



XIII ENEM



Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula

MEDIAÇÃO DOCENTE: UTILIZANDO A SEQUÊNCIA FEDATHI EM UMA AULA PARTICULAR PARA O ESTUDO DE INTERVALOS DE NÚMEROS NATURAIS

Carlos Henrique Delmiro de Araújo¹

Milínia Stephanie Nogueira Barbosa Felício²

João Luzeilton de Oliveira³

Hermínio Borges Neto⁴

Resumo:

Este artigo está pautado no ensino de números naturais, em especial, no estudo da reta numérica natural, com o intuito de descobrir quantos elementos possui um intervalo fechado natural. A sessão didática foi uma aula particular, popularmente conhecida como reforço escolar, para uma aluna com Ensino Médio completo e que está em preparação para o vestibular. No Ceará, possui apenas uma dissertação de mestrado tratando do reforço escolar. Nosso objetivo é de apresentar uma alternativa de ensino no tocante dos números naturais, atrelado ao reforço escolar. Utilizamos a metodologia de ensino Sequência Fedathi para atingir o objetivo proposto. Tivemos como resultados uma mudança de postura do professor, quanto ao ensino tradicional, e uma maior participação da aluna na construção do conhecimento.

Palavras-chave: Reforço Escolar; Ensino de Matemática; Reta Numérica; Números Naturais.

1. Introdução

O conjunto dos números naturais está presente desde o início da vida escolar. A ideia de contar com os dedos, ou palitinhos, já dá uma noção dos números naturais. Em seguida, a criança aprende as operações básicas no conjunto dos números naturais (\mathbb{N}),

¹ Laboratório Multimeios: delmiro@multimeios.ufc.br

² Universidade Federal do Ceará: milinia@multimeios.ufc.br

³ Universidade Estadual do Ceará: joao.luzeilton@uece.br

⁴ Universidade Federal do Ceará: herminio@multimeios.ufc.br



XIII ENEM

Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula quais sejam: adição, subtração, multiplicação e divisão. Na educação básica, os alunos se deparam com o estudo dos intervalos, e seu estudo se intensifica quando lhes é apresentado o conjunto dos números reais. Apesar disso, nos limitaremos ao estudo de intervalos em \mathbb{N} .

A sessão didática aqui trabalhada foi realizada em Fortaleza, Ceará, em uma aula particular para uma aluna que já possui o Ensino Médio completo e está em preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Um dos autores, que foi o professor particular em questão, notou a dificuldade da aluna em utilizar intervalos de números naturais e a reta numérica natural, e com isso tivemos a preocupação de trabalhar uma proposição matemática contida no campo da aritmética. Tal proposição, auxilia na definição de intervalos e quantos elementos existem num intervalo fechado de números naturais.

Diante disto, este trabalho consiste em uma sessão didática com o intuito de enunciar a proposição “[...] se $a < b$, a e b naturais, o intervalo $[a, b]$ possui $b-a+1$ elementos.” (HEFEZ, p.12, 2015). As definições de intervalos é dada por Lima *et al* (p. 82, 2012) da seguinte forma: “[...] $[a, b]$ é um *intervalo fechado*, (a, b) é *aberto*, $[a, b)$ é *fechado à esquerda*, $(a, b]$ é *fechado à direita*”.

Nosso objetivo é realizar a mediação com o intuito da aluna enunciar a proposição. Para tal, utilizaremos a metodologia de ensino Sequência Fedathi (SF) e esta escolha consiste em tratar da postura do professor como mediador do conhecimento.

No fim da sessão, observamos que a aluna sentiu mais confiança sobre a matemática pelo fato de ter resolvido exercícios referentes a proposição em questão, e de ter enunciado a proposição de maneira intuitiva.

Este trabalho busca contribuir com o ensino de matemática e, em especial, sobre os intervalos em \mathbb{N} , e disseminar a SF como metodologia de ensino. Apesar da SF ser uma metodologia consagrada, pois existem artigos, resumos expandidos em eventos, monografias, dissertações e teses publicadas com a utilização da sequência, um trabalho com sua utilização em reforço escolar se resume a Jucá (2004).

2. O Reforço Escolar no Brasil



XIII ENEM

Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula

Baseado nas experiências dos autores e da dissertação de Jucá (2004), podemos observar que o reforço escolar decorre de notas baixas nas avaliações internas da escola. Diante do insucesso dos alunos nas avaliações, os pais recorrem ao professor particular para sanar dúvidas e, como consequência, o aluno evoluir perante notas no boletim escolar.

Por outro lado, o reforço escolar não é atrelado em prol da aprendizagem. Visto que, caso o aluno aprenda, mas de alguma forma, não tenha o êxito esperado em uma avaliação, o reforço é taxado como um fiasco. Isso se dá, segundo Jucá (2004), pelo fato de existir o reforço escolar apenas para recuperar nota.

Na visão dos alunos, eles acreditam que na escola não se é possível sanar todas as dúvidas. Outros não tiram suas dúvidas por vergonha do professor, ou de seus colegas deduzirem que a dúvida não é cabível. Os alunos enxergam o reforço escolar como um ambiente em que possa tirar dúvidas sem ser julgado e que poderá resolver exercícios com atenção total do professor (JUCÁ, 2004).

Outro ponto a destacar, porém na visão dos professores, é que o reforço escolar é uma maneira de obter renda extra. Alguns são professores de escola e, nos horários livres, se ocupam com aulas particulares para se obter a renda extra. Mas também existem professores que trabalham apenas com o reforço escolar, apenas com o argumento de que o retorno financeiro é maior em relação a ser professor de escola (JUCÁ, 2004).

O reforço escolar, de fato, é algo presente na educação brasileira. Em Fortaleza, Ceará, por exemplo, existem vários centros de reforço escolar, uns com salas convencionais, outros com atenção ao atendimento domiciliar, além de professor autônomos. Agora, apresentaremos a SF como metodologia de ensino, pois é a metodologia utilizada pelos autores na realização das aulas, e também porque é a metodologia vista no relato de experiência que teremos mais adiante.

3. Sequência Fedathi como metodologia de ensino

A SF, como metodologia de ensino, propõe ao professor atuar como “mediador, pesquisador, investigador” (MENDONÇA, 2017, p.14). Neste caso, o professor reflete sobre sua prática, valorizando erros, estimulando a curiosidade e proporcionando aos seus alunos, a construção do conhecimento durante uma investigação, por meio de um problema.



XIII ENEM

Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula

A vivência da SF é determinada por quatro fases: tomada de posição, maturação, solução e prova. Na tomada de posição, o professor apresenta para um aluno um problema generalizável; na maturação, o aluno vai se debruçar sobre o problema para em seguida, na solução, apresentar para a turma suas conjecturas. Por fim, na prova, o professor sistematiza o conteúdo, aproveitando os caminhos diversos apresentados em sala de aula, questionando, e provocando no aluno, condições de avanço. Esta prova não se trata de uma avaliação. “O objetivo da fase da Prova é estabelecer interações cognitivas entre o que foi pensado e exposto (conjeturado) pelos alunos e as verdades explicitadas pelo professor, almejando o máximo aprendizado possível” (MENEZES, 2018, p.102). Para a demanda de interações, que o professor pode provocar em sala de aula, estão as perguntas.

A pergunta serve para desequilibrar o aluno e impulsioná-lo à investigação, visto que pode desafiá-lo a sair da posição de ouvinte, para assumir a função de pesquisador, na busca de resposta para o problema de sala de aula, ou outro ambiente, fazendo com que ele se envolva e participe da constituição do próprio conhecimento, como propõe a Sequência Fedathi (FONTENELE, 2017, p.110)

Veremos no decorrer do trabalho, várias perguntas feitas pelo professor a fim de impulsionar a aluna para que cresça cognitivamente e chegue na prova do teorema proposto. “Assim, a pergunta pode ser utilizada como instrumento de mediação didática” (SOUSA, 2017, p.100).

Além da pergunta, são fundamentos da metodologia o *plateau*, o contraexemplo, concepção do erro e a pedagogia mão no bolso. O primeiro faz referência “com o conhecimento necessário aos alunos para desenvolver a contento a atividade. O professor deve realizar uma investigação para saber em que grau de conhecimento estão os alunos” (MENEZES, 2017, p.62). Partindo de um conhecimento que o aluno já sabe, o professor pode propor um problema no qual o aluno terá a base fundamental para avançar em sua compreensão.

No que se refere aos contraexemplos, eles têm “a intenção de desequilibrar o estudante, fomentando neste a reflexão sobre sua ação” (FERREIRA, 2018, p. 49).

Desta maneira, enquanto a pergunta pretende fazer com que o aluno averigue sobre o problema mostrado, buscando sua resposta, o contraexemplo intenciona promover no aluno a reflexão, para que este analise suas afirmações e/ou negações, a fim de confirmar ou não o(s) resultado(s) (FERREIRA, 2018, p.50).



XIII ENEM

Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula

No que se refere ao erro, procura-se então corrigir. O aluno precisa entender o porquê de estar errando para que cresça cognitivamente. O que ensina não é o erro, mas o que se faz com ele. Neste sentido é que se fala em valorizar os erros dos alunos e utilizar deles para que o aluno cresça cognitivamente.

Finalmente, outro conceito muito utilizado é o da pedagogia mão no bolso, que se trata de não responder imediatamente uma pergunta para o aluno. Os professores estão acostumados a perguntarem e responderem imediatamente, não dando tempo para o aluno refletir. Deixar o aluno maturar, é de grande importância para o que propõe a SF.

O professor que aplica sessões didáticas com essa metodologia, aos poucos vai refletindo e mudando sua postura em sala, e isto é visado pela sequência, mexer na mediação do professor. “Modificar a postura e ensinar de forma diferenciada não é uma tarefa imediata, precisa ser trilhada e refletida constantemente, tendo como foco principal o progresso do aluno” (FELICIO, 2018, p.107).

4. Aplicação em uma aula

No relato, trata-se de uma aula particular realizada por um dos autores e o conteúdo tratado foi a reta numérica natural. O objetivo da sessão didática se deu em construir, à luz da SF, a seguinte proposição: dados a, b naturais, tem-se que $[a, b]$ possui $b-a+1$ elementos. O *plateau*, com referência a essa atividade, busca resgatar os conhecimentos sobre o que é número natural, o que significa a reta numérica natural e as operações fundamentais em \mathbb{N} .

O professor teve como tomada de posição o seguinte problema: quantos números naturais existem entre 1 e 2? O aluno, de imediato, respondeu: um! Em seguida, professor indagou “qual é o número que está entre 1 e 2?”, e daí a aluna respondeu: “Na verdade, nenhum. Não! Espera aí. Calma.”. Note que esse momento a aluna está maturando a pergunta e sua própria resposta. Após um momento em silêncio, ela respondeu, novamente que existe um número entre 1 e 2, porém não disse qual.

Diante disso, o professor, se apropriando das perguntas (SOUSA, 2015), fez o questionamento para saber qual o número está entre 1 e 2. A aluna perguntou ao professor qual é o número que está entre 1 e 2, e adotando a postura mão no bolso (SANTANA, 2018), não forneceu a resposta e realizou a mediação para que a aluna percebesse o equívoco. Porém, o professor notou que a aluna insistia no erro, então mudou os valores



XIII ENEM

Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula para tentar mediar a percepção do erro por parte da aluna. O professor indagou quantos números estão entre 0 e 1, e a aluna restou que existe um número, em seguida o professor pergunta qual é este número, e a aluna responde dizendo que o número 1, depois o número 0.

Diante da permanência do erro, a pergunta se deu em aumentar o poder de manipulação do aluno, da seguinte forma: “Entre o 2 e o 5, temos quantos números?”. A aluna responde que os números são 3 e 4. Diante do êxito, o professor retomou a tomada de posição: “E entre 1 e 2?”. A aluna, em fase de maturação, ficou em silêncio. Perante o silêncio da aluna, o professor realizou uma nova pergunta: “Entre 1 e 5?”. E a aluna respondeu que estão os números 2, 3 e 4. O professor retoma a tomada de posição com uma mudança de valores, e questiona quantos números existem entre 4 e 5, a aluna diz: “Entre o 4 e o 5? O 4 e o 5, não é? Não sei! É o 1, não?”.

É possível notar que a aluna responde de maneira correta, tratando-se de intervalo fechado, porém a pergunta tem a preposição “entre” que, em matemática, dar-se a entender que os extremos do intervalo não pertence ao conjunto de valores do intervalo. O professor, no entanto, conduzi a aluna a perguntar se os extremos do intervalo estariam ou não no conjuntos dos elementos de um intervalo. Dando continuidade a aula, o professor fez uma nova indagação: “O 1 está entre o 4 e o 5?”, e a aluna: “Não, não está!”. O professor novamente faz a pergunta: “Então temos quantos números entre 4 e 5?”, a aluna responde: “Tem um número, mas não sei qual.”.

Mudando a pergunta, o professor questiona quais os número estão entre 2 e 4, e de imediato a aluna responde que é o número 3. Por outro lado, a aluna observa que não existe nenhum número na reta natural entre 4 e 5. Diante desta observação, o professor sintetiza que não existe nenhum número natural entre n e $n+1$, isto é, entre um número natural e seu sucessor. Com isso, aluna e professor definem o que é intervalo aberto e intervalo fechado. Prosseguindo com a sessão didática, a fim de encontrar o resultado que diga quantos elementos existem no intervalo fechado $[a, b]$, em \mathbb{N} , com a menor que b , temos o diálogo:

Professor: Tomando apenas intervalos fechados, certo? Quantos números existem entre 2 e 5?

Aluna: 4! No intervalo fechado.



XIII ENEM



Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula
Professor: Quais são?

Aluna: São: 2, 3, 4 e 5.

Professor: São quantos elementos?

Aluna: São quatro elementos.

Diante do acerto, o professor notou que a aluna poderia fazer algumas poucas manipulações para então chegar numa solução geral.

Professor: Quantos números existem entre 10 e 16?

Aluna: Espera aí! Existem sete números.

Professor: Muito bem! E entre 10 e 20?

Aluna: Espera ainda. Onze!

Com tais respostas, o professor percebeu que a aluna estava confortável com os problemas propostos, e então decidiu generalizar o problema com a seguinte pergunta: E se fizermos um intervalo fechado a, b , com a menor que b ?

Aluna: O intervalo $[a, b]$?

Professor: Sim. Quantos elementos temos no intervalo $[a, b]$?

Aluna: Sem saber quem é a e quem é b ?

Professor: Sabemos que a e b são números naturais quaisquer.

Aluna: dos anteriores, sempre temos mais um.

Professor: Como assim?

Aluna: Calma! Entre 10 e 20, espera aí. Como se fosse assim: $a = 10$ e $b = 20$.
Daria $a - b = 20 - 10 = 10$.

Professor: O $a = 10$?

Aluna: O $a = 10$ e $b = 20$. O $a - b = 10$, 11 elementos. O $a = 10$ e $b = 16$, 7 elementos.

Professor: Então $10 - 16 = 6$?

Aluna: Dá -6, né? Hum! Espera aí. Calma aí. Veja, $10 - 16$ ficou na minha cabeça,



XIII ENEM

Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula
Professor: Temos números negativos?

Aluna: Não, apenas positivos. Então não fazemos $a - b$.

Professor: Como faremos, então?

Aluna: E se for $b - a$? Se fizer $a = 10$ e $b = 16$, temos $b - a = 6$, com 7 elementos no intervalo $[10, 16]$. Com $a = 10$ e $b = 20$ também funciona! Bateu!

Professor: E quando for o intervalo $[a, b]$?

Aluna: Daria $b - a + 1$!

Veja que, após sucessivas perguntas do professor, a aluna concluiu de maneira contundente o número de elementos de qualquer intervalo fechado $[a, b]$, em \mathbb{N} . A fase de maturação é determinada por toda a manipulação com os intervalos particulares, enquanto a fase da solução é representada por a aluna tentar algoritmizar o que já tinha realizado com intervalos anteriores. Por fim, a prova é marcada quando o professor sintetiza e enuncia a proposição trabalhada. Após esta atividade, a aluna ficou eufórica e pediu mais perguntas, por estar gostando de resolver problemas matemáticos, o que corrobora com as falas de Sousa (2015) no tocante das perguntas motivarem os estudantes.

5. Considerações Finais

No início da sessão didática, a aluna sentiu dificuldades com os questionamentos, a postura mão no bolso e contraexemplos realizados pelo professor. No entanto, ao fim da sessão, a aluna comenta que se sente mais confiante perante o estudo da matemática, pois teve a oportunidade de “criar” um teorema, como aborda Borges Neto (2016) em que o aluno deve ter o trabalho de um matemático na construção do conhecimento de matemática.

O professor, ainda na tomada de posição, e em outros momentos da sessão didática, falou de intervalos abertos e fechados. O intervalo aberto, pode ser dito, de outra forma, como “entre”. O intervalo fechado, sendo dito como “de ... até...”. Vale ressaltar que a discente já tinha visto tal assunto em sua vida escolar, mas não lembrava de como utilizava e então, o professor gerou tal conhecimento dentro de uma atividade que já necessitava o conhecimento de intervalo aberto.



XIII ENEM

Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula

Ainda sobre a apresentação de intervalos, isso vai de encontro a um dos princípios da SF, onde se deve enxugar o currículo. Tal maneira de enxugar não se trata apenas de retirar o assunto e esquecer-lo, mas sim de abordá-lo de forma que não precise de tanto tempo e o aluno possa construí-lo dentro da sessão didática.

Por outro lado, abordando uma contextualização da tomada de posição utilizada, poderíamos alterar a pergunta “quantos números existem entre 1 e 2?”, para “em um livro, quantas páginas existem da página 287 até a 421?”, por exemplo. Esta sugestão se dá para o aluno ter maior poder de manipulação com o problema.

6. Referências

BORGES NETO, H. **Uma proposta lógico-construtiva-dedutiva para o ensino de Matemática**. 2016. 28f. Tese (Ascensão a Professor Titular) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

BORGES NETO, H. (Org.). **Sequência Fedathi no Ensino de Matemática**. Curitiba: CRV, 2017.

BORGES NETO, H. *et al.* **Sequencia Fedathi: fundamentos**. V. 3. Curitiba: CRV, 2018

FELICIO, M. S. N. Reflexões de uma experiência com polígonos utilizando a Sequência Fedathi. *In: BORGES NETO, H. et al. Sequencia Fedathi: fundamentos*. V. 3. Curitiba: CRV, 2018.

FERREIRA, F. C. Contraexemplo. *In: BORGES NETO, H. et al. Sequencia Fedathi: fundamentos*. V. 3. Curitiba: CRV, 2018.

FONTENELE, F. C. F. O ensino de base de um espaço vetorial numa proposta construtiva. *In: BORGES NETO, H. (Org.). Sequência Fedathi no Ensino de Matemática*. Curitiba: CRV, 2017.

HEFEZ, A. **Iniciação à aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 127 p. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf>>. Acesso em: 1 mar. 2019.

JUCÁ, A. M. **O computador como ferramenta para mediação de atividades a distância de reforço escolar em matemática**. 2014. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.



XIII ENEM



Encontro Nacional de Educação Matemática

Cuiabá/MT - 14 a 17 de Julho de 2019



Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula

LIMA, E. L. *et al.* **A matemática do ensino médio**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 280 p. 1 v.

MENDONÇA, A.F. A pesquisa acadêmica em Educação Matemática no Ceará. *In:* BORGES NETO, H. (Org.). **Sequência Fedathi no Ensino de Matemática**. Curitiba: CRV, 2017.

MENEZES, D.B. Uma sessão de taxa de variação no ensino de Cálculo. *In* BORGES NETO, H. (Org.). **Sequência Fedathi no Ensino de Matemática**. Curitiba: CRV, 2017.

MENEZES, D. B. Prova. *In:* BORGES NETO, H. *et al.* **Sequencia Fedathi: fundamentos**. V. 3. Curitiba: CRV, 2018.

SANTANA, A. C. S. Mão no Bolso: postura, metodologia ou pedagogia? *In:* BORGES NETO, H. *et al.* **Sequencia Fedathi: fundamentos**. V. 3. Curitiba: CRV, 2018.

SOUSA, F. E. E. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. 2015. 282 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.