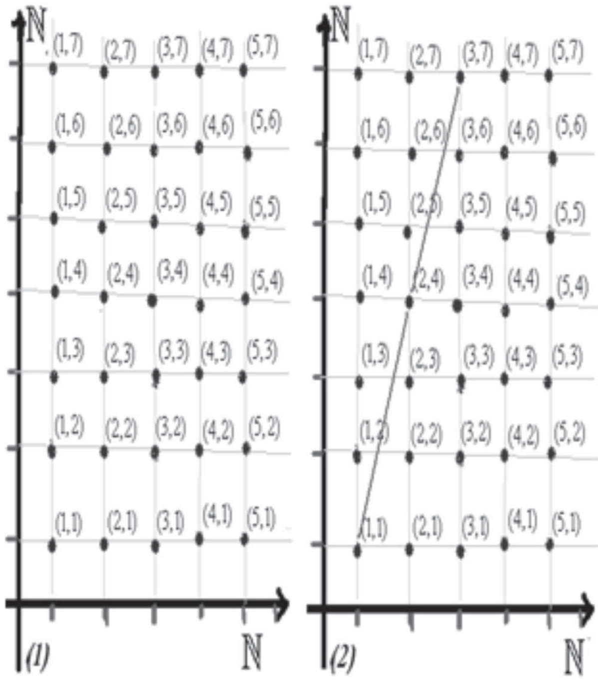

Ilustração 3: Disposição dos pares ordenados (elaboração própria).

Na ilustração 3, o aluno deverá ser estimulado a encontrar uma *progressão aritmética* – P.A. em meio as combinações aritméticas e geométricas de pares ordena-dos $(\square \times \square)$ no plano. Nesta situação, podemos questio-nar que espécie de propriedade percebemos na disposição exibida acima, embora não esteja explícito que a mesma diz respeito a P.A. Assumiremos de modo hipotético que o aluno relaciona os pares ordenados da ilustração 3-(2).

Portanto, ele relaciona os seguintes pares: $(1,1) \to (2,4) \to (3,7) \to ... \to$. Repare que tal trajetória se propaga indefinidamente, a partir destes casos particulares. O símbolo "$\to$" indica o movimento perceptivo que o aluno descreve ao direcionar sua atenção ao desenho ilustrativo da situação.

[9] Duval (1995, p. 232) explica que a argumentação tem por objetivo modificar a natureza ou o grau de convicção atribuído por um interlocutor à uma proposição, de modo a fazê-la aceitar ou rejeitá-la. Assim, torna-se essencial neste nível a identificação das conjecturas que possuem mais chance de êxito, bem como as que irremediavelmente conduzem ao fracasso.

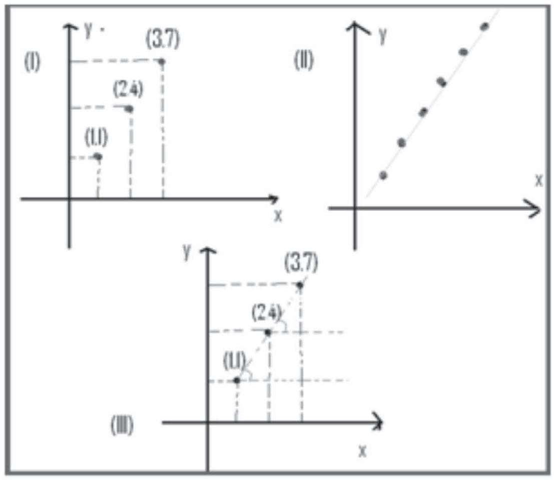

Ilustração 4: Apresentação inicial do problema (elaboração própria).

Diante desta escolha (ilustração 4-I) prevenimos que não há a necessidade de explicitar a natureza do problema; o professor deve conduzir o processo, permitindo que os próprios alunos percebam que o quadro (I) ilustração 4 envolve um problema; mas de quê? De que forma? Que objeto matemático se relaciona com a representação da ilustração 3?

Em parte, estas questões podem ser resolvidas paulatinamente, na medida em que estimulamos o uso constante de determinadas imagens mentais. Advertimos para o argumento de que *muitos erros típicos dos alunos têm sua origem justamente neste momento de formação de determinadas imagens primárias.* (SAFUANOV, 2003, p. 89)

Observa-se que, mentalmente, por meio da *intuição geométrica*, o aluno será ser estimulado a imaginar a situação descrita em (II) e a produzir argumentações relacionadas à situação. Observamos que a noção de infinito pode ser trabalhada, quando imaginamos a propagação da relação descrita em (I) *ad infinitum*.

Como uma tendência natural dos seus hábitos adquiridos, após imaginar a situação ao lado, o aluno em geral tenta ligar os pontos e visualizar um objeto familiar, que neste caso é uma reta (ilustração 3-II). Vale lembrar que a possibilidade de esboçar um desenho como este ao lado, viabiliza ao aluno explicitar suas *percepções* e crenças a respeito de cada representação e cada objeto.

Concordamos com Russell (1921, p. 112) quando defende que *nossas percepções são constituídas de sensações, imagens e crenças*. Desta forma, devido ao modelo familiar da Geometria Plana, o aluno tenta ligar os pontos na ilustração 4. Ao realizar isto que caracteriza um *erro qualitativo de raciocínio*[10], podemos perquirir sobre o seu conhecimento a respeito da noção de domínio de uma sequência, $f : \square \to \square$, do tipo $a_n = 3n - 1$.

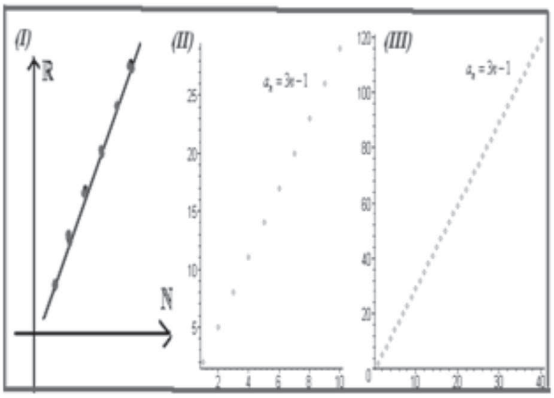

Ilustração 5: Concepção equivocada dos alunos a respeito do gráfico da PA e representação no computador (elaboração própria).

Observamos que este exemplo e outros freqüentes que explicitam *concepções* e *conceitos* construídos sobre raciocínios inconsistentes e, em flagrante contradição com o modelo matemático formal, podem ser paulatinamente modificadas com o auxílio de um recurso informático (ilustração 4-(II e III)). Sugerimos a plotagem de gráficos no Maple 12. Algumas aplicações interessantes podem ser encontradas em Abell, M. & Braselton, J (2005).

•**Nível 2** Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. (Destinado à discussão e debate envolvendo os elementos: *professor-alunos-saber*).

Comentários. Desde que esclarecemos psicologica-mente o significado do termo "abstração", supomos que a atenção do aluno se voltará para a relação unívoca entre os pares mostrados em (III). Tal representação sugere implicitamente uma lei de formação de uma função?

O aluno poderá conjecturar a *existência* de função do tipo $f(1)=1; f(2)=4; f(3)=7$; mas, que tipo de função? *Exponencial, logarítmica, polinomial*? De que grau? Estas questões podem servir de fio condutor para uma investigação mais aprofundada ao final da Sequên-cia Fedathi.

Por outro lado, prolongando-se o gráfico e analisandose (ilustração 3-III) os comprimentos das projeções, o aluno deve concluir que o ângulo formado no eixo Ox é sempre constante. Assim, deve-se identificar o gráfico como de uma reta; entretanto o professor há de formular com os alunos questões relacionadas ao domínio desta função que, no caso, está em $\mathbb{N}$ e *possui contradomínio* em $\mathbb{R}$; por quê?

Além disto, após vários questionamentos, o aluno pode escolher a seguinte representação $f(x)=ax+b$ não outras possibilidades tais como: $g(x)=e^x; h(x)=ax^2+bx+c$; $p(x)=\log_{10}(x)$. Notamos que, em raras exceções, o aluno saberá as condições de existência de uma *função afim* nas condições fornecidas pelo problema. As noções de *existência e unicidade* poderão ser desenvolvidas no final da aplicação.

Algumas *ideais particulares* que envolvem este momento relacionam-se ao seguinte modelo: $f(n)=a\cdot n+b$ onde $n\in\mathbb{N}$. Por sugestão do professor, os estudantes passam a adotá-lo baseados nesta representação, podendo relacionar os conceitos de *função e progressão aritmética* (PA).

Vale evidenciar que a habilidade de relacionar tais conceitos caracteriza algo fundamental a ser perseguido pelo professor, no que diz respeito ao conhecimento conceitual. A importância deste conhecimento característico de um estádio cognitivo do sujeito é sublinhada por Sierpinska (1994, p. 106) ao explicar *que o foco recai sobre a relação entre objetos particulares*.

Por outro lado, todos os que usam a linguagem dos gráficos podem ser auxiliados por um ponto de vista intuitivo do fenômeno e, nem sempre, o aluno consegue perceber as relações viabilizadas pelos gráficos. Além disto, o auxílio de propriedades intrínsecas de um gráfico pode representar uma fonte de incompreensões pois o gráfico constitui um sistema figurativo auto suficiente que não faz apelo ao significado extrínseco. (FISCHBE-IN, 1987, p. 162)

•**Nível 3** Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema.

Aqui, os alunos organizados em grupos de cinco, devem apresentar soluções, que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer com suas argumentações outros grupos.

Comentário. Introduzimos a notação conveniente, destacando que a sequência $x_n = f(n) = a\cdot n+b$ pode ser descrita por $\{a_1;a_2;...a_n;.....\}$ ou $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Prevenimos que a precipitação em se adotar uma poderosa notação pode transformar o problema numa rotina algorítmica semanticamente pobre. Por outro lado, neste momento, a *ausência de linguagens operatórias podem constituir um obstáculo à aprendizagem dos alunos* (BALACHEFF, 1988, p. 149).

Convém observar, ainda, que notações aparentemente semelhantes podem inspirar intuições distintas; por exemplo, a situação em que $\{a_1;a_2;a_3;...a_n;.....\}$ sugere a continuidade ininterrupta dos termos; mas, no caso da notação $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,corremos o risco de estimular uma concepção estática (CORNU, apud, TALL, 2002, p. 155) do conceito de sequências de números reais.

Outro elemento que pode ser identificado, após se obter o *termo geral* $a_n = r\cdot n+(a_1-r)$, é a interpretação geométrica do c*oeficiente angular e do coeficiente linear*, algo pouco explorado pelos livros didáticos. Por este modo, enfraquecemos a prática algorítmica usual de tratamento do termo geral. Neste sentido, Fischbein (1999, p. 52) *lembra que um algoritmo pode ser aprendido por repetição, pela prática;* contudo, o *algoritmo* envolve elementos mais complexos do que aparenta, destacadamente os de natureza intuitiva. São justamente

[10] Mayer, Lewis & Hegarty (1992, apud, CAMPBELL, 1992, p. 138) explicam que erros matemáticos ocorrem no raciocínio qualitativo quando um solucionador de problemas entra em conflito com uma informação presente nas afirmações do problema

estes elementos que exploramos na ilustração 5.

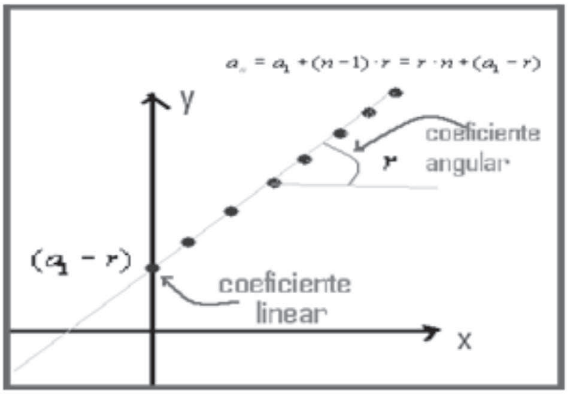

Ilustração 6: Interpretação geométrica do termo geral (elaboração própria).

Quando exploramos a interpretação geométrica do termo geral, podemos desenvolver a ideia de "interpolação geométrica dos seus termos". Por exemplo, se to-marmos a ilustração 6, e tivermos que $\{a_1 \,; a_2 \,; a_3 \,; a_4\} = \{1 \,, ? \,, ? \,, 10\} \therefore 10 = 1 + (4-1)r \leftrightarrow r = 3$, poderemos encontrar a razão.

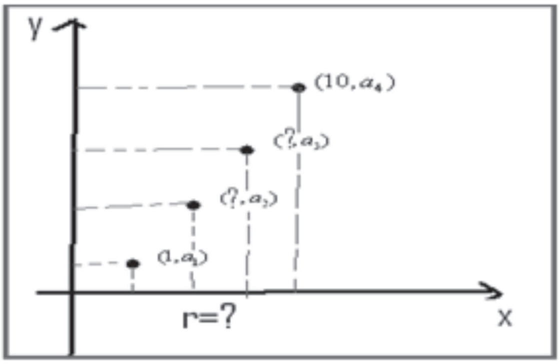

Ilustração 7: A noção de Interpolação geométrica dos termos de uma PA (elaboração própria).

Neste caso, mudamos a forma tradicional, encontrada nos livros didáticos para a representação de um problema de interpolação que, frequentemente, sugere o seguinte: $(a_1 \,; \_\_\_ \,; \_\_ \,; a_4)$ o que não possibilita uma interpretação geométrica e dinâmica desta nova noção.

• **Nível 4** Prova – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado.

Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo saber. Além disto, todas as argumentações devem ser revistas e testa-das, e identificados os elementos que podem causar maior incompreensão.

Comentário. Com uma formação sólida, para o professor de Matemática, a atividade de *prova* e, subsequente *demonstração*, assume espaço privilegiado neste nível, se nos restringirmos a uma aula tradicional; convém lembrar, entretanto, a diferença entre os termos *prova e demonstração* que, aparentemente, para muitos, são a mesma coisa.

Na tese de Pedemonte (2002, p. 15) encontramos a classificação dos esquemas de *prova matemática*. Conforme a autora, os níveis caracterizados por alguns autores discutidos em seu trabalho podem ser descritos como: *esquemas de provas externas de convencimento; esquemas de provas empíricas; esquemas de provas analíticas*. A hipótese levantada é que para produzir uma *demonstração axiomática*, o aluno deve passar gradualmente por estes tipos de *prova*.

Além disto, quando se estabelece o momento de mai-or rigor e formalismo (nível 4) assumiremos a idéia de que o conhecimento matemático produzido deverá constituir uma teoria de fato e ser reconhecida como tal, isto é, aceita numa comunidade científica que desconsidera a necessidade de buscar a origem dos argumentos que utiliza; portanto, este momento é o da apresentação da *demonstração matemática que se apóia sobre um corpo de conhecimentos fortemente institucionalizados... os quais possuem a validade socialmente partilhada.* (BALACHEFF, 1984, apud, JOSHUA & DUPIN 1993, p. 291). Neste contexto, Douady (1984, p. 17) *explica que o saber se difunde de modo diverso entre os alunos. Oficializar certos conhecimentos, atribuindo-lhes um estatuto de objeto matemático, é condição de homogeneização na classe*.

Ainda no nível 4, o professor poderá estimular, passo a passo, a descoberta dos teoremas (e contra exemplos) que enunciamos em seguida. Lembramos que podem ser inventadas diversas *demonstrações* para os teoremas que enunciamos na ilustração 7; contudo, destacamos a magnífica abordagem encontrada na obra de Lages (2004).

***Teorema$_1$*: O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical e, reciprocamente, dada uma reta não vertical ao eixo Ox, obtemos uma única função afim, cujo gráfico coincide com tabela.**

***Teorema$_2$*: Uma função afim leva uma PA numa PA e, reciprocamente, se temos uma função f(x)=y que leva PA numa PA esta deve ser afim.**

***Teorema$_3$*: A função inversa de uma função do tipo f(x)=ax+b é afim.**

Ilustração 8: Teoremas que permitem um aprofundamento a *posteriori*.

Neste último nível, o professor pode conduzir seu en-sino segundo as orientações de Lakatos (1978, p. 74), que classifica as provas matemáticas em *pré-formais, formais e pós-formais.*

Trabalhamos neste nível, predominantemente, os aspectos *formais e pós-formais* envolvidos em cada situa-ção didática. Os teoremas da ilustração 7 podem compor os conhecimentos relacionados ao que ele chama de pós-formais. Em relação a este tipo de conhecimento, Lakatos (1978, p. 79) explica que *frequentemente os estudantes de lógica deparam com provas que verificam às vezes mais do que se espera demonstrar.*

Ele exemplifica o caso dos *axiomas de Peano* que satisfazem não apenas à família dos números naturais, mas também a outras estruturas esquisitas. Finaliza, afirmando que *este último tipo de prova se relaciona com algum tipo de incerteza por conta das possibilidades até então não pensadas* (LAKATOS, 1979, p. 69).

Desta maneira, deparamos um momento didático em que o mestre tem a oportunidade de generalizar as ideias abordadas e relacionar determinadas ligações conceituais, necessárias para a caracterização de um novo conhecimento conceitual, possibilitando nova sequência de aprendizagem.

Para esclarecer melhor esta possibilidade e influenciando-nos nas considerações de Lakatos (1976, p. 142) quando aconselhava *a fuga do estilo dedutivista de raízes euclidianas,* orientamos no sentido de que, no final da SF, o professor pode trabalhar propriedades e relações, até o momento não identificadas, nos quatro níveis anteriores.

Nossa argumentação adquire sentido ante as seguintes indagações: podemos afirmar, com arrimo do gráfico mostrado na ilustração 8, que temos uma função defini-da do eixo Ox para o eixo Oy, que leva uma PA numa PA?

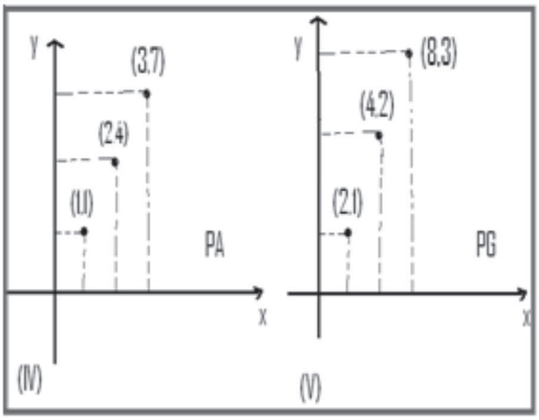

Ilustração 9: Relações entre PA e PG (elaboração própria).

Podemos, ainda, assinalar, com o amparo do gráfico, que temos uma função definida do eixo Oy para o eixo Ox, que leva uma PA numa PA? Que tipo de função leva uma PA numa PA? Que tipo de função leva uma PA numa PG? E no caso de uma progressão geométrica?

Por outro lado, podemos generalizar o processo de obter a razão da sequência, com base nas representações geométricas. No processo de obtenção empregamos o modelo de *Indução Matemática.*[11]

De fato, observando as ilustrações 9 e 10, temos que.

$$r = \frac{a_2 - a_1}{2-1} = \frac{a_3 - a_2}{3-2} = \ldots \overset{\text{INDUÇÃO}}{=} \ldots \frac{a_n - a_{n-1}}{(n)-(n-1)}$$

Ilustração 10: Obtenção generalizada da fórmula da razão.

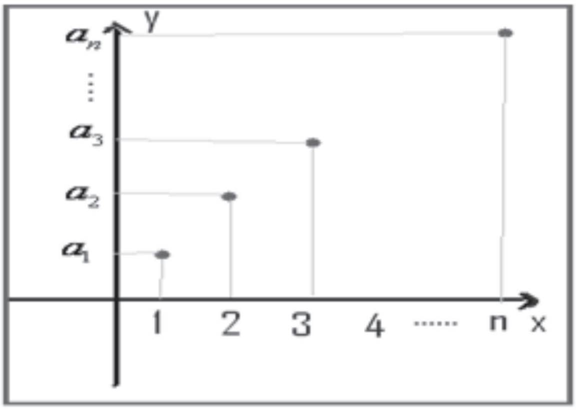

Ilustração 11: Generalização do método geométrico de obter da razão (elaboração própria).

Finalmente, quando consideramos o $Teorema_3$ da ilustração 7, podemos passar a considerar a sequência $\{b_1, b_2, b_3, \ldots..\} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que descreve a relação do gráfico acima do eixo Oy para o eixo Ox (ilustração 11). Introduzindo esta nova notação, temos então que $b_1 = 1;\ b_4 = 2;\ b_7 = 3$. Podemos observar que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também deverá ser uma PA, em virtude deste teorema, de razão $r = 1/3$. Por quê?

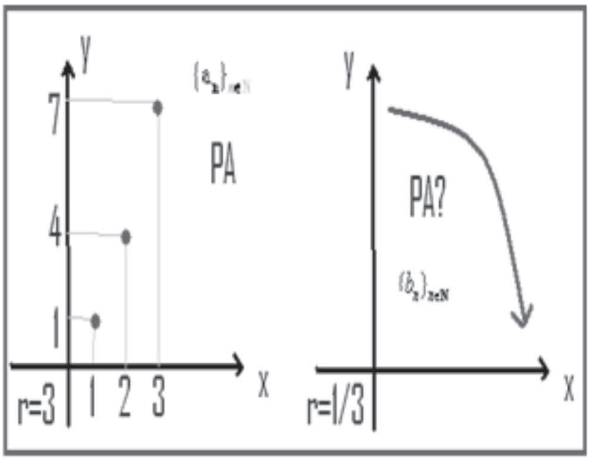

Ilustração 12: Relação entre a PA e inversa (elaboração própria).

[11] Kennedy (2006, p. 37) relata que, em sua obra intitulada Arithmetices principia, Giuseppe Peano (1858-1932), dedica cerca de 20 páginas para a apresentação de termos não definidos e 9 axiomas. Cinco deles referem-se aos termos . Eles são conhecidos universalmente como axiomas de Peano e o modelo de Indução Matemática se fundamenta a partir deles.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A atividade do professor de Matemática é consubstanciada em duas dimensões: o *ensino* e a *aprendizagem*. Defendemos a posição de que a primeira dimensão transmite ao professor um sentimento de clareza e precisão; afinal de contas, encontramos *crenças* expressando que *"um bom domínio de conteúdo garantirá um bom ensino"* .

Certamente, a verdade ou a falsidade desta crença a respeito do ensino de Matemática, como disse Russell (1921, p. 253*) dependerá da relação de experiência, do interesse da pessoa e de sua formação. Por outro lado, Russell sublinha que nós desejamos acreditar que nossas crenças, pelo menos em algum momento, revelem conhecimento e uma crença não conduzirá a um conhecimento a menos que seja verdadeira* (1921, p. 253). Desta forma, em certos casos, algumas crenças como esta e outras relacionadas à Matemática e ao seu ensino adquirem caráter de pseudo-validade, mas que, no final das contas, prejudicam o seu ensino e produzem *obstáculos epistemológicos*[12] a sua aprendizagem. Vários exemplos desta natureza podem ser encontrados em Machado (1993) que ratificam nossa asserção.

A segunda dimensão, referente à aprendizagem, envolve elementos cuja natureza está longe de ser considerada simples ou de fácil entendimento. De fato, uma das maiores preocupações discutida neste trabalho relaciona-se à *intuição matemática*[13]; não apenas a ela, mas também com as suas formas de manifestação, sua possibilidade de utilização didática, seguida de sua adequação metodológica ao longo dos níveis da *Sequência Fedathi* – (SF). A possível presunção da banalidade ou o caráter de obviedade deste tema se desvanece diante das colocações de Mario Bunge, ao explicar que:

> *Quando não sabemos exatamente quais são, entre os mecanismos descritos, quando não nos lembramos das premissas e não temos claramente a consciência dos processos de inferência, ou mesmo quando não somos rigorosos e sistemáticos, temos o hábito de dizer que tudo ocorreu segundo a intuição. A intuição englobaria tudo que colocamos junto destes mecanismos intelectuais que não sabemos bem analisar ou nomear com precisão.* (1962, p. 45)

Ante tais considerações, *observamos o caráter de complexidade da intuição, enquanto instrumento de investigação científica e também de ensino.* (FISCHBEIN, 1987, P. 123) Por outro lado, vimos que Bunge (1996) e Poincaré (1899) defendem o argumento de que a Lógica é o instrumento de sistematização, generalização e organização das ideias, enquanto a intuição é o elemento responsável pela elaboração do conhecimento.

Admitindo que a ideia deste princípio esteja nítida para o professor de Matemática induzindo-o a promover a evolução do conhecimento do aluno por meio do aprimoramento progressivo de sua faculdade intuitiva e *não reduzir a atividade matemática a um sistema de resolução de problemas* (FISCHBEIN, 2002, p. 232) o próximo passo é adequar os tipos de intuição para cada momento de uma aula; embora, como vimos, tal tarefa não seja tão simples assim.

Notamos que a *intuição geométrica*, mencionada por Bunge, insere-se satisfatoriamente nos níveis 2 e 3. Pude-mos observar seu uso, quando requeremos o esboço do gráfico da função onde . Nestes níveis, preparamos a situação didática com o intuito de realizar a conexão conceitual da ideia *de função afim com o conceito de progressões, o que é feito com defici-ência pelos livros didáticos do ensino médio* (LAGES, 2001, p. 23) com ênfase em sua interpretação geométrica.

Outro ponto essencial que requer atenção relaciona-se às concepções que podem ser trabalhadas no nível 4, da SF. Numa aula influenciada pela corrente *formalista*, por exemplo, a idéia de *demonstração* apresenta-se como uma das maiores metas a ser atingidas pelo professor; estudamos, todavia, vários pensadores e estes asseguram que, mesmo nas etapas intermediárias de uma *prova* ou uma *demonstração*, intervém a intuição.

Nestas etapas, identificamos a necessidade de uma forma de intuição mais elevada e sofisticada, que Klein nomeava de '*refined-intuition*'.[15] Certamente, o docente deverá estimular este nível de habilidade intuitiva dos alunos. Embora deva ser consciente de que tal intuição só será adquirida solidamente, depois de muito tempo de treinamento, como no caso dos matemáticos profissionais, *que apresentam um tipo de percepção particular do que é certo ou não é* (DAVIS & HERSH, 1985, p. 291).

Observamos também as considerações de Bunge so-bre a *intuição geométrica* que, em geral, nunca se manifesta de forma isolada. Esta faculdade pode ser cuidadosamente explorada predominantemente nos níveis 1, 2 e 3, da *Sequencia Fedathi* – (SF).

Ao se atingir o nível 4 desta *Sequência*, atentemos para o fato de que *a intuição geométrica mostrou-se vulnerável para o estabelecimento das bases da Matemática* (DAVIS & HERSH 1985, p. 321). Desta forma, no momento de finalização desta seqüência didática, a busca pelo rigor e a exatidão das simbologias[16] empregadas são importantes para o enriquecimento do saber abordado com o uso de *demonstrações*; sem excessos, contudo, uma vez que o professor deve manter sempre em mente a noção de que *uma prova matemática é guiada por intuições que, de algum modo, expandem as regras dos algoritmos empregados* (BROUSSEAU, 2005, p. 80).

[12] Jaworski (2005, p. 183) lembra que o conteúdo matemático em si é poderoso, mas limitado. Um ensino efetivo de matemática requer a compreensão de como o conhecimento matemático se torna acessível ao leitor.

[13] Concebida originariamente por Gaston Bachelard, a noção de obstáculo epistemológico foi desenvolvida, no contexto do ensino de Matemática por Guy Broussseau. A importância de sua superação é destacada por d´Amore (2007, p. 211) ao lembrar que a compreensão destes obstáculos pode modificar determinadas concepções equivocadas dos estudantes.

[14] Azcárate (2006, p. 34) sublinha o trabalho de Charles Parsons, que diferencia "intuition that" e "intuition of". A primeira caracteriza-se por um intuição proposicional, enquanto a segunda diz respeito a uma intuição de objetos. Ambas as formas de intuição foram utilizadas na SF, todavia, nos níveis finais, optamos pela intuição de sentenças proposicionais.

[15] Rohde (2008, p. 29) esclarece os termos em inglês "skill" e "ability" no contexto da aprendizagem em Matemática. Para essa autora, "skill" significa a capacidade básica de realizar tarefas que envolvem a aprendizagem adquirida por intermédio do treinamento e experiência. Enquanto que "ability" representa uma predisposição natural e, aparentemente, sem treinamento prévio para se realizar tarefas. Em ambos os casos, temos a mediação do raciocínio intuitivo.

[16] Sierspinska (2005, p. 217) Fornece um auspicioso exemplo o qual ratifica nossa colocação no sentido de que, para o professor, o emprego de notações eficientes propicia um fluxo natural para o raciocínio lógico. Por outro lado, para o aluno, a mesma tarefa pode implicar um intenso esforço mental.

4. REFERÊNCIAS

[1] ABELL, M. & BRASELTON, J. Maple by example, third edition, London: Elsevier Aca-demic Press, 2005.

[2] AZCÁRATE, M. P. Realismo y entidades abstratas: los problemas del conocimiento en matemático (tesis del doctor-al), Laguna: Universidad de la Laguna, 2006.

[3] BALACHEFF. N. Une étude du processus de prevue em Mathématique chez des élèves des Collègue (thése), Grenoble: Institute Foseph Fourier, février, 1988.

[4] BERGSON, H. Creative Evolution, New York: Henry Holt and Company, 1911.

[5] BOOLE, G. An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, New York: Dover Publications, 1958.

[6] BORGES, H. N. et all, A Seqüência Feda-thi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, In: Anais do XV EPENN - Encontro De Pesquisa Educacional Do Nordeste, São Luís, p. 590-609, 2001.

[7] BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. Didactical Handling of Students´ reasoning processes in Problems Solving Situations, In: Laborde, C. Glorian, M. J. & Sierspinska, A. Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom, Netherlands: Springer, 2005, p. 14-58.

[8] BROUSSEAU, G. Fondement et méthodes de la Didactiques des Mathématiques, In: Brun, J. Didactiques de mathématiques, Paris: Déla-chaux et Niestlé, 1996, p. 45-142.

[9] BROUSSEAU, G. Theory of Didactical Situations in Mathematics: 1970-1990, New York: Klumer Academic Press, 2005.

[10] BUNGE, M. Intuitición y Rázon, 1ª édition, Buenos Aires: Delbolsíllo, 1996.

[11] CORNU, B. The Limits, In: TALL, D. Advanced Mathematical Thinking, London: Klumer Academic Publishers, p. 153-165, 2002.

[12] CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné, Paris: La pensée Sauvage, 1991.

[13] COUTURAT, L. La logique de Leibnitz: d´aprés des documents inédits, Paris: Félix Alcan, 1901.

[14] DAVIS, P. & HERSH, R. L´Univers Mathématiques, Paris: Gauthiers et Villars, 1985.

[15] D´AMORE, B. Elementos de Didática da Mate-mática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

[16] DEVLIN, K. The Language of Mathematics: making the invisible visible, New York: Freeman and Company, 1998.

[17] DORIER, J. L. Des programmes a la Classe: Étude de la Transposition didactique interne (thése), Grenoble: Université Joseph Fourier, octobre, 2003.

[18] DOUADY, R. Jeux de Cadres et dialectique outil-objet dans l´enseignement des Mathématiques (these), Paris: Paris VIII, octobre, 1984.

[19] DUVAL, R. Sémiosis et Pensée Humaine: registre sémiotiques et apprentisages intellectuels, Paris: Perter Lang Édition, 1996.

[20] ERNEST, P. The Philosophy of Mathematical Education, London: Palmer Press, 1991.

[21] FERREIRÓS, J. & GRAY, J. The Architecture the Modern Mathematics: essays in History and Philosophy, New York: Oxford University Press, 2006.

[22] FISCHBEIN, E. Intuition in science and mathematics: an educational approach, Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987.

[23] FISCHBEIN, E. Psychology and Mathematics Education, Mathematical, Thinking and Learning, 1999, p. 47-58.

[24] FISCHBEIN, E. The Interaction Between Formal, the Algorithmic, the Intuitive components in the mathematic activity, In: Didactics of Mathematics as Scientific Discipline, London: Klumer Academic Publish-ers, 226-232, 2002.

[25] GRATTAN, G. I. The Search for the mathematical roots – 1870/1940, Oxford: Princeton University Press, 2000.

[26] KENNEDY, H. Peano: Life and Works of Giuseppe Peano, Concord: Peremptory Publications, 2006.

[27] KLEIN, F. On mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to applied sciences, In: Evanston Colloquium, p. 225-233, 1893.

[28] KUIPER, J.J. Ideas and exploration: Brouwer´s road to intuitionism, Utrecht: Utrecht University, 2004.

[29] HADAMARD, J. An essay on The Psychology of Invention in The Mathematical Field, New York: Dover Publications, 1945.

[30] JAROWSKI, B. The Plurality of Knowledge Growth in Mathematics, In: JAWOSKI, B. WOOD, T. Mathematics Teacher Education: Critical International Perspectives, London: Palmer Press, 2005.

[31] JOSHUA, S. & DUPIN, J, Introduction à la Didactiques des Sciences et des Mathématiques, Paris: Presses Universitaires de France, 1993.

[32] LAGES, E. L. Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o ensino médio IM-PA, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[33] LAGES, E. L. A matemática do ensino médio, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro: IMPA, vol 1. 2004.

[34] LAKATOS, I. Proofs and Refutation: the Logic of Mathematical Discovery, London: Cambridge University Press, 1976.

[35] LAKATOS, I. Mathematics, Science and Epistemology: philosophical papers, Vol 2, London: Cambridge University Press, 1978.

[36] MACHADO, N. J. Matemática e Língua Mater-na: análise de uma impregnação mútua, 3ª edição, São Paulo: Cortez, 1993.

[37] MAYER, R. LEWIS, A. B. HEGARTY, M. Mathematical Misunderstanding: qualitative reasoning about quantitative problems, In: CAMPBELL, J. The nature of origins of Mathematical Skills, New York: North Holland, p. 130-145, 1992.

[38] MILL, J. S. Système de Logique détuctive et inductive, 3º édition, Paris: Félix Alcan Editeurs, 1889.

[39] MILLAUD, G. Le rationnel: etudes complementaires à l´essai sur la certitude logique, Paris: Librairie Germer Baillière et Félix Alcan 1898.

[40] MORAIS, S. R. O papel das representações mentais na percepção-ação: uma perspectiva crítica (tese), São Paulo: Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, 2006.

[41] OTTE, M. O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática, Editora UNESP, São Paulo, 1993.

[42] PEDEMONTE, B. Etude didactique et cognitive des rapports de l´argumentation et de la démonstration dans l´apprentissage des mathématiques (thése), Université Joseph Fourier, setembre, 2002.

[43] POINCARÉ, H. La logique et l´intuition dans la science mathématique, In: L´enseignement Mathématique, Vol. 1, p. 158-162, 1899.

[44] POINCARÉ, H. Les definitions générales en mathematiques, In: L´enseignement Mathematique, Vol. 6, p. 257-283, 1904.

[45] POLYA, G. How to solve it: a new aspect of mathematical method, Princeton: University Press, 1945.

[46] ROHDE, T. E. An examination of how visual perception abilities influence mathematics achievement (tesis), Cleveland: Western Reserve University, 2008.

[47] RUSSELL, B. Mysticism and Logic and other essays, London: George Allen & Unwin, 1910

[48] RUSSELL, B. The Analysis of the Mind, London: The Macmillan Company, 1921.

[49] SIERPINSKA, A. Understanding in Mathematics, Studies in Mathematics Education, London: Palmer Press, 1994.

[50] SIERPINSKA, A. Discoursing mathematics away, In: Kilpatrick, J. Hoyles, C. Skovsmose, O. Meaning in Mathematics Education, p. 205-231, 2005.

[51] SAFUANOV, I. Thinking in Images and its Role in Learning Mathematics, In: International Group of Psychology of Mathematical Education, Hawaii, p. 81-95, 2003.

[52] TALL, D. & VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity, In: Educational Studies in Mathematics, Nº 12, p. 151-169, 1981.

[53] TALL, D. The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics, In: For the Learning of Mathematics, p. 38-42, 1989.

[54] TOULMIN, S. The Uses of Argument. Cambridge: University Press, 1958.