UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ADELMIR DE MENEZES JUCÁ

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO AMBIENTE VIRTUAL DE ENSINO TELEMEIOS COM MEDIAÇÃO NA SEQUÊNCIA FEDATHI

Fortaleza

2011

ADELMIR DE MENEZES JUCÁ

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS
NO AMBIENTE VIRTUAL DE ENSINO TELEMEIOS
COM MEDIAÇÃO NA SEQUÊNCIA FEDATHI

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

Fortaleza
2011

ADELMIR DE MENEZES JUCÁ

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

NO AMBIENTE VIRTUAL DE ENSINO TELEMEIOS COM MEDIAÇÃO NA SEQUÊNCIA FEDATHI

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor.

Apresentada em ____/_____/_____

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará

____
Profª. Drª. : Bernadete de Sousa Porto (Coorientadora)
Universidade Federal do Ceará

____
Prof. Dr. : Paulo Meireles Barguil
Universidade Federal do Ceará

____
Prof. Dr. Claudio Carlos Dias
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

____
Prof. Drª. Débora Borges Ferreira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

____
Profª. Drª. Suzana Maria Capelo Borges
Universidade Estadual do Ceará

DEDICATÓRIA

O percurso traçado para a produção deste trabalho não está diretamente ligado apenas às minhas atividades profissionais e acadêmicas, ele é a culminância de uma longa etapa de minha vida que foi compartilhada e apoiada pelos meus familiares, que sempre foram pródigos em compreensão, paciência e carinho. A eles é dedicado.

Aos meus pais Walmir e Adelsina que, mesmo em outro plano, se fizeram sempre presentes;

À minha mulher Ana Lourdes;

Aos meus filhos Dudu e Aninha;

Aos meus irmãos Walmir, Waldemir, Anair e Aldinha.

AGRADECIMENTOS

Para alcançar os objetivos deste trabalho, meu itinerário foi compartilhado por um grupo de pessoas a quem muito devo. A elas, meu agradecimento sincero.

Ao Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, mais que um orientador, um companheiro;

À Profª. Drª. Bernadete Sousa Porto, pelo acompanhamento e motivação indispensáveis;

Aos membros da Banca Examinadora Prof. Dr. Paulo Meireles Barguil, Prof. Dr. Claudio Carlos Dias, Profª. Drª. Suzana Maria Capelo Borges e Profª. Drª. Débora Borges Ferreira, pelas valiosas contribuições dadas à produção do texto final;

À Faculdade 7 de Setembro, personificada por seus diretores Ednilton Soárez, Ednilo Soárez e Henrique Soárez, pelo apoio imprescindível;

Aos meus colegas Daniel Capelo Borges e Janete Barroso Batista, pela cumplicidade.

Missão

Ergue a face
Adentra o palco de tua vida
Encara os circunstantes
És o centro

Não és mais tu
És, agora, tudo o que pretendes
E tudo o que te pensam
És o líder

Planta
O apoio, o amor, a fé
Colhe
A esperança de que o mundo seja revolucionado
Antes do próximo intervalo
És o profeta

Bebe a cicuta
Dos pés inchados e da voz rouca
Prossegue, entretanto
Até que o sinal soe
Ou até que vidas tomem novos rumos
És o guerreiro

Toca o jovem
Constrói a ponte
Entre seu coração e suas idéias
Tens o dever cumprido
És o professor

Carlos Eduardo Jucá

RESUMO

Neste trabalho avaliei as potencialidades de um Ambiente Virtual de Ensino – Telemeios no desenvolvimento de um curso a distância de Construções Geométricas com régua e compasso com o professor exercendo sua função mediadora seguindo as orientações da Sequência Fedathi. O conteúdo de Construções Geométricas, apesar de sua importância, tem sido pouco estudado no ensino básico no Brasil, e investiguei, por meio de uma pesquisa-ação participativa, usando a metodologia da Engenharia Didática, uma nova proposta que agregou a tecnologia como elemento motivador e facilitador do trabalho com o tema. TeleMeios é um ambiente telemático arquitetado com a utilização de rotinas de softwares livres, dotado de uma interface que permite a comunicação através de texto, som, imagem e *email*, incorporando, desse modo, todos os recursos empregados, atualmente, na educação a distância e vai além ao possibilitar o compartilhamento total de aplicativos. O diferencial da proposta foi que se estabeleceu uma interação total entre os sujeitos, que se deu através de uma interligação síncrona, em tempo real, via internet, com todos os participantes do curso compartilhando os *softwares* utilizados. Esse compartilhar quer dizer que todos os sujeitos visualizavam as atividades desenvolvidas pelos outros, que processos eram utilizados, qual era o método de resolução de problemas empregado e, além disso, acessavam, remotamente, as máquinas dos outros participantes, sendo permitido até que qualquer deles pudesse desenhar ou escrever no computador de um companheiro virtual. As aulas virtuais foram planejadas através da Engenharia Didática e abordaram as principais construções geométricas elementares como perpendicular, bissetriz, mediatriz, arco capaz, entre outras. Durante as sessões, a régua e o compasso tradicionais foram substituídos pelo software de geometria dinâmica: Geogebra. Ao desempenhar a função de professor, adotei, nas intervenções, o posicionamento recomendado pela Sequência Fedathi, que é uma proposta teórico-metodológica concebida no Laboratório Multimeios da Universidade Federal do Ceará pelo prof. Dr. Hermínio Borges Neto. Através das suas quatro fases: tomada de posição, maturação, solução e prova, a nova metodologia objetiva, a partir da mediação entre professor e alunos, propiciar uma aprendizagem significativa, construída com a participação ativa dos sujeitos de modo colaborativo. A partir de toda a conjuntura teórica e tecnológica, o curso de Construções Geométricas se concretizou em cinco aulas para cinco alunos e foi possível verificar a efetividade do ambiente tecnológico montado pela vigorosa interação entre os sujeitos e pela ativa mediação do professor. As construções geométricas foram elaboradas colaborativamente com a participação de todo o grupo.

Palavras-chave: Sequência Fedathi, TeleMeios, Ambientes Virtuais de Ensino, Ensino de Matemática, Construções Geométricas.

ABSTRACT

In this work I evaluated the potentials of a Virtual Teaching Environment – TeleMeios in the development of a distance course about Geometric Constructions using ruler and measure with the teacher practicing his function as a mediator following the guidelines of Fedathi sequence. The content of Geometric Constructions, despite of its significance, is been insufficiently studied during fundamental teaching in Brazil so I investigated through participatory action research, using the methodology of Didactic Engineering, a new proposal that joined the technologies as a motivator and facilitator element for the work with this theme. TeleMeios is a telematic environment elaborated with the utilization of free software routines, which has an interface that promotes the communication through text, sound, image and email, incorporating all the resources nowadays utilized on distance education and advances allowing the complete sharing of applicative. The differential of our proposal was the settlement of a total interaction between the participants, what happened through a synchronous interconnection, real time, via internet, with all the participants sharing the softwares. This sharing means that all the participants could visualize the activities developed by their partners, the processes that were remotely used, which was the utilized method of problem solution and, in addition, they remotely accessed the other participants' machines, being allowed to write and draw in the computer of a virtual partner. The virtual classes were planned through Didactic Engineering and approached the main elementary geometric constructions as perpendicular, bisectrix, bisector, able arc and others. During the sessions we substitute the traditional ruler and measure and utilized the software of dynamic geometry: GeoGebra. Playing my teacher role, I adopted in the interventions the management indicated by Fedathi Sequence, which is a theoretic-methodological approach created on Multimeios Laboratory of Federal University of Ceará by professor Dr. Hermínio Borges Neto. Through its four steps: positioning, maturation, solution and test, the new methodology aims, from the mediation between teacher and students, to provide a significant learning constructed with the active participation of the students in a collaborative way. From all this theoretical and technological context, the Geometric Construction course was materialized in five classes for five students and it was possible to observe the effectiveness of the technological environment assembled by the strong interaction between the partners and the active mediation of the teacher. The geometric constructions were elaborated in partnership through the participation of all members of the group.

Key words: Fedathi Sequence, TeleMeios, Virtual Teaching Environment, Mathmatics Teaching, Geometric Construction.

RÉSUMÉ

Cette étude a évalué le potentiel d'un environnement d'apprentissage virtuel - Telemeios au développement d'un apprentissage à distance sur les Constructions Géométriques avec la règle et le compas avec l'enseignant en tant que médiateur en suivant les directives de la Séquence Fedathi. Le contenu de Constructions Géométriques, malgré son importance, a été peu étudiée dans l'éducation de base au Brésil, et nous l'avons investigué, travers une recherche-action participative, en utilisant la méthodologie de l'Ingénierie Didatique, une nouvelle proposition qui a ajouté la technologie comme facteur de motivation et de facilitation du travaille sur le thème. TeleMeios est un environnement télématique architecturé avec l'utilisation de routines des logicieaux libres, fourni avec une interface qui permet la communication par texte, son, image et e-mail, intégrant ainsi toutes les ressources utilisées actuellement dans l'éducation à distance et va plus loin en permettant le partage d'applications au total. L'originalité était que la proposition a établi une interaction complète entre les sujets, qui a été à travers une inter-connexion synchrone, en temps réel, via Internet, avec tous les participants du cours partageant les logiciels utilisés. Ce partage signifie que tous les sujets pouvaient voir les activités des autres, les processus utilisés, la méthode de résolution des problèmes et pouvaient également accéder à distance les machines des autres participants, étant même autorisées à dessiner ou écrire sur l'ordinateur d'un compagnon virtuel. Les classes virtuelles ont été préparées à travers l'Ingénierie Didatique et ont abordé les principales constructions géométriques élémentaires comme médiatrice, bissectrice, arc capable, entre autres. Pendant les séances, la règle et le compass traditionnels ont été remplacés par un logiciel de géométrie dynamique: Geogebra. En jouant le rôle d'enseignant, le rechercheur a adopté le placement recommandée par Séquence Fedathi, qui est une proposition théorique et méthodologique conçu au Laboratoire Multimeios de l'Université Fédérale du Ceará par le Pr. Dr. Herminio Borges Neto. Travers ses quatre phases: la prise de position, la maturation, la solution et la preuve, la nouvelle méthodologie vise, à travers la médiation entre l'enseignant et les étudiants, fournir un apprentissage significatif, construit avec la participation active des individus dans un esprit de collaboration. Basés ser ce contexte théorique et technologique, les cours de constructions géométriques ont eu lieu dans cinq classes pour cinq élèves et nous avons pu vérifier l'efficacité de l'ambiance technologique construit par une forte interaction entre les étudiants et la médiation active de l'enseignant. Les constructions géométriques ont été développés en collaboration, avec la participation active de l'ensemble du groupe.

Mots-clés: Sequence Fedathi, TeleMeios, Ambients Virtuels d'Enseignement, Enseignement de Matémathique, Constructions Géométriques.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objeto de investigação o ensino de Geometria assistido em um Ambiente Virtual de Ensino, o TeleMeios.

A origem do estudo está vinculada à minha vida pessoal e profissional. Ele é uma ampliação do trabalho desenvolvido no curso de mestrado que conclui na área de Educação em 2005, e de toda a minha trajetória como professor de Matemática, que já se desenvolve há mais de 30 anos. Desde que conclui o ensino médio em 1973 e ingressei no curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Ceará, iniciei, paralelamente, minhas atividades como professor em escolas do ensino médio e em cursinhos pré-vestibulares. Evidentemente, comecei as atividades profissionais, como tantos outros novos professores, sem nenhuma formação específica para tal. Era um jovem com grande facilidade de comunicação, que tinha aprendido razoavelmente os conteúdos de Matemática da educação básica, o que me permitia resolver a maior parte dos problemas de Matemática propostos nos exames vestibulares. Esses requisitos eram considerados suficientes para as escolas que me contratavam e para os alunos que assistiam às minhas aulas.

Ao finalizar o curso de Engenharia, em 1983, na UFC, profissão que nunca exerci, optei por dedicar, integralmente, meus horários ao magistério, nos cursos pré-universitários, atividade na qual estava sendo bem-sucedido. O perfil dos profissionais que atuavam na área era aproximadamente o mesmo: praticamente nenhuma formação pedagógica e não estavam preocupados em analisar com profundidade os problemas relacionados a ensino e aprendizagem, pois nosso objetivo era *treinar* os alunos para a prova que dava acesso ao ensino superior. Os professores de pré-vestibular tinham muito prestígio nos colégios, não precisavam corrigir tarefas e provas e tinham remuneração bastante compensadora. Pela enorme extensão do programa a ser cumprido, e pelo curto período de que os alunos dispunham, não havia espaço para indisciplina nas aulas, pois os estudantes estavam quase sempre atentos e motivados. Vivia-se num mundo bastante confortável e, é óbvio, todos tinham o interesse de preservar essa situação conforme ele se encontrava.

Alguns fatos, entretanto, me inquietavam nessa “ilha da fantasia”. Mesmo o número de alunos reprovados sendo muito maior do que o dos aprovados, os resultados eram festejados e comemorava-se a grande vitória no vestibular. Algumas turmas tinham mais de duzentos alunos, as aulas eram exclusivamente expositivas, o que não permitia a menor possibilidade de interação dos estudantes com o professor e nem entre eles mesmos. Por mais que ensinássemos em escolas diversas, em todas as classes, ministrávamos exatamente a mesma aula, obedecendo às mesmas sequências, sem levar em conta que sujeitos eram aqueles, quais eram seus conhecimentos prévios, que dificuldades precisavam superar para aprender a matéria. Todos os professores atuavam independentemente, não havia um projeto pedagógico das escolas, cada um possuía as próprias crenças e estratégias, que visavam, fundamentalmente, a tornar as aulas agradáveis para os alunos, pois nesse modelo de instituição o professor precisava "dar Ibope".

Buscando maior embasamento teórico para analisar, aprofundar-me e propor alternativas a esse modelo, resolvi voltar aos bancos escolares e, após mais de 20 anos atuando como professor, licenciei-me em Matemática na Universidade Federal do Ceará, em 2000.

O desenvolvimento alcançado no retorno à Universidade me trouxe bem mais segurança no que se refere à fundamentação dos conceitos, mas no que diz respeito às atividades de ensino, minhas angústias, dúvidas e interrogações só aumentaram. Meus questionamentos passaram a ser referentes a como as crianças e jovens aprendem Matemática, por que os resultados das avaliações (ENEM, SAEB, PISA) são tão desalentadores? Por que tanta desmotivação em relação ao estudo da disciplina? Que atitudes deveriam ser tomadas para incentivar a aprendizagem da matéria?

Na tentativa de encontrar respostas e compreender melhor os fenômenos que envolvem os processos de ensino e aprendizagem, cursei o Mestrado em Educação. O tema que escolhi e as pesquisas que realizei estavam relacionados ao "reforço escolar" do ensino de Matemática com a utilização do computador.

Foi uma experiência embrionária. Dei aulas *on line* para alunos que se preparavam para o vestibular. O trabalho está relatado em minha dissertação de mestrado, defendida na Universidade Federal do Ceará em 2004, quando cheguei às seguintes conclusões:

> 1 Os sujeitos mostraram grande interesse em participar do evento, pois, dos alunos convidados, nenhum recusou o convite. A novidade trazida pela tecnologia foi muito importante. Essa é uma característica que percebo em todas as aulas em que utilizo o computador como mediador da aprendizagem.
>
> 2 É necessário um profundo conhecimento da tecnologia pelo professor que fará a mediação na aula. Defendo a ideia de que a formação do profissional não seja simplesmente treinamento na utilização de *softwares* e sim que os cursos de for-

mação de professores privilegiem a Informática Educativa na acepção de Borges Neto (1999, p.135).

3 Os equipamentos a serem utilizados precisam ser testados e configurados adequadamente, porque, caso contrário, estar-se-á introduzindo obstáculos ainda maiores do que aqueles que os alunos encontram nas aulas convencionais. Enfrentei essa situação quando tive problemas de som na primeira aula de meu experimento.

4 Antes do início de qualquer atividade visando à utilização de novas tecnologias para a mediação da aprendizagem, os alunos devem estar bastante familiarizados com o ambiente, senão configurar-se-á uma situação de pânico em que nem a tecnologia nem os conteúdos serão assimilados. Mesmo preparando os alunos antes das sessões, eles tiveram dificuldades em interagir com os *softwares* de Matemática utilizados.

5 A linguagem simbólica matemática é um sério obstáculo para o trabalho com os computadores, porque os *softwares* mais utilizados, dentre eles os editores de texto, como o *Word,* não possuem interfaces que facilitem a inserção dos símbolos específicos da disciplina.

Apesar de chegarmos a essas conclusões, surgiram vários questionamentos que ficaram sem respostas. Isto porque fugiam aos objetivos estabelecidos inicialmente e, principalmente, porque, em um curso de mestrado, as limitações do tempo não permitiram analisar o problema em grande parte de sua complexidade, destacadamente no que diz respeito à mediação na Educação de Matemática em ambientes digitais.

O conjunto de circunstâncias ora exposto me estimulou a continuar as pesquisas no campo do ensino e da aprendizagem de Matemática, empregando tecnologias digitais. E, desse modo, além de responder às questões antes suscitadas, este trabalho teve a pretensão de avançar, aprofundando, as observações sobre o emprego das tecnologias na Educação, dando ênfase aos aspectos relacionados com a mediação.

Compreendendo que a tecnologia se transforma e avança em nosso fazer cotidiano num ritmo frenético, se fez necessário ampliar, com outros enfoques, o trabalho desenvolvido no mestrado, bem como trazer para a discussão e a análise novas variáveis das teorias de aprendizagem e de como esse conjunto pode ser usado como elemento facilitador na educação; particularmente no ensino e na aprendizagem de Matemática.

Analisando várias propostas de ensino de Matemática utilizando a chamada *Tecnologia Digital de Informação e Comunicação* desenvolvidas até esse momento, concluí que este é um campo ainda totalmente aberto, que ainda se está apenas no início do trabalho de exploração das potencialidades que os novos recursos da tecnologia estão dispondo às escolas, aos educadores e aos educandos.

Acredito que, nas múltiplas possibilidades de interação, simulação e experimentação, residam os principais elementos que favoreçam a aprendizagem de Matemática e que justifiquem o aprofundamento dos estudos dos Ambientes Virtuais de Ensino com finalidades educativas. Nessa área, no entanto, até por ser muito recente, ainda não existem saberes e conhecimentos consolidados que permitam respostas seguras e propostas que possam ser multiplicadas para todo um sistema educacional.

Continuo, portanto, diante de um grande desafio que é, incorporando os avanços tecnológicos, pesquisar novas soluções que favoreçam um melhor ensino e, consequentemente, uma melhor aprendizagem de Matemática.

Mais um passo foi dado por meio da pesquisa que aqui relato e que foi a base para a produção da Tese de Doutorado que submeti ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do título de Doutor. O trabalho está estruturado em seis capítulos nos quais descrevo, tanto nos aspectos teóricos, com uma vasta revisão bibliográfica, quanto na exposição dos experimentos desenvolvidos durante a investigação, todas as atividades empreendidas.

No Capítulo 1, INTRODUÇÃO, além de mostrar minha relação pessoal e profissional com o tema, apresento as justificativas para a produção do estudo.

O Capítulo 2, MATEMÁTICA – O QUE É?, contempla, inicialmente, uma breve narração dos primeiros passos da Matemática, a sua consolidação como ciência e as grandes crises que enfrentou ao longo da sua história. A análise dos momentos de desequilíbrio conduziu a uma discussão sobre as principais correntes da Filosofia da Matemática (Platonismo, Logicismo, Formalismo e Intuicionismo) e suas implicações no ensino e na aprendizagem da disciplina.

O ENSINO DE MATEMÁTICA é esquadrinhado no Capítulo 3, quando faço uma reconstituição dos momentos históricos mais significativos da atividade em aspecto global, para, em seguida, particularizar, mostrando como o ensino da matéria evoluiu no Brasil e qual o seu quadro atual. Esse capítulo versa, ainda, sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática na Educação a Distância, os Ambientes Virtuais de Ensino – AVE e a Geometria Dinâmica. No final, lanço a ***minha proposta*** e ***as questões de investigação*** que nortearam toda a pesquisa.

Para a METODOLOGIA, foi reservado o Capítulo 4, no qual delineio, meticulosamente, todos os procedimentos e métodos da pesquisa científica adotados. É dada relevância especial à Sequência Fedathi, à Engenharia Didática e às mediações e interações. O Ambiente Virtual de Ensino – AVE montado para os experimentos é descrito detalhadamente com destaque especial para o ambiente TeleMeios. Também aqui é feita a caracterização dos sujeitos e a apresentação do cronograma do Curso de Construções Geométricas que ministrei.

No Capítulo 5, ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO AMBIENTE TELEMEIOS, narro a fase experimental do trabalho. Ela foi concretizada por meio de um curso de Construções Geométricas a distância, empregando o ambiente virtual TeleMeios. O aspecto inovador do projeto é que o aparato tecnológico montado possibilitou a mediação e as interações em tempo real com compartilhamento total de todos os aplicativos utilizados. Fui o professor do Curso e, para seu planejamento bem como para o das aulas, tomei como referência a Engenharia Didática e minhas intervenções foram amparadas pelas recomendações da Sequência Fedathi. Todas as ações foram documentadas, o que permitiu a transcrição completa das ações empreendidas.

Finalmente, no Capítulo 6, faço as CONSIDERAÇÕES FINAIS, em que são apresentados os resultados de todo o projeto.

2 MATEMÁTICA – O QUE É?

Este capítulo tem como objetivo caracterizar a Matemática como ciência, destacando suas bases filosóficas, a sua importância em nossos dias e aplicabilidade na vida das pessoas.

2.1 A Ciência, Sua Consolidação e Suas Crises

Nos primeiros registros da presença humana na Terra, já se pôde perceber o desenvolvimento de algumas atividades matemáticas. Desenhos, figuras rupestres e marcas em objetos revelam como os primeiros homens intuíam alguns conceitos matemáticos relacionados à contagem e à representação geométrica.

Desde aqueles tempos bastante recuados, existem registros de mais de 4000 anos (BOYER, 1978), a Matemática sempre esteve associada a ideias como exatidão, irrefutabilidade, clareza, ordem e perfeição e rapidamente se consolidou como um saber científico inquestionável. Foi a primeira disciplina a atingir o estatuto de ciência formal, em razão, principalmente, do fato de que seus objetos, na visão de grande número de pensadores, distanciam-se do mundo empírico e podem ser aceitos como criações autônomas do intelecto humano. Pela estreita correspondência que pode ser estabelecida entre seus instrumentos e os elementos do mundo real, ela passou a ser ferramenta de representação, interpretação e previsão de fenômenos naturais.

Os primeiros passos foram dados pelos povos mesopotâmios, quando inventaram a escrita cuneiforme (blocos de argila impressos com estilete) e criaram uma matemática rudimentar, suficiente para o desenvolvimento do comércio, das construções e do manejo das terras (CAJORI, 2007).

Do período que se inicia por volta de 1800 a.C, desde a da interpretação de inscrições em tabletes de argila, fontes abundantes e confiáveis, pode-se atestar a enorme contribuição dos Babilônios, principalmente com a produção de um sistema de numeração posicional[1] (Figura 1). Tal sistema utilizava uma base sexagesimal e sua lógica foi a mesma utilizada no sistema decimal de numeração hindu-arábico ainda hoje utilizado.

[1] Sistema de numeração no qual cada algarismo representa um valor diferente, de acordo com a posição ocupada em um número. No caso do sistema decimal utilizado no número 777, o primeiro 7 representa 700 unidades, enquanto o segundo representa 70 e o terceiro 7. A vantagem de sua aplicação é que, com um conjunto pequeno de símbolos, se pode representar grandes quantidades.

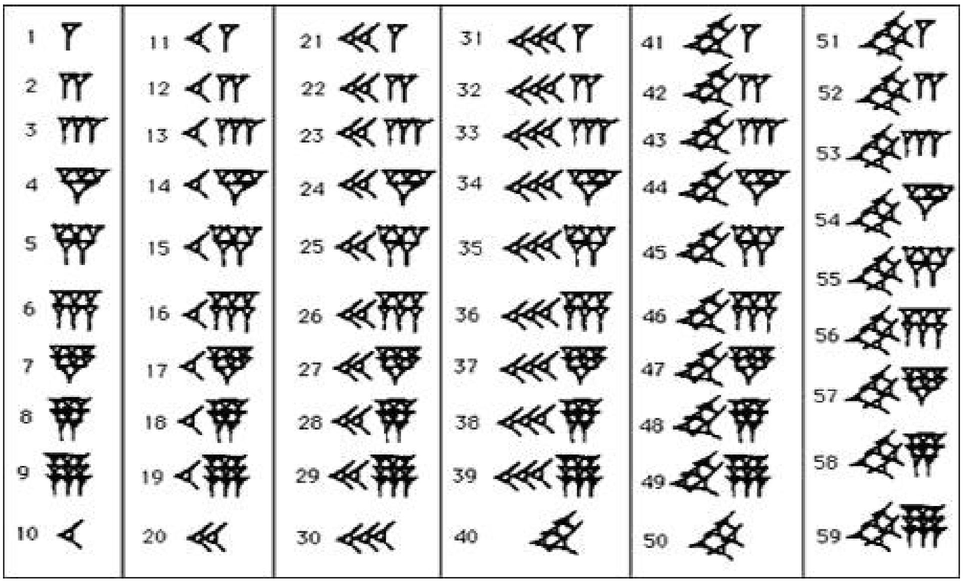


Figura 1: Sistema de numeração babilônico.
Fonte: http://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm

Na Geometria, os babilônicos limitaram-se apenas a casos práticos ligados à agrimensura e ao cálculo de áreas para divisão de terras, demarcação de limites e previsão de enchentes.

Pela grandiosidade das suas construções de engenharia, como as pirâmides e o templo de Amon-Ra, e pela suntuosidade de seus monumentos como a Grande Esfinge, é do senso comum a idéia de que os egípcios foram grandes matemáticos. Não se pode negar que, para alcançar tais feitos, alguma matemática eles deviam conhecer. Contra essa linha de pensamento, no entanto, pesa o fato de que toda a sua produção se prendia ao estudo de casos singulares com o objetivo imediato de solucionar questões do cotidiano, sem a preocupação de obter um processo sistemático de raciocinar sobre as situações, e com base nelas, criar generalizações. Como comentam Cajori (2007, p.34) e Eves (1995, p. 69), um fato matemático simples era subdividido em um grande número de novos casos, sem a preocupação com a elaboração de leis gerais que poderiam levá-los aos primeiros teoremas. O **Papiro de Rhind** pode fornecer a comprovação deste entendimento. Trata-se de um rolo de aproximadamente 5,5m e é o documento mais importante do período egípcio, podendo ser considerado o primeiro compêndio de Matemática. Escrito pelo escriba Ahmes, é uma coletânea de 85 problemas de Aritmética e Geometria com as suas soluções; não contém demonstrações e não se prende aos resultados teóricos.

Sobre os pilares alevantados, principalmente, por babilônios e egípcios, os gregos erigiram a sua mais monumental criação: a **Ciência** Matemática. A radicalidade da mudança ocorre não somente na forma e na acumulação de novos conteúdos, mas, fundamentalmente, na maneira de pensar o conhecimento. Agora, o mais importante não é resolver os problemas com os quais as pessoas se deparam no dia a dia, mas sim entender a lógica, demonstrar a origem e a verdade de cada fato para, então, criar os teoremas que se aplicassem em todos os casos. Como expressa Cajori (2007, p. 43),

> Os egípcios levaram a geometria não mais além do que o absolutamente necessário para os seus desejos. Os gregos ao contrário, possuíam uma forte tendência especulativa. Tinham um sentimento arraigado de descobrir as razões das coisas. Encontravam prazer na contemplação de relações ideais, e amavam a ciência como ciência.

Foi Tales (640 – 546 a.C.), nascido em Mileto, o introdutor da Geometria entre os helenos, sendo o primeiro homem da história a ter seu nome relacionado a uma ideia matemática. Seus métodos e descobertas fazem parte de todos os relatos dos principais autores (Plutarco, Eudemo, Diogénes Laércio) da história grega (CAJORI, 2007 p. 44). Ele mediu a altura das pirâmides do Egito por meio de suas sombras e, também, calculava, a partir da terra, a distância em que os navios se encontravam no mar. Entre outros teoremas são atribuídos a ele:

- igualdade dos ângulos opostos pelo vértice,
- igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles,
- bissecção de um ângulo por seu diâmetro,
- caso ALA (ângulo, lado, ângulo) de congruência de triângulos.

Além disso, provavelmente, ele conhecia que é igual a 180º a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Cronologicamente, após Tales, desponta, na mesma Hélade, uma personagem que se eternizaria em todo o mundo, Pitágoras, de Samos (565 – 490 a.C.). Sua notoriedade foi alcançada, principalmente, pelo teorema que levou seu nome: "*em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*", mas sua influência extrapolou os limites da Matemática. Ao verificar que grande parte dos fenômenos do mundo real estava inter-relacionada com os números (o tempo de gestação dos animais, a duração dos dias e das noites, a periodicidade das estações do ano, a relação dos compassos musicais) passou a crer e a difundir que o número era a própria ***essência*** de todas as coisas. Nascia aí, sob o lema *Tudo é número*[2], a Escola Pitagórica, na qual os seguidores do *mestre* adotavam um misto de práticas científicas, místicas e religiosas que se apoiavam no exercício da Matemática como processo de aprimoramento moral (CAJORI, 2007; BOYER, 1978).

[2] Números para os pitagóricos eram apenas os inteiros e as razões entre eles.

A inexistência de documentos da época envolvia a figura de Pitágoras em um manto de obscurantismo e lenda, mas é obrigatório reconhecer a influência que as ideias de sua escola exerceram na Grécia antiga, conforme relato de Boyer (1978, p. 36),

> De fato é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem, pois ele representava tantas coisas para o povo − filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagreiro, mágico, charlatão. Que foi uma das figuras mais influentes da história é difícil negar, pois seus seguidores, sejam iludidos, sejam inspirados espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego. A purificação da alma dos pitagóricos era realizada em parte por um regime físico estrito e em parte por ritos que lembram os dos adoradores de Orfeu e Dionísio; mas as harmonias e mistérios da filosofia e da matemática também eram partes essenciais desses rituais.

A produção da **Escola** Pitagórica - não se pode falar individualmente em Pitágoras, porque era costume de seu grupo manter os processos de trabalho em sigilo e atribuir exclusivamente ao seu líder os créditos das descobertas - foi de grande relevância e podemos destacar as demonstrações dos teoremas da soma dos três ângulos de um triângulo e que um plano fica totalmente coberto por seis triângulos equiláteros, quatro quadrados ou três hexágonos regulares.

Por volta de 420 a.C., a firme crença pitagórica de que os números inteiros eram o caminho único para que *qualquer coisa pudesse ser conhecida ou concebida* foi abalada drasticamente. Percebeu-se que não existia uma "razão comum" que expressasse a relação entre a diagonal e o lado de um quadrado, isto é, o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis. Tal afirmação é equivalente a dizer que $\sqrt{2}$ é um número irracional, isto é, não existem p e q inteiros, com q ≠ 0, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Para a fé pitagórica, esta revelação possui um efeito devastador porque, se o mundo era descrito pelos números e existiam números irracionais, então o próprio universo também era um território irracional. Esta é a primeira, e enorme, dificuldade a se exprimir na trajetória da Matemática.

Na Atenas dos séculos V e IV a.C., a classe dos cidadãos possuía o poder político e econômico. O trabalho braçal era exclusivamente desempenhado pelos escravos, o que deixava para os primeiros bastante tempo livre para o lazer e a meditação. Um cidadão era tanto mais respeitado quanto maior fosse sua educação e, por isso, era necessário que todos os eles fossem bem educados. Tal fato ensejou a necessidade de um grande número de professores que passaram a formar uma classe remunerada de ***homens espertos* - ** os ***sofistas***.

Apesar de se dedicarem, prioritariamente, ao ensino da Oratória e da Filosofia, os sofistas não puderam ficar alheios à Matemática. Suas contribuições mais importantes, destacadamente na Geometria, estão relacionadas, principalmente, às propriedades do círculo, e são oriundas de seus esforços para a resolução dos ***três problemas clássicos.*** Esses problemas, que se tornaram famosos até nossos dias, desafiaram os conhecimentos e a engenhosidade dos matemáticos por mais de 20 séculos. Buscava-se a solução, utilizando-se apenas régua e compasso, para as seguintes questões:

1 a quadratura do círculo (construir um quadrado que tenha a mesma área que um círculo dado);

2 a trissecção do ângulo (dividir um ângulo dado em três partes congruentes); e

3 a duplicação do cubo (construir um cubo cujo volume seja o dobro do volume do inicial).

Somente no século XIX, quando a Álgebra já estava assentada em bases suficientemente sólidas, demonstrou-se a impossibilidade da resolução dos problemas nos termos em que foram propostos.

Nesse episódio, que representa a segunda grande dificuldade no caminho da Matemática, pode-se perceber uma das facetas mais fascinantes do progresso do conhecimento. Mesmo não encontrando as respostas, mediante os trabalhos empreendidos na busca das soluções, *os três problemas clássicos* estimularam e favoreceram o desenvolvimento da ciência durante mais de dois mil anos.

No século III a. C., ocorre um dos fatos mais relevantes, não só para a História da Matemática, como também das Ciências de um modo geral. Euclides (360 – 295 a.C.), que foi professor da Escola de Alexandria, publicou sua revolucionária obra *Elementos*, que viria a se tornar a primeira publicação de caráter científico como hoje as concebemos. Consoante Eves (1995, p. 167), trata-se de um dos maiores êxitos editoriais de todos os tempos, pois é um dos manuais com maior número de publicações (aproximadamente mil) sendo suplantado apenas pela Bíblia, e foi usado integralmente como texto para inúmeros cursos de Geometria até o início do século XX. No Brasil, era a bibliografia obrigatória nos cursos preparatórios para acesso ao ensino superior, até por volta de 1850.

Existem divergências acerca da competência matemática de Euclides. Enquanto, para uns, o próprio Sábio de Alexandria é o responsável pela maior parte dos resultados por ele publicados, para outros, seu grande mérito foi o de compilar a produção de vários povos até aquele momento da história. Dirimir esta controvérsia não é o mais importante porque, em se tratando de Euclides e sua obra, não é o conteúdo o mais significativo e sim o método.

O maior legado de Euclides foi o método axiomático-dedutivo[3], até hoje modelo para grande parte da produção científica moderna. Para a elaboração e explicação de toda a geometria plana, ele valeu-se de uns poucos e simples princípios não demonstráveis, com suporte nos quais deduziu todos os enunciados dos 13 livros que compõem os *Elementos.* As noções em que se amparou foram divididas em cinco axiomas e cinco postulados (BOYER, 1978, p.77)

Os *axiomas,* ou *noções comuns,* são verdades *evidentes* inerentes a todas as coisas:

A_1. C*oisas que são iguais a uma mesma são também iguais entre si.*

A_2. S*e iguais são somados a iguais, os totais são iguais.*

A_3. *Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.*

A_4. C*oisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.*

A_5. *O todo é maior que a parte.*

Postular significa pedir para ser aceito. Assim, os cinco postulados seguintes são proposições que precisam ser aceitas para que se possa desenvolver toda a teoria.

P_1. *Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.*

P_2. *Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.*

P_3. *Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.*

P_4. *Que todos os ângulos retos são iguais.*

P_5. *Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.*

É com base em tão pouco que Euclides edifica toda a Geometria plana. A empreitada é tão gigantesca que Levi (2008, p. 85) acentua:

> A maravilha dos *Elementos* consistia precisamente em demonstrar, com o exemplo, como a inteligência do homem podia, guiada pelo raciocínio rigoroso, chegar a partir dessas poucas premissas simples às verdades que o secular conhecimento empírico podia ter ensinado.

Desse modo, a Geometria euclideana passou a ser o maior consenso da história das ciências como exemplo de uma disciplina exata, demonstrável, inquestionável, e a linguagem mais apropriada para a representação do mundo empírico.

Foi exatamente sobre este gigantesco monumento da criação matemática, no entanto, que se desferiu um novo e forte golpe. Outro momento de grande “desequilíbrio” verificou-se no início do século XIX, quando do aparecimento das geometrias não euclideanas.

[3] O método axiomático-dedutivo de demonstrações consiste em admitir alguns princípios (mais ou menos evidentes) e, com suporte deles, por meio de um encadeamento lógico, chegar a proposições gerais.

Tudo teve início nos estudos sob novas perspectivas do *quinto postulado* de Euclides. Seu enunciado, que possui estrutura demasiadamente diferente da dos outros, equivale à afirmação *"por um ponto exterior a uma reta, passa apenas uma reta paralela à reta dada"*. Este foi motivo de muitos debates, questionamentos e discordâncias na comunidade matemática. Isto porque muitos pensadores importantes suspeitavam que ele não precisasse ser admitido; que poderia ser demonstrado com respaldo nas outras proposições, ou seja, era um teorema.

Com base nas ideias de John Wallis (1616-1703), Saccheri (1667-1733), Gauss (1777−1855), Nikolai Lobachevskii (1792−1856), János Bolyai (1802−1860) e Bernhard Riemann (1826−1866), foi possível que se desenvolvessem outras geometrias consistentes que não se ancoravam no *quinto postulado.*

Lobachevski admitiu que *por um ponto fora de uma reta passam infinitas retas paralelas a uma reta dada* e, mediante deduções lógicas, formulou uma outra geometria, isenta de contradições e tão verdadeira quanto a de Euclides, que passou a ser chamada de **Geometria hiperbólica**.

De outra forma, mas também modificando o enunciado do quinto postulado, Riemann, supondo que *por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela a reta dada*, traçou as bases da nova **Geometria esférica**.

Ainda no século XIX, outro evento abalaria a segurança do modo de pensar dos matemáticos, que já perdurava por mais de 2000 anos.

Em 1870, quando tentava resolver um problema relacionado com *unicidade da representação de uma função como uma série trigonométrica*, Georg Cantor (1845 − 1918) estabeleceu as bases do que viria a ser a *Teoria dos Conjuntos*, com arrimo na qual pretendia derivar toda a justificação da Matemática. Aprofundando o conceito de infinito, introduzindo as concepções de potência, cardinalidade, relações biunívocas, Cantor conseguiu uma trégua na permanente disputa entre a Aritmética e a Geometria, entre o discreto e o contínuo, que teve origem desde a aceitação da existência dos números irracionais. No final do séc. XIX, porém, mediante paradoxos[4] dos quais o mais famoso é o de Russel, mostraram-se contradições na Teoria dos Conjuntos o que, além de por em xeque todo o trabalho de Cantor, trouxe uma penumbra de dúvidas na confiabilidade de todos os procedimentos matemáticos.

[4] Paradoxo nesse contexto é tomado como dupla implicação entre uma proposição e sua negação, que caracteriza uma contradição insolúvel.

Instalou-se a grande **crise dos fundamentos,** quando os métodos e processos matemáticos foram postos na berlinda. Questionou-se a veracidade de tudo o que tinha sido edificado até então.

Mostrei, até aqui, com vários exemplos, (os números irracionais com Pitágoras; a ausência de solução para os problemas clássicos; a criação de outras geometrias; a crise dos fundamentos) problemas que a Matemática deparou dentro do seu corpo de conhecimentos. Foram situações desafiadoras e complexas no domínio da matemática, enfrentadas pelos matemáticos e que, em razão do nível de conhecimentos disponíveis na época ou da perspectiva lógica adotada, suscitaram dúvidas e incertezas que levaram ora a retrocessos ora a avanços.

Essas ocorrências, entretanto, conduzem a outra classe de questionamentos que surgem, paralelamente, na Matemática, que ela própria, como ciência, não é capaz de resolver. São indagações não relacionadas aos seus conteúdos, mas à sua *essência,* perguntas aparentemente simples, de respostas supostamente óbvias, tais como: o que é número? O que é a matemática? Quais são seus objetos? A Matemática é descoberta ou invenção? Seus objetos são concretos ou abstratos? Qual a relação entre os entes matemáticos e a natureza? Até que ponto os elementos matemáticos podem descrever a realidade sensível?

A complexidade dos pontos suscitados é tão grande que, para respondê-los, a disciplina em si não é suficiente. Para encontrar as respostas, é necessário recorrer a outros campos de saberes, como a Psicologia, a Epistemologia, notadamente a Filosofia e, mais precisamente, a *Filosofia da Matemática*

2.2 Filosofias da Matemática

A *Filosofia da Matemática* auferiu o *status* de disciplina independente desde a **crise dos fundamentos** do início do séc. XX.

Vendo as bases da Matemática serem postas em dúvida e o próprio *pensamento matemático* ser submetido a suspeita, vários pensadores tomaram para si a tarefa de explicar, fundamentar, formalizar e mostrar a consistência da Matemática como ciência. É esse trabalho que solidifica esse novo campo de abrangência da Filosofia.

Se, por um lado, é vantajoso poder recorrer a outras fontes de conhecimentos, de outra parte, enfrentamos a enorme dificuldade de, após inúmeras tentativas, até agora não se ter chegado a uma só e definitiva Filosofia da Matemática. A situação torna-se mais delicada ainda porque problemas filosóficos podem apresentar soluções díspares, que, em si, são totalmente consistentes. Assim é que, com o apoio em referenciais distintos, tentando encontrar respostas para as indagações expressas anteriormente, medraram diversas tendências de filosofias da matemática.

Não se trata, portanto, de resolver problemas de Matemática, e sim pesquisar suas origens e investigar seus pressupostos fundamentais. A diferença foi bem caracterizada por Bertrand Russel (2007, p. 17) da seguinte maneira:

> Mas é preciso compreender que a distinção se dá não na matéria, mas no estado de espírito do investigador.
> A distinção entre matemática e filosofia matemática depende, pois, do interesse que inspira a pesquisa e do estágio que a pesquisa alcançou; não das proposições a que a pesquisa diz respeito.

Não pretendo escrever um tratado sobre Filosofia, é evidente, mas, para entendermos ***o que é*** a Matemática, deter-me-ei aqui, fazendo uma revisão bibliográfica, a destacar as ideias centrais das principais correntes, aquelas que influenciam de maneira mais significativa o pensamento da comunidade matemática: o Platonismo, o Logicismo, de Frege, Russel e Dedekind, o Intuicionismo, de Poincaré e Brouwer e o Formalismo, de Hilbert. Este é o percurso, com pequenas variantes, desenvolvido pelos principais teóricos da área - Davis e Hersh (1989), Eves (1995), Machado, (1997), Silva (2007), Livio (2010).

2.2.1 O Platonismo

Como citado anteriormente, tabletes com escrita cuneiforme encontrados na região da Mesopotâmia, cunhados no período babilônico antigo (1800 a 1600 a.C.), podem assegurar que os babilônios já possuíam sólidos conhecimentos matemáticos. Motivados, provavelmente, por demandas comerciais, desenvolveu-se ali um grupo de escribas que, além de escrever textos, faziam cálculos utilizando um sistema de numeração posicional.

A grandeza e perfeição dos monumentos egípcios, notadamente as pirâmides, favorecem a conjectura de que os egípcios, por volta de 3000 a.C., já possuíam conhecimentos relacionados a Matemática, Astronomia e Engenharia.

Tales de Mileto, e Pitágoras de Samos, considerados os primeiros matemáticos *gregos,* e seus estudos notabilizaram-se até os dias de hoje.

É importante perceber, todavia, que, em todos os casos historiados neste trabalho, a Matemática sempre esteve decisivamente marcada por um caráter utilitarista; isto é, o estudo da matéria visava a objetivos práticos, destinava-se a resolver problemas que as pessoas enfrentavam no seu cotidiano. Podemos, assim, garantir que, em seus primeiros passos, a Matemática possuía não só um caráter empírico, mas também funcional.

Uma mudança fundamental acontece com as ideias de Platão e de seu discípulo Aristóteles, de Estagira. Não que eles tenham sido matemáticos de destaque. O mais relevante é a maneira como eles imaginaram a natureza dos objetos da Matemática e que percurso os homens deveriam percorrer para conhecê-los. Para Silva (2007, p.32), pela primeira vez na história, começa-se a pensar a ciência com os estatutos que a governam até hoje. Agora, para que um conhecimento fosse reconhecido, era necessário que ele pudesse ser demonstrável e, necessariamente, possuísse um caráter desinteressado, isto é, em troca de seu estudo, não se deveria buscar aplicações práticas imediatas nem vantagem financeira. Deveria ser obra apenas do intelecto humano e no *prazer do conhecer* o sábio encontraria sua recompensa. É o que está claro no livro VII de *A República,* de Platão (1999, p. 238):

> – E, noto agora, depois de ter falado da ciência dos números, quanto ela é bela e útil, em muitos aspectos, ao nosso propósito, contanto que seja estudada por amor ao saber, e não para comerciar.

Platão admitia que os homens se relacionavam com dois mundos distintos: o das Formas ou Ideias e o mundo Sensível, sendo este apenas uma cópia imperfeita daquele. Para ele, o mundo das formas era transcendente, eterno, imutável e, somente nele, mediante a razão, se encontrariam a perfeição e a beleza. Ao serem guiados apenas pelos sentidos, os homens eram levados a erros.

Para Platão, os objetos matemáticos possuíam existência concreta, objetiva, independente e anterior à ação humana, em um mundo Ideal. Esses objetos não eram os mesmos que se encontravam na experiência diária. Um quadrado desenhado pelo homem era apenas uma cópia defeituosa da ideia de quadrado que preexistia no mundo das ideias (SILVA, 2007); ou seja, os quadrados que deparamos concretamente têm a forma quadrangular, mas não são eles próprios quadrados. O conhecimento desse mundo ideal só seria possível por intermédio das faculdades do intelecto: a razão e o entendimento. Platão hierarquizava essas duas faculdades, situando a razão em posição superior; ela propiciaria atingir a forma bem mais pura de ciência - a Dialética, conhecimento próprio dos filósofos. O entendimento, forma de ciência situada um degrau abaixo, levaria ao domínio dos conhecimentos matemáticos.

Nessa concepção, resta claro, o trabalho do matemático não é de criar e sim de descobrir objetos e relações preexistentes no mundo ideal mediado pela faculdade chamada reminiscência. Tratava-se de recordar, lembrar algo que já havia sido privilegiado em outro plano de existência. Mais ainda, desse ponto de vista, todas as questões possuem solução, mesmo aquelas para as quais ainda não tenham sido encontradas as respostas, visto que todo o corpo de saberes da Matemática já estava consolidado no mundo das formas. Consoante Silva (2007, p.65),

> Para o platonista os enunciados matemáticos têm um valor de verdade (verdadeiro ou falso, mas não ambos) determinado de uma vez por todas, mesmo que não saibamos qual deles. Isso garante o seu otimismo epistemológico; para ele, os problemas matemáticos são, todos, solúveis. Talvez o conhecimento matemático disponível num certo momento, mas o platonista crê que o desenvolvimento da matemática oferecerá eventualmente respostas a todas as questões que se possam formular (simplesmente porque essas respostas já estão em si determinadas).

A defesa do pensamento *platonista* é apoiada em questões como : quando uma verdade matemática é descoberta hoje, ela passou a existir desde agora ou sempre existiu? Andrew Wiles, em 1993, demonstrou completamente o ***último teorema de Fermat***, que havia sido conjecturado no início do século XVII. E, então, desde quando ele é verdadeiro? Livio (2010, p. 55) responde a essa classe de perguntas da seguinte forma:

> A maioria das pessoas concordaria que a pergunta é boba. É claro que, se for demonstrado que a proposição é verdadeira, então ela *sempre* foi verdadeira, mesmo antes que soubéssemos que é verdadeira.

A aceitação da filosofia platônica, no entanto, enfrenta pelo menos dois obstáculos praticamente intransponíveis: o primeiro diz respeito à localização do mundo das Ideias; onde ficam armazenados os objetos da Matemática? Tanto tempo depois, como não se conseguiu determinar as coordenadas exatas do mundo das formas? O segundo diz respeito ao acesso: como chegar ao mundo ideal? Como os matemáticos capturam um conceito novo? Qual procedimento poderia garantir a descoberta de outra relação geométrica?

2.2.2 O Logicismo

O ideal da corrente logicista, cujos principais representantes foram Gottlob Frege (1848 − 1925) e Bertrand Russel (1872 − 1970), era fundamentar toda a Matemática na Lógica[5] e elaborar uma linguagem formal rigorosa mediante a qual ela pudesse ser descrita sem deixar espaços para dúvidas ou inconsistências. Existe aí uma mudança de *status*, porque a Lógica deixa de ser um instrumento da Matemática para ser, na realidade, a sua fundadora.

[5] Conjunto de estudos que buscam expressar em linguagem matemática as estruturas e operações do pensamento, deduzindo-as de número reduzido de axiomas, com a intenção de criar uma linguagem simbólica rigorosa, adequada ao pensamento científico. Seus princípios basilares são o da identidade, o da não contradição, o do terceiro excluído, além do cálculo dos predicados.

Para isso, o caminho escolhido foi reduzir a ***análise***[6] a processos aritméticos, afastando-a de qualquer influência geométrica. Russel (2007, p. 20) foi incisivo ao acentuar que

> Toda a matemática pura tradicional, incluindo a geometria analítica, pode ser encarada como consistindo inteiramente em proposições acerca dos números naturais. Isto é, os termos que ocorrem podem ser definidos por meio dos números naturais, e as proposições podem ser deduzidas das propriedades dos números naturais − com a adição, em cada caso das ideias e proposições da lógica pura.

Frege adotou como princípio a noção de que a Aritmética era um ramo da Lógica e tentou definir seus elementos arrimado em termos da Lógica clássica[7]. Se sua meta fosse alcançada, como é a Lógica que imputa o caráter de verdade aos fatos matemáticos, ele teria mostrado a consistência de toda a Aritmética. No percurso de seu trabalho, Frege concebeu um sistema, formulado com amparo em leis gerais e regras de inferência claramente definidas, que originou a Lógica moderna.

Frege era um realista. Para ele, os números possuíam existência objetiva e independente dos homens, apesar de não serem objetos do mundo empírico. Ele acreditava que os números só tinham significado no contexto da Aritmética, como relata Silva (2007, p.131):

> Só podemos nos referir a eles no contexto de uma teoria que fala deles, isto é, a aritmética. Isso garante simultaneamente um *lócus*, isto é, uma residência para esses objetos, e uma forma de acesso a eles. Os números existem no contexto da aritmética, eles "habitam" os espaços dessa teoria, para usar uma metáfora. E ademais nosso acesso a eles é mediado por essa ciência, só por meio da aritmética (que é uma ciência objetiva), podemos ascender ao domínio (objetivo) dos números.

Quando o projeto de Frege se encaminhava para a conclusão, foi definitivamente abalado com a demonstração, por meio do paradoxo de Russel[8], de que carregava uma inconsistência lógica insuperável. Esse fato fez com que ele desistisse de levar adiante o projeto logicista.

É curioso que Russel tenha sido o autor do golpe definitivo nas teses de Frege, pois era um dos admiradores e defensores de seus métodos. É tanto que tentou, sem êxito, dar continuidade à empreitada logicista de aritmetização de toda a Matemática. Não foi o único a

---

[6] Análise é o campo da Matemática que fundamenta de forma rigorosa as ideias advindas do cálculo diferencial e integral.

[7] Também chamada de **Lógica Aristotélica,** apoia-se, basicamente, em dois princípios: o da não contradição e o do terceiro excluído. Assim, uma afirmação pode ser falsa ou verdadeira, mas nunca as duas coisas ao mesmo tempo.

[8] X é elemento de A se, e só se, X não é elemento de X. Simbolicamente, $A = \{X / X \notin X\}$. Dessa forma, para que X pertença ao conjunto A, é necessário que ele não pertença a A, o que claramente é uma inconsistência lógica. Em uma versão popular: o barbeiro da minha cidade barbeia a todas e apenas as pessoas que não barbeiam a si mesmas. Decidir se o barbeiro barbeia a si próprio ou não leva a uma contradição, pois se constata que ele só se barbeará se não barbear-se, ou seja, tal barbeiro não pode existir.

tentar superar os paradoxos, pois se destaca o trabalho de Ernst Zermelo (1871 – 1953) que, usando o método axiomático, propôs uma nova apresentação para a Teoria dos Conjuntos, mas, tal como ocorreu com o *quinto postulado* de Euclides, um de seus axiomas, o *da escolha*, levantou a suspeita dos matemáticos. E, de maneira similar ao que ocorreu com a Geometria plana, foi demonstrada a sua independência, por Kurt Gödel (1906 – 1978), o que ocasionaria o nascimento de novas teorias dos conjuntos.

Entre as causas do fracasso do projeto logicista, estão a supervalorização da linguagem matemática formal e o rigor das demonstrações e dos procedimentos lógicos. Com isso, a atividade matemática não levava em consideração o contexto e se distanciava exageradamente das intuições e aplicações empíricas.

2.2.3 O Formalismo

David Hilbert (1862 − 1943) elaborou uma proposta idealista em que pretendia mostrar a consistência da Matemática, por via de demonstrações rigorosas, utilizando apenas processos finitários que os construtivistas não pudessem rejeitar. Cria, assim, o formalismo sustido na ideia de que, a fim de que houvesse uma teoria, era suficiente que não contivesse contradições em seu interior, isto é, fosse consistente.

Não era necessário que os enunciados tivessem conteúdo, significado ou qualquer conexão com o mundo físico. Sobre a posição formalista, Davis e Hersh (1989, p.381) comentam:

> Tudo o que podemos em matemática é que o teorema segue-se logicamente dos axiomas. Assim, os enunciados dos teoremas matemáticos não possuem nenhum conteúdo; não se referem a nada. Por outro lado, segundo o formalista, estão livres de quaisquer dúvidas ou erros possíveis, pois o processo das demonstrações rigorosas e deduções não deixa falhas ou omissões.

O projeto formalista apoiou-se em três eixos principais:

- elaboração de uma linguagem formal e regras de inferência que permitissem a descrição dos objetos e demonstrações em que cada elemento fosse mecanicamente verificável;

- criação da metamatemática, por intermédio da qual são instituídas teorias formais para serem utilizadas como regras de transformações de fórmulas; e

- demonstração de que no sistema não existem contradições, isto é, toda a teoria é consistente e, portanto, a Matemática estará integralmente formalizada.

Sua intenção era transformar a Matemática numa teoria axiomática formal não interpretada. Com apoio em Nilson Machado (1997, p.30) é possível esquematizar os elementos de uma teoria formal do seguinte modo:

> Termos primitivos → regras de formação → fórmulas bem-formadas → axiomas ou postulados → regras de inferência → Teoremas.
>
> Os termos primitivos descrevem os objetos concretos de que trata a teoria. As regras de formação de fórmulas organizam o discurso a respeito desses objetos, distinguem as fórmulas bem formadas das que carecem de significado. Os axiomas são verdades básicas, iniciais, que devem se apoiar na evidência empírica. As regras de inferência determinam as inferências legítimas e distinguem, dentre as fórmulas bem-formadas, as que constituem os teoremas, que são verdades demonstráveis a partir dos axiomas, em última análise.

Nesse sistema, o objeto matemático não tem nenhuma importância, pois o que existem são métodos para inferir novas fórmulas, assentadas em alguns preceitos. Desse modo, a Matemática é interpretada apenas como um jogo combinatório de símbolos, desprovido de qualquer significado.

Apesar de todo o otimismo e entusiasmo de Hilbert em 1931, Kurt Godel desfere um golpe avassalador em seu programa. A um só tempo, ele demonstrou a incompletude da Aritmética formal e que era impossível provar sua consistência com apoio nas inferências dentro da própria Aritmética. Tornou-se célebre a frase de André Weil que resume essa conjuntura "Deus existe, visto que a matemática é consistente, e o Diabo existe, visto que não podemos prová-lo."

Hilbert foi um opositor inflexível do construtivismo, corrente que defende os métodos finitos para a constituição única da Matemática. Criticava veementemente Brouwer, seu principal representante, alegando que este não enfrentava os temas mais problemáticos da Matemática. Ele acreditava que para aceitar aquela concepção, teria que renunciar a grandes avanços que a Matemática de conteúdo clássico havia proporcionado. Defensor ardoroso da Teoria dos Conjuntos, queria encontrar um caminho que a libertasse da incômoda interferência dos paradoxos. Ficou célebre sua declaração: *ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós*.

2.2.4 O Intuicionismo (Construtivismo)

Um dos ramos da Filosofia, nascido da *crise dos fundamentos* da Matemática, foi o construtivismo, que tem origens mais remotas na ciência grega e, modernamente, deve-se a Kant a sua elaboração. Para os construtivistas, só é Matemática aquela que pode ser obtida por construções finitas (DAVIS e HERSH, 1989, p. 361). Contrariamente ao pensamento platônico, no construtivismo, as verdades e os objetos matemáticos não são descobertos, mas elaborado pelo raciocínio. É um processo mental, como enfatizava um dos seus principais defensores, Henri Poincaré (1854 − 1912).

Essa linha de pensamento ganhou grande impulso no início do século XX, com o desenvolvimento da aritmetização da análise, por meio do qual a justificativa para os elementos do cálculo diferencial e integral se afastou da noção dos infinitésimos, aproximando-se da aritmética dos números reais.

Variações de interpretação levaram ao surgimento de correntes diversas dentro do próprio construtivismo. A que auferiu maior notoriedade foi o ***intuicionismo,*** elaborada por L. E. J. Brouwer (1881 − 1966), para quem os números naturais são a base de toda a Matemática e só é possível conhecê-los mediante uma *intuição fundamental*, uma elaboração intelectual de *um matemático ideal* e não por meio da experiência sensível. Com origem neles, todo o edifício matemático deve ser erigido em um processo que se constitua de um número finito de etapas. Nesse ponto, é clara a influência kantiana, como assevera Silva (2007, p.143):

> Kant exigia que os enunciados geométricos e aritméticos verdadeiros fossem intuitivamente justificados (isto é, demonstrados por meio de construções intuitivas), e os conceitos numéricos e geométricos, construídos (isto é, seus exemplos deveriam ser apresentados a *priori* na intuição pura).

Apesar de, no momento inicial, o projeto de Brouwer poder ser considerado como parte da Matemática clássica, ele era um contumaz opositor da lógica da qual rejeitava algumas leis básicas, como o *Princípio do terceiro excluído*[9] e a *Lei da tricotomia*[10]. Essa atitude implica não considerar como objetos da Matemática os conjuntos infinitos, as funções descontínuas e todos os conteúdos associados a esses conceitos.

A escola intuicionista exerceu grande papel nas discussões sobre os fundamentos da Matemática e, com a adesão de pensadores importantes (Kronecker, Heyting, Weyl), conseguiram reproduzir parte da teoria, usando exclusivamente seus métodos, o que não garantiu sua aceitação total pela comunidade. Eves (1995, p.683) assim descreve a situação:

> Mas, embora os intuicionistas tenham conseguido reconstruir partes amplas da matemática atual, inclusive a teoria do contínuo e a teoria dos conjuntos, há muito ainda por fazer. De modo que, até agora, a matemática intuicionista revelou-se menos produtiva que a matemática clássica e, em vários aspectos, muito mais complicada de desenvolver. Esse o defeito encontrado na abordagem intuicionista – o sacrifício de tanta coisa valiosa para a maioria dos

[9] Tudo é P ou não P. Por este princípio, uma coisa é ou não é, e não existe terceira opção.
[10] Lei que garante que uma das três seguintes opções sobre a quantidade P é verdadeira: P é nula ou P é positiva ou P é negativa.

> matemáticos... Por enquanto, a despeito das objeções levantadas presentemente contra a tese intuicionista, geralmente há concordância de que seus métodos não levam a contradições.

Do exposto, é possível inferir que nenhuma das correntes da Filosofia é suficiente para dizer o que é e quais são os objetos da Matemática. Para se obter as explicações, ora se recorre a uma linha de pensamento ora a outra, mesmo que elas não sejam complementares e sendo, muitas vezes, até contraditórias. Assim é o magistério de Silva (2007, p. 235)

> O intuicionismo nos mostra em que medida a matemática é, ou pode ser refeita como sendo, uma atividade construtiva, e mais interessantemente, em que medida não o pode. O logicismo nos mostra as profundas conexões entre a matemática e a lógica. E o formalismo esclarece a dimensão puramente simbólica e formal da matemática (já o teorema de Gödel mostra em que medida o formalismo é falso, uma vez que estabelece de uma vez por todas que a matemática como um todo, e mesmo algumas de suas teorias mais interessantes e fundamentais, não podem ser reduzidas a meros jogos combinatórios no interior de sistemas formais). Os três iluminam esta ou aquela dentre as múltiplas facetas da matemática, apesar de falharem como visões hegemônicas sobre a natureza da matemática.

Nesse panorama, não é uma tarefa simples para o matemático decidir por um posicionamento filosófico definitivo, mas, talvez não seja esse o principal objetivo a ser perseguido, pois o mais relevante é que o debate sobre em que bases a ciência foi desenvolvida e quais são seus fundamentos essenciais esteja sempre aquecido, porque, sem dúvida, como no passado, ele será propulsor do desenvolvimento da matemática. Um resumo da problemática pode ser encontrado na curiosa ideia (que ampara vários estudiosos) de Davis e Hersh (1989, p. 363) sobre a questão:

> O matemático típico é ao mesmo tempo um platonista e um formalista − um platonista secreto com uma máscara formalista que ele põe sempre que a ocasião pede. Os construtivistas são uma espécie rara, cujo status no mundo matemático parece por vezes ser o de hereges tolerados, cercados pelos membros ortodoxos de uma igreja.

Assim, talvez mais interessante seja enfatizar, como faz Lívio (2010), a efetividade da Matemática em explicar e predizer os fenômenos do mundo sensível do que tentar explicitar o que ela é definitivamente; destacar que todos os fantásticos progressos científicos e tecnológicos que testemunhamos hoje são descritos pelas relações matemáticas. Quando se pesquisa um assunto no Google, por trás da coincidência das palavras, estão algoritmos da **Teoria dos números**. O mesmo ocorre com a emissão de mensagens via telefone celular e a orientação por GPS. A Microbiologia, com o desvendar do código genético, só foi possível por causa da ***teoria dos nós***. Isso nos garante que a Matemática está viva e efervescente neste momento. Que os conhecimentos no seu campo crescem todos os dias e, mais importante, novas aplicações para o que já se sabia se multiplicam.

O eminente matemático contemporâneo, ganhador da medalha Fields[11], Sir Michael Atiyah, em palestra (01/12/2010) no IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) em uma citação de profunda beleza, conforme SALLES (2011), reflete:

> Não há nenhuma razão para que o mundo obedeça a leis matemáticas, mas nós acreditamos que é assim. É um ato de fé nosso, que alguns poderiam, com razão, comparar ao sentimento religioso. Até agora nossa aposta tem dado certo, explicamos muitos fenômenos naturais. Mas não está claro por que dá certo.

Não é possível ceder ao pessimismo dos argumentos pós-modernos quando afirmam que a Geometria euclideana e a Lei da gravitação universal se *desmancham no ar* com a criação de outras geometrias e da Lei da relatividade. Isso não é verdade, porque essas não mostram que aquelas estavam incorretas, apenas limitam as condições em que devem ser aplicadas. Na verdade, o novo vem alargar os horizontes da Matemática que estava estabelecida. Tomando emprestada uma ferramenta das *equações diferencias*, diz-se que se trata, apenas, de definir claramente quais são as ***condições de contorno*** em que as teorias devem ser aplicadas. É uma questão de cenário e não de conteúdo.

Ressalto que, mesmo sendo um debate filosófico, a temática que desenvolvo possui um pragmático efeito pedagógico. Se a visão do que é Matemática, do que é número, do que é a linguagem matemática varia de acordo com a filosofia de que se é partidário, é evidente que ela exerce influência decisiva na maneira de ensinar de cada professor.

Ao adotar o posicionamento platonista e defender o argumento de que todos os objetos matemáticos já possuem existência concreta em sua forma definitiva, restaria para o trabalho docente apenas apresentar esses elementos e aos alunos conhecê-los; nada mais haveria a fazer. Tolher-se-ia o trabalho de construção, a criação e a inventividade essenciais para o desenvolvimento cognitivo.

O trabalho de um matemático puro, rotineiramente, assume um viés nitidamente formalista. Nas universidades, onde trabalha a maioria desses cientistas, parte de seus afazeres está relacionada ao ensino e à formação de docentes, logo, as instituições formam novos professores formalistas. Por isso, durante muito tempo nas escolas, se privilegiou um ensino baseado em demonstrações rígidas e no rigor da linguagem. Essa posição se fortaleceu com o surgimento da corrente chamada Matemática Moderna que, na segunda metade do século passado, influenciou o ensino de matemática globalmente e que foi abandonada pelos sistemas educativos após comprovação da ineficiência de seus rígidos métodos.

[11] Maior prêmio da área, outorgada a cada quatro anos, é concedida a matemáticos com no máximo 40 anos de idade que tenham feito contribuições relevantes para o desenvolvimento desta Ciência.

A grande questão no âmbito educacional é que a visão formalista colide com as mais consolidadas concepções das recentes tendências pedagógicas que defendem, cada vez com maior ênfase, que os alunos devem constituir significados para o que aprendem, estabelecer conexões entre as ciências e a vida, e que é necessário valorizar o concreto e observável. Recomenda-se aos professores que empreguem materiais diversos, aproveitem-se de modos diferentes de representação e usem exemplos do cotidiano. Todas essas ideias não encontram nenhum abrigo na teoria formal, na qual as representações dos entes matemáticos são desprovidas de sentido, como se pode exemplificar, por meio de Davis e Hersh (1989, p.383),

> O uso de figuras ou diagramas, ou mesmo imagens mentais, é não-matemático. Em princípio, deveriam ser desnecessários. Em conseqüência, ele os considera inapropriados em um texto de matemática, talvez mesmo em uma sala de aula de matemática.

Desse modo, um professor que adote o formalismo como matriz para o seu trabalho oferecerá grandes resistências às novas contribuições aportadas pelas ciências da Educação, e sua atuação em sala de aula poderá trazer grandes prejuízos para os estudantes, porque se perderiam a contextualização, o contato com a realidade e a intuição presentes em inúmeras formulações da Matemática.

O construtivismo (instuicionismo), se considerado no aspecto mais radical de suas posituras, quando defende a noção de que toda a Matemática deve ser constituída em número finito de etapas, expõe o fazer matemático a uma massa de processos de manipulação de símbolos e operadores que tornam sua atividade monótona e cansativa. Por outro lado, abre boas oportunidades para o campo educativo, ao defender a ideia de que o saber da ciência deve ser construído, assim, retirados os exageros, os princípios construtivistas podem ser referência para a elaboração de propostas de ensino desta Ciência.

É lamentável o fato de que a maioria dos professores não esteja familiarizada com o tema, o que decorre, principalmente, do fato de que, no Brasil, na maior parte dos cursos de Matemática e de formação de professores, os aspectos filosóficos não sejam tratados com a atenção que merecem.

Para exercer competentemente a profissão, não é desejável que o professor apenas reproduza as atitudes procedentes de seus professores, que lhes chegam eivadas de crenças e preconceitos sobre a matéria e sua aprendizagem. Não se trata de uma declaração de fé; o caminho não é único de sorte que, é preciso o próprio professor refletir sobre *o que é* a ciência a que se dedica e de que forma cada corrente filosófica pode contribuir para a sua prática. É esclarecedor o pensamento de Davis e Hersh (1989, p. 400):

> [...] a matemática é uma coisa única. Os pontos de vista platonista, formalista e construtivista sobre ela são acreditados porque cada um corresponde a uma certa visão dela, uma visão sob certo ângulo, ou um exame com um instrumento particular de observação.
> Nosso problema é achar uma compreensão da própria coisa, unir as visões parciais – cada uma das é errada se tomada isoladamente, pois é incompleta e unilateral. Como são retratos da mesma coisa, são compatíveis. Sua incompatibilidade aparente é criada por nossa maneira de encará-las com uma preconcepção imprópria.

Com espaldar no conhecimento da História e dos fundamentos da Matemática é que o professor poderá se posicionar e fazer escolhas sobre as correntes pedagógicas e as opções metodológicas em que se apoiará para desenvolver suas atividades de ensino.

Se os aspectos fundamentais da Matemática são motivos de controvérsia, contrariamente, quanto à sua importância, a necessidade de seu ensino e aplicações na vida real existe praticamente um consenso.

3 O ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, abordo o ensino de Matemática sob vários aspectos. Inicialmente, destaco sua importância e aplicabilidade na vida das pessoas atualmente. Em seguida a abordagem se dá sob uma perspectiva histórica, principiando pelo caráter universal para chegar ao caso particular da trajetória desenvolvida no Brasil. É dado destaque ao ensino de Geometria, Desenho e às construções geométricas com régua e compasso por serem os conteúdos explorados diretamente na pesquisa. Como o trabalho possui uma forte componente tecnológica, trato, aqui, da Geometria Dinâmica e do ensino de Matemática a distância. Após uma análise do quadro atual do ensino de Matemática no Brasil, lanço minhas propostas e as questões de investigação.

3.1 A Matemática e sua Importância no Convívio Social

A Matemática inicialmente era a *Ciência dos números*, porque foi utilizada basicamente para contar. Depois, por volta do ano 300 a.C, com a incorporação da Geometria pelos gregos, passou a ser *a Ciência dos números e das formas.* No século XVII, uma vez instituído o Cálculo Integral e Diferencial, por Isaac Newton e Wilhelm Leibniz, agregou à sua seara de conhecimentos *o movimento, as variações, o espaço, e as ferramentas matemáticas necessárias a esse estudo.* É imperativo salientar que o grandioso desenvolvimento da disciplina se deu, em grande medida, por exigências oriundas do meio social. As pessoas passaram a enfrentar problemas que exigiam recursos cada vez mais poderosos de Matemática. Já não era suficiente apenas contar e enumerar pequenas quantidades, pois era preciso calcular áreas, volumes, velocidades com graus de complexidade cada vez maior. Carecia que se conhecessem os movimentos dos astros e das marés para saber o clima e fazer previsões sobre as colheitas. Tornou-se necessário fazer inferências estatísticas para estimar os resultados dos capitais investidos. Assim, por ter, em vários momentos, sua trajetória orientada por demandas da coletividade, compreende-se a Matemática como uma produção social e haveres culturais acumulados da humanidade.

O vasto espectro de aplicações deste conhecimento no cotidiano das pessoas fez com que a Matemática fosse considerada saber básico para a inserção social das novas gerações. Chegou-se à conclusão de que as pessoas precisam saber alguma matemática para que possam ter melhor compreensão sobre sua realidade e, por isso mesmo, um melhor desempenho nas suas atividades cotidianas. É esse o motivo para que, desde a fundação das primeiras escolas, seja componente essencial dos currículos na educação básica.

A presença e a importância da Matemática, tão marcantes na vida de todas as pessoas atualmente, podem não ser tão evidentes para a maioria. Nunca, porém, em nenhum outro período da história, ela esteve tão presente. O grande número de publicações sobre temas matemáticos destinados ao público em geral que podem ser encontrados atualmente na seção dos *best-sellers* das livrarias (O último teorema de Fermat, Deus é matemático?, Super crunchers, O Andar do bêbado, Uma senhora toma chá) é um interessante indicativo desse fato.

Não é difícil perceber a estreita relação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, como a Engenharia, a Economia, a Estatística, a Física e a Bioquímica. De forma menos visível, esta imbricação se estende para segmentos dantes nunca imaginados, como a Medicina, a Psicologia, o *Design* e, até na área esportiva, na qual os atletas lutam por centímetros e centésimos, os gráficos, diagramas e planilhas são ferramentas indispensáveis. As fronteiras dessa convergência, porém, são por demais alargadas.

O espetacular crescimento tecnológico vivenciado desde a metade do século XX, a disseminação das máquinas de calcular, a universalização da telefonia móvel, somada às novas funcionalidades dos aparelhos celulares, a incorporação do uso da informática na vida cotidiana, reforçado pela espantosa utilização das *redes sociais*, passaram a requerer procedimentos da lógica e domínio de processos que obrigam as pessoas a possuírem noções matemáticas cada vez mais elaboradas. Em todas as camadas sociais, a administração dos orçamentos domésticos precisa levar em conta operações de crédito e financiamentos que implicam lidar com capitais, montantes e taxas de juros. O relacionamento com o sistema bancário mudou radicalmente e se faz necessário que todos usem cartões magnéticos e “dialoguem” com terminais eletrônicos, sendo levados a fazer, rapidamente, cálculos e estimativas.

Como já aludi, é sabido que os sinais aqui apontados ainda passam despercebidos para a maioria das pessoas. No recente sucesso cinematográfico, *A rede social*, no momento em que trabalhava na criação do *facebook*, o protagonista Mark insiste três vezes com seu colega Eduardo, acentuando que precisa do *algoritmo*, e, por segundos, apenas, aparece na tela uma fórmula matemática. A cena (Figura 2) não tem nenhum destaque no enredo, mas é ela o cerne da bilionária ideia.

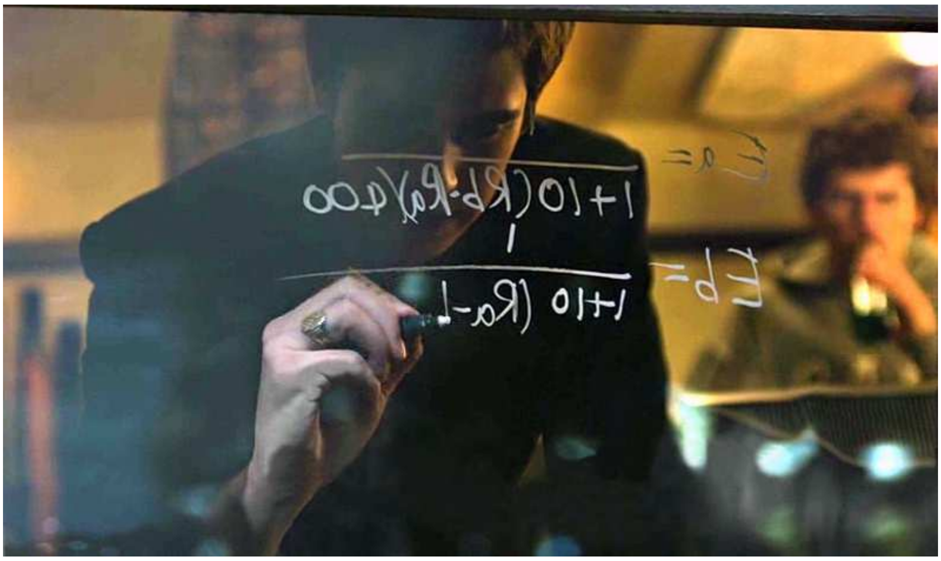


Figura 2: Algoritmo em cena do filme *A Rede Social*

A relação de exemplos é interminável, de modo que é fácil observar que a Matemática está presente nas mais diversas relações do homem com o mundo. Ela é um saber necessário para o desenvolvimento intelectual e social dos cidadãos e torna-se consensual a ideia de que ninguém pode prescindir completamente de conhecimentos matemáticos. Seu domínio, em diferentes graus de profundidade, é indispensável para melhor compreensão do universo. É, portanto, desejável que seu conhecimento faça parte da formação de todos. Consolidando este inventário de motivos para justificar o ensino de Matemática, tomo o inspirado pensamento do professor Geraldo Ávila (2007, p.8) quando diz:

> A matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da Humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma boa formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa.
> O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia.
> O ensino de Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.

O trabalho dos matemáticos produziu, contudo, um progresso tão intenso da ciência que ela atingiu um estádio de complexidade e diversidade tal que impossibilita a transferência da totalidade de seus conteúdos para o universo escolar. Deste modo, é possível dizer que, quando vista a “olhos sociais e escolares”, parte da Ciência matemática é objeto de uma *transposição didática*[12] e apenas uma fração da disciplina é ensinada às crianças e aos jovens

[12] Expressão cunhada por Chevallard (1988) para caracterizar as transformações que um saber científico passa para se transformar em um saber a ser ensinado nas escolas.

nos colégios. É função dos professores e do sistema escolar selecionar, dentre todos os elementos do universo da ciência, os subconjuntos que formarão a matriz com os itens a serem desenvolvidos em cada ciclo do ensino. Nessa tarefa, de imediato, surge uma questão inevitável:

Matemática ou matemáticas?

Esta pergunta é um tema recorrente nos diversos espaços onde se estuda a matéria. Alguns defendem o seu caráter de universalidade, assumindo a ideia de que é um campo de conhecimento singular, existindo apenas uma Matemática. Para outros, existem matemáticas diferentes, e uma divisão habitual se dá entre Matemática Pura e Matemática Aplicada.

Matemática Pura é aquela que estuda os saberes internos da área, sem a preocupação de saber onde e como, fora da Matemática, eles serão utilizados. Muitas vezes um teorema se reveste de importância simplesmente porque auxiliou na demonstração de outro. Já a Matemática Aplicada é aquela interdisciplinar, empregada fora dos seus domínios e é facilmente identificável no cotidiano das pessoas no seu convívio social e na sua importância para outras ciências, como Engenharia, Física, Economia, e Química. Hardy (2000, p. 129) faz a apologia da Matemática Pura, ao registrar o pensamento de que

> Existem, então, duas matemáticas. Existe a matemática de verdade dos matemáticos de verdade, e existe o que chamarei de matemática ‘trivial’, por falta de uma palavra melhor. A matemática trivial pode ser justificada por argumentos que agradariam a Hogbem[13] ou a outros autores de sua escola, mas não cabe tal defesa para a matemática de verdade, cuja justificativa, se houver, só poderá ser a justificativa da arte.

Além dessas, no entanto, a *Educação matemática* incorporou outra faceta desta ciência, trazendo para a discussão a *Matemática escolar*, aquela mediada pelos aportes pedagógicos para tornar-se acessível no âmbito das escolas desde a educação infantil. Pais (2001, p. 22), apropriadamente, diz:

> Na passagem do saber científico ao saber previsto na educação escolar, ocorre a criação de vários recursos didáticos [...] A partir do surgimento desses recursos, surgem também as criações didáticas que fornecem o essencial da intenção de ensino da disciplina. Nessa perspectiva, enquanto o saber acadêmico está vinculado à descoberta da ciência, o trabalho docente envolve simulações dessa descoberta.

O conhecimento matemático, como visto, pode ser focado por vários ângulos diferentes. Acho, porém, que a Matemática está presente em praticamente todas as nossas relações sociais. Existe Matemática quando um mestre de obras calcula quantos tijolos vão ser

[13] Lancelot Hogbem, cientista britânico, autor da obra célebre *As Maravilhas da Matemática* onde mostra aplicações de Matemática em vários elementos da natureza e do cotidiano das pessoas.

necessários para erigir uma parede. Nos assentamentos, quando os lotes precisam ser demarcados, no cálculo de suas áreas, mesmo não utilizando os processos canônicos, são resolvidos problemas de Matemática. Nas nossas trocas, compras, vendas, manuseio de dinheiro, por isso tenho que concordar com Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 45), quando indicam:

> O fato de que se ensine matemática na escola responde a uma necessidade ao mesmo tempo individual e social: cada um de nós deve saber um pouco de matemática para poder resolver, ou quando muito reconhecer, os problemas com os quais se depara na convivência com os demais. Todos juntos haveremos de manter o combustível matemático que faz a sociedade funcionar e devemos ser capazes de recorrer aos matemáticos quando for necessário. A presença da matemática na escola é uma conseqüência de sua presença na sociedade e, portanto, as necessidades matemáticas que surgem na escola deveriam estar subordinadas.

Da mesma forma que não há consensos sobre o que é fazer Matemática, hão de ser clarificadas as diferenças entre os profissionais que atuam em cada uma das suas áreas. Geralmente se confunde o matemático com o professor de Matemática, ofícios totalmente diferentes tanto nos objetos de estudo como nos objetivos a serem alcançados. Conforme Fiorentini e Lorenzato (2006), para o matemático, os objetivos da matéria estão nela mesma, pois ele estuda Matemática para alargar as fronteiras da ciência, e, quando tem que dar aulas, o faz na perspectiva de formar outros matemáticos. Os professores de Matemática, além dos conhecimentos específicos da área, precisam incorporar os saberes pedagógicos. Enquanto os matemáticos buscam criar saberes matemáticos, os professores de Matemática procuram novas metodologias e estratégias que facilitem a aprendizagem desta Ciência.

Nesta vertente de que o trabalho do professor de Matemática é buscar meios cada vez mais eficazes para concretizar a aprendizagem de seus alunos, Polya (1995, p.1) defende a noção de que

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível, mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso.

Auxiliar o aluno é buscar constantemente novas maneiras de expor a matéria, é explicar os conteúdos de várias formas diferentes, é disponibilizar dispositivos que agucem a curiosidade e a criatividade do estudante. Por tudo isso é que, em meu projeto, acrescentei outro elemento na tentativa de melhorar os processos de ensino e aprendizagem, os ***Ambientes Virtuais de Ensino.***

3.2 Da Antiguidade ao Descobrimento do Brasil

Não é de sempre, porém, que é a Matemática tratada como disciplina escolar independente, tal como atualmente a concebemos. No limiar da caminhada da ciência, as pessoas não procuravam a escola para aprendê-la, até porque as escolas não existiam no formato de hoje.

Os primeiros registros associando Matemática à escola referem-se à *Escola de Alexandria e à Escola pitagórica*, mas devemos saber que estas referências não dizem respeito a edificações para as quais as pessoas se dirigissem para aprender Aritmética e Geometria. No caso pitagórico, tratava-se mais de uma congregação onde experimentavam maneiras alternativas de (con)viver, “com fortes vínculos de grupo, práticas iniciáticas, um saber de tipo esotérico e aspectos de seita religiosa” (CAMBI, 1999, p.98).

Platão atribuía valor tão profundo à matemática que, quando enumera as qualidades necessárias ao bom líder da *pólis*, no capítulo VII de A República, a situa como o primeiro conhecimento a ser adquirido, e, indo mais além, recomenda que seu aprendizado seja, por decreto, obrigatório

> – Seria excelente, portanto, Glauco, impor este estudo por uma lei e persuadir os que têm de desempenhar altas funções públicas a dedicarem-se à ciência do cálculo, não de modo superficial, mas até chegarem à contemplação da natureza dos números pela pura inteligência; e a se dedicar a esta ciência não por interesse das vendas e das compras, como os negociantes e os mercadores, mas da guerra, e para facilitar a ascensão da alma do mundo da geração para a verdade da essência. (PLATÃO, 1999, p. 238).

Mesmo em sua *Academia*, porém, a mais influente escola da Antiguidade, que tinha em seu pórtico a inscrição *Não entre quem não souber geometria*, a Matemática não era estudada de maneira formal. Baseava-se em diálogos e debates entre os pares, utilizando o procedimento dialético, para posterior síntese dos mais instruídos. Livio (2010, p.47) assevera que

> [...] a Academia era uma reunião bem informal de intelectuais que, sob a orientação de Platão, se dedicavam a uma ampla variedade de interesses. Não havia taxas escolares, nem currículos prescritos nem sequer membros de um corpo docente.

O Liceu de Aristóteles, fundado em cerca 335 a.C., e que existiu até o ano 529 da Era Cristã, quando teve suas portas cerradas por ordem do imperador romano Justiniano, ao estimular o diálogo entre os alunos e mestres, reproduzia os mesmos procedimentos de ensino praticados na *Academia*. Como o Estagirita[14] caminhava entre os jardins durante suas prele-

[14] Aristóteles nasceu em Estagira, cidade da Macedônia, em 384 a.C.

ções, seu grupo ficou conhecido como os que passeiam (*peripatéticos)*. Estudava-se, sob uma visão enciclopedista, uma grande variedade de temas, com destaque para Física, Metafísica, Retórica e Ética. A Matemática não era o assunto central e seu ensino de forma alguma pode ser considerado sistematizado.

Evidencio o fato de que, nessas primeiras experiências de ensino da Matemática, os estudantes procuravam os seus mestres e destes se tornavam verdadeiros discípulos, como exemplificam bem as escolas há pouco referenciadas. Nesta busca, a curiosidade, a procura da vida plena e o prazer eram os motores que estimulavam a descoberta de um "novo mundo", ampliado e focado por inspiração dessa ciência. Até a fundação da Pedagogia, advinda com o sistema capitalista, o ensino seguia este formato um a um (um professor para um aluno) que favorece a mediação e as interações necessárias à aprendizagem. É possível inferir que ensinar dessa forma era uma tarefa menos árdua do que ocorre atualmente, quando os mestres têm que se defrontar com salas numerosas, alunos inquietos e desmotivados.

Com a publicação dos *Elementos*, o contexto começa a se modificar, porque a obra se estabeleceu como a primeira referência curricular para o ensino de Matemática, e assim permaneceria, praticamente, até o final da Idade Média. É o que assinala Sanz (sd)

> Sin duda el libro de texto más perdurable son Los Elementos de Euclides; desde su nacimiento allá por el siglo III antes de Cristo hasta la Revolución Francesa, Los Elementos van a constituir el núcleo fundamental y muchas veces exclusivo de los conocimientos matemáticos que se enseñaban en las universidades hasta bien entrado el siglo XVII.

A dominação de Roma sobre o mundo grego, que levou ao fechamento das grandes escolas de Atenas, provocou enorme retrocesso no estudo das ciências em todo o ocidente. O notável poderio militar e político romano não se expandiu para o ângulo científico, o que justifica a ausência de grandes descobertas ou grandes matemáticos nesse período. O quadro se agravou mais ainda com a queda do Império Romano para as civilizações bárbaras que deixaram o estudo de Matemática quase que ao abandono. Assim, permaneceria por quase toda a Idade Média. A atomização das comunidades provocadas pelo sistema feudal dificultava a criação de instituições que pudessem reunir um grande número de professores e pensadores, de sorte que não foi possível às civilizações medievais atingirem o mesmo nível de produções matemáticas da Grécia antiga.

Com o enfraquecimento do feudalismo, vieram o renascimento das cidades e a dinamização do comércio, trazendo consigo a retomada da necessidade de conhecimentos matemáticos e seu consequente ensino. Na Europa, a partir da Itália, tendo como inspiração o livro *Liber Abacci,* de Leonardo de Pisa - o Fibonacci, fundaram-se escolas para formar pessoas para o novo mercado nascente. Seguindo ainda a narrativa de Sanz (sd),

> En Italia, entre los siglos XIII y XVI va a proliferar otro tipo de instrucción matemática cuyo objetivo fundamental es responder a las necesidades contables de los comerciantes de las repúblicas comerciales del norte de la península itálica: las escuelas de ábaco.

Enquanto na Europa o modelo de ocupação dos bárbaros, sem identidade política ou cultural, não favorecia o desenvolvimento das ciências, na Península Ibérica, ocorria processo diverso. Insurgindo-se pela Espanha, a partir do sec. VIII, os Árabes, conhecedores de Matemática, que apreenderam de obras helênicas, iniciam um processo de dominação que se estendeu por cerca de oito séculos.

Somando-se às ideias advindas da Europa, a influência do domínio árabe teve profundas implicações na prática e no ensino de Matemática na região, o que, mais tarde, se estenderia até o Brasil. Entre outras contribuições, pode-se creditar a eles a disseminação da Álgebra algorítmica, com algumas de suas aplicações à Geometria e uma sólida propulsão à Astronomia. Como diz Teixeira (1934),

> [...] a Escola de Córdova atingiu um alto grau de esplendor, quando Abdurrahamam III, cercando-se de sábios muçulmanos vindos de diversas terras, fêz da capital do seu império um centro famoso de cultura intelectual. Pelo que respeita às Matemáticas, nesta cidade foi não só estudada com sucesso a Astronomia, mas foi também esboçada a aplicação da Álgebra à Geometria, que mais tarde, seguindo de progresso em progresso, havia de fazer da ciência da extensão um ramo formoso da Análise matemática.

A passagem do novo aprendizado da Espanha para Portugal não se deu de imediato e, até o final da Idade Média, não há registro que possa indicar atividades de relevo nas ciências exatas na Terra lusa. É definitiva a síntese desenvolvida por Teixeira (1934)

> Não conhecemos, com efeito, documento algum que se refira à cultura de tais ciências no nosso país antes do século XV. Para contar, usava-se a numeração romana; e provavelmente as operações numéricas necessárias para os usos ordinários da vida, faziam-se pelos meios herdados dos Romanos pelos povos latinos. A numeração indiana, introduzida pelos Árabes na Península Ibérica, parece não ter sido empregada em Portugal antes do mencionado século.
>
> [...]A história das Matemáticas em Portugal pode ser dividida em cinco períodos. O primeiro o período de formação, principia no reinado de D.João I e vai até à morte de D. João II. Começa então o segundo período, o período de brilho, que vai até aos fins do século XVI. A estes períodos seguiu-se outro, o de pobreza, que vai até meados do século XVIII. Então, com a reorganização dos estudos na Universidade de Coimbra pelo Marquês de Pombal e com a fundação da Academia das Ciências de Lisboa, começou o quarto período, que estenderemos até meados do século XIX, em que começou o período actual.

É correto concluir que Portugal não foi um centro de excelência no estudo e menos ainda no ensino de Matemática. Além do início tardio, há extensos momentos de retrocesso no transcurso de sua história. Dessa forma, não se pode surpreender com o fato de que, mais de 200 anos após o Descobrimento, o ensino de Matemática praticamente não existisse no Brasil, como relato a seguir.

É importante mencionar, nesse ponto, que o progresso conseguido pela Matemática na Idade Média não se operou dentro das escolas e universidades, mas adveio de esforços individuais, de homens que movidos pelo espírito da curiosidade, estribados em sua genialidade, inscreveram seus nomes na história das ciências. Entre outros, Kepler, Fermat, Descartes, Leibniz e o grande Newton podem se exemplos do que trato.

Na Revolução Industrial, a sociedade, pressionada pelo mundo do trabalho, precisou formar profissionais para as fábricas, que se multiplicavam numa velocidade vertiginosa. Estabeleceu, então, como objetivo, atingir a universalização do ensino. As escolas deveriam receber o maior contingente possível de pessoas para estudarem os mesmos conteúdos baseados num currículo padronizado. Ensinar Matemática para todas as crianças e jovens fez com que, ao se colocar no mesmo espaço pessoas com níveis de interesse e de conhecimentos prévios bastante heterogêneos, se modificasse muito a maneira de concretizar a *transposição didática,* e dar aula de Matemática passou a ser uma tarefa bastante complexa. Os altos índices de fracasso e a insegurança perante o novo processo fizeram com que os professores buscassem opções para os métodos de exposição usados em suas aulas. Inicialmente de maneira informal, mediante trocas de experiências e informações. Percebeu-se, então, que já não era suficiente somente dominar os conteúdos específicos para ensinar Matemática. No final do século XIX, na Europa, foram oferecidos os primeiros cursos de formação de professores para o secundário, possibilitando, dessa maneira, o surgimento de especialistas no ensino das diversas matérias, entre as quais a Matemática.

Após a Segunda Guerra Mundial, constatado o fato de que o grande avanço científico não estava em consonância com o currículo escolar de Matemática, surgiu outro campo profissional e científico, denominado Educação Matemática que, no dizer de Fiorentini e Lorenzato (2006, p.5),

> [...] é a área do conhecimento das ciências sociais ou humanas, que estuda o ensino e a aprendizagem de matemática. De modo geral, poderíamos dizer que a EM caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar.

Desse modo, é lícito rematar que o ensino de Matemática possui características tão específicas que permitem pensar em uma didática voltada exclusivamente para ele. Apesar de muito recente, a Educação Matemática produziu um número considerável de pesquisas e trabalhos na área. No Brasil foi criada, em 1988, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, que hoje congrega cerca de 15000 sócios. Como se pode depreender pelo número de estudos e pessoas envolvidas, os questionamentos e as preocupações com o ensino e a aprendizagem de Matemática são tantos e tão diversos que não se pode esperar uma solução única e completa para todos os problemas levantados, o que justifica o incentivo para a pesquisa científica na área.

3.3 O Ensino de Matemática no Brasil

É válido admitir que, antes do Descobrimento, já existisse no Brasil algum tipo de educação conduzida pelos próprios nativos, mas não se pode falar em uma escolarização formal, o que só passa a acontecer com a chegada dos Jesuítas, da Companhia de Jesus, em 1549, liderados pelo padre Manoel da Nóbrega. Nos primeiros colégios inacianos, não havia aulas de Matemática, o que só veio se concretizar com a criação dos cursos de Arte quase um século após o descobrimento. Para Silva (2007, p. 3)

> Dessa forma, o ensino das Matemáticas no Brasil começou com os jesuítas. Em algumas escolas elementares foram ensinadas as quatro operações algébricas e nos cursos de Arte foram ministrados tópicos mais adiantados, como por exemplo, Geometria elementar. No ano de 1605 havia nos Colégio de Salvador, Bahia, no de Recife, Pernambuco e no da cidade do Rio de Janeiro aulas de Aritmética.

As atividades da Companhia de Jesus associaram-se à Educação por finalidades catequéticas. Os padres partiam do suposto prévio de que seria mais fácil converter os indígenas à fé cristã quando eles soubessem ler e escrever, o que era o principal foco de sua ação educativa. Assim é que o ensino de Matemática enfrentou dois grandes obstáculos: não possuía professores qualificados em quantidade suficiente e não era a prioridade dos Jesuítas. Daí, posso inferir que o ensino da matéria sob suas diretrizes avançou muito lentamente e em um plano bastante elementar. Mais ainda: que esse quadro se manteria, com pequenas alterações, durante os dois séculos em que os Inacianos permaneceram no Brasil. Essa ideia é reforçada pela pesquisa de Valente (1999, p. 35), ao assinalar que

> Tudo leva a crer, enfim, apesar dos poucos conhecimentos que temos sobre o tema, que as ciências, e em particular a matemática, não constituíram ao longo dos duzentos anos de escolarização jesuítica no Brasil, um elemento inte-

grante da cultura escolar e formação daqueles que aos colégios da Companhia de Jesus acorriam.

Os Jesuítas foram expulsos do Brasil em 1759, por decreto do Marquês de Pombal (Sebastião José de Carvalho e Melo), ocasionando o fechamento de todas as suas escolas e a total ruptura com o sistema educativo que haviam instalado. Pelo mesmo ato, e para substituir as escolas da Companhia de Jesus, são criadas as Aulas Régias, inicialmente de Latim, Grego e Retórica, e que levaram cerca de 30 anos para serem instaladas. Eram cursos isolados que não possuíam correlação. Cada professor, individualmente, recebia a autorização e as normas a serem seguidas diretamente da Coroa, conseguia um espaço, matriculava os alunos, e então lecionava a matéria. A *reforma pombalina* produziu um vácuo no ensino de Matemática no Brasil que se estendeu até o início do século XIX.

Paralelamente à iniciativa jesuítica, outra modalidade de ensino de Matemática se estabeleceu no Brasil voltado exclusivamente para as atividades militares. Após o Descobrimento, a Coroa portuguesa precisava assegurar a posse de seu novo território. Havia a necessidade de construir fortificações e artefatos de guerra que garantissem sua segurança contra invasores. Para isso era indispensável a presença de artífices e engenheiros que no primeiro momento vieram da Metrópole, mas que em seguida tiveram que ser formados na Colônia. Este ensino, que não deve ser considerado exatamente escolar, desempenhou papel crucial em toda a História da Educação em Matemática no País. Depois de ações não sistematizadas, com a chegada de um ou de outro especialista nos primeiros momentos, por volta de 1710, teve início a *Aula de Fortificações* e, por meio de Carta Régia em 1738, ocorreu um marco definitivo, com a criação da *Aula de Artilharia e Fortificações*. O primeiro professor do novo curso foi José Fernandes Pinto Alpoym que havia lecionado em Portugal. Deve-se a ele a produção dos dois primeiros livros de Matemática do Brasil, *Exame de Bombeiros*, provavelmente o primeiro livro impresso no país[15] (Figura 3) e *Exame de Artilheiros* (Figura 4). Foram escritos em forma de perguntas e respostas que eram recitadas e decoradas pelos alunos.

[15] Em minhas pesquisas, graças à gentileza do bibliófilo e acadêmico cearense José Augusto Bezerra, tive a oportunidade de trabalhar com os originais, raríssimos, das duas obras cujas fotos exibimos. Com seu profundo conhecimento do assunto, ele me relatou que: se acredita que as duas obras possam ter sido impressas na oficina de Antonio Isidoro da Fonseca, Rio de Janeiro, utilizando a indicação de Lisboa e Madri na folha de rosto como disfarce pois era proibida a impressão de livros na Colônia. É muito mais provável, porém, que apenas o *Exame de Bombeiros* tenha sido aqui impresso, pois apresenta na estampa XVII a seguinte inscrição: “Rio, 1749”.

EXAME
DE
BOMBEIROS,
QUE COMPREHENDE DEZ TRATADOS; O PRIMEIRO DA GEOMETRIA, O SEGUNDO de huma nova Trigonometria, o terceiro da Longemetria, o quarto da Altimetria, o quinto dos Morteiros, o sexto dos Pedreiros, o setimo dos Obuz, o oitavo dos Petardos, o nono das Baterias dos Morteiros, com dous Appendix: o primeiro do methodo mais facil, que se póde inventar, para saber o numero de balas, e bombas nas Pilhas: o segundo, como dado hum numero de balas, ou bombas, se lhe podem achar os lados das pilhas, que se quizerem formar, ou sejaõ triangulares, ou quadrangulares, o decimo da Pyrobolia, ou fogos artificiaes de guerra, com dous Appendix: o primeiro dos fogos extraordinarios, o segundo dos Fogareos, e Candieiros de muralha.

OBRA NOVA, E AINDA NAM ESCRITA DE AUTHOR Portuguez, utilissima para se ensinarem os novos Soldados Bombeiros, por preguntas, e respostas.

DEDICADO
AO ILLUSTRISSIMO, E EXCELLENTISSIMO SENHOR
GOMES FREIRE
DE ANDRADA

Do Conselho de Sua Magestade, Sargento Mór de Batalha de seus Exercitos, Governador, e Capitaõ General do Rio de Janeiro, e Minas Geraes.

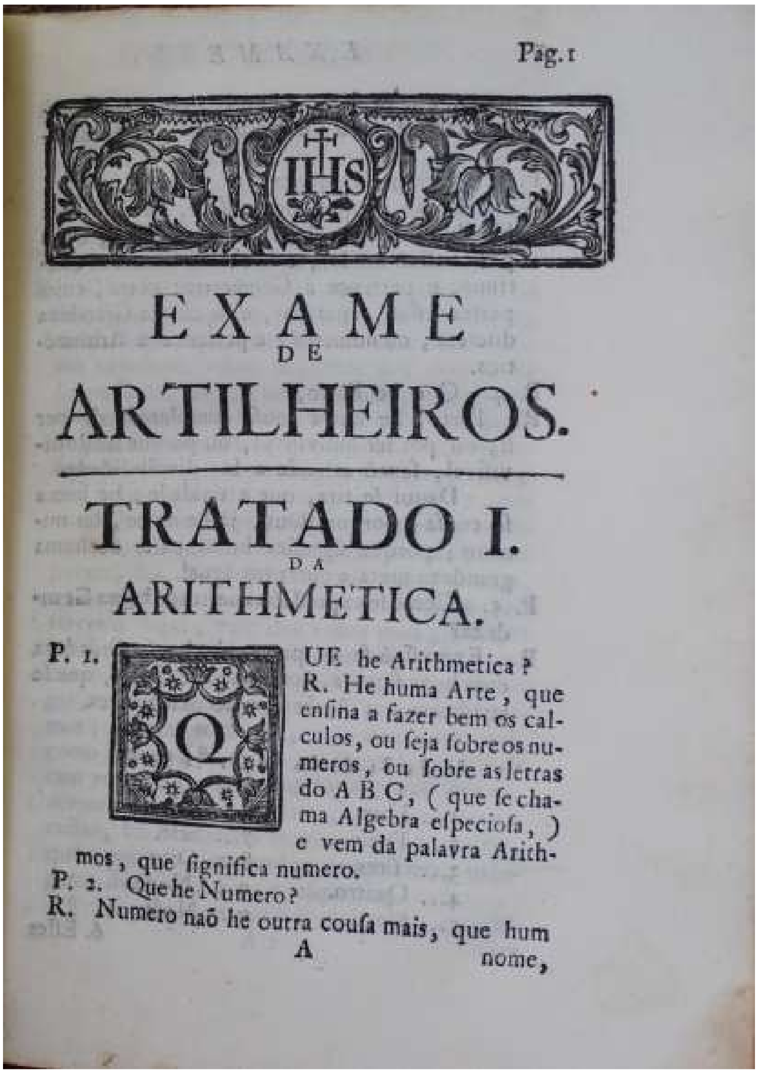
POR
JOZE FERNANDES
PINTO ALPOYM,

CAVALLEIRO PROFESSO NA ORDEM DE CHRISTO, TENENTE DE MESTRE DE CAMPO GENERAL, com exercicio de ENGENHEIRO, e de Sargento Mayor no Batalhaõ da Artelharia, de que he Mestre de Campo André Ribeiro Coutinho, Lente da mesma, por Sua Magestade, que Deos guarde, na Academia do Rio de Janeiro.

nº 112

EN MADRID,
En la Officina de FRANCISCO MARTINEZ ABAD,
Año de M. DCC. XXXXVIII.
Com todas as licenças necessarias.

Figura 3: Folha de rosto do livro *Exame de Bombeiros*



Pag. 1

EXAME
DE
ARTILHEIROS.

TRATADO I.
DA
ARITHMETICA.

P. 1. QUE he Arithmetica?
R. He huma Arte, que enſina a fazer bem os calculos, ou ſeja ſobre os numeros, ou ſobre as letras do A B C, (que ſe chama Algebra eſpecioſa,) e vem da palavra Arithmos, que ſignifica numero.
P. 2. Que he Numero?
R. Numero naõ he outra couſa mais, que hum
A nome,

Figura 4: Primeira página do livro *Exame de Artilheiros*

A *Aula* tinha objetivos fundamentalmente militares - formava engenheiros, bombeiros, cartógrafos, e artilheiros, mas, para concretizar esse objetivo, sabiam que era impositivo incorporar aos seus programas as disciplinas Aritmética e Geometria, ressalvando que para esta eram ensinadas apenas aplicações práticas. A *Aula de Fortificações* tornou-se obrigatória para todos os que tencionavam alcançar o oficialato militar, fazendo com que essas matérias se difundissem entre um grande número de pessoas.

O Brasil passou por uma verdadeira revolução com a transmigração da Família Real portuguesa, em 1808, quando no Rio de Janeiro se instalou a sede do governo do Reino e de todas as colônias de Portugal. De imediato, o príncipe regente D. João tomou medidas para a criação de equipamentos e instituições que possibilitassem à Corte ter na Colônia condições que reproduzissem, pelo menos parcialmente, o seu estilo de vida anterior. Foi decretada a abertura dos portos às nações amigos e foram criados Banco do Brasil, Jardim Botânico, Teatro Real, escolas médicas e a Impressão Régia que ensejou a publicação do primeiro jornal nacional, a *Gazeta do Rio de Janeiro*.

Todas essas mudanças tiveram implicações diretas na educação, e, no que tange ao ensino de Matemática uma, referência decisiva foi a definição do seu ensino formal e completo, o que ocorreu através da publicação da Carta de Lei de 4 de Dezembro de 1810, que criou a Academia Real Militar (instalada em abril de 1811), como se lê no excerto abaixo:

> hei por bem, que na Minha actual Corte e Cidade do Rio de Janeiro, se estabeleça uma Academia Real Militar para um curso completo de sciencias mathematicas, de sciencias de observações, quaes a physica, chimica, mineralogia, metallurgia, e historia natural que comprehenderá o reino vegetal e animal, e das sciencias militares em toda a sua extensão, tanto de táctica como de fortificação, e artilharia, na forma que mais abaixo mando especificar; (BRASIL COLÔNIA, 1810).

É curioso o nível de detalhamento com que a afirmação do Regente, garantindo que manda especificar a forma pela qual o curso será ministrado é cumprida. No corpo da Lei, são especificadas as disciplinas, o horário e a duração das aulas, a bibliografia, os lentes, bem como seus salários, *honras e graças*[16], os códigos disciplinares de discentes e docentes, e critérios de aprovação.

Pode-se perceber que, novamente, o propósito do curso estava voltado para as forças armadas. Não se pretendia formar o cidadão brasileiro, mas o intento era formar profissionais de carreiras militares. Como um efeito secundário, porém, de relevante importância, o seu currículo, nos quatro primeiros anos, estava voltado, quase que integralmente, para a aprendizagem de Matemática, tendo funcionado como modelo e catalisador do seu ensino. Nele estavam compreendidos os conteúdos de Aritmética, Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Trigonometria, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva, Trigonometria Esférica e, em todos os anos até o quinto, Desenho. O destaque é dado pela importância que o Desenho assumiu em minha pesquisa.

Convém salientar, nesse ponto, que, desde o Descobrimento do Brasil até a sua Independência, para as pessoas que queriam aprender Matemática só existiram duas opções: limitar seus conhecimentos ao *contar*, ou seja, conhecer as quatro operações fundamentais ou matricular-se em uma escola militar. O ensino secundário não despertava interesse na maioria da população, funcionava de maneira dispersa e precária, geralmente por meio das *Aulas Avulsas*.

Essa relação estreita entre a Matemática e a farda tem sido marcante em toda a história pátria, e pode ser verificada com facilidade ainda hoje. Pode-se comprovar, ressaltan-

[16] Vantagens não pecuniárias, honrarias, concedidas pelo Regente.

do a grande ênfase que os colégios militares concedem ao ensino de Geometria e de Desenho e analisando os resultados das avaliações do ensino superior que conferem os melhores resultados na área de Engenharia às escolas militares ITA (Instituto Tecnológico da Aeronáutica) e IME (Instituto Militar de Engenharia).

No início do período imperial, em 15 de outubro de 1827 (Anexo 1), D. Pedro I assinou a lei que regulamentou o ensino das primeiras letras no Brasil. Entre outros aspectos, ela definia os assuntos a serem ensinados, os locais das aulas, a remuneração dos professores e que em todas as cidades e vilas mais populosas haveria escolas.

Os dois episódios do Brasil Monárquico, porém, que merecem especial destaque na trajetória que se acompanha foram os cursos preparatórios para os exames de acesso ao ensino superior e a fundação do Colégio Dom Pedro II. Ambos marcaram de forma categórica os currículos das escolas primária e secundária.

Para acesso aos cursos superiores nas áreas de Direito, Medicina e Engenharia, que inicialmente tinha como condição única saber ler e escrever corretamente, foram criados rigorosos exames de seleção que exigiam conhecimentos, dentre outras matérias, de Aritmética, Álgebra e Geometria. Como mencionei anteriormente, a educação primária até então se limitava, quase que totalmente, ao ensino das quatro operações e não existia de modo sistematizado o ensino secundário. Os programas dos exames desempenharam a função de matriz curricular para toda a aprendizagem na escola básica. Então, para preencher a lacuna na formação dos candidatos, nascem, com propósito exclusivamente propedêutico, os *cursos preparatórios*. Tendo como mestres, geralmente, pessoal oriundo da caserna, os cursos foram de capital relevância, porque trouxeram para a sociedade civil o conhecimento que já estava consolidado na área militar. Pela escassez de publicações adequadas, os professores dos cursos passaram a produzir o próprio material didático em forma de apostilas, o que desencadearia a produção de grande número de livros. Note-se que o exame de admissão ditava as disciplinas e em que dimensões deveriam ser estudadas, os cursos especializavam-se em preparar exclusivamente para o exame, e, pressionados pela necessidade, os professores produziam material didático individual e específico. É curioso que todo esse fenômeno se repetiria anos mais tarde e ainda hoje pode ser testemunhado: a universidade prescreve o programa, o ensino médio não consegue preparar os candidatos adequadamente, proliferam os cursinhos e os sistemas de ensino apostilados. Portanto, há quase 200 anos, nossos ascendentes criaram o embrião do exame vestibular.

Reitero a ideia de que no início do Império não havia uma política nacional que estabelecesse as diretrizes e metas para o setor educacional. Existia um grande vácuo entre as primeiras letras e o ensino superior. Para superar o estado de informalidade e a heterogeneidade desordenada produzida pelas *Aulas Avulsas*, categoria a que pertencia a maioria das escolas, foi criado o Colégio Pedro II para funcionar como padrão para todos os estabelecimentos da jovem Nação. Para Ferreira e Vecchia (2004, p.5),

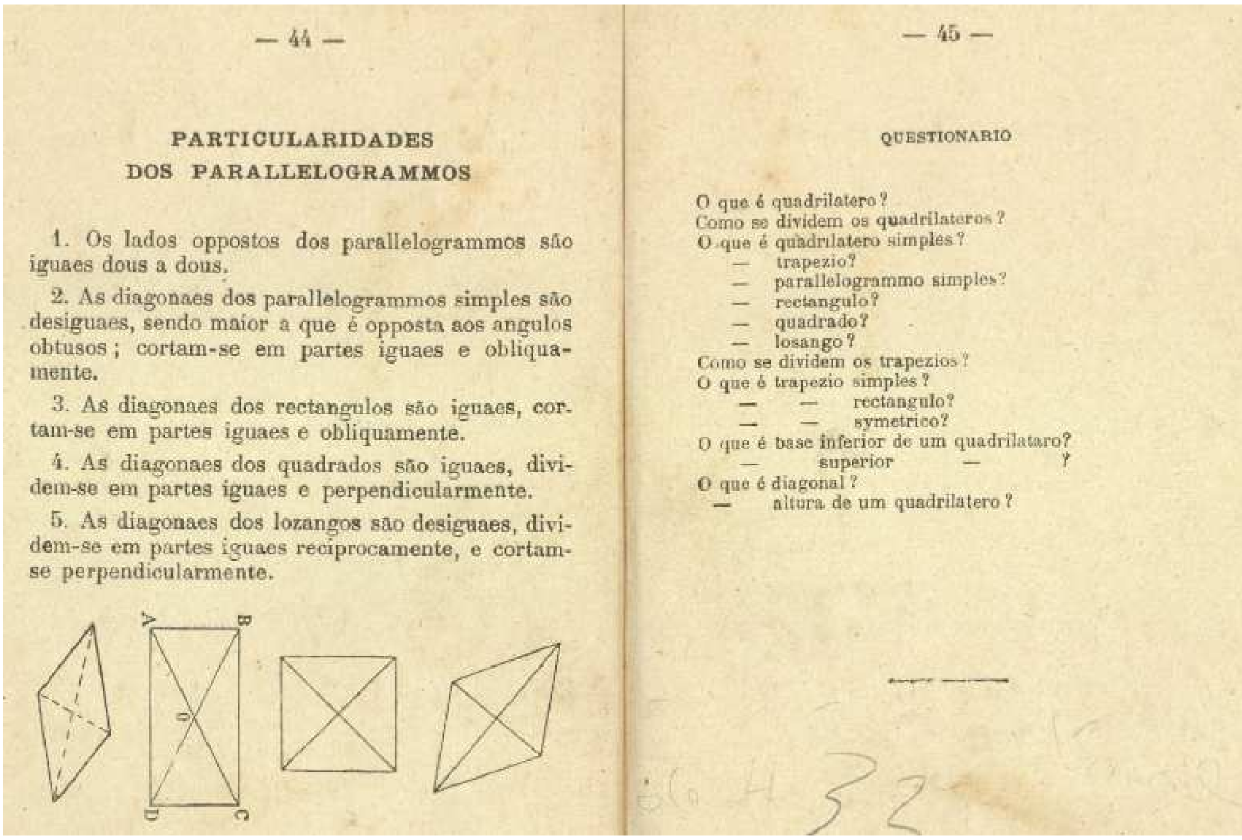
> [...] no Brasil, o Ministro da Justiça e Interino do Império propôs a fundação de uma única escola secundária que viesse a servir de modelo para todas as instituições de ensino público e particular no Brasil.O Imperial Collegio de Pedro II, criado pelo Decreto de 2 de Dezembro de 1837,representou a primeira iniciativa do Governo Imperial de estabelecer o ensino secundário público no Município da Corte e, de certo modo, de avançar com alguma uniformização no ensino secundário no Brasil.

Para este tema, é interessante evidenciar que nos oito anos (aulas) em que era decomposto o projeto de ensino do Pedro II, a Aritmética, a Álgebra, a Geometria e o Desenho, como disciplinas independentes, estavam presentes. Dado que o Colégio seria referencial para todas as outras instituições, só então o Brasil passa a ter o ensino de Matemática estruturado, modelo esse que, com mudanças apenas nos programas e na bibliografia, se manteve até o fim da Primeira República. É importante deixar claro, entretanto, que este novo passo, apesar de marcante, não garantiu a prática de um bom ensino, como exprime Nascimento (s.d):

> No final do Império, o quadro geral do ensino era de poucas Instituições Escolares, com apenas alguns liceus províncias nas capitais, colégios privados bem instalados nas principais cidades, cursos normais em quantidade insatisfatórias para as necessidades do país. Alguns cursos superiores quem garantiam o projeto de formação (médicos, advogados, de políticos e jornalistas). Identificando o grande abismo educacional entre a maioria da população brasileira que, quando muito, tinham uma casa e uma escola, com uma professora leiga para ensinar os pobres brasileiros excluídos do interesse do governo Imperial.

A metodologia empregada até então era orientada pelos livros didáticos. Com efeito, as legislações já faziam um indicativo da bibliografia que seria utilizada. Os professores deveriam ensinar o que constava em um determinado compêndio e para isso valiam-se de questionários e cópias para que os alunos memorizassem os tópicos abordados. Em se tratando de Geometria, além do método de perguntas e respostas, era obedecida uma sequência de recomendações, passo a passo, tal qual uma receita, que ao final resultava na construção das figuras.

A adoção dos livros era decidida de acordo com a orientação das entidades mantenedoras. Como a Igreja Católica era hegemônica na administração das escolas particulares, os livros produzidos nas congregações pontificaram como padrão em todo o Território Nacional. Destacaram-se entre eles as edições por FIC (Frères de l’Instruction Chrétiennne) e por FTD (Frère Théophane Durant). Eram coleções que se caracterizam por apresentar os assuntos (Álgebra, Aritmética, Geometria, Trigonometria, e outros) de forma segmentada, um em cada volume, como se fossem matérias distintas, expunham os conteúdos mediante enunciados de regras e teoremas (nem sempre com o devido cuidado com as justificativas e demonstrações) para em seguida listar uma grande quantidade de exercícios, alguns deles com índice de dificuldade bastante elevado. As figuras 5 e 6 ilustram claramente a estrutura descrita.



— 44 —

PARTICULARIDADES
DOS PARALLELOGRAMMOS

1. Os lados oppostos dos parallelogrammos são iguaes dous a dous.

2. As diagonaes dos parallelogrammos simples são desiguaes, sendo maior a que é opposta aos angulos obtusos; cortam-se em partes iguaes e obliquamente.

3. As diagonaes dos rectangulos são iguaes, cortam-se em partes iguaes e obliquamente.

4. As diagonaes dos quadrados são iguaes, dividem-se em partes iguaes e perpendicularmente.

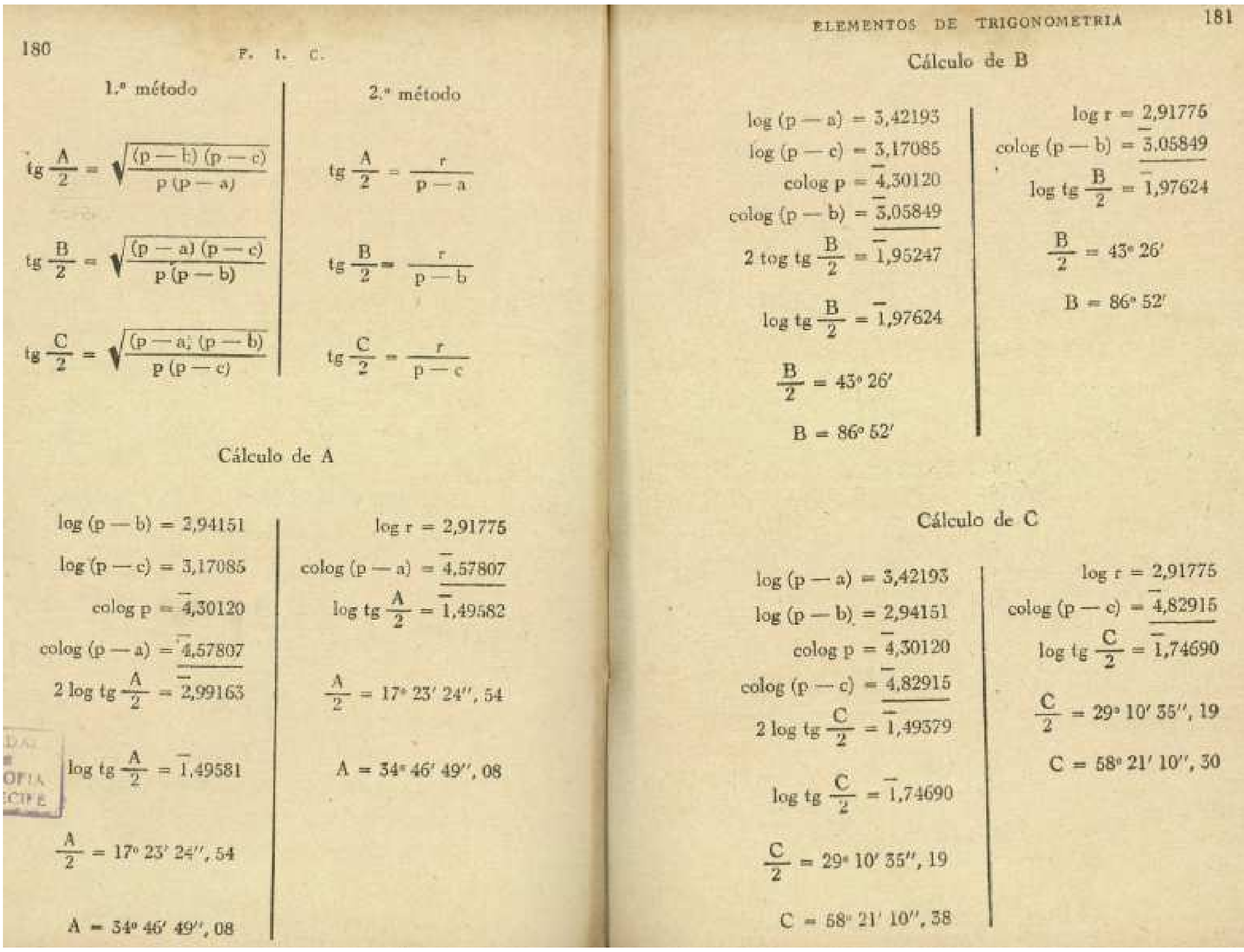
5. As diagonaes dos lozangos são desiguaes, dividem-se em partes iguaes reciprocamente, e cortam-se perpendicularmente.

— 45 —

QUESTIONARIO

O que é quadrilatero?
Como se dividem os quadrilateros?
O que é quadrilatero simples?
— trapezio?
— parallelogrammo simples?
— rectangulo?
— quadrado?
— losango?
Como se dividem os trapezios?
O que é trapezio simples?
— — rectangulo?
— — symetrico?
O que é base inferior de um quadrilataro?
— superior — ?
O que é diagonal?
— altura de um quadrilatero?

Figura 5: Páginas de *Geometria Prática Popular*, de Abílio C. Borges, publicado em 1862.



180 F. I. C.

1.º método

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

2.º método

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

Cálculo de A

$$\begin{aligned} \log(p-b) &= 2{,}94151 \\ \log(p-c) &= 3{,}17085 \\ \operatorname{colog} p &= \bar{4}{,}30120 \\ \operatorname{colog}(p-a) &= \bar{4}{,}57807 \\ 2\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \bar{2}{,}99163 \\ \log\operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \bar{1}{,}49581 \\ \frac{A}{2} &= 17^\circ\,23'\,24'',54 \\ A &= 34^\circ\,46'\,49'',08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}91775 \\ \operatorname{colog}(p-a) &= \bar{4}{,}57807 \\ \log\operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \bar{1}{,}49582 \\ \frac{A}{2} &= 17^\circ\,23'\,24'',54 \\ A &= 34^\circ\,46'\,49'',08 \end{aligned}$$

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA 181

Cálculo de B

$$\begin{aligned} \log(p-a) &= 3{,}42193 \\ \log(p-c) &= 3{,}17085 \\ \operatorname{colog} p &= \bar{4}{,}30120 \\ \operatorname{colog}(p-b) &= \bar{3}{,}05849 \\ 2\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \bar{1}{,}95247 \\ \log\operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \bar{1}{,}97624 \\ \frac{B}{2} &= 43^\circ\,26' \\ B &= 86^\circ\,52' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}91775 \\ \operatorname{colog}(p-b) &= \bar{3}{,}05849 \\ \log\operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \bar{1}{,}97624 \\ \frac{B}{2} &= 43^\circ\,26' \\ B &= 86^\circ\,52' \end{aligned}$$

Cálculo de C

$$\begin{aligned} \log(p-a) &= 3{,}42193 \\ \log(p-b) &= 2{,}94151 \\ \operatorname{colog} p &= \bar{4}{,}30120 \\ \operatorname{colog}(p-c) &= \bar{4}{,}82915 \\ 2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \bar{1}{,}49379 \\ \log\operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \bar{1}{,}74690 \\ \frac{C}{2} &= 29^\circ\,10'\,35'',19 \\ C &= 58^\circ\,21'\,10'',38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}91775 \\ \operatorname{colog}(p-c) &= \bar{4}{,}82915 \\ \log\operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \bar{1}{,}74690 \\ \frac{C}{2} &= 29^\circ\,10'\,35'',19 \\ C &= 58^\circ\,21'\,10'',30 \end{aligned}$$

Figura 6: Páginas do livro *Elementos de Trigonometria* da coleção F.I.C.

A reforma Francisco Campos, instalada pelo Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931, foi uma das mais marcantes em toda a Educação brasileira. A legislação estabeleceu os estatutos que norteariam a implantação e a expansão das universidades no País. Definiu objetivamente as finalidades do ensino secundário, fugindo da visão anterior de que ele seria apenas a preparação para a admissão ao ensino superior. Para isso, ele foi dividido em dois cursos seriados, o primeiro com cinco anos e o segundo com dois. Quanto ao ensino de Matemática, determinou-se a fusão entre os vários segmentos (Álgebra, Aritmética, Geometria,...) em matéria única, e como tal deveria ser ensinada, que recebeu o nome de Matemática. Era obrigatória nos cinco anos do primeiro curso para todos os estudantes e, também, no segundo para aqueles que pretendiam se candidatar às faculdades de Ciências Jurídicas, Engenharia e Arquitetura. A disciplina Desenho era independente, mas também obrigatória em todos os períodos do ciclo inicial. Mais relevante, porém, é que não se tratava apenas de uma alteração de nomenclatura. Não só os programas, mas também a metodologia de ensino foi asseverada na própria lei que, no artigo 10, garantia:

> Os programas do ensino secundário, bem como as instruções sobre os métodos de ensino serão expedidos pelo Ministério da Educação e Saúde Pública e revistos, de três em três anos, por uma comissão designada pelo ministro e à qual serão submetidas as propostas elaboradas pela Congregação do Colégio Pedro II. (BRASIL, 1931).

Com a expedição das instruções pelo Ministério da Educação, o programa foi definido nacionalmente, de sorte que não poderiam mais ser excluídos nem anexados assuntos à definição normativa. Assim, alunos e professores não podiam escolher determinados tópicos que mais lhe agradassem ou que respondessem aos seus interesses imediatos. Quanto à metodologia, as recomendações eram bastante claras, como podemos conferir:

> O ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de que se procurará fazer um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos. Daí a necessidade de se renunciar completamente á prática de memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático de demonstrações já feitas. Ao invés disso, deve a matéria ser levada ao conhecimento do aluno por meio de resolução de problemas e questionários intimamente coordenados. Assim os problemas não se devem limitar a exercícios dos assuntos ensinados, mas cumpre sejam propostos como processo de orientar a pesquisa de teoremas e desenvolver a presteza na conclusão lógica. (BICUDO, 1942, p.157).

Em 1942, ocorreu a reforma de Gustavo Capanema (Lei Orgânica do Ensino Secundário), que sob intensiva influência do nacional desenvolvimentismo, central na ideologia do Estado Novo de Getúlio Vargas, especifica as finalidades do ensino secundário e altera sua estrutura. O ensino secundário continua com sete anos, mas dividido de maneira diferente: quatro do ginasial, complementados com três, que poderiam ser do clássico ou do científico.

> DECRETO-LEI N. 4.244 – DE 9 DE ABRIL DE 1942
>
> Lei orgânica do ensino secundário
>
> O Presidente da República, usando da atribuição que lhe confere o art. 180 da Constituição, decreta a seguinte
>
> LEI ORGÂNICA DO ENSINO SECUNDÁRIO
>
> TÍTULO I
> DAS BASES DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO SECUNDÁRIO
> CAPÍTULO I
> DAS FINALIDADES DO ENSINO SECUNDÁRIO
>
> Art. 1º O ensino secundário tem as seguintes finalidades:
>
> 1. Formar, em prosseguimento da obra educativa do ensino primário, a personalidade integral dos adolescentes.
> 2. Acentuar a elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística.
> 3. Dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial.

CAPÍTULO II
NOS CICLOS E NOS CURSOS

> Art. 2º O ensino secundário será ministrado em dois ciclos. O primeiro compreenderá um só curso: o curso ginasial. O segundo compreenderá dois cursos paralelos: o curso clássico e o curso científico.
>
> Art. 3º O curso ginasial, que terá a duração de quatro anos, destinar-se-á a dar aos adolescentes os elementos fundamentais do ensino secundário.
>
> Art. 4º O curso clássico e o curso científico, cada qual com a duração de três anos, terão por objetivo consolidar a educação ministrada no curso ginasial e bem assim desenvolvê-la e aprofundá-la. No curso clássico, concorrerá para a formação intelectual, além de um maior conhecimento de filosofia, um acentuado estudo das letras antigas; no curso científico, essa formação será marcada por um estudo maior de ciências. (BRASIL, 1942).

Mesmo alterando a divisão e a estrutura dos cursos secundários, a reforma consolida os avanços alcançados com Francisco Campos nas áreas do ensino superior e secundário. Em se tratando do ensino de Matemática, ela não produz mudanças significativas no currículo nem em recomendações metodológicas.

Ao longo das duas décadas seguintes, inúmeros documentos, portarias e decretos foram alterando, regulamentando e normatizando a Educação Nacional, até que, em 1961, sob a influência do movimento Escola Nova, foi publicada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 4024/1961). Em razão das disputas políticas e ideológicas, principalmente entre a escola pública e a escola privada, o projeto esteve em tramitação durante 13 anos antes de sua aprovação, mas a lei vigorou apenas dez anos, porque em 1971 houve a segunda Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 5692/1971). Esta trouxe a grande inovação de separar os currículos em dois segmentos:

> Art. 4º Os currículos do ensino de 1º e 2º graus terão um núcleo comum obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada rara atender, conforme as necessidades e possibilidades concretas, às peculiaridades locais aos planos dos estabelecimentos e às diferenças individuais dos alunos. (BRASIL, 1971).

Como acontece, em grande parte dos casos, a lei ensejou interpretações díspares, principalmente no que tange à parte diversificada. Os assuntos designados para este segmento, por não possuírem a definição de caráter obrigatório, foram considerados não só optativos, mas, em muitos casos, descartáveis. Foi o que aconteceu com o Desenho geométrico em grande número de escolas brasileiras.

Paralelamente, sem imposição de aparatos legais, outra grande revolução ocorreu no ensino de Matemática com início nos anos 1960. Foi uma mudança filosófica, que questionava o que era a própria Matemática, como devia ser praticada e ensinada. Foi fruto de um movimento originado na França, liderado por Nicolas Bourbaki, cujas concepções exerceram influência na Educação em escala planetária, e que entrou para a história como o *Movimento Matemática Moderna.*

Bourbaki, o matemático de muitas cabeças, foi, na realidade, um grupo de estudos nascido na década de 1930 na França, que tinha como objetivo a unificação de todo o conhecimento matemático, reescrevendo-o sob a inspiração de rígidos princípios estruturalistas, apoiados no método axiomático-dedutivo. O irreverente grupo mantinha a identidade de seus membros em sigilo e todas as suas publicações recebiam a assinatura do matemático fictício Nicolas Bourbaki. Pela qualidade dos trabalhos apresentados e pela profícua produção, rapidamente a equipe tornou-se conhecida e suas ideias passaram a influenciar a Educação matemática em todos os continentes. Advogavam a ideia de que, com o novo mundo surgido após a Segunda Guerra Mundial, não se poderia persistir ensinando a ciência nos mesmos moldes de séculos atrás.

Sua proposta para a reformulação do ensino, que privilegiava a abstração e axiomatização, centrava-se na Teoria dos Conjuntos, enfatizando o rigor na Linguagem e na Lógica. As orientações pedagógicas dessa corrente predominaram nas escolas brasileiras entre as décadas de 1970 a 1990. Em todos os níveis escolares, os currículos abordavam os conjuntos.

O consenso, porém, não durou muito tempo. Percebeu-se que o formalismo, a prioridade dada às estruturas, e o mecanicismo das operações lógicas, estavam transformando a matemática em um assunto cada vez mais árido, sem espaço para a intuição e a criatividade e totalmente afastado do universo dos alunos. Um dos principais críticos do novo modelo foi Morris Kline que, em sua obra clássica *O fracasso da Matemática moderna*, verbera sobre seus principais fundamentos: abordagem dedutiva, rigor, linguagem formal e conteúdo. A contundência de suas análises pode ser exemplificada em Kline (1976, p.70) com o trecho

> O estilo lógico e formal é uma das influências mais desvitalizadoras no ensino da matemática escolar. A apresentação lógica e ordenada da matemática pode ter uma atração estética para o matemático, mas serve como anestésico para o estudante.

O efeito mais negativo, entretanto, que se pode debitar à Matemática moderna é que, ao valorizar em demasia as estruturas abstratas, alguns dos conteúdos mais atraentes e relevantes gradativamente foram sendo desprezados. O exemplo mais grave, e que no Brasil se aproximou do abandono, é o da Geometria, que, praticamente, foi excluída dos currículos da maioria das escolas. O efeito catastrófico não se refletiu apenas sobre os estudantes pois várias gerações de professores foram formadas com uma lacuna nesse que é um dos ramos mais significativos da Matemática, como discorro a seguir.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9394/1996) e a consequente publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais estabeleceram uma nova transformação radical no ensino brasileiro. Os documentos se caracterizaram pela dimensão da abrangência, o alto nível de detalhamento e a intensa divulgação entre os sistemas educativos. Os novos currículos da educação básica, no lugar de listarem apenas um rol de assuntos específicos, passaram a ser compostos por *áreas de estudos e temas transversais* e foram pensados levando em conta a ideia de que

> [...] as mudanças estruturais que decorrem da chamada "revolução do conhecimento", alterando o modo de organizar o trabalho e as relações sociais; e a expansão crescente da rede pública, que deverá atender a padrões de qualidade que se coadunem com as exigências desta sociedade. (BRASIL, 1999a, p.15).

As mudanças não se restringiram apenas à definição de modalidades educativas, objetivos, programas e financiamento, indo além, pois explicitaram o que é o saber matemático, a relação de professores e alunos com esse saber, definiram as habilidades e competências que os educandos devem desenvolver, e sugeriram metodologias, atitudes dos professores, opções didáticas, materiais pedagógicos e estilos de avaliação, entre outros.

Com respeito ao ensino de Matemática, há uma ruptura formal com a M*atemática moderna,* ao declarar nos parâmetros curriculares nacionais para 3ª e 4ª séries do ensino fundamental:

> No Brasil, o movimento Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos, teve grande influência, durante longo período, só vindo a refluir a partir da constatação de inadequação de seus princípios básicos e das distorções e dos exageros ocorridos. (BRASIL, 2001, p.20).

Ao selecionar os temas a serem estudados, suprime a primazia da Teoria dos Conjuntos, aproxima a Matemática escolar do mundo natural, propondo a contextualização e a interdisciplinaridade e recobra o ensino de Geometria. São medidas que recebo com otimismo, porque são concordantes com a maneira como penso o ensino de Matemática. Ao se distanciar do formalismo exacerbado proposto pela Matemática moderna, abre possibilidades para adoção de metodologias que favoreçam uma aprendizagem com maior significado e que permitam aos estudantes a elaboração do seu conhecimento de modo mais autônomo.

No ensino fundamental, a subdivisão dos conteúdos foi feita em blocos que abrangem:

- números e operações
- espaço e forma
- grandezas e medidas,

e inserem as inovações

- tratamento da informação
- conceitos e procedimentos.

Para o ensino médio, foi publicada a matriz de competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática (Tabela 1).

Tabela 1: Matriz de competências e habilidades para o ensino médio.

Representação e comunicação	• Ler e interpretar textos de Matemática. • Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.). • Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vive-versa. • Exprimir-se com correção e clareza, tanto língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta. • Produzir textos matemáticos adequados. • Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumento de produção e comunicação. • Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
Investigação e compreensão	• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.). • Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema. • Formular hipóteses e prever resultados. • Selecionar estratégias de resolução de problemas. • Interpretar e criticar resultados numa situação concreta. • Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos. • Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. • Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
Contextualização sócio-cultural	• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. • Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. • Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade. • Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Fonte: (BRASIL, 1999b, p.93).

Verifica-se que o Brasil, por meio de atos legais, assume uma perspectiva de ensino de Matemática que rompe com as metodologias tradicionais. Fica evidenciado que a disciplina será ministrada valorizando seus vínculos com situações reais e concretas, de sorte a fornecer aos cidadãos elementos que aprimorem suas capacidades de análise e de crítica. Ao recomendar a utilização de computadores e calculadoras, incentiva o aporte das tecnologias ao meio educacional, o que já acontece em outros setores da sociedade.

Não se pode negar que os atos legais (LDB, PCN) trazem consigo muitos avanços que vinham sendo reclamados por educadores e pela sociedade há bastante tempo. Mais de uma década depois, entretanto, as mudanças pouco chegaram às salas de aula. Como, para a consolidação da nova conjuntura há a necessidade de (re)formação de professores, investimentos em infraestrutura e material didático para milhões de alunos distribuídos heterogeneamente pela imensa extensão territorial do País, era de se esperar que tal demora acontecesse.

3.4 A Geometria, o Desenho e as Construções com Régua e Compasso

Inicio esclarecendo que o espaço destacado concedido à Geometria, ao Desenho e as construções geométricas com régua e compasso, dentro do grande corpo de conhecimentos matemáticos, não significa que as pense como áreas de conhecimentos independentes ou desconexas daquele complexo universo. O realce, o faço por dois motivos: o primeiro é que foi o objeto matemático central de minha pesquisa e segundo é que na prática a ruptura aconteceu nos currículos de várias escolas, se estendeu para o corpo docente (surgiram os professores exclusivos de Desenho) e posteriormente para os livros didáticos. Creio que a disjunção não traga nenhuma vantagem para o aprendizado dos assuntos, porque eles estão intimamente relacionados e se complementam.

Quando incluo desenho nesse âmbito, convém elucidar de qual disciplina estou tratando. Isto porque, em diferentes momentos, a denominação, os conteúdos e os objetivos da matéria foram bastante diversos e, em não raras vezes, se confundiam com os de Geometria. No Brasil, a matéria Desenho Geométrico, na realidade, durante a maior parte de sua história, privilegiou tópicos de Geometria, mais precisamente de *construções geométricas*. Por tal motivo não posso romper o liame que agrega as disciplinas e, em meu texto, serão tratadas dentro dessa perspectiva.

A separação entre Geometria, Aritmética e posteriormente a Álgebra é bem antiga, já podendo ser encontrada em Platão, quando elegeu a Ciência do Cálculo como primeira a ser ministrada aos líderes, e a segunda, que se liga a ela, a Geometria; lembro que o desenho era parte inseparável da Geometria, o que pode ser verificado nos *Elementos,* onde Euclides em muitas das explicações e demonstrações geométricas se utilizou das figuras para chegar a resultados satisfatórios.

Naquele período, se conheciam apenas os números inteiros que eram utilizados para contar quantidades discretas[17]. Para medir grandezas, os gregos adotavam comparações entre segmentos de retas. Esse fato fez com que eles se apropriassem de conhecimentos avançados das propriedades geométricas. Para eles, calcular uma determinada grandeza significava construí-la geometricamente.

[17] Quantidade a exprimir uma grandeza que envolve objetos, elementos ou valores não contínuos.

Por exemplo, para resolver a equação a.x = b.c, isto é, encontrar a incógnita x que torna a igualdade verdadeira, o procedimento que adotavam era construir a dimensão x de um retângulo onde a outra dimensão era “a” de tal sorte que a medida de sua área fosse a mesma da área de um retângulo com lados “b” e “c”. Desse modo, na Geometria helênica *resolver* significava *construir*.

Havia a distinção entre construções mecânicas (aproximadas) e as construções que chamarei *ideais*. As primeiras tinham o objetivo imediato de aplicação em situações concretas do cotidiano como agricultura e “engenharia”, e para sua obtenção utilizavam diversos aparelhos e artifícios técnicos. As *ideais*, dentro de uma visão platônica, destinavam-se ao exercício do intelecto e à elevação do espírito e só faziam sentido se fossem *construídas* utilizando apenas régua e compasso. Vale salientar que a régua por eles utilizada não era graduada e o compasso não possuía elemento fixador entre suas hastes. O grande problema que eles se propunham era a verificação da possibilidade de construção dos objetos geométricos utilizando apenas esses equipamentos. Dos trabalhos de elaboração das *construções geométricas* e de verificação dos elementos construtíveis, nasceram os célebres *três problemas clássicos* de que tratei em seção anterior.

Na Antiguidade, a Geometria era uma das disciplinas que, ao lado de Aritmética, Astronomia e Música compunham o *quadrivium*, que juntamente com o *trivium* (Dialética, Gramática e Retórica) completava as disciplinas da formação clássica. Como os *Elementos* se constituiu a principal matriz de conteúdos matemáticos estudados, em todo o ocidente, até o final da Idade Média, pode-se deduzir que a Geometria foi disciplina prioritária durante todo aquele período.

Mesmo fora dos mosteiros e das abadias, instituições onde, preferencialmente, o ensino era praticado, nunca deixaram de existir atividades relacionadas ao desenho. Reporto-me às atividades desenvolvidas nas oficinas dos artesãos, dos artistas, dos artífices que trabalhavam na produção de obras de artes, joias, armas e utensílios domésticos. Essa, porém, não é a modalidade de produção que me interessa, porque não se apoiava nos ditames da Ciência Geométrica. Geralmente era um conjunto de técnicas e procedimentos, transmitido oralmente de maneira prescritiva, que ficava confinado nas diversas *corporações de ofício* que se consolidaram naquela época. Na educação das crianças e jovens das elites, praticava-se o Desenho Artístico, que se restringia, basicamente, a cópias e representações de paisagens e objetos.

A Revolução Industrial traz consigo as máquinas e os motores com mecanismos sofisticados, que, por aplicarem modernos processos de produção, exigiam uma nova classe de engenheiros e artífices. Como consequências imediatas, desenvolveu-se o Desenho Técnico Industrial e na formação dos engenheiros a Geometria se tornou obrigatória com teores de grande complexidade. O Desenho Artístico permanece nas escolas com o objetivo de instrução estética como parte da formação integral das pessoas bem educadas.

No Brasil, como já aludi, do Descobrimento até o final da presença jesuítica, pouco há o que apontar sobre o ensino de Matemática, consequentemente de Geometria, excetuando-se as *aulas* voltadas para a formação militar. Em relação ao Desenho, a primeira iniciativa de incluí-lo como componente curricular, segundo Nascimento (1994), ocorreu em 1800, no Seminário de Olinda.

Reforço que somente com a chegada da Família Real, na contextura das reformas implantadas visando ao desenvolvimento da Colônia, estabeleceu-se a Academia Real Militar e, por meio de lei, em 1810, foi criado o primeiro curso completo de Matemática do Brasil, com objetivos práticos de formar o pessoal de carreira militar para garantir a segurança do regime, como se pode concluir do título undécimo

> Desejando animar e promover estes estudos e conhecimentos, de que tanto depende a segurança pública e a grandeza do Estado, ordeno que em cada anno, excepto o primeiro, haja três partidos, um de 20 moedas de ouro de 4$800 cada uma, outro de 15 e o terceiro de 10 moedas do mesmo valor, que os Lentes darão aos três discípulos que mais se tiverem distinguido em cada anno. (BRASIL COLÔNIA, 1810).

Como entre as finalidades da escola estavam a construção de fortificações, demarcação de terrenos, elaboração de mapas e cálculos de artilharia, a Geometria e o Desenho tiveram grande destaque nos currículos dos cursos.

No Império, no corpo da Lei de 1827 (Anexo 1), pela primeira vez, oficializa-se o que deve ser ensinado na escola básica. E desde então a Geometria já se faz presente, como cita o artigo sexto:

> Art. 6.º Os professores ensinarão a ler, escrever, as quatro operações de arithmetica, pratica de quebrados, decimaes e proporções, as noções mais geraes de geometria pratica, a grammatica da língua nacional, e os princípios de moral christã e da doutrina da religião catholica e apostolica romana, proporcionados á comprehensão dos meninos; preferindo para as leituras a Constituição do Imperio e a Historia do Brazil.

Curiosamente, a Lei exibe com clareza um preconceito, que vigoraria até data bem recente, contra as mulheres no magistério, quando eram deixadas para elas, geralmente, as funções de alfabetizadoras e de preparação das meninas nas *prendas do lar*. A questão de gênero está assentada no artigo 12

> Art. 12. As Mestras, além do declarado no art. 6.º, com exclusão das noções de geometria e limitando a instrucção da arithmetica só ás quatro operações, ensinarão também as prendas que servem á economia doméstica; e serão

> nomeadas pelos Presidentes em Conselho, aquellas mulheres, que sendo brazileiras e de reconhecida honestidade, se mostrarem com mais conhecimentos nos exames feitos na fórma do art. 7.º

Evitando discutir, sem negar sua importância, os problemas que a diferenciação entre *professores* e *mestras* acarretaram na instrução das crianças, é importante reafirmar que desde 1827 a Geometria se estabelecia como parte do currículo oficialmente no Brasil. Mais ainda, Valente ensina que em debates travados na Câmara se defendeu a ideia de que no segundo ano o aluno aprendesse

> [...] as quatro operações da aritmética e as "primeiras noções de geometria, particularmente as que forem necessárias à medição os terrenos" e, além disso, haveria necessidade de "exercitar o menino em traçar figuras já à mão, já com compasso e régua." (VALENTE, 1999, p. 111).

Desde então, e até a década de 1970, a Geometria e o Desenho Geométrico, atravessando todas as reformas pelas quais o ensino brasileiro passou, sempre foram partes integrantes e obrigatórias nos programas oficiais de Educação.

É verdade que, no Desenho, nem sempre prevaleceu a visão geométrica pois algumas diretrizes o compreendiam como elemento da formação geral humanística e privilegiavam as formas artísticas e representativas em detrimento daquela. A reforma Francisco Campos, de 1931, foi um marco de valorização da disciplina, porque estabelece para ela uma significativa carga horária, bem como cria subdivisões da área, quando, conforme Nascimento (1994), a norma buscou dar um equilíbrio entre os aspectos técnico e artístico do Desenho, ao propor as quatro modalidades básicas: do Natural, Geométrico, Decorativo e Convencional.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1971, já sob a influência do Movimento da Matemática Moderna, determinou uma drástica mudança de direcionamento no ensino de Geometria e Desenho. Ao dividir o currículo entre núcleo comum e parte diversificada, na prática, disciplinas obrigatórias e optativas, ela cria, embora os órgãos oficiais o negassem, uma hierarquização entre os campos de conhecimentos. As disciplinas optativas, entre elas o desenho, começaram a ser depreciadas, tanto por alunos quanto por professores. Desenho deixou de ser cobrado nos exames vestibulares, o que significou uma senha para que as escolas de ensino médio abandonassem o seu ensino. Desde então, testemunho a total desvalorização do ensino da Geometria e do Desenho, realidade que, mesmo com algumas tentativas de reversão, ainda persiste na maioria das escolas brasileiras. Resumindo as fases que o Desenho Geométrico e a Geometria percorreram no século passado, a professora Elenice Zuin, que desenvolveu alentadas pesquisas na área, acentua:

> É efetivamente, a partir da *Reforma Francisco Campos* que o Desenho Geométrico assume uma posição de destaque nos currículos. Em 1942, com a *Reforma Gustavo Capanema* – o 1º ciclo, passou a se denominar ginasial, com duração de 4 anos, e o 2º teria duas classificações, clássico e científico, ambos, com duração de 3 anos – o estudo de Desenho, com régua e compasso, se iniciava na 1ª série ginasial, estando presente em todas as séries dos cursos ginasial e científico. Percebe-se a valorização dada ao Desenho Geométrico que permaneceu nas legislações posteriores, como disciplina obrigatória. Seu prestígio foi abalado com a promulgação da LDB 5692/1971, quando passa a configurar apenas da parte diversificada do currículo, deixando de ser uma disciplina obrigatória. Como as escolas tinham liberdade para definir sua grade curricular, dentro da parte diversificada, o Desenho Geométrico veio a ser excluído de diversas instituições escolares do ensino básico, no Brasil. (ZUIN, 2001b, p. 289)

Os novos direcionamentos propostos pela LDB de 1996 (Lei nº 9394) e pelos PCN nos levam a perceber a intenção de reaver o ensino da Geometria do Desenho Geométrico e, particularmente, das construções geométricas na educação básica, o que exemplifico com diversos recortes desses documentos

> Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso. (BRASIL, 2001, p.87).
>
> Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso. (BRASIL, 2001, p.89).
>
> Resolução de situações-problemas que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor. (BRASIL, 2001, p.89).
>
> Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. (BRASIL, 1999b, p.93).

A importância da aprendizagem de Matemática é reconhecida universalmente. No Brasil, pelo que inventariei acima, é possível concluir, mediante os documentos oficiais mais recentes, que as diretrizes nacionais se alinham com este consenso. Dentro da disciplina, é forçoso reiterar o destaque que deve ser dado à Geometria. É injustificável o papel secundário a que foi relegada nas últimas décadas e devem-se louvar as iniciativas de recobro que se tem verificado em época corrente, inclusive por indicativos oficiais, já citados, nos PCN.

3.5 O Quadro Atual

Acredito que todas as iniciativas, reformas, leis e instrumentos que propuseram opções para o ensino da Matemática no Brasil, independentemente de em qual ideologia ou regime político se arrimavam, traziam no seu âmago a intencionalidade de progresso e aperfeiçoamento. Não me parece lúcido crer que, em algum momento, deliberadamente, fossem criadas medidas para retroceder dos patamares já alcançados. Por melhor que tenham sido as intenções, no entanto, o quadro da Educação nacional atualmente ainda é causa de profundas preocupações e superá-lo é um grande desafio não só para os mandatários e comunidades acadêmicas, como também para todo o povo brasileiro.

O Brasil, na última década, logrou significativos progressos na área social e recentemente experimentou intensivo crescimento econômico. Por pressões de instâncias internacionais (Banco Mundial, Banco Interamericano de Desenvolvimento, Fundo Monetário Internacional e outros), pelo crescente mercado de trabalho e pela necessidade de recobrar a dívida social, historicamente instalada no País, políticas governamentais, efetivamente, demonstram o propósito de mudanças em todos os níveis da Educação.

Com respeito ao ensino superior, verifica-se um significativo incremento no número de matrículas. O censo da Educação Superior do INEP-MEC informa que, em 2009, 5.954.021 de estudantes estavam matriculados, enquanto em 2001 esse número era de apenas 3.036.113. Entre as medidas que levaram a esse resultado posso assinalar os incentivos à iniciativa privada para a abertura de cursos e instituições que, segundo o censo citado, representavam 89,4% do total.

Na esfera pública, alguns programas consolidaram-se como instrumento de acesso ao terceiro grau. O FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior criado pela Medida Provisória nº 1.827, de 27/05/1999, posteriormente convertida na Lei nº 10.260, de 12/07/2001, financia as anuidades de estudantes em instituições privadas com juros subsidiados, período de carência e longo prazo para quitação, tendo consolidado 616.743 contratos desde o início do programa, em 1999, até setembro de 2010, totalizando R$ 8,3 bilhões em financiamentos. Pela Lei nº 11.096, de 13 de janeiro de 2005, foi instituído o Programa Universidade para Todos – PROUNI, que distribui bolsas integrais e parciais para possibilitar o acesso de alunos de baixa renda, oriundos das escolas públicas, a escolas particulares e favoreceu, até o segundo semestre de 2010, 748.000 estudantes, sendo 70% com bolsas integrais. Para dotar as universidades federais de condições que permitissem ampliar o acesso, a permanência e a taxa de conclusão, o Governo Federal criou o REUNI - Programa de Apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais, instituído pelo Decreto nº 6.096, de 24 de abril de 2007. Foram criados universidades e institutos federais de Educação. No aspecto da qualidade, o MEC ampliou as políticas de incentivo à pós-graduação para estimular a formação de mestres e doutores, além de criar diversos mecanismos de avaliação e acompanhamento permanente das instituições, por meio do SINAES – Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Superior.

Não há como negar que são medidas de grande abrangência e de amplo alcance social, mas ante enorme atraso em que o ensino de terceiro grau se encontrava, os resultados estão muito longe do desejável. É desalentador constatar que apenas 14% dos jovens com idade entre 18 e 24 anos (faixa etária ideal) estão matriculados. Sob qualquer análise, este número é pífio. O Plano Nacional da Educação de 2001 estabelecia como meta para 2010 se atingir 30% desse universo; não se chegou nem à metade.

Tratando especificamente de Matemática, os resultados da última avaliação oficial disponível, Enade-2008, aponta dados que beiram a catástrofe. 41,5% (142) dos cursos pesquisados obtiveram conceitos 1 e 2 no CPC – Conceito Preliminar de Curso em uma escala que vai até 5. Cursos com estes conceitos são considerados pelo MEC em situação crítica. Necessitam fazer um documento de compromisso discriminado as providências que tomarão para atingir padrões aceitáveis e subordinam-se à supervisão ministerial para a obtenção do seu recredenciamento. Na avaliação dos conhecimentos dos alunos, o ENADE – Exame Nacional de Desempenho de Estudantes apontou uma situação ainda pior, configurada como uma tragédia, já que a nota média do conteúdo específico de Matemática foi 29,5 quando a nota máxima era 100.

Na Educação Básica, a ação de maior impacto em período recente foi a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que significou uma ruptura oficial com o processo de ensino tradicional. É clara a intenção de romper com os procedimentos anteriores (tradicionais) conforme anoto na justificativa que compõe o documento:

> Na visão aqui assumida, os alunos constroem significados a partir de múltiplas e complexas interações. Cada aluno é sujeito de seu processo de aprendizagem, enquanto o professor é o mediador na interação dos alunos com os objetos de conhecimento; o processo de aprendizagem compreende também a interação dos alunos entre si, essencial à socialização. Assim sendo, as orientações didáticas apresentadas enfocam fundamentalmente a intervenção do professor na criação de situações de aprendizagem coerentes com essa concepção. (BRASIL, 2000, p. 93).

O sistema escolar, notadamente os professores, estava despreparado para responder à nova missão que lhes foi expressa. Respondendo às demandas oriundas dessa notória carência, o Poder Público instaura políticas mediante as quais aloca recursos de alta monta para programas de melhoria da infraestrutura e da merenda escolar, aquisição de materiais pedagógicos e equipamentos, e busca a universalização da distribuição dos livros didáticos. Quanto ao segmento de pessoal, os governos (municipais, estaduais, distrital e federal), compreendendo a dimensão da lacuna na qualificação dos profissionais, lança diversos programas de formação e especialização de professores.

Para atender o enorme contingente de trabalhadores do segmento, são feitos grandes investimentos na criação e difusão dos cursos de formação em serviço e a distância. São ações ainda bastante contestadas por especialistas da área, porque, visando prioritariamente aos aspectos quantitativos, adotam procedimentos e metodologias bastante questionáveis. Posso exemplificar algumas dessas iniciativas por meio da UAB – Universidade Aberta do Brasil, a UFC Virtual, no Ceará, e o programa Rede Interativa Virtual de Educação – Rived, do Ministério da Educação. Apensaram-se novos instrumentos de avaliação oficial das condições de ensino e aqueles em curso foram alargados, de modo que agora são aplicados exames nacionais em todos os níveis de escolaridade (ENADE, ENEM, SAEB, Prova Brasil).

Em se tratando de avaliações, o ENEM é tema de amplos e acirrados debates em diversas instâncias educacionais (universidades, representações estudantis e de professores). O exame, instituído como instrumento de avaliação e análise do Ensino Médio, afastando-se totalmente dos seus objetivos iniciais, progressivamente se torna o único processo de ingresso no ensino superior público. Sem me deter na série de problemas operacionais que o processo enfrenta, ocasionados principalmente pelo gigantismo do objetivo de atingir todas as universidades federais, devo dizer que novamente os professores são postos em situações que não estavam preparados para enfrentar. Embora as universidades e as instâncias reguladoras tentassem negar, o exame vestibular sempre determinou o perfil do ensino médio. A preparação para os concursos já se iniciava na primeira série e todos os programas eram elaborados de maneira a cobrir tanto em conteúdo quanto na forma as questões que eram cobradas nesses exames. O ENEM alterou as duas coisas e, ao avaliar os alunos por meio de itens que medem habilidades e competências, deixa a comunidade docente em verdadeiro alvoroço em todo o País. Nos dois últimos anos, testemunha-se uma avalanche de cursos e publicações milagrosas que, sob títulos bastante sugestivos (*Guia prático do novo Enem, Como se dar bem no novo Enem, A bíblia do Enem, Grande livro do Enem*), acenam com a promessa milagrosa de qualificação instantânea dos professores e alunos para o novo sistema avaliativo. Pela grande experiência que adquiri após tantos anos militando em salas de aula do ensino médio, e por haver acompanhado fenômenos similares a cada mudança nas diretrizes dos vestibulares, não tenho dúvida em afirmar que em breve muitos professores estarão dando aulas de uma nova ciência, com grandes prejuízos para a formação dos estudantes, a Matemática do Enem.

Se nos itens acesso e quantidade os progressos podem ser quantificados positivamente, o mesmo não se verifica quando se trata da qualidade da educação ofertada. Apesar do otimismo manifesto no discurso oficial, novamente se tem a lamentar que os resultados obtidos até o momento não são de todo animadores. Os indicadores que podem ser retirados das principais avaliações do sistema mostram que um longo caminho ainda precisa ser percorrido.

O PISA, programa de avaliação internacional do desempenho de estudantes na faixa etária de 15 anos, aplicado a cada três anos pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), que, em 2009, foi realizado por 470 mil alunos de 65 países, apontou a situação do Brasil nos últimos quatro exames, conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Pontuação média obtida pelos alunos brasileiros no PISA

PONTUAÇÃO MÉDIA OBTIDA				
DISCIPLINA	2000	2003	2006	2009
Ciências	375	390	390	405
Leitura	396	403	393	412
Matemática	334	356	370	386
Média	368	396	334	375

Fonte: http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/cai+diferenca+entre+alunos+brasileiros+e+de+paises+desenvolvidos/n1237852781819.html, adaptado.

Um olhar superficial sobre este quadro poderia levar à falsa ideia de que tudo está caminhando bem, pois há um crescimento constante das médias em todas as áreas. Esse raciocínio é o articulado pelo INEP, órgão do MEC que coordena o exame no Brasil, como pode ser verificado, sob ufanista manchete, em sua página da internet em http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/internacional/news10_02.htm

Brasil está entre os países que mais crescem no Pisa e cumpre meta doPDE

> Na média nacional, o Brasil cresceu sobretudo em Matemática, onde passou de 334 pontos no ano 2000, para 386 pontos em 2009; em Ciências passou de 375 para 405 e em Leitura de 396 para 412. Desta forma atingiu a meta do Plano de Desenvolvimento da Educação de atingir a média 395 pontos nas três áreas.

A frieza eloquente dos números, no entanto, esconde uma realidade que não pode ser olvidada: no *ranking* dos 65 países que se submeteram ao teste o Brasil ficou em 53º lugar. Em Matemática a média na OCDE foi 496 pontos, enquanto a do Brasil foi de 386 pontos, nos deixando mais abaixo ainda, em 57º. Creio que seja insustentável para o País que ocupa o 8º lugar em desenvolvimento econômico permanecer com índices tão desabonadores em Educação.

No relatório da pesquisa 2010 do PNDU – Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento sobre o Índice de Desenvolvimento Humano – IDH, o Brasil ficou na 73ª posição entre 169 nações. Quando se concentra o foco apenas nas variáveis relativas à Educação, despenca-se para o 93º lugar.

Se se tomar qualquer outro referencial, não se chegará a conclusões distintas. Alguma ascensão é lograda, mas o panorama da educação brasileira é desalentador e é necessário continuar perseguindo obstinadamente uma melhor qualidade.

Explicito, de várias formas, ao longo desse texto, a importância cada vez maior da Matemática, para o convívio social e para a dinâmica escolar, mas devo reiterar a ideia de que o seu ensino continua enfrentando sérios, e já históricos, problemas, tornando-se, na maioria das vezes, o vilão do processo de aprendizagem, sendo responsabilizado por grande parcela do insucesso escolar, levando-se em consideração os baixos resultados nos vários tipos de avaliações, como já exibi, e os altos índices de reprovação e repetência nessa matéria.

Os motivos que levam a esse quadro são diversos e não estão associados a sujeito único pois eles podem ser localizados nos mais diversos elementos componentes do sistema educacional. Entre eles posso reunir a falta de condições estruturais em muitas escolas, formação deficiente de professores, falta de interesse pelos alunos, professores desmotivados pelas condições salariais e pelo parco reconhecimento da profissão e currículos sem sintonia com o mundo atual dos estudantes.

No caso particular da Matemática, além das questões gerais suscitadas, acredito que uma das principais causas do insucesso reside nas opções metodológicas e nas escolhas didáticas adotadas pelos educadores no ensino de cada um dos seus tópicos. É desejável, portanto, que os professores sempre reflitam sobre as consequências de suas posições docentes com vistas a exercitar novas práticas que possam alterar a situação vigente. Sobre o tema, Barguil e Borges Neto (2008) se posicionam da seguinte maneira:

> Acreditamos que muitos professores, inclusive em Matemática isso é ainda mais verdadeiro, desconhecem os motivos do fracasso dos seus alunos. Permitir que profissionais em exercício analisem, a partir da contribuição de novos valores epistemológicos e filosóficos, a sua prática, no sentido de reelaborá-la, é colocar a atividade docente em destaque, valorizando-os e incentivando-os a modificarem-na.

Exemplifico situando a problemática no caso particular do ensino da Geometria na Educação Básica. Preliminarmente, saliento que, dentre todos os conteúdos da Matemática, este é um dos campos que favorece com maior intensidade o crescimento cognitivo dos aprendizes, porque essa área permite, mais do que qualquer outra, o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Para alcançar as soluções dos problemas, os alunos precisam desenvolver habilidades para medir, classificar, comparar, seriar, induzir, deduzir, demonstrar, que vão criando as competências para que os estudantes percebam a importância da adoção de procedimentos metodológicos na resolução de problemas. Além disso, existe uma motivação natural pelo tema, porque as figuras, diagramas e construções próprias dos tópicos estudados são os mesmos que o cercam, não são apenas abstrações, podem ser contemplados na sua vida, ampliando sua percepção espacial.

No dia a dia das escolas, porém, a disciplina Geometria, por muitas vezes rotulada de cansativa e difícil, é uma das que apresenta menores índices nos resultados das avaliações. Não acredito que o problema seja intrínseco da matéria, mas das abordagens pedagógicas adotadas.

Com amparo na minha grande vivência no magistério do Ensino Médio posso perceber que na elaboração dos cursos um comportamento quase que padrão é seguir, literalmente, desde o início, o método axiomático, como Euclides o fez nos ***Elementos***. Nesse formato, os resultados são apresentados de forma que nada dizem do processo por meio do qual foram encontrados. A descrição se faz de forma lógica, direta e objetiva, mesmo que o desenvolvimento da teoria tenha se dado ao longo de um grande espaço de tempo e por percursos tortuosos nem sempre imediatos. Nas primeiras atividades propostas aos alunos, já se espera que eles deduzam relações e provem teoremas, o que é bastante difícil para iniciantes, pois é muito improvável que no princípio de seus estudos eles tenham os *insights* que os levem às demonstrações solicitadas. Nas aulas e nos livros didáticos, geralmente são privilegiadas metodologias prescritivas, onde se detalham todos os passos a serem seguidos para obter a solução dos exercícios. Isso favorece a que os estudantes, ao contrário de desenvolver suas competências mediados pela descoberta, decorem as demonstrações e as etapas das construções. Sem dúvida, existe um grande prejuízo ao se adotar essa modalidade de ensino nessa perspectiva, porque se retiram do aluno a liberdade da imaginação e da experimentação e as possibilidades de criação e construção do próprio conhecimento. Embora a formalização rigorosa seja sempre um marco a ser atingido em Matemática, na minha avaliação, nos contatos iniciais é preferível que os alunos usem sua intuição espacial, façam experimentações, conjeturem propriedades e relações para, posteriormente, já familiarizados com a matéria, enfrentarem os teoremas e as demonstrações completas.

Creio, porém, como muitos outros, que a aliança do poder das novas ferramentas de informação e comunicação com a capacidade de desenvolvimento cognitivo que a Geometria favorece pode oferecer um grande suporte à educação, particularmente ao ensino de Matemática. Ninguém mais discute que os computadores desempenharão papel definitivo na formação das gerações vindouras e, como tal, não se há de prescindir de todo o potencial que situam à disposição. Nilson Machado (1999, p. 233), eminente professor e pesquisador de Matemática, assim se pronuncia sobre o assunto:

> Não parece mais fazer qualquer sentido a discussão sobre a conveniência de se utilizar computadores nas escolas. Usar ou não usar já não é a questão. O computador está aí, cada vez mais presente fora da escola, insinuando-se como instrumento básico para muitas das tarefas escolares. A escola pode até fechar os olhos para ele, mas estará deixando de lado aspectos significativos da realidade extra-escolar, da sociedade como um todo. O que é preciso discutir – e aí o debate encontra-se completamente aberto – é como incorporá-lo ao processo educacional, distinguindo tarefas em que sua utilização é fundamental de outras em que sua contribuição é perfunctória.

Levando-se em conta que a importância do ensino e da aprendizagem de Matemática é inquestionável, que os resultados obtidos no Brasil até o momento não são satisfatórios e que os aportes agregados pelas tecnologias podem mudar o atual espaço escolar, justifica-se o fato de que novas iniciativas e experiências sejam exercitadas, buscando outros caminhos e propostas opcionais para um desenvolvimento mais eficiente da Educação na área.

3.6 O Ensino de Matemática em Ambientes Virtuais De Ensino – AVE

As discussões e reflexões sobre os caminhos da Educação na sociedade atual, interconectada por tecnologias digitais, devem levar em consideração, necessariamente, as opções trazidas para o debate educacional pela expansão nos últimos anos da Educação a Distância. Projetos e programas de Educação a Distância (EaD), atrelados ao incremento e possibilidades das tecnologias digitais, são apresentados como novas formas de lidar com os problemas de política educacional e de integrar alunos e instituições de ensino à sociedade em rede.

3.6.1 A Matemática e a Educação a Distância

Identifiquei uma vasta literatura em torno do conceito de Educação a Distância. Por exemplo, Moran (2003) define Educação a Distância como processo de ensino-aprendizagem mediado por tecnologias em que professores e alunos ficam separados espacial e/ou temporalmente, mas podem estar conectados, interligados por tecnologias, como internet, correio, televisão, rádio e outras tecnologias semelhantes.

Belloni (2001) defende o argumento de que a terminologia mais adequada para tratar a Educação a Distância é Aprendizagem Aberta e a Distância (AAD). De acordo com a recomendação da União Europeia, esta expressão é a mais utilizada desde os anos 1990. Tal denominação é considerada a mais pertinente com as transformações sociais, econômicas e educacionais, por englobar diferentes formas e regimes de EaD, que se caracterizam pela flexibilidade, abertura dos sistemas de ensino e de aprendizagem, preconizando a autonomia, a interação do estudante e a elaboração de conhecimentos no processo educativo.

Na legislação brasileira, o artigo 1º do Decreto nº 5.622, de 19 de dezembro de 2005, determina que EaD

> caracteriza-a como modalidade educacional na qual a mediação didático–pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorre com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com estudantes e professores desenvolvendo atividades educativas em lugares ou tempos diversos. (BRASIL, 2005).

Conforme esse dispositivo, a EaD possibilita a educação, o ensino, a autoaprendizagem, por meio de recursos didáticos, pedagógicos e tecnológicos organizados com atividades a serem desenvolvidas por docentes e discentes separados fisicamente em qualquer tempo e espaço.

Desse modo, Moran (2003) e Belloni (2003) explicitam em seus conceitos as possibilidades de interação de pares, a socialização, o diálogo e a mediação dos envolvidos no processo educativo “midiatizado” pelas tecnologias digitais. E a EaD contribui como elemento educativo e formativo, sendo oportunidade de criação de relações, de estímulo à criatividade, à reflexividade, ao diálogo e à formação continuada.

Até o momento nenhum modelo tecnológico de EaD se sobrepôs aos demais de maneira absoluta. Acompanhando o fio da história, todos nos defrontaremos com os cursos por correspondência (impresso), passando pelo uso do rádio (áudio) e da televisão (vídeo) e chegando ao emprego das tecnologias digitais. É fácil perceber que não há um traço de linearidade ascendente no uso das tecnologias, em que um meio de comunicação suplanta e exclui a outro. Nota-se, porém, ao contrário, o inter-relacionamento das diversas mídias, pois atualmente o impresso convive com os ambientes virtuais, e o áudio e o vídeo (características dos veículos rádio e televisão) estão presentes nesses ambientes.

A difusão em grande escala e a aplicação em múltiplos espaços da EaD trazem como consequência a necessidade de estudos e experiências que a aprimorem. Surgem, assim, duas conjunções de problemas importantes e que se relacionam. A primeira trata-se das propostas pedagógicas para o embasamento da EaD e a segunda refere-se à utilização das ferramentas tecnológicas nos processos educativos virtuais, sem tratá-las como um fim em si mesmas, mas como meios disponíveis para uma educação de qualidade.

A primeira é bastante complexa, pois as propostas pedagógicas tratam a educação de forma geral, independentemente de suas modalidades, níveis e especificidades. Isto significa dizer que uma abordagem pedagógica tradicional pode ser utilizada no ensino virtual tanto quanto uma abordagem de cunho progressista ou humanista.

É possível perceber essa situação nas práticas desenvolvidas na EaD em que existem propostas rígidas baseadas no modelo de instrução, com características que trazem pouca ou nenhuma interação dos sujeitos. Fundam-se na modularização e fragmentação dos conteúdos; ampla utilização de exercícios de fixação, entre outros aspectos. Nesta proposta, há uma ênfase na relação entre o sujeito e conteúdo. Outras experiências se baseiam numa abordagem colaborativa. “Colaborar significa uma ação entre sujeitos que buscam um mesmo objetivo em uma atividade, ou seja, é um trabalho conjunto, em que as atividades realizadas contribuem entre si”. (PEREIRA, 2004, p.59). Nessa abordagem, são valorizadas as trocas de experiências entre os sujeitos, as discussões e atividades em grupos. Essa questão mostra a face social da Educação que deve ser refletida e problematizada em qualquer prática educativa, na qual as intenções são concretizadas no cotidiano educativo de suas metodologias e currículos.

O segundo ponto se faz pertinente quando se percebe a velocidade com que são desenvolvidos sistemas tecnológicos voltados para Educação. Neste sentido, os chamados Ambientes Virtuais de Ensino (AVE) e suas ferramentas são desenvolvidos com a pretensão de atender o processo educativo no espaço virtual. Eles oferecem diferentes recursos e espaços para a utilização de várias metodologias e propostas pedagógicas.

Esse uso inédito de um conjunto de mídias nas relações entre docente e discente, desdobrando-se em novas relações com o conhecimento, aponta para outra marca da EaD, que constitui, por sua vez, uma concepção de Educação a Distância baseada na ideia de autoaprendizagem ou de autonomia. Tal concepção é centrada no “sujeito aprendente, considerado como um indivíduo autônomo, capaz de gerir seu próprio processo de aprendizagem”. (BELLONI,2003).

É preciso assumir a noção de que a EaD não se resume a uma nova metodologia ou à aplicação das tecnologias digitais na educação, mantendo-se deslocada do contexto histórico e social, e os educadores que se dedicam à EaD não devem estar alheios a questões teóricas importantes e ao amplo debate sobre as políticas de educação. Fazem-se pertinentes uma atitude crítica e criativa, uma abertura às possibilidades das mediatizações e, também, um constante exercício de reflexão crítica que considere as contribuições teóricas do campo educacional. Assim como a realidade educativa é marcada pela complexidade e por conflitos, a aproximação teórica dessa realidade, em especial no tocante à Educação a Distância, deve preservar a tensão dialética entre as determinações socioeconômicas presentes nessa modalidade e as aberturas para uma formação emancipadora forjadas nas práticas pedagógicas na EaD.

Assim, não penso em EaD como um modelo educacional independente, mas como uma variável adicional na grande complexidade que caracteriza o campo. A tecnologia deve ser incorporada para consolidar as conquistas que a ciência da educação já alcançou. Concordo com Rocha e Silva (2011) quando defendem que o cerne da questão não é, apenas, o uso da tecnologia por si como instrumento potencialmente avançado no ensino e na aprendizagem, mas é desenvolver a melhor forma de sua aplicação em termos pedagógicos.

As primeiras iniciativas de trazer as tecnologias de informação e comunicação (TIC) para as salas de aula da Educação Básica brasileira ocorreram no final da década de 1980, e, nesse movimento inicial, a tentativa era favorecer o ensino de Matemática por meio de *softwares* específicos para cada tópico da matéria. As livrarias, e até lojas de departamentos, foram inundadas por joguinhos e programas que faziam a promessa milagrosa, impossível de ser concretizada, da aprendizagem rápida, fácil e lúdica da Matemática. Algumas vezes não passavam de tutoriais nos quais os alunos seguiam uma série de “pistas” e, se chegassem à resposta desejada, ouviam ao fundo o som de aplausos. Em outras versões, os materiais eram verdadeiras *apostilas eletrônicas,* onde se reproduziam os mesmos modelos de apresentação das apostilas de cursinhos pré-vestibulares. Esses modelos não acrescentavam praticamente nada aos processos de ensino e aprendizagem e, como era de se esperar, não sobreviveram e foram abandonados.

A computação transformou-se em poderosa ferramenta na pesquisa e na aplicação de Matemática. Soluções há algum tempo consideradas impraticáveis pelos exaustivos e complexos cálculos envolvidos passaram a ser utilizadas pela simplificação e agilidade que as máquinas trouxeram para esses processos. A tecnologia facilita a criação de campos de estudo com a origem na combinação das duas áreas de conhecimento, como são exemplos a Matemática Computacional, Engenharia de Computação, Informática Aplicada. É fácil verificar, porém, que praticamente em nenhuma escola da Educação Básica no Brasil (foco desta pesquisa) existem programas de ensino de Matemática apoiados em tecnologias digitais, e, por isso, reforço, existe um enorme campo para pesquisas e inovações nessa área.

A Educação a Distância cresce em ritmo bastante acelerado no Brasil, pois, de 114.642 matrículas na graduação em 2005, passou-se para 838.125 em 2009, segundo o Censo da Educação Superior divulgado pelo MEC. A informática é um dos pilares desse desenvolvimento. Nos cursos ofertados nessa modalidade de ensino, privilegiam-se as ferramentas de comunicação assíncronas, em que a interatividade é muito pequena. Os alunos recebem o material via internet ou *cd-rooms*, assistem a videoconferências, preparam as atividades individualmente e enviam suas tarefas via rede para os tutores. Os questionamentos e os esclarecimentos de dúvidas são feitos posteriormente, utilizando, geralmente, ferramentas de correio eletrônico. Em Matemática, essa solução nem sempre é satisfatória e o ideal é que as dúvidas sejam esclarecidas no momento em que surgem, porque, caso contrário, muitas etapas da sequência de aprendizagem podem ficar pendentes até que o estudante receba a resposta do professor.

Não se trata apenas de apontar pontos negativos nas atuais aplicações da informática no ensino, mas é que acredito ser o ror de possibilidades tão vasto que as iniciativas até aqui implementadas me parecem tímidas e incipientes. Acompanho algumas ações interessantes com a utilização de *softwares* de programação, planilhas eletrônicas, editores de textos, bancos de dados e aplicativos de Matemática em diversas regiões do País. São, porém, empreendimentos muito particulares, oriundos de ações individualizadas de alguns grupos de professores, o que não me permite falar em sistematização ou institucionalização da aplicação de novos recursos em sala de aula.

Dentre as potencialidades há pouco aludidas, e focando no ensino de Geometria, evidencio o proveito que se pode alcançar com a aplicação de *softwares* como o GeoGebra ou o Cabri Géomètre. São programas que permitem, com muita facilidade, a construção e manipulação de objetos geométricos e propiciam trabalhar com o que se denomina de Geometria Dinâmica.

3.6.2 Geometria Dinâmica

Com as recentes opções oferecidas pela tecnologia, foram criados em locais diversos *softwares* com o objetivo de facilitar o ensino e aprendizagem de Geometria. Entre as tentativas inócuas, aconteceram iniciativas que considero de efetivo sucesso. Refiro-me aos aplicativos que, diferentemente dos tutoriais (prescrevem procedimentos passo a passo), permitem que o usuário tenha a liberdade de exercitar as construções e, por meio de manipulações, experimentar situações extremas que permitem inferir regularidades e propriedades que podem ser comprovadas e demonstradas posteriormente. Essas aplicações são os elementos básicos para o que se denomina de Geometria Dinâmica, campo utilizado como auxiliar em algumas práticas inovadoras no ensino da Geometria euclideana.

A informática contribui com algumas facilidades impraticáveis na elaboração das figuras pelos processos convencionais. Para que se finalizasse um desenho claro, limpo e sem irregularidades pelos métodos tradicionais, era necessário que não se cometesse nenhuma falha, porque, em caso contrário, a borracha, a qualidade dos materiais, a fragilidade do papel ocasionavam verdadeiros transtornos e, em certas ocasiões, o estudante tinha que repetir o processo várias vezes. No ambiente computacional todo esse trabalho é bastante simplificado. A tecnologia permite a construção dos elementos com bastante rapidez e, em caso de erros, com um clique, tudo pode ser refeito.

A característica principal, porém, nessa abordagem está nas aplicações pedagógicas, porque possibilita ao aprendiz praticar experimentações com muita facilidade, e esse procedimento, recomendado pela Sequência Fedathi, o leva a fazer hipóteses e conjecturar regularidades que após as demonstrações, se concretizam em propriedades e teoremas. Quando se elabora um desenho, ele passa a ser apenas o primeiro caso, porque as possibilidades de mover, arrastar, ampliar e reduzir oferecem, instantaneamente, uma infinidade de novos casos em que os invariantes geométricos são preservados. Borges Neto e Capelo Borges (2007) reforçam essa ideia

> Vejamos um exemplo bem simples em matemática. Suponhamos que temos um *software* que permite desenhar triângulos e medir seus ângulos e somá-los. Ora, esses ângulos são objetos de triângulos construídos, de modo que, ao se deslocar os seus vértices, a nova soma é automaticamente calculada. Tradicionalmente, só se experimenta algumas vezes, não mais que três. No computador, entretanto, em poucos segundos, são possíveis milhares de tentativas. Qual a pista que esta experimentação nos dá?

Quanto à atuação docente, o professor, ao exercer sua função mediadora, deve estar atento para evitar que os alunos busquem apenas soluções empíricas calcadas em sua intuição em lugar de rigorosas validações hipotético-dedutivas.

Dentre os programas que avaliei durante o desenvolvimento deste trabalho, posso destacar o GeoGebra, o Cabri Géomètre e o Régua e Compasso. Apesar de diferenças localizadas, eles possuem como características que os aproximam interfaces amigáveis, facilidades de manipulação e inúmeras possibilidades de simulação e experimentação.

Poder-se-ia argumentar que, ao escolher este itinerário está se fazendo outra Geometria que não aquela de Euclides, porque podem ser levantadas situações-limite em que os computadores levam a resultados diferentes daqueles que seriam obtidos pelos métodos tradicionais. Sem desprezar a importância dos questionamentos, penso que as vantagens da nova abordagem são tamanhas que a existência de casos excepcionais não invalida a adoção das novas ferramentas. De modo contrário, creio que a presença de pontos controversos é elemento que desperta a curiosidade e fomenta a pesquisa em busca de superação desses obstáculos, o que, claramente, impulsiona ainda mais o ensino e a aprendizagem de Geometria.

3.7 A Proposta

Os cursinhos pré-vestibulares foram marcantes na vida escolar brasileira, principalmente, nas três últimas décadas do século passado. Desde então, pela ampliação da oferta de vagas e pela mudança nos processos de acesso ao ensino superior, iniciaram um período de declínio que se prolonga até hoje.

Os cursinhos recebiam críticas muito fortes de alguns setores da Educação acadêmica, sob as acusações de que não educavam e só se preocupavam em ensinar truques, dicas e bizus que facilitassem a aprovação dos alunos nos concursos. Por outro lado, os cursinhos eram queridos intensamente pelos seus alunos e, se assim não fosse, eles não teriam se multiplicado por todo o Brasil. Os cursos não possuíam infraestrutura sofisticada e, na maioria das vezes, funcionavam em espaços improvisados. Tinham, no entanto, um diferencial sedutor que compelia os alunos para as suas salas: o professor, mais que o professor, a aula.

Os professores, grandes comunicadores, davam verdadeiros *shows* em sala de aula, e a cada dia inventavam uma nova estratégia para prender a atenção dos alunos. Não é meu objetivo neste trabalho discutir o mérito dos cursinhos nem dos professores, nem das razões que os moviam, mas não posso, pelo que vejo e vivencio, deixar de testemunhar que os professores perseguiam diária e tenazmente aulas que envolvessem seus alunos e os levassem à participação das atividades de classe.

Vivia intensamente aquele ambiente. Nele foram forjadas muitas das convicções que carrego até hoje. E, estou convicto de que vem, desde lá, a motivação para continuar perseguindo obstinadamente o objetivo de ministrar boas aulas. Porque, mesmo sabendo de toda a complexidade e da gama de variáveis que interferem no fenômeno educativo, acredito que é no chão da sala de aula que se consuma todo o processo de ensino e de aprendizagem. Se forem reunidos um grupo de estudantes interessados e um professor bem preparado e motivado já estará montada a maior parte do cenário; o resto vem como adereço para dar maior brilho ao ato.

E o que é uma boa aula de Matemática? Para mim a resposta não carece de explicações sofisticadas e exaustivas, pois penso que o essencial é que seja um ambiente de acolhida, onde vigore um relacionamento respeitoso para que os alunos possam construir colaborativamente seu conhecimento e suas relações pessoais com a mediação de um professor competente.

Durante toda a minha trajetória como educador, tive acesso a diversas propostas para a obtenção de bons resultados em aulas de Matemática. Posso destacar o método heurístico de George Polya (1995) ou o modelo de Van Hiele (NASSER e SANT'ANNA, 1997), mas foi em 2003 que tive o primeiro contato com a Sequência Fedathi, uma nova metodologia, desenvolvida com o objetivo de, com base na mediação e na colaboração entre professor e alunos, propiciar uma aprendizagem significativa, formada com a participação ativa dos sujeitos de modo colaborativo. Aderindo à nova concepção, desde então, estudo a nova proposta, participando de grupos de estudo, disciplinas e no trabalho cotidiano do Laboratório Multimeios da UFC, espaço onde nasceu e encontrou as condições para o seu contínuo desenvolvimento até hoje.

Após análises e alentados estudos sobre todas as componentes que enfoquei até agora: a Matemática, sua importância, história e ensino; o ensino de Matemática no Brasil de suas origens até o quadro atual e seus resultados não satisfatórios; e amparado em minha experiência, estou ciente de acreditamos que era chegado o momento de apresentar uma proposta alternativa e inovadora para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Já evidenciei como para mim o ensino e a aprendizagem estão associados à existência de uma boa aula, mas não poderia ficar preso a antigas práticas e modelos ultrapassados. Vivem-se outros tempos, com novos alunos em um mundo em permanente mudança, dominado pela tecnologia. Passei, então, a me indagar sobre quais novos elementos poderia incorporar ao ambiente educacional que viessem a contribuir para o desenvolvimento de novos métodos para o ensino de Matemática. A resposta veio por intermédio de duas vertentes distintas: uma metodologia, a Sequência Fedathi e um ambiente pedagógico (tecnológico) o TeleMeios.

Assim, concebi um curso de Construções Geométricas a ser ministrado a distância por meio do Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios, adotando as recomendações metodológicas da Sequência Fedathi.

Com respeito ao Ambiente Virtual de Ensino, a originalidade vem do fato de que as interações se darão sincronamente, em tempo real, com compartilhamento total dos equipamentos.

3.8 Questões de Investigação

Para enfrentar, dentro de minhas limitações, tamanhos desafios, debrucei-me sobre o problema e notei que de início precisava encontrar a resposta para a seguinte indagação fundante:

> *Quais são os impactos dos Ambientes Virtuais de Ensino – AVE no ensino e na aprendizagem de Matemática?*

Essa pergunta central levou-me a várias outras específicas que se fizeram presentes nesta pesquisa e entre as quais destaco:

> *Quais são os principais desafios do professor como mediador da aprendizagem nos Ambientes Virtuais de Ensino – AVE?*
>
> *Que alterações no comportamento dos estudantes podem ser observadas a partir da migração da régua e do compasso para softwares?*
>
> *Quais são as principais características dos Ambientes Virtuais de Ensino – AVE para o ensino de construções geométricas?*
>
> *Quais são os componentes tecnológicos indispensáveis em Ambientes Virtuais de Ensino – AVE para o ensino de construções geométricas?*
>
> *O ambiente TeleMeios responde satisfatoriamente às demandas exigidas de Ambientes Virtuais de Ensino – AVE para o ensino de construções geométricas?*

Com base no conjunto de questões ora reproduzido, estabeleci os objetivos da pesquisa que originou este trabalho.

Caracterizada a motivação para o estudo, enfatizo, agora, que ele terá como **objetivo geral**

> *Discutir a utilização do Ambiente Virtual de Ensino TeleMeios no ensino de matemática analisando seus desafios mais recorrentes e refletindo sobre o papel mediador do professor, nesse ambiente, empregando a Sequência Fedathi.*

Como **objetivos específicos,** destaco

> *1 Selecionar elementos tecnológicos para compor o Ambiente Virtual de Ensino TeleMeios para o ensino de Geometria analisando e descrevendo suas características e aplicabilidade.*
>
> *2 Refletir sobre a mediação do professor nos Ambientes Virtuais de Ensino (AVE) mediante a Sequência Fedathi.*

3 Construir suportes educacionais para ensino Geometria empregando construções com régua e compasso no ambiente TeleMeios refletindo sobre o papel mediador do professor.

4 Aplicar sequências didáticas no ensino Geometria empregando construções com régua e compasso no ambiente TeleMeios, avaliando a mudança de atitude dos sujeitos em virtude do emprego das tecnologias.

5 Avaliar a aplicabilidade do ambiente virtual TeleMeios no ensino de Geometria.

4 METODOLOGIA

Atento aos princípios que devem nortear o escopo de uma produção científica, destacadamente os da credibilidade, fiabilidade, transmissibilidade e validação, neste quarto capítulo descrevo, com todos os pormenores, os processos metodológicos que nortearam a pesquisa empreendida. Reviso os fundamentos da Engenharia Didática e da Sequência Fedathi, caracterizo os sujeitos envolvidos no experimento e na descrição do aparato tecnológico, destacando, de modo especial, o ambiente computacional Telemeios pelo aspecto de ineditismo que introduz no trabalho.

4.1 Metodologia da Pesquisa Científica

Para responder às questões levantadas e alcançar os objetivos delineados, estabeleci como ambiente experimental um *Curso de Construções Geométricas* no Ambiente Virtual de Ensino TeleMeios. Elaborei o curso que foi ministrado a um grupo de estudantes e com base nas informações e observações compiladas durante todas as fases da intervenção (planejamento, aplicação e avaliação), retirei os dados que embasaram as análises e conclusões a que cheguei sobre as questões propostas. No desenvolvimento do experimento, foi fundamental a participação dos sujeitos, e como pesquisador estive envolvido diretamente em todas as etapas do processo por ter desempenhado a função de professor.

Antecipo, para depois detalhar todos os aspectos do curso, que ele foi desenvolvido com características notadamente originais por ter sido aplicado a distância, através de computadores, com compartilhamento total de aplicativos, áudio e imagem.

Metodologicamente, o desenvolvimento deste trabalho se escudou nas bases teóricas da pesquisa-ação participativa.

Durante muito tempo, sob forte influência positivista, os meios acadêmicos reconheciam como válidas apenas as pesquisas que se desenvolviam seguindo as etapas do método científico. Entre as características mais marcantes desse procedimento, há que se destacar a defesa do maior distanciamento possível entre o pesquisador e o problema analisado, bem como a neutralidade na coleta e tratamento dos dados e posterior publicação de um relatório final onde se privilegiava a descrição do fenômeno e não a atuação sobre ele. Esse modelo, hegemônico até época recente, sem dúvida favoreceu um vertiginoso crescimento da ciência, principalmente das ciências exatas. Ele começou a ser questionado, entretanto, como opção única de estratégia de investigação e, notadamente nas ciências sociais, novos métodos de pesquisa começaram a irromper.

Nas metodologias tradicionais, a pesquisa científica objetiva identificar, analisar e interpretar um determinado problema sem nele interferir. O tratamento das situações é eminentemente técnico e teórico. Desde os meados do séc. XX, para a investigação na área educacional, começou a se perceber que esse procedimento era insuficiente, pois se compreendeu que não bastava levantar informações e exibir estatísticas sobre os problemas da Educação; era necessário ir além. A nova proposta sustenta que os sujeitos não deveriam mais ser considerados apenas como índices e fornecedores de informações, e que, para o pesquisador, a par de compreender a complexidade da realidade educacional, era imperioso propor opções que visassem a transformar as práticas educativas vigentes. A grande nova é que se começa a imaginar os sujeitos como coprodutores de conhecimento e que os resultados dos experimentos serão propulsores de ações que resultarão em mudanças no comportamento do grupo. Dessa forma, passa-se a aliar a experimentação com a *práxis*.

É nesse âmbito que surge a pesquisa-ação. Não se pode nominar exatamente um criador para ela tampouco determinar uma datação precisa para o seu surgimento, mas se costuma situar suas origens em torno dos anos 1950.

Dentre as várias definições que poderia escolher ficarei, inicialmente, com a que emergiu, em 1986, em um evento no Institut National de Recherche Pédagogique, conforme citam Hugon e Seibel (1988 apud BARBIER, 2007, p. 17):

> Trata-se de pesquisas nas quais há uma ação deliberada de transformação da realidade; pesquisas que possuem um duplo objetivo: transformar a realidade e produzir conhecimentos relativos a essas transformações.

Progredindo mais ainda no que tange ao envolvimento concreto do pesquisador, avança-se para a **pesquisa-ação participativa** - uma metodologia que tem como objetivo a elaboração de conhecimentos propositivos e reformadores aliando a teoria à prática. Ela se desenvolve por meio de debates e reflexões entre os diversos participantes dos experimentos, não sendo tarefa exclusiva do pesquisador especialista. Desse modo, a produção dos saberes é de responsabilidade do coletivo, o que favorece a tomada de ações transformadoras com origem nos resultados verificados na pesquisa.

A pesquisa, objeto desse trabalho, visa, inicialmente, observar e analisar os processos de ensino e aprendizagem, priorizando os aspectos relacionados com a mediação, perante uma nova metodologia de ensino de Matemática que se apoia firmemente nas ***Tecnologias Digitais***. Sei que, apesar das tecnologias digitais já fazerem parte do cotidiano da maioria das pessoas em múltiplas atividades, no que tange à Educação, não ocorreu a grande revolução anunciada desde os anos 1980. Na realidade, nesse campo, suas aplicações ainda são muito incipientes, limitando-se, nas mais das vezes, à produção de trabalhos com editores de texto, pesquisas e cópias da internet. Por isso, como é certo que estou trilhando um caminho novo, onde as convicções são poucas e a práxis está muito aquém do que se afirma na teoria, pretendo na conclusão deste projeto, propor, mediado por instrumentos tecnológicos e práticas metodológicas, opções ao ensino tradicional de matemática que, como apontam todos os indicadores, não obtém resultados satisfatórios.

Assim, embasado na argumentação tecida e reforçando o fato da participação ativa do pesquisador e dos sujeitos, creio na adequação da opção feita pela pesquisa-ação participativa como metodologia para o desenvolvimento deste projeto.

Como a minha investigação estava vinculada a uma intervenção (aplicação de um curso de Geometria) para a análise dos dados, preocupei-me em encontrar um apoio teórico para o posicionamento que deveria adotar como professor durante as aulas e uma metodologia consistente para elaborar as sessões didáticas. Privilegiei os dois aspectos por meio da ***Sequência Fedathi*** e da ***Engenharia Didática***.

4.2 Sequência Fedathi

A Sequência Fedathi é uma proposta teórico-metodológica para desenvolvimento e aplicação de sequências didáticas. Foi concebida nos estudos do “Grupo Fedathi”, conjunto de pesquisadores em Educação Matemática, composto por professores e alunos da Universidade Federal do Ceará - UFC, IFCE - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Faculdade 7 de Setembro – FA7 e Universidade Estadual do Ceará – UECE, sob a liderança do Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

A Sequência Fedathi propõe que os alunos, durante a efetivação de uma sequência didática, devem reproduzir tanto quanto possível o trabalho de um matemático. Isso quer dizer que, durante sua atuação, deverão ser cobertos, entre outros, os seguintes aspectos:

- o caráter investigativo da Matemática;
- a valorização do erro como elemento importante para a aprendizagem;
- o trabalho com os contra-exemplos;
- a criação de modelos matemáticos que generalizem as situações trabalhadas; e

- a transposição didática ou transferência.

Para atingir esses objetivos, a Sequência estabelece que devam ser cumpridas quatro etapas, a seguir explicadas.

1. Tomada de posição – quando a atividade é apresentada à turma, é o momento em que o professor provoca e motiva os alunos para a resolução de uma situação-problema, os quais passam, então, a mobilizar o conjunto de conhecimentos específicos necessários para a resolução da questão.

Antes da apresentação de cada atividade, o professor já deve ter feito uma análise do nível do conhecimento do grupo e chegado a uma conclusão sobre quais prerrequisitos são indispensáveis para a apreensão do conhecimento que está sendo ensinado. Se os alunos não possuem todos os conhecimentos prévios para seguir, o professor deverá montar estratégias que permitam a superação desse obstáculo.

2. Maturação – etapa em que acontece a compreensão do problema, bem como são identificadas as variáveis nele envolvidas. É um momento de *debruçamento* sobre a questão e o processo ocorre primordialmente com a interação entre os alunos. O professor procura intervir o mínimo possível, é o momento em que ele deve adotar a atitude “mão no bolso”. O mais relevante, nos dizeres de Borges Neto e Santana (s.d.), é o fato de o

> [...] aluno poder viver o processo de construção do conhecimento matemático. Por tais motivos a ‘metodologia mão no bolso’ é essencial, pois ela consiste em deixar o trabalho em classe para o aluno, pois o trabalho do professor já foi realizado em casa. Ou seja, na Teoria de Fedathi o dever de casa é do professor e não do aluno.

Nesse debate, surgem as hipóteses e são feitas análises sobre as propostas de soluções. O professor deve acompanhar atentamente a ação de cada aluno para que, com arrimo em suas atitudes, possa decidir quando e como intervir no processo.

3. Solução – é a representação, organização e sistematização dos modelos matemáticos conducentes a solucionar o problema e a apresentar uma resposta à questão proposta. A postura do professor nesse momento é a de mediador; ele deverá atuar junto ao grupo para decidirem qual a melhor solução entre todas as apresentadas. As soluções inadequadas deverão ser refutadas com apresentação de contra-exemplos.

4. Prova – momento em que a solução encontrada é formalizada, sistematizada, e otimizada na linguagem matemática. É importante que os alunos percebam que muitas questões não possuem solução única e que dentre as alternativas que se oferecem deve ser escolhi-

do o melhor caminho que, após a depuração, leva a generalizações e estabelecimento de propriedades e relações matemáticas.

É importante salientar que os quatro momentos estão conectados e que, em todos eles, se vislumbra o mesmo objetivo: que o saber seja elaborado coletivamente de forma colaborativa. Dessa forma, a Sequência se distancia do modelo tradicional de aula de Matemática onde são priorizados apenas o primeiro e o último estádios, ou seja, o professor lança uma pergunta e o aluno oferece uma resposta. É simbólica desse comportamento a cena frequente em que o aluno exclama:

- Professor, terminei. E o mestre responde:

- Quanto deu?

Nesse procedimento, perdem-se as duas etapas intermediárias (maturação e solução), as mais ricas para que o aluno tome consciência do que aprende e como aprende, desenvolvendo, assim, a autonomia para a formulação do seu conhecimento. Reforçando minha argumentação, incorporo as ideias de Borges Neto e Capelo Borges (2007)

> Essa concepção muda o papel do professor, que indiscutivelmente é fundamental, mas não é apenas o de transmitir conhecimento, mas de criar as condições para que o aluno seja desafiado e aprenda a pensar e agir. O professor também deverá ser capaz de fazer uma avaliação metacognitiva das produções dos alunos, verificando que estratégias de aprendizagem utilizaram. Deverá ainda fazer com que os alunos tomem consciência sobre seus processos de resolução de problemas e a que modalidades de pensamento recorreram durante a elaboração daquele conhecimento, para que possam transferir as mesmas estratégias de um dado conteúdo para outros.
> Afinal, se é nos dois níveis intermediários (maturação e solução) que temos possibilidade de realizar ensaios e erros, de fazer e refazer o problema, de pensar em simulações, elaborar e levantar de hipóteses, apresentando-o em uma linguagem mais próxima do nosso conhecimento, por que são tão pouco explorados pelos professores? Existem outras formas de trabalhá-los? Será possível atingir esses estágios com o uso das tecnologias digitais?

As duas últimas indagações, aparentemente despretensiosas e inofensivas, exerceram sobre mim um efeito muito intenso e foram propulsoras de todo o meu projeto que descreverei neste texto.

Em toda a sua aplicação, a Sequência Fedathi confere às relações entre o professor e alunos e dos alunos entre si, função imprescindível para que a apreensão dos conhecimentos se consolide. São conceitos investigados profundamente nos estudos de Lev Vygotsky e é na perspectiva desse psicólogo bielo-russo que os entendo, adoto e sobre os quais discorro na próxima seção.

4.3 A Mediação e as Interações

O conceito de mediação foi elaborado por Lev Vygotsky para explicar o surgimento das funções psicológicas superiores, que ocorre pela internalização – compreendida como a apropriação interna de uma operação externa – de processos anteriormente ocorridos em uma esfera social, o que é possibilitado pela assimilação do uso dos signos pelos sujeitos como forma de orientar sua atividade psicológica.

A fim de elucidar a ideia de atividade mediada, o referido autor faz uma comparação entre instrumento e signo, sintetizando a noção de que o signo age como um instrumento da atividade psicológica de forma análoga ao papel de uma ferramenta na realização de um trabalho (VYGOTSKY, 2003).

A noção de instrumento refere-se ao objeto utilizado pelo homem como meio para realizar alguma atividade, com a intenção deliberada de controle da natureza, acarretando em modificações nos objetos. Já o signo é orientado internamente e não modifica o objeto da operação psicológica, pois funciona como meio da atividade interna, para o controle do próprio indivíduo. Esta mediação realizada com o uso dos signos é denominada de mediação semiótica. Feitas as devidas diferenciações, Vygotsky leciona que a analogia básica entre signo e instrumento reside na função mediadora que os caracteriza, pois a função indireta (mediada) é comum a ambos.

Para a perspectiva histórico-cultural, a ação sobre a natureza e a ação incidente no comportamento estão mutuamente relacionadas. A apropriação e o uso de meios artificiais para intermediar a ação humana transformam fundamentalmente as operações psicológicas, sendo a função psicológica superior resultante da combinação entre o instrumento e o signo na atividade psicológica, como o próprio Vygotsky (2003, p.73) descreve:

> O uso de meios artificiais – a transição para a atividade mediada – muda, fundamentalmente, todas as operações psicológicas, assim como o uso de instrumentos amplia de forma ilimitada a gama de atividades em cujo interior as novas funções podem operar. Nesse contexto, podemos usar o termo função psicológica superior, ou comportamento superior com referência à combinação entre o instrumento e o signo na atividade psicológica.

Sirgado (2000), corroborando a ideia de que as funções superiores são originadas das interações sociais, argumenta que a história humana é uma história de transformação dupla e simultânea da natureza e do homem. No magistério do autor, tal transformação é possível porque a atividade humana opera em dupla mediação – a técnica e a semiótica. A primeira possibilita que o homem transforme a natureza da qual ele faz parte, e a segunda lhe permite atribuir novas significações aos resultados das transformações.

No contexto desta pesquisa, ao abordar a aprendizagem da Geometria de forma compartilhada e interativa, concordo com a concepção de aprendizagem da teoria histórico-cultural, em que aprender é estar com o outro, que é mediador da cultura (WERTSCH, 1998). Ressalto aqui a aprendizagem como um fenômeno que acontece interpsicologicamente, promovendo elaborações intrapsicológicas, acontecendo de fora para dentro numa múltipla composição, destacando a síntese dialética entre esses dois planos. Dentro desta concepção de aprendizagem, o papel da mediação adquire evidência, sendo compreendida como a forma como os aprendizes utilizam meios para intermediar suas atividades, envolvendo interação com o outro e com o mundo. Resta claro, desse modo, que o próprio Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios que utilizei para a aplicação do Curso de *Construções Geométricas* exercerá uma função mediadora no momento em que os sujeitos, por meio dele, passarem a interagir.

Faz-se necessário esclarecer que, ao tratar da temática da aprendizagem por interação (SMOLKA e GÓES,1993) numa perspectiva histórico-cultural, esta não se restringe às relações sociais diretas ou face a face, mas também representa as interações com as ferramentas culturais (técnicas ou simbólicas) que se integram na atividade humana pela mediação social.

Assim, os momentos de realização conjunta dos exercícios de Geometria configuram situações que propiciam o desenvolvimento de atividades discursivas, ocorrentes por meio de mediação simbólica. Assim, enquanto realizam as tarefas em conjunto, os estudantes trocam ideias a respeito da mesma, argumentam, perguntam, explicam e interferem, mesmo a distância, na atividade do outro. Por intermédio de seus enunciados, não apenas acompanham a solução dos problemas, mas a orientam, pois os discursos dos sujeitos repercutem nas ações dos outros, mesmo que não haja uma intenção explícita de influência.

De acordo com Colaço (2004), os processos compartilhados de realização de atividade e mediação semiótica possibilitam a emergência de Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP), compreendidas não como um salto individual de capacidade, mas como espaço simbólico de promoção e feitura do conhecimento entre os indivíduos que compõem o evento interativo. Segundo a referida autora, no processo interativo e discursivo está enraizada toda a base da elaboração compartilhada de conhecimento, que põe em evidência os processos de mediação e o surgimento da ZDP como espaço simbólico que possibilita maior enriquecimento das atividades. Dessa forma, os estudantes colaboram uns com os outros em seu processo de aprendizagem, cada um com suas competências, podendo eles mesmos se situarem na posição de sujeitos mediadores e não apenas o professor.

Retomando as ideias de Vygotsky (2003) sobre o papel da atividade mediada na constituição do comportamento psicológico superior, espero que ocorra no estudo a dinâmica de relações interpsicológicas de colaboração e interposições de papeis por mediação semiótica, durante a atividade, que resultará na apropriação individual dos conhecimentos.

Refletindo sobre a importância do conceito de mediação aqui abordado para a pesquisa, concordo com Jucá (2010), quando sintetiza que uma importante implicação decorrente da concepção histórico-cultural de aprendizagem consiste na noção de que a conquista do saber humano é um evento de natureza eminentemente social: além de ser uma elaboração da sociedade, a aprendizagem passa necessariamente pela mediação de outros. Portanto, enfatiza a autora, é necessário que as práticas educacionais sejam devidamente contextualizadas, considerando a teia social da qual participam os sujeitos da aprendizagem.

Foi pensando nessa urdidura entre os participantes que planejei todo o arcabouço do Curso de Construções Geométricas no Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios. Como se trata de uma intervenção em sala de aula, mesmo virtual, vi como adequado adotar para a estruturação das aulas a Engenharia Didática, metodologia que pormenorizo a seguir, caracterizada por Artigue, segundo Pais (2001, p. 104), da seguinte forma:

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, se caracteriza, em primeiro lugar, por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.

4.4 Engenharia Didática

Para a construção de uma obra, arquitetos e engenheiros, em primeiro lugar, elaboram, detalhadamente, um projeto. Ele é construído, apoiado teoricamente nas ciências que fundamentam a Engenharia, tais como a Física e a Matemática, possui data para início e conclusão e se desenvolve em etapas sucessivas. No início de cada ciclo, determinam-se as atividades e o pessoal envolvido e, no término, procede-se à avaliação dos processos e dos produtos obtidos até aquele momento. Durante a execução da obra, fica-se o mais fiel possível ao plano traçado inicialmente, no entanto, podem surgir situações mais complexas não previstas e que fogem ao controle do conhecimento científico empregado na fase de elaboração. Nesse caso, o engenheiro deve, por todos os meios de que dispõe, superar aquela situação adversa com que se defronta.

Pensando as tarefas de um projetista dessa maneira, Michèle Artique desenvolveu, nos anos 1980, a metodologia que denominou de Engenharia Didática. Ela defende a noção de que o planejamento das atividades didáticas seja tão meticuloso e detalhado quanto a elaboração de projeto de construção concebido por um engenheiro competente. Fazendo um paralelo com os procedimentos desses profissionais, para a consecução de seu trabalho, o professor deve elaborar um plano meticuloso, consubstanciado nas teorias pedagógicas, que tenha um objetivo definido a alcançar e que lhe permita acompanhar todas as etapas do processo. Além disso, deve antever, na planificação, qual será o comportamento dos alunos perante as novas situações apresentadas e estar apto para lidar, durante a fase de execução, com situações não previstas no seu plano original.

A metodologia, que já não é tão recente, consolidou-se por meio de seu crescente emprego em grande número de projetos de pesquisa que originaram artigos, dissertações e teses em diferentes espaços de estudo. Desse universo, para não me limitar aos trabalhos desenvolvidos na França, menciono, como exemplo, os trabalhos de Baldini (2004), Campos (2006), Rocha (2008), Dantas (2010), Santos (2010).

A Engenharia Didática, entretanto, pode ser entendida não só como uma metodologia de pesquisa específica do campo da Didática da Matemática, mas também como referencial para elaboração de ***Sequências Didáticas***. Para Artigue, citada por Silvia Machado (1999, p.199), é

> [...] um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.

Desde já é importante salientar que acatar as recomendações desta metodologia não significa produzir o engessamento da atividade pedagógica, tampouco a elaboração de instruções programadas que não deixem liberdade para que os aprendizes possam seguir os próprios caminhos na formulação do conhecimento. Ao contrário, durante as aulas, os alunos têm toda liberdade para discutir, questionar e experimentar. Com previsão dos múltiplos quadros que podem ser configurados durante as sessões, com seus obstáculos e benefícios, haver o *projeto* perfeitamente definido faz com que o professor e o ambiente estejam muito mais bem preparados para a mediação necessária.

De maneira geral a elaboração da ***Engenharia*** de uma ***Sequência Didática*** segue quatro etapas distintas, a saber:

- ***Análise preliminar*** – é o momento inicial que fundamenta toda a elaboração da proposta de trabalho, e como em um projeto de construção em Engenharia, esse passo é decisivo porque os ***erros de projeto*** são os mais difíceis de serem contornados durante a execução da obra.

Em primeiro lugar, deve proceder-se à análise do conteúdo, visado tanto na sua origem quanto no seu desenvolvimento ao longo da história, para em seguida estudar como os conceitos são abordados no aspecto do ensino e sua inserção nos currículos escolares no decorrer do tempo. Para um planejamento seguro, é necessário seguir um roteiro que privilegie os seguintes aspectos investigativos:

- qual o quadro teórico-didático geral dos saberes em jogo;
- como é práticado o ensino atual e quais são os seus efeitos;
- quais são as concepções preliminares dos alunos sobre o tema;
- que obstáculos epistemológicos e psicológicos podem interferir no processo e
- que erros cometem com maior frequência.

Concluída esta análise minuciosa, o professor-pesquisador deverá passar à segunda fase do seu plano de obra, na qual os estudos se encaminham para objetivos locais, isto é, estão centrados na elaboração das próprias aulas ou sequências didáticas;

- ***Análise a priori*** – nessa etapa são efetivamente arquitetados as sequências didáticas e o escopo experimental com todo o seu detalhamento. É quando se faz o delineamento completo dos trabalhos de pesquisa. Refletindo no modo como as opções pedagógicas eleitas podem influenciar os comportamentos dos alunos e os significados que eles formulam, são feitas as escolhas locais (referentes a cada sessão) e sua relação com as escolhas globais (referentes à Engenharia como um todo). As escolhas a que me refiro estão relacionadas à elaboração da sessão didática e dizem respeito não só aos conteúdos a serem abordados como também às estratégias e metodologias a serem empregadas, levando em conta os recursos materiais e pedagógicos disponíveis, ou que possam ser mobilizados para a intervenção específica. Ainda nesta etapa, devem ser analisadas as possibilidades de ação, escolhas, controle e verificação que a situação exprime diante do aluno.

  Além do aspecto descritivo, essencial em todas as pesquisas, a análise *a priori* carrega em si uma forte componente relativa à previsão; nela, o professor deverá antecipar as atitudes que os alunos terão durante o desenvolvimento da atividade e preparar-se para mediar esses comportamentos, de modo que resultem no desenvolvimento da aprendizagem esperada para aquela sessão. Sinteticamente, durante a concepção, os elementos principais a serem observados são:

- o ambiente pedagógico;
- os materiais disponíveis;
- as estratégias e metodologias a serem adotadas
- a decomposição do tempo didático;
- os conhecimentos prévios dos alunos;
- como se dará a transposição didática;
- cada situação problema a ser proposta; e
- o que é necessário para a solução do problema.

Então, (MACHADO, S, 1999), formulam-se as hipóteses e estratégias para o desenvolvimento das sequências didáticas;

- ***Experimentação*** – é a aplicação efetiva da sequência previamente elaborada. Trata-se da aula propriamente dita. Deve-se começar pelo estabelecimento do ***contrato didático***[18] onde o professor necessita explicitar os objetivos e todas as condições em que os trabalhos vão se desenvolver, quais as atitudes e comportamentos ele espera dos alunos, bem como os procedimentos que estes podem esperar dele.

  Em seguida, aplicam-se os instrumentos elaborados, dando início às observações de todos os aspectos da ambiência experimental. É necessário fazer a descrição meticulosa e documentação dos fenômenos percebidos, lançando mão de relatórios, entrevistas, gravações, transcrições dos registros de áudio e de vídeo.

  Muitas são as propostas metodológicas sobre a postura que o professor deve adotar em sala de aula em relação aos alunos e aos conteúdos a serem ensina-

[18] Esse pacto estudado por Brousseau citado por Silva (1999, p. 43) é o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é um conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá que prestar conta diante do outro.

dos. Entre elas, pinço o método heurístico de Polya (1995), desenvolvido em sua obra clássica *A arte de resolver problemas*, e a ***Sequência Fedathi***, que descrevi anteriormente. Esta *Seqüência* foi minha opção nos experimentos realizados e faz parte de minha prática diária em classe. O professor, com o desenvolvimento das tarefas pessoais de cada estudante, deve estar atento ao relacionamento dos alunos com o ambiente, aos efeitos do contrato didático, à gestão dos erros e à sistematização dos conteúdos privilegiados naquela sessão; e

- ***Análise a posteriori*** – é quando se aceitam ou rejeitam as conjecturas levantadas no início da Engenharia, e é exatamente nesse processo que reside o grande diferencial da metodologia. Isto porque sua validação é interna, significando que, para a comprovação ou negação das hipóteses, não se recorre a grupos de controle, nem a nenhuma outra variável externa à Engenharia. É na acareação entre as hipóteses feitas na análise *a priori* com o que se verifica na análise *a posteriori* que o professor-pesquisador se define pela validade ou não de cada um dos fatos que estavam sob investigação.

  Desse modo, as atenções com a validação não devem ocorrer apenas no final da pesquisa, dado que ela já estava em andamento desde o início, como ensina Artigue, por meio de Silvia Machado (1999, p.205)

  > Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a ser operada na quarta fase.

  A efetivação da análise *a posteriori* cumpre-se com o estudo e interpretação dos dados colhidos durante a aplicação da sessão. Avaliam-se os erros e acertos, os procedimentos inadequados de alunos e professor, o ambiente de ensino e sua gestão.

No caso particular deste projeto, que se alicerça no Curso de *Construções Geométricas* no Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios, para cada módulo aplicado, isto é, para cada uma das aulas virtuais, segui todos os passos descritos até aqui para que não me afastasse do rigor metodológico que se espera de um trabalho acadêmico. Escolhi os conteúdos, selecionei as ferramentas, preparei os materiais instrucionais necessários, apliquei as sessões, e ao final, fiz a comparação com o plano inicial.

Convém destacar que ao assumir a Engenharia Didática para a elaboração do Surso de Construções Geométricas, não me apartei da pesquisa-ação participativa, visto que ambas pressupõem a inserção direta do professor-pesquisador nos fenômenos a serem observados. A diferença situa-se apenas no fato de que a última não assente uma validação interna.

4.5 O Ambiente Virtual de Ensino

Para concretizar o projeto, foi necessário montar uma ambiência composta pela infraestrutura física e de *hardware* (os locais), um Ambiente Virtual de Ensino (o TeleMeios), um aplicativo de Geometria dinâmica (o GeoGebra), *softwares* de documentação (o *CamStudio* e o *Audacity*) e, mais importante, os sujeitos.

4.5.1. O TeleMeios

Com a rápida expansão das aplicações da internet, o vislumbre da aplicação do seu potencial com finalidades educacionais propiciou a criação de muitos aplicativos, visando a incorporar os avanços da tecnologia ao processo formativo. Uma extensa e crescente lista de sistemas (Teleduc, Moodle, Sócrates, Aulanet, entre outros) foi concebida, incorporando as principais ferramentas da rede mundial, tais como correio eletrônico, bate-papo, grupos de discussão, compartilhamento de arquivos e armazenamento de dados como recursos pedagógicos. Todos eles, mantendo suas características particulares, oferecem esses dispositivos total ou parcialmente e, de acordo com os critérios de avaliação, possuem pontos positivos e negativos, mas nenhum se consolidou como solução definitiva.

Após pesquisas conclui que nenhum respondia às necessidades do Curso de Construções Geométricas, objeto da minha proposta. Precisava que os alunos interagissem em tempo real, e que compartilhassem os *softwares,* condição que nenhum dos programas aplicados em Educação a Distância no Brasil, a que tive acesso, oferecia.

Então, em 2007, tomei conhecimento do projeto TeleMeios, ainda em seus primeiros passos e, compreendendo sua proposta, concluí que ele poderia ser a solução tecnológica para o meu plano. Adicionalmente, moveu-me em sua direção o fato de estar sendo desenvolvido por um grupo de trabalho do Laboratório Multimeios do qual faço parte. Essa componente refletiu em minha opção pela facilidade de testar configurações e customizações com uma equipe que trabalhava ao meu lado. Apostei que o projeto computacional avançaria paralelamente ao meu e que, quando fosse chegado o momento das aulas de Geometria, ele estaria em condições operacionais. Realmente foi o que aconteceu e o aplicativo que empreguei para comunicação, administração, interação e mediação foi o ***TeleMeios***.

O ***ambiente*** é fruto de uma pesquisa, que teve inicio em março de 2006, desenvolvida no Laboratório Multimeios da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, sob coordenação de Daniel Capelo Borges, financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP).

O TeleMeios é uma plataforma telemática, arquitetada com a utilização de rotinas de *softwares* livres, dotada de uma interface que permite a comunicação através de texto, som, imagem e *email*, incorporando, desse modo, todos os recursos empregados atualmente na E-ducação a Distância, e vai além, ao possibilitar o compartilhamento total de aplicativos e a interação síncrona, em tempo real, entre todos os usuários. Considerando a diversidade de recursos que põe à disposição de professores e alunos, creio que a *ferramenta* detém um e-norme potencial para favorecer a ação pedagógica, pois viabiliza um diálogo direto entre os alunos e, quando oportuno, a mediação do professor.

A oferta de um curso no novo sistema principia pelo registro de um administrador, geralmente o docente responsável pela turma. Este decide sobre a aceitação dos pedidos de matrícula e, em caso positivo, libera *login* e senha para cada novo aluno. Integrado ao ambiente, o usuário pode transitar entre as salas disponíveis para a atividade que será aplicada e usufruir de todas as funcionalidades à sua disposição.

A interface do ambiente é bastante simples, amigável e ergonômica, como se vê na Figura 7.

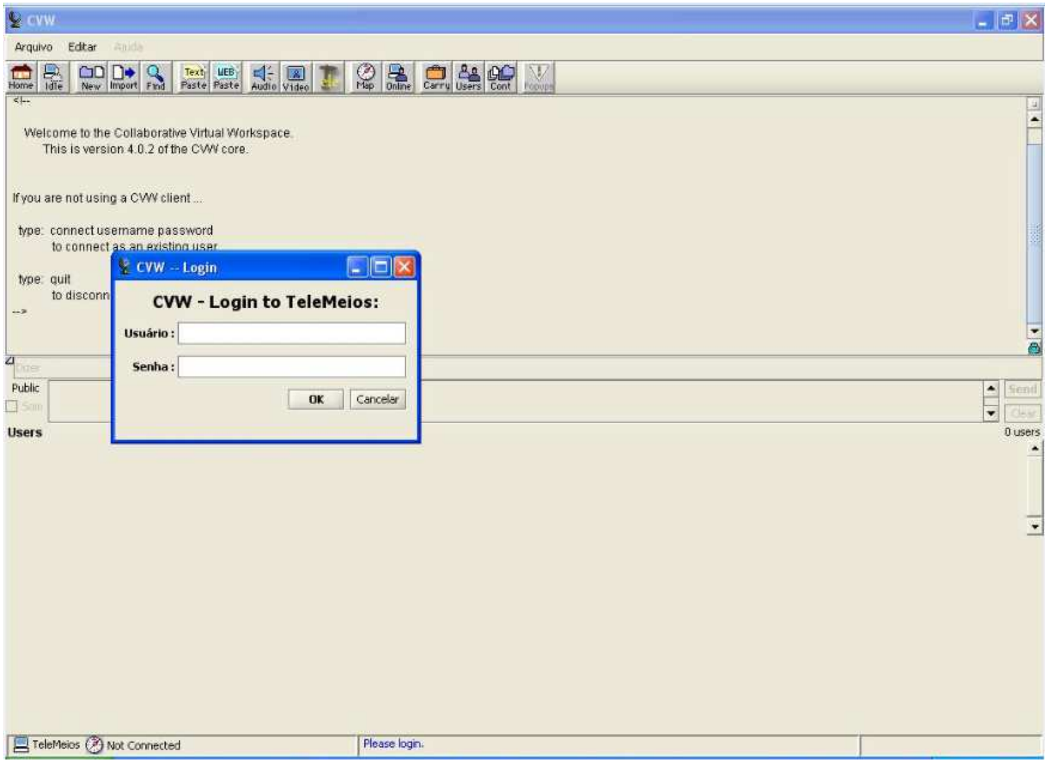
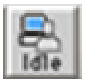
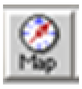


Figura 7: Tela de abertura do ambiente TeleMeios.

Dotado de botões autoexplicativos estimula uma aplicação intuitiva de todas as funções descritas na Tabela 3.

Tabela 3: Funções dos ícones do ambiente TeleMeios

ÍCONE	DESCRIÇÃO
	Acessar à sala principal do curso.
	Visualizar o *status* de frequência do aluno (se ele está ou não presente na sala).
	Abrir um novo documento.
	Importar arquivos para disponibilização na rede.
	Buscar arquivos, locais ou usuários.

	Colar texto.
	Colar endereço da internet.
	Ativar áudio.
	Ativar vídeo.
	Compartilhar janelas.
	Visualizar sala onde os usuários estão localizados.
	Visualizar usuários *online* (localização e nível de atividade)
	Armazenar arquivos pessoais.
	Identificar usuários por foto.
	Disponibilizar arquivos pessoais na tela principal.
	Enviar mensagens através de *pop-ups* (sinais alertas).

Em minha experiência para as aplicações das Sequências Didáticas que se fizeram a distância por meio de computadores conectados à Internet, me utilizei dessas funcionalidades disponibilizadas pelo TeleMeios. O diferencial da proposta é que estabeleceu-se uma interação total entre os sujeitos. Isto se deu por uma interligação síncrona, isto é, simultaneamente, em tempo real, entre todos os participantes dos eventos. Como em um ***chat*** as pessoas puderam se comunicar através de texto e como em uma vídeoconferência por meio de voz e imagem, mas, inovadoramente, existiu o compartilhamento de todos os aplicativos utilizados. Esse compartilhar quer dizer que todos os envolvidos visualizavam as atividades desenvolvidas pelos outros, que processos eram utilizados, qual era o método de resolução de problemas empregado, e, além disso, acessavam remotamente, as máquinas dos outros participantes, sendo permitido até que qualquer deles pudesse desenhar ou escrever no computador de um companheiro virtual. Isso se concretizou apesar de alguns dos participantes não possuírem os aplicativos utilizados na experiência instalados em suas máquinas. Essa é uma contribuição de grande relevância, pois significa que, para multiplicar a experiência, replicar para outros sujeitos e ambientes, não é necessário que eles tenham instalados em suas máquinas os *softwares* empregados durante as aulas, o que representa economia de recursos, de tempo para instalação e manutenção do ambiente.

A estrutura computacional da versão do TeleMeios que apliquei ainda era baseada no modelo cliente-servidor, agora, em seu trabalho de doutorado, ***Estudo, Desenvolvimento e Análise de Abordagem Peer-to-Peer (P2P) de Comunicação para Apoiar Sistemas de Educação a Distância***, Daniel Capelo Borges está modificando a arquitetura para uma configuração *peer-to-peer* (P2P). A mudança é importante porque extrapola os aspectos tecnológicos e passa a ter implicações que refletem nas concepções pedagógicas dos usuários do ambiente.

No modelo cliente-servidor, a rede de computadores se viabiliza por meio de uma máquina-servidor que centraliza os dados e informações para disponibilizá-las aos clientes (usuários) de acordo com suas demandas. Assim, cada usuário da teia de conexões dispõe de um caminho de comunicação que é através da máquina para a qual convergem todas as ações. Cada partícipe assume uma das atividades isoladamente, ora cliente ora servidor. Fica caracterizada, então, uma hierarquia em que o servidor desempenha um papel ativo e os clientes são passivos na relação. Essa configuração, ilustrada na Figura 8, permite fazer uma comparação com uma sala de aula tradicional onde o professor assume a função de detentor e único emissor de conhecimentos, enquanto os alunos, passivos, apenas recebem as informações.

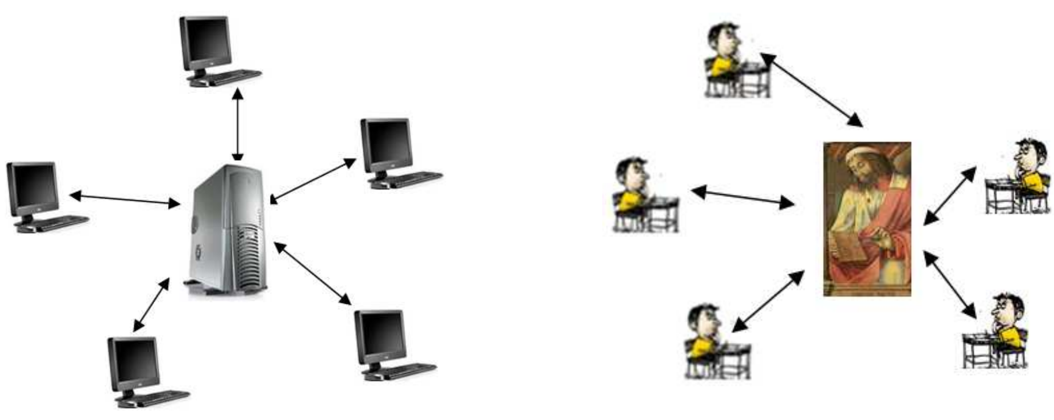


Figura 8: Arquitetura cliente-servidor

Estruturalmente, as redes baseadas no sistema cliente-servidor tendem a manifestar problemas quando o número de usuários é crescente, pois passam a requerer servidores cada vez mais robustos e bandas de rede mais largas (capacidade de tráfego de dados dos enlaces de comunicação). As soluções que se encontram para essas dificuldades são onerosas economicamente, tecnicamente complexas e têm efeito paliativo, pois a cada novo acréscimo na rede terão que ser replicadas.

Na arquitetura P2P (*peer-to-peer*) há uma mudança de paradigma, já que não existe uma hierarquia prédefinida. Todos os participantes, nesse modelo, podem comunicar-se diretamente, desempenham papeis similares na comunicação, ora ativo ora passivo, dispensando a figura de um servidor dedicado. Com a descentralização, os recursos de cada máquina individualmente podem ser adicionados mediante o compartilhamento, por exemplo, de espaço em discos rígidos, memória, CPUs, dentre outros, de modo que, cada novo usuário, ao mesmo tempo em que requisita recursos do sistema, também disponibiliza o potencial de sua estação. Analogamente, se teria uma sala de aula onde os sujeitos trabalhassem colaborativamente (Figura 9).

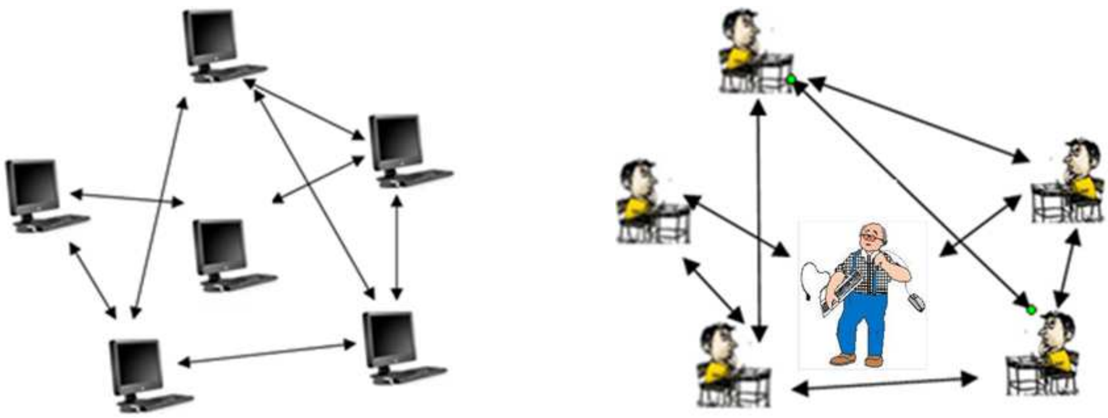


Figura 9: Arquitetura *peer-to-peer*

Os aspectos técnico-computacionais, programação e desenvolvimento do TeleMeios são objetos do trabalho de Daniel, limitando-se minha participação ao ajuste, customização e adequação dos aplicativos às aulas de Geometria.

O ambiente, por suas características singulares, afasta-se das configurações dos aplicativos convencionalmente empregados na Educação a Distância e, por vezes, me questionei se realmente estava trabalhando com EaD porque o TeleMeios não pode ser inserido nas caracterizações atuais de nenhuma das modalidades educacionais.

4.5.2 Os Locais

O Curso de C*onstruções Geométricas* foi realizado nos laboratórios de informática da Faculdade 7 de Setembro – Fa7, em Fortaleza (CE), Instituição a qual agradeço pela gentileza da cessão das instalações e do corpo técnico que esteve disponível durante a realização do evento.

Como, no curso, queria avaliar, também, a relevância do fato de os alunos estarem fisicamente em ambientes diversos, eles foram distribuídos em laboratórios (salas) distintos. Assim usei os laboratórios:

LI – 42 – equipado com 40 máquinas da marca STI LINCE, com disco rígido de capacidade de 80 Gb conectadas à internet, através de um enlace de saída de 8 MBits/s. Todas as estações são equipadas com processador INTEL Celeron de 2.4 GHz com 1Gb de memória RAM e monitor CRT de 15 polegadas;

LI – 41 – equipado com 30 máquinas da marca Positivo conectadas à internet, através de uma rede 8 MBits/s, possuindo disco rígido de 40 Gb, processador Pentium 4, 2.6 Ghz, 768 de memória RAM, monitores CRT de 15 polegadas; e

LI – 40 – equipado com 16 máquinas conectadas à internet, através de uma rede 8 Mbits/s, possuindo disco rígido de 80 Gb, processador Pentium 4, 2.8 Ghz, 2Gb de memória RAM, monitores LCD 15 polegadas.

Em relação aos *softwares* instalados nas máquinas, foram utilizados o Sistema Operacional Microsoft Windows XP versão SP3 em português, o ambiente TeleMeios, o programa de Geometria dinâmica GeoGebra e os aplicativos *Audacity* e *CamStudio* respectivamente, para a gravação do áudio e vídeo dos experimentos efetuados. Ambos possuem as características de sincronização de áudio-vídeo e compressão de dados de alta capacidade. As gravações dos experimentos foram armazenadas nos discos rígidos local e de rede. Ressalto que ambos são *softwares* livres.

Esse ambiente me permitiu superar as fronteiras espaciais e temporais porque, com a estrutura arquitetada, reproduzi uma situação real, de sorte que se os sujeitos estivessem em qualquer local, com acesso a internet, os resultados seriam os mesmos. A Figura 10 mostra um dos alunos durante uma das atividades do curso.

Figura 10: Laboratório de informática durante o desenvolvimento do curso.

Claramente as configurações empregadas estão muito aquém dos últimos progressos computacionais, já estão disponíveis equipamentos e sistemas muito mais robustos, que oferecem recursos bem mais avançados do que aqueles utilizados, o que interpreto como um elemento altamente positivo porque garante que para a reprodução da experiência não será necessário um aparato sofisticado que nem sempre está acessível nas escolas.

4.5.3 Os Softwares

Para a consecução do projeto, não foi necessária a aplicação de muitos *softwares* específicos, e nenhum deles requer conhecimentos aprofundados de informática para utilização. Além de responder às necessidades técnicas do experimento, para a escolha, priorizei *softwares* livres por se enquadrarem em minha concepção de uma educação aberta e que permita construções colaborativas, o que não acontece com aplicativos de engenharia fechada, onde o usuário tem suas ações limitadas pelo fabricante do produto.

4.5.3.1 O GeoGebra

O GeoGebra foi o *software* utilizado como *material de desenho*[19] para a realização das ***Construções Geométricas***. O programa foi concebido na Universidade de Salzburg (Áustria) por Markus Hohenwarter em 2001. Desde então, passa por sucessivos aperfeiçoamentos que resultaram na sua mais recente versão oficial, a 3.2, que incorpora recursos como cores e camadas dinâmicas e já está traduzida para mais de 45 idiomas, inclusive o português . O aplicativo que foi criado para ser material de apoio para aulas de Matemática, principalmente na Educação Básica, já superou essa meta inicial e pode ser empregado em vários tópicos do ensino superior. Por meio dele é possível estudar conteúdos de Geometria, Álgebra e Cálculo.

Existem outros programas voltados para os mesmos objetivos, como o Cabri Géomètre ou o Régua e Compasso, a escolha pelo GeoGebra decorreu, fundamentalmente, de dois motivos: o primeiro é que sua arquitetura utiliza a plataforma Java, o que permite a interação com vários outros aplicativos computacionais, e o segundo é que ele é um *software* livre, gratuito, o que enseja seu emprego por um número bem maior de pessoas.

Os recursos do programa podem ser divididos em duas segmentações: a de base informática e a voltada para Geometria. No âmbito computacional, além das funcionalidades comuns na maioria dos *softwares,* como copiar, colar, gravar, imprimir, importar e exportar, ele, adicionalmente, permite configurar as unidades de medida, criar e gerenciar ferramentas, inserir coordenadas e uma ferramenta preciosa para o professor-pesquisador, o *protocolo de construção.* Este dispositivo reprisa, item a item, todo o processo empregado para a obtenção de uma determinada construção, de modo que todos os trabalhos dos alunos podem ser reconstituídos para uma observação mais detalhada, o que permite ao observador acompanhar a linha de raciocínio que seguiram.

No aspecto geométrico, o que me interessa mais de perto, por uma interface bastante amigável e intuitiva, o GeoGebra oferece muitas possibilidades e ferramentas tão variadas que a exploração de todas elas demanda uma grande quantidade de tempo e dedicação. Na Figura 11, reproduzo sua tela inicial, com origem na qual podem ser acessados todos os recursos à disposição do usuário.

[19] Expressão utilizada para caracterizar todos os equipamentos necessários em um curso de Desenho. A configuração básica deveria conter: lápis, borracha, régua, compasso, transferidor e jogo de esquadros.

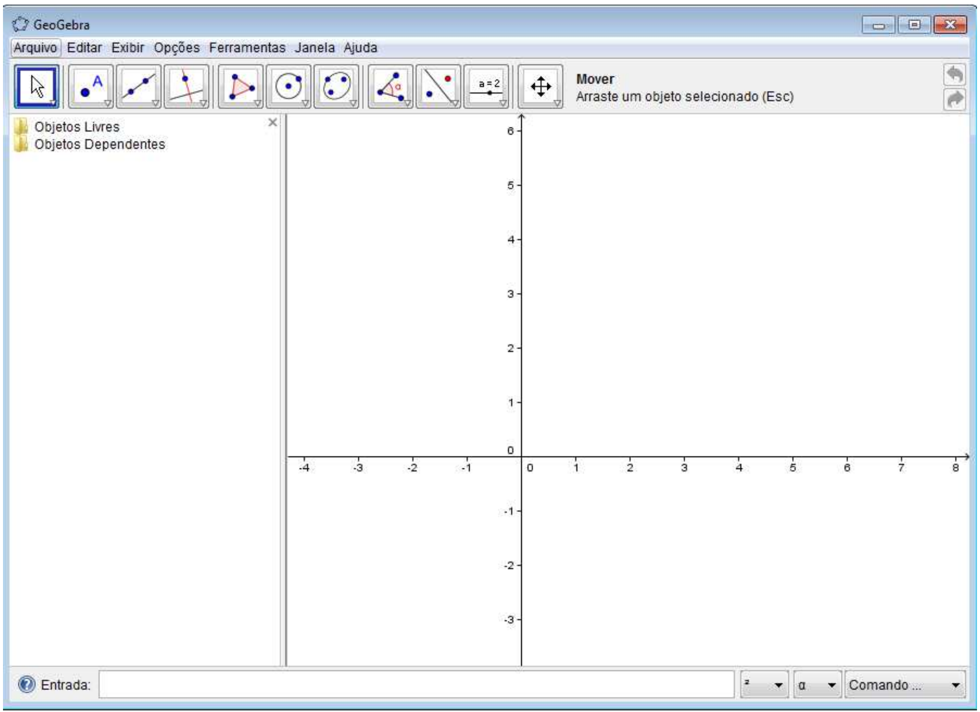
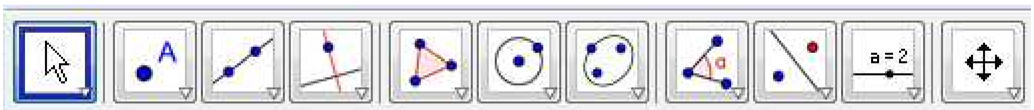
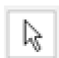
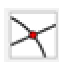
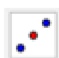


Figura 11: Tela inicial do *software GeoGebra*.

Cada um dos botões de sua página de abertura remete a um outro *menu*, onde, através da abertura de novas cortinas, são oferecidos instrumentos para construções quaisquer em Geometria. Por ser o material de desenho básico do Curso, creio conveniente a reprodução de todos esses elementos, bem como de suas aplicações na Figura:12.



ÍCONE	OPÇÕES	FUNÇÃO
		Mover
		Girar em torno de um ponto
		Gravar para uma planilha de cálculos
		Novo Ponto
		Interseção de Dois Objetos
		Ponto Médio ou Centro

		Reta Definida por Dois Pontos
		Segmento definido por Dois Pontos
		Segmento com Comprimento Fixo
		Semirreta Definida por Dois Pontos
		Vetor Definido por Dois Pontos
		Vetor a Partir de um Ponto
		Reta Perpendicular
		Reta Paralela
		Mediatriz
		Bissetriz
		Tangentes
		Reta Polar ou Diametral
		Reta de Regressão Linear
		Lugar Geométrico
		Polígono
		Polígono Regular
		Círculo Definido pelo Centro e Um de seus Pontos
		Círculo dados Centro e Raio
		Compasso
		Círculo Definido por Três Pontos
		Semicírculo Definido por Dois Pontos
		Arco Circular dados o Centro e Dois Pontos
		Arco Circular Dados Três Pontos
		Setor Circular dados o Centro e Dois pontos

		Setor Circular dados Três Pontos
		Elipse
		Hipérbole
		Parábola
		Cônica Definida por Cinco Pontos
		Ângulo
		Ângulo com Amplitude Fixa
		Distância, Comprimento ou Perímetro
		Área
		Inclinação
		Reflexão com Relação a uma Reta
		Reflexão com Relação a um Ponto
		Inversão
		Girar em Torno de um Ponto por um Ângulo
		Transladar Objeto por um Vetor
		Ampliar ou Reduzir Objeto dados Centro e Fator da Homotetia
		Seletor
		Caixa para Exibir/Esconder Objetos
		Inserir Texto
		Incluir Imagem
		Relação entre Dois Objetos
		Transladar Janela de Visualização
		Ampliar
		Reduzir

		Exibir/Esconder Objeto
		Exibir/Esconder Rótulo
		Copiar Estilo Visual
		Apagar Objeto

Figura 12: Ferramentas geométricas do *GeoGebra*.

Pelo que se visualiza da miscelânea de objetos matemáticos disponibilizados pelo programa, é possível inferir que existe um novo universo a ser explorado por professores e alunos nas suas atividades pedagógicas. Assim é que existem *sites*, fóruns, grupos de discussão, em vários países, que debatem continuamente aplicações para o programa. No endereço eletrônico http://www.geogebra.org, *site* oficial do aplicativo, além da opção de fazer *download*, é possível conhecer sua história, participar de comunidades virtuais, receber as últimas notícias e tomar conhecimento de eventos. No Brasil, em São Paulo, de 13 a 15 de novembro de 2011, ocorrerá a I Conferência Latino-Americana de GeoGebra, que pode ser acessada na página http://congressos.pucsp.br/index.php/cig/, onde estão todas as informações sobre o certame.

Para mim, porém, não está nesta diversidade a maior potencialidade do *software*. Para o ensino de Matemática, sua característica mais marcante é permitir a movimentação e a deformação das figuras. Não se pode esquecer de que o trabalho de um matemático está sempre permeado de suposições e testes e, ainda, que a experimentação faz parte de suas tarefas diárias. O estímulo para que o estudante desenvolva a cultura de posicionar-se como um matemático diante das situações-problemas que lhe são propostas é um dos princípios basilares da Sequência Fedathi. Desse modo, a possibilidade de manipulação e simulação torna a Geometria Dinâmica, visto que, com um *clique* e um *arrastar* de *mouse*, centenas de casos são experenciados instantaneamente. Isso representa uma enorme vantagem, pois possibilita que um grande número de casos possíveis para uma determinada construção seja analisado rapidamente, o que não acontece com papel, lápis, régua e compasso.

Para o desenvolvimento deste projeto não precisarei operar com o *software* em sua totalidade, usarei um número muito pequeno de funções. Como se trata de um curso de construções com régua é compasso, recorrerei nas atividades apenas às opções que substituam esses aparelhos convencionais.

Adicionalmente, não como instrumento da prática geométrica, mas como instrumento de apoio efetivo ao professor-pesquisador, me valerei do beneplácito de *salvar* cada construção. E, mais ainda, através da opção *protocolo de construção,* estarei respaldado para reprisar todos os procedimentos de cada um dos alunos, pois a ferramenta permite revisar as construções, ou seja, ao final do processo de criação de um objeto, é permitido voltar e restabelecer, passo a passo, o caminho adotado pelos sujeitos. Analisando os percursos seguidos por eles, é fácil perceber quais obstáculos estão enfrentando e pode-se escolher a mediação mais adequada para a situação.

4.5.3.2 O *CamStudio*

O CamStudio é um aplicativo que permite capturar, gravar e reproduzir todas as ações tomadas no computador. Informações relativas à digitação de um texto, ao clique do mouse, à criação e deslocamento de figuras ficam armazenadas e podem ser reproduzidas posteriormente.

É um recurso bastante poderoso à disposição do professor-pesquisador, porque deixa registrados todos os movimentos, sons e imagens, o que permite uma completa observação das atitudes manifestadas pelos sujeitos durante a aplicação das sessões. Se algum fato escapar a uma observação inicial, a chance de revisão de todo o trabalho traz a garantia de que um exame minucioso ainda é possível após a conclusão do experimento, pois os dados estarão preservados para investigações posteriores.

É um *software livre*, gratuito portanto (variável que sempre foi considerada nas escolhas para que o fator econômico não seja limitante para a reprodução do projeto), e pode ser encontrado para *download* em *http://camstudio.org/.* A página disponibiliza, ainda, um fórum de discussão e *links* para *sites* relacionados.

Com interfaces interativas e bastante simples, Figura 13, o programa, além de permitir a captura da tela durante todo o tempo de observação, possibilita a edição e sincronização de áudio e vídeo.

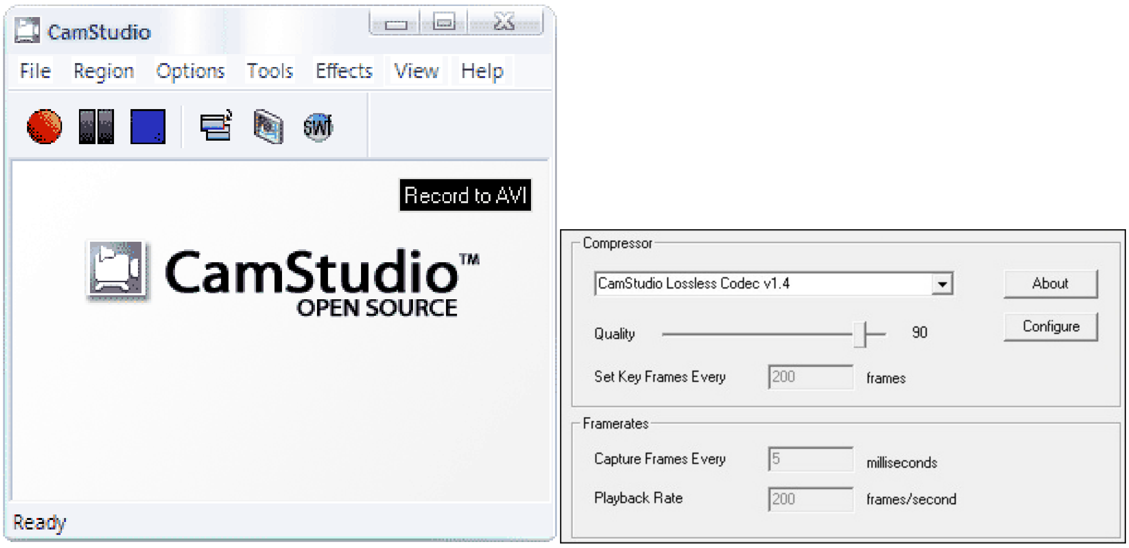


Figura 13: Interfaces do *CamStudio*.

Após a instalação, a execução não oferece maiores obstáculos, mesmo para os que não dominam a língua inglesa, porque todas as funções básicas podem ser empregadas pelo acionamento de botões cuja finalidade é manifestada de forma muito intuitiva.

Um dos principais entraves para o tratamento de áudio e vídeo em computadores é o tamanho dos documentos gerados. Geralmente, pelas dimensões que assumem, ocupam muito espaço em disco e tornam o seu processamento muito lento. Por meio da ferramenta *compressor*, o programa executa a compactação dos arquivos, tornando-os “leves” e de fácil operação. Os dados podem ser salvos em formatos diversos, entre eles AVI e Flash, o que favorece sua exportação para outras plataformas como *tlabets* ou *iphones*.

4.5.3.3 O *Audacity*

O *Audacity* é um programa livre, de plataforma aberta, para edição de áudio digital. Em operação desde maio de 2000, com sua aplicação é possível gravar, reproduzir e editar todos os sons que forem captados pelo microfone do computador. Ele foi empregado como um reforço e uma segurança para a coleta dos dados de minhas observações porque, com o *CamStudio*, também tinha a possibilidade de gravação do som.

Audacity é muito difundido entre os profissionais da área de tratamento de arquivos de som, por ser gratuito e operar em vários sistemas operacionais como Mac OS X, GNU/Linux, e Microsoft Windows.

Sua interface gráfica (Figura 14) é bastante ergonômica e a operação com botões autoexplicativos é bastante simples e intuitiva, mesmo para usuários inexperientes. Por meio da edição simplificada, ações como recortar, copiar e colar são realizadas rapidamente e sem a necessidade de conhecimentos profundos de montagem de áudio.

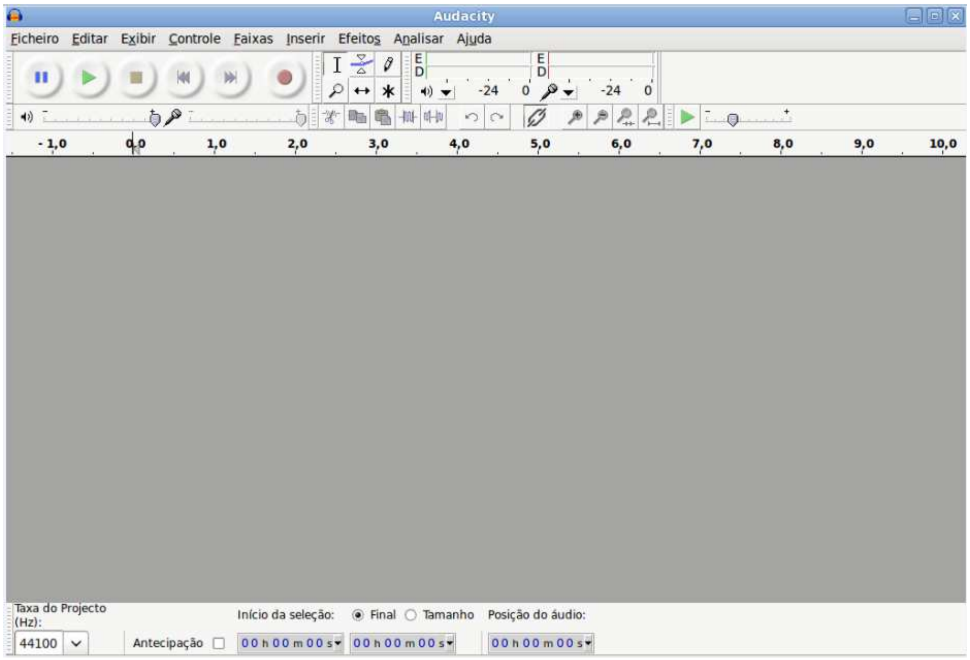


Figura 14: Interface do *software Audacity*

Os arquivos gerados quando compactados, ocupam pouco espaço em disco e podem ser salvos em diversos formatos, entre eles os populares WAV e MP3, o que favorece as ações de exportação e importação para outros equipamentos, facilitando a sua utilização.

O aplicativo possui versão em português e ainda mais em outros 25 idiomas. Sua página na internet está localizada em http://audacity.sourceforge.net/, onde, além de fazer o *download*, o visitante pode tirar dúvidas, participar de *wiki* e fórum e encontrar *links* para outros *sites* com a mesma temática.

4.6 Os Sujeitos

Para constituir o grupo de estudantes que seriam os sujeitos da pesquisa me ative a alguns prerrequisitos que me permitissem manter o foco nas questões levantadas e evitassem perda de tempo em variáveis secundárias que não constavam da proposta. Como o experimento estava alicerçado em um curso de *Construções Geométricas* no Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios, era necessário escolher pessoas que pudessem operar nas duas áreas de conhecimento: Matemática e Informática.

Assim, quanto ao aspecto tecnológico, decidi que deveria selecionar pessoas que possuíssem habilidade computacional, tanto no que concerne a *hardware* quanto a *softwares.* Esta decisão não causou perda de generalização, porque os conhecimentos necessários para a manipulação da tecnologia, por não possuírem elevado grau de dificuldade, podem ser assimilados com poucas horas de prática. Quanto à componente de Matemática, levamos em conta que, em quaisquer situações, para acompanhar um curso de *Construções Geométricas* o aluno precisa ter alguns conhecimentos básicos de Geometria Plana. Conceitos como segmento, paralela, perpendicular, bissetriz, mediatriz, entre outros, são essenciais nos primeiros passos do caminho das construções, apesar, de que essas próprias definições em si não fazerem parte do objetivo do projeto.

Feitas essas ponderações convidei cinco pessoas para a etapa empírica do programa. A aproximar os seus perfis estava a facilidade quanto ao uso dos equipamentos e conhecimentos muito elementares de Matemática. As noções geométricas que possuíam foram aquelas incorporadas durante o ensino médio e todos se referiam que, além de precárias, já estavam esquecidas; nenhum deles tinha praticado o uso de régua e compasso. Era exatamente a caracterização que eu buscava por acreditar que trabalhando com sujeitos com esses traços, poderia centrar as observações nas questões da pesquisa.

No relato das atividades, quando precisar me referir a cada um deles individualmente, por questões éticas, preservarei suas identidades e os nominarei como Cláudio, Cleiton, Raimilson[20], Fláudio, Gerardo, e Silvio. Poderia ter escolhido para pseudônimos os nomes de geômetras célebres, como Tales ou Euclides, mas optamos por esta escolha como forma de homenagear a seis colegas, fantásticos professores de Matemática, que, com sua sabedoria e bondade, muito me ensinaram e com quem compartilhei, durante longo período de minhas atuações profissionais, as emoções e alegrias de ensinar a matéria. Na Tabela 5 estão caracterizados os sujeitos.

[20] São cinco sujeitos e usamos nomes de seis pessoas porque Cleiton muitas vezes era chamado de Raimilson seu segundo nome.

Tabela 4: Caracterização dos sujeitos.

SUJEITO	CARACTERÍSTICAS
CLÁUDIO	Aluno do terceiro semestre do curso de Sistemas de Informação. Estudou Geometria apenas na educação básica. Não conhecia o TeleMeios. Nunca praticou desenho com régua e compasso. Não conhecia o GeoGebra. Participou de todas as aulas.
CLEITON/RAIMILSON	Aluno de pós graduação na área de informática. Conhecia o TeleMeios e superficialmente o GeoGebra. Colaborou com o desenvolvimento do ambiente computacional e participou como aluno de duas aulas.
FLÁUDIO	Aluno do quarto semestre de Sistemas de informação. Estudou muito pouca Geometria. Nunca usou régua e compasso. Não conhecia o TeleMeios nem o GeoGebra. Participou de todas as aulas.
GERARDO	Aluno do quarto semestre de Ciências da Computação. Trabalha como técnico na área de informática. Usou régua e compasso no ensino médio. Não conhecia o TeleMeios nem o GeoGebra. Participou de todas as aulas.
SÍLVIO	Alunos do sétimo semestre de Sistemas de Informação. Nunca trabalhou com régua e compasso. Não conhecia o TeleMeios nem o GeoGebra. Participou de todas as aulas.

No transcorrer do experimento comprovei que o nível de conhecimentos geométricos do grupo estava aquém do esperado. Esse fato fez com que, em alguns momentos, ficasse impossibilitado de aplicar demonstrações e comprovações matematicamente rigorosas, porque teria que retroceder tanto em fundamentos que perderia oportunidade de observar os fatos mais relevantes da proposta da pesquisa. Ressalto aqui que o foco de trabalho é o ensino de Matemática e não a Matemática Pura.

4.7 Cronograma das Atividades do Curso

Sabe-se que para garantir a boa arquitetura de um curso, em qualquer área do ensino, etapas diversas devem ser cumpridas, e que é difícil distribuí-las em uma faixa de tempo. O empreendimento passou muito tempo amadurecendo apenas em minhas ideias e o que posso documentar aqui são apenas os momentos isolados em que as concepções se materializaram. Embora essas fases recebam, de acordo com a situação, nomenclaturas variáveis, elas cobrem, basicamente: o projeto, onde se elabora todo o planejamento; a execução, quando as atividades são realmente desenvolvidas e a avaliação, caracterizada pela devolutiva dos resultados. Como trabalhei com a metodologia da Engenharia Didática, subdividi o plano em quatro estádios que se cumpriram conforme cronograma representado na Tabela 6.

Tabela 5: Cronograma do Curso de Construções Geométricas.

ETAPA	DESCRIÇÃO	PERÍODO
Análises preliminares globais	Caracterização da Ciência Matemática e da Geometria. Análise do ensino na área. Estudos e escolha do Ambiente Virtual de Ensino.	03/05/2010 a 30/09/2010
Análise *a priori* global	Preparação das aulas de Geometria, seguindo as orientações da Engenharia Didática.	05/10/2010 a 30/12/2010
Experimentação	Montagem do Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios. Aplicação efetiva do Curso de Construções Geométrica com mediação na Sequência Fedathi.	04/01/2011 a 24/02/2011
Análise *a posteriori* global	Avaliação do curso de Construções Geométricas, confrontando os resultados da experimentação com as hipóteses constituídas nas análises teóricas.	25/02/2011 a 06/07/2011

5. ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO AMBIENTE TELEMEIOS.

Neste capítulo relato detalhadamente todas as etapas do experimento que consolidou a pesquisa.

A fase empírica do trabalho foi desenvolvida com aplicação de Sequências Didáticas de Matemática no Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios a um grupo de alunos que dominavam o uso de computadores e possuíam conhecimentos elementares de Geometria, tendo sido a função de professor desempenhada por mim. O conteúdo escolhido para a elaboração das aulas que apoiaram as observações pertence à área da Geometria. O projeto privilegiou a elaboração e a aplicação de um curso de ***Construções Geométricas.***

O uso de ***Construções Geométricas*** para o ensino de Geometria não é nenhuma novidade, pois já foi aplicado em várias épocas e em lugares distintos. A novidade, a contribuição que este projeto acredita ter trazido é que todo o desenvolvimento do curso se deu com utilização de tecnologias digitais com interação síncrona e compartilhamento total dos aplicativos.

Na fase de planejamento, como já referi, regi-me pelo protocolo recomendado pela metodologia da *Engenharia Didática.* Esclareço que a *engenharia* se debruçou sobre dois aspectos: o geral, a macroengenharia, que se refere ao curso como um todo, e o local, as microengenharias, que abrangem cada aula, isoladamente.

5.1 Macroengenharia - Engenharia Didática do Curso de Construções Geométricas

5.1.1 Análise Preliminar Global

Reitero a ideia de que esta é a etapa da Engenharia Didática na qual os conteúdos são analisados desde sua origem e como se deu seu desenvolvimento até as aplicações atuais. Sua inserção nos currículos escolares leva em conta o quadro teórico-didático geral dos saberes, como eles são ensinados, as percepções dos alunos sobre o tema e quais os principais obstáculos que enfrentam.

Desde o nascimento da escolarização formal, a língua materna, ao lado Matemática, sempre foram duas matérias estabelecidas com prioridade em praticamente todos os currículos escolares em escala universal.

Os processos de ensino e de aprendizagem de matemática, porém, o dia a dia da sala de aula, constituem, desde há muito, em ambiente de muitas dificuldades, confrontos, angústia e decepções manifestos tanto nos alunos quanto nos professores.

Sabe-se que um dos maiores problemas que se enfrenta no ensino de qualquer disciplina é a falta de motivação para aprender por parte alunos. Quando isso acontece, as aulas se tornam monótonas e cansativas e os professores precisam despender esforços muito maiores e nem sempre obtêm sucesso. No caso da Matemática, um dos principais fatores de desmotivação é que, na maioria das vezes, ela é apresentada como uma disciplina pronta e acabada, com todos os conteúdos explicitados e fórmulas deduzidas, e, mais ainda, passa a impressão de que só os alunos mais brilhantes podem ter acesso a esse conhecimento. Praticamente nada é deixado para que o aluno experimente, tente descobrir. Esse aspecto fez com que fosse adotado o modelo de aula em que o professor apresentava o conteúdo, em seguida demonstrava os teoremas e algoritmos a ele relacionados, fazia exemplos, posteriormente propunha alguns exercícios, que diferiam dos exemplos apenas nos valores numéricos, para finalmente cobrar exercícios mais difíceis. Esse procedimento, ainda hoje, é muito usual nas nossas escolas, e corresponde aos "passos de Herbart" citados por Saviani (2003, p. 43-44), em que se defendia a noção de que para o ensino de um tópico, deveriam ser seguidos sequencialmente esses passos: *preparação* (revisão da aula anterior); *apresentação do novo conhecimento*; a *assimilação*, oriunda da explicação do professor; a *generalização,* objetivando que o aluno tenha conseguido o domínio total do assunto; e finalmente, a *aplicação*, que correspondia aos exercícios de classe e aos deveres de casa.

Segundo compreendo, o equívoco que se comete ao assumir este processo no ensino da Matemática é que ao aluno resta apenas seguir as etapas preliminarmente traçadas, e, obviamente, ele pode não se interessar por adotar a sequência e os procedimentos traçados pelo professor, tornando a memória seu recurso cognitivo mais recorrente a ser desenvolvido.

Não existem dúvidas de que essa prática, a mais antiga no ensino tradicional da Matemática, enfrentanda dificuldades cada vez maiores para se consolidar. Com esta percepção, vários autores se posicionam com propostas opcionais, como Polya (1995), e mais recentemente Chevallard, Bosch e Gáscon (2001), Borges Neto (s.d.), Pozo (1998), Fiorentini e Lorenzato (2006), dentre outros. Eles comungam em valorizar o uso de recursos concretos e a *resolução de problemas* que são, também, pontos de convergência, em especial, com as ideias de Piaget e Vygotsky, destacando a elaboração do conhecimento numa visão social, histórica e cultural.

Para Piaget (1990), o conhecimento não é dado nem na bagagem hereditária das pessoas nem nas estruturas dos objetos a conhecer. É constituído numa relação de troca, baseado numa interação social do sujeito com o meio, ativado pela ação do sujeito e pela estimulação do meio, ou seja, o meio, por si, não constitui elemento desencadeador do desenvolvimento, sem a mediação do meio físico e social. O desenvolvimento cognitivo sucede, pela assimilação do objeto de conhecimento a estruturas anteriores, presentes no sujeito e por meio da acomodação dessas estruturas em função do que vai ser assimilado.

No referencial histórico-cultural, Vygotsky (2003) apresenta uma nova maneira de entender a relação entre sujeito e objeto, na formulação do conhecimento, em que o sujeito não é apenas ativo, mas interativo, constituindo-se das relações entre pessoas. Esse processo acontece do plano social (relações interpessoais) para o plano individual, interno (relações intrapessoais). Vygotsky destaca ainda o papel da mediação cultural como importante postulado para a compreensão do funcionamento psicológico, ao defender a noção de que a relação do homem com o mundo não é uma vinculação direta, mas, predominantemente, uma relação mediada por um elemento que se localiza entre o organismo e o meio, como um elo a mais, tornando essa relação complexa.

Após longos anos de estudos e experiência no magistério de Matemática e compreendendo todas as dificuldades que o quadro até aqui levantado aponta, me inclino a produzir esta pesquisa, cujos resultados, espero, possam contribuir para o grande debate, sempre em aberto, sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

A vastidão do campo da Matemática fez com que as escolas, em épocas diversas, procedessem a distintas escolhas para o recorte programático a ser explorado na vida colegial. Em razão desse fato, em dado momento, o estudo de uma determinada área pode ser considerado mais ou menos relevante para os estudantes; contudo, a presença da Geometria é invariante nos planos de curso das escolas.

O corpo de conhecimentos da Ciência Geométrica está formalizado e consolidado há mais de vinte e três séculos, desde a publicação dos *Elementos* por Euclides no sec. III a.C. Daquele período, em diante, é muito grande o número de estudiosos da disciplina e durante longo tempo, ela foi a prioridade dentro do ensino de Matemática, como destaquei no capítulo onde tratei do ensino de Matemática. Acredito não ser exagero consolidar ainda mais esta percepção ao tomar as palavras do grande Aristóteles (2001, p.495),

> O matemático só conserva a quantidade e a continuidade, com uma, duas ou três dimensões, e estuda os atributos que lhe competem enquanto são quantidade e continuidade, e não os considera sob nenhum outro aspecto. De alguns objetos o matemático estuda as posições recíprocas e características que lhe competem; de outros as relações de comensurabilidade, de outros ainda as proporções: contudo, de todos esses objetos existe uma única ciência, a geometria.

As aplicações hodiernas da Geometria plana e das geometrias não euclidianas são inúmeras, na Engenharia, na Física, nas Artes, no Design, na Computação Gráfica e num rol de atividades que, se enumeradas, tornaria essa lista bastante extensa. A importância da matéria na formação do cidadão se manifesta desde a mais tenra idade, quando as crianças são iniciadas nos conceitos de espaço, forma e posição. Ao avançar nas etapas de desenvolvimento, as pessoas necessariamente precisam conviver com ideias geométricas cada vez mais sofisticadas para interagir com os objetos do mundo que as cerca.

Além das aplicações práticas, reais, preciso destacar o fato de que o próprio método (lógico-dedutivo) é um subsídio valioso para a resolução de situações-problema em todos os campos de conhecimento. Para o professor Antonio Caminha (2007, p. 6)

> Chegamos assim a uma das grandes, senão maior, contribuição da geometria ao ensino: ela se constitui na sub-área da Matemática elementar na qual melhor se pode exercitar e desenvolver a cognição lógico-dedutiva dos estudantes. Como corolário óbvio dessa afirmação, faz-se necessário respeitar a lógica na apresentação dos vários conteúdos: premissas devem vir antes de conseqüências e estas devem ser deduzidas daquelas, com estrito respeito à Lógica; uma vez concluído um *ciclo dedutivo*, as conseqüências já deduzidas devem ser incorporadas à lista de premissas, a fim de deduzir novas conseqüências, possivelmente com o auxílio de novos axiomas, e assim por diante.

Após todas essas considerações me decidi pela implantação de um curso de Geometria, sabendo que para seu desenvolvimento duas questões iniciais e centrais deveriam ser expressas: qual o conteúdo a ser explorado e quais as estratégias metodológicas a serem adotadas.

A relevância da primeira questão está no fato de existirem várias geometrias (Euclidiana, Hiperbólica, Elíptica entre outras) e que, para cada uma delas, os programas a serem desenvolvidos são muito extensos. Faz-se, então, necessário eleger uma determinada geometria e, posteriormente, selecionar de todos os seus conteúdos aqueles que comporão o ementário do curso.

Para o meu experimento, entre todos os assuntos da Geometria Plana que poderiam ser escolhidos para apoiar minhas observações, optei, para o desenvolvimento da teoria, pelo tópico *Construções Geométricas*. Este tema foi amplamente estudado pelos gregos da antiguidade quando deram um espetacular desenvolvimento na disciplina. Ressalto que, para eles, a construção de uma figura só era válida se fosse obtida com o emprego apenas de régua e compasso.

O estudo das *Construções Geométricas* pode ser um elemento catalisador e facilitador da aprendizagem de toda a Geometria. Os problemas que podem ser solucionados com base na apreensão do seu conhecimento encontram inúmeras aplicações concretas e possuem profunda conexão com o ambiente natural.

De início, os caminhos a serem seguidos em busca de respostas para as situações apresentadas, em geral, não são muito claros para os alunos. Isto faz com que eles tenham várias idas e vindas, e se empenhem em tentativas diversas. Tal atitude os aproxima do posicionamento que os matemáticos adotam quando se defrontam com uma determinada questão a resolver. Tal procedimento é defendido pela *Sequencia Fedathi*, orientação metodológica que será guia para o desenvolvimento das aulas do curso, pois estimula no aluno o caráter investigativo e possibilita o despertar de competências próprias dos pesquisadores. Esse fator é um itinerário para a descoberta e para a consolidação da autonomia.

Resumindo a justificativa para a adoção do tema, apoio-me nas palavras do professor Eduardo Wagner (1993) que, no prefácio de seu livro *Construções Geométricas*, assinala:

> Os problemas de construção são motivadores, às vezes intrigantes e freqüentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados.

Concordo com o proeminente mestre e defendo, firmemente – calcado na pesquisa bibliográfica que realizo, no acompanhamento do desempenho dos estudantes e nas observações do ambiente escolar, no qual já atuo por mais de uma geração – que o ensino de Geometria e particularmente o das *Construções Geométricas* podem ser elementos estimuladores do desenvolvimento intelectual dos jovens e das habilidades que necessitam desenvolver para que se tornem competentes na resolução de problemas.

Para que esta alentadora visão pontifique, no entanto, chego agora à segunda questão a ser pensada na elaboração do curso. É necessário que o professor use estratégias e métodos que desafiem os alunos e os mantenham motivados para as novas descobertas, o que não é uma tarefa simples. Vive-se um novo tempo dominado pela Cibernética, no qual os jovens possuem estreita relação com os elementos computacionais, seja através de computadores, jogos eletrônicos ou telefones móveis. Para essa geração, apenas manipular os materiais tradicionais de desenho, construindo figuras no caderno, já não é um desafio nem isso representa uma experiência motivadora. Os estudantes, atualmente, na escolarização formal, em geral, nem aprendem a utilizar régua, esquadros e compassos, ferramentas indispensáveis em um bom curso de Geometria. Esses objetos não fazem mais parte de seu mundo que está preenchido por tecnologias digitais e relações virtuais. Desse modo, fiz a escolha de ministrar o curso através do Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios. Em vez do caderno de desenho, utilizaremos computadores e substituiremos a régua e o compasso, usados desde a Grécia antiga, pelo *software* de Geometria GeoGebra. No que tange às interações e mediações, elas se darão em tempo real, o compartilhamento proposto possibilitará um contato tão estreito que cada aluno poderá trabalhar, desenhar, no computador de um colega que está em um local distante dele, sendo desnecessário saber até que local é esse.

Sabe-se que a proposta traz consigo transformações radicais, porque, além da angustiante desvalorização a que está submetido o ensino de Geometria e das construções geométricas, conforme demonstrado em capítulo anterior, quando as temáticas são estudadas, isso é feito, geralmente, com a aplicação de métodos muito conservadores, ainda calcados na exposição teórica dos conteúdos por meio de teoremas e suas demonstrações, para, em seguida, ser feita a apresentação de exemplos e questões, processo cansativo, desmotivador e ultrapassado.

Em busca de uma nova lógica, após as fundamentações e justificativas produzidas por meus estudos, conforme detalhei, defini as concepções gerais do projeto do *Curso de Construções Geométricas*. O *Curso* será ministrado a distância por meio de computadores conectados em rede com o compartilhamento total entre os sujeitos. Estabeleço os seguintes objetivos:

1. Conhecer o projeto TeleMeios.
2. Conhecer o *software* de Geometria GeoGebra.
3. Caracterizar Construções Geométricas com régua e compasso.
4. Executar as Construções Geométricas Elementares.

Para dar conta da tarefa a que me propunha avaliei que são necessários um encontro-piloto e mais cinco aulas com duração de duas horas cada uma. A arquitetura de cada encontro é o relato que farei na segunda fase de minha *engenharia*.

5.1.2 Análise a Priori Global

Esse é o momento da *engenharia,* no qual se tomam as decisões, são feitas as opções, as escolhas, tanto no que se refere à distribuição dos conteúdos quanto às metodologias a serem empregadas e aos equipamentos pedagógicos a utilizar. Cada escolha foi feita com base nas respostas que encontrava para as questões levantadas à medida que o projeto evoluía. Não podia esquecer que minha meta era ensinar Geometria, e como acontece geralmente com os professores quando estão montando um novo curso, me questionei sobre o maior número possível de variáveis que podiam interferir no processo. O caminho percorrido foi o que se segue.

- Como desenvolver o programa?

  Para não me afastar dos objetivos estabelecidos nas *análises preliminares* distribui os conteúdos a serem desenvolvidos da seguinte maneira:

  Aula 1

  1 Conhecer o projeto TeleMeios.

  2 Conhecer o *software* de geometria GeoGebra.

  3 Caracterizar Construções Geométricas com régua e compasso.

  4 Construir a perpendicular.

  Aula 2

  1 Construir o ponto médio de um segmento de reta.

  2 Construir a mediatriz de um segmento de reta.

  3 Construir a bissetriz de um ângulo dado.

  4 Construir a reta paralela a uma reta dada.

  Aula 3

  1 Transportar um ângulo dado.

  2 Dividir um segmento em partes iguais.

  3 Construir o arco capaz de um ângulo sobre um segmento dado.

  Aula 4

  1 Dividir um segmento em partes proporcionais a inteiros dados.

  2 Determinar o centro de um círculo dado.

  3 Resolver problemas que envolvam a construção das estruturas básicas da geometria.

  Aula 5

  1 Dividir uma circunferência em seis partes iguais.

  2 Dividir uma circunferência em três partes iguais.

  3 Resolver problemas que envolvam a construção das estruturas básicas da Geometria.

- Que metodologia de ensino utilizar?

  Para desenvolvimento do plano, apeguei-me à estratégia da *resolução de problemas* porque aceito as situações expressas por Pozo, quando garante que

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedi-

> mentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. (POZO, 1998, p.09).

- Que bibliografia empregar?

  Adotei para texto básico a obra **Construções Geométricas,** do professor Eduardo Wagner, publicado pela Graftex Comunicação Visual, em1993. O livro faz parte da coleção da Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática e é uma referência para o estudo da disciplina.

- Em que local?

  Consegui a autorização para utilizar os laboratórios da Faculdade 7 de Setembro, o que à primeira vista resolvia os problemas relativos à infraestrutura de *hardware* e rede.

- Que plataforma de comunicação e compartilhamento?

  O ambiente TeleMeios porque, além das funcionalidades que percebi em primeira análise, o programa era produto do trabalho de um dos pesquisadores de nosso grupo de estudos, o que facilitaria eventuais ajustes.

- Que sistema operacional?

  O Windows XP versão SP3, porque já se encontrava instalado em todas as máquinas dos laboratórios e a grande difusão que possui é de domínio da maioria das pessoas.

- Como documentar os experimentos?

  Optei por gravar e salvar em disco rígido todas as ações praticadas durante as sessões. Para áudio, escolhi o *Audacity* e para vídeo *CamStudio,* ambos *softwares* livres que permitiram posteriormente a reprodução total dos experimentos.

- Que equipamentos utilizar para a construção das figuras?

  Em substituição à régua e ao compasso equipamentos, até então equipamentos indispensáveis para um curso com o escopo deste, será utilizado o programa de Geometria Dinâmica GeoGebra pelas razões que listei quando descrevi os *softwares*.

- Que competências os sujeitos deveriam possuir para que pudessem acompanhar bem o curso?

  Inicialmente, dominar o ambiente TeleMeios para que aproveitassem todas as funcionalidades de comunicação e interação que ele disponibiliza. Aplicar com proficiência os recursos do *software* GeoGebra para praticar os procedimentos geométricos sem dificuldades. Compreender as propriedades dos elementos básicos da Geometria Plana para entender e tentar solucionar as situações-problemas propostas. Descrever e justificar os procedimentos adotados para a execução de uma determinada Construção Geométrica para poder interagir com os colegas, o professor e o próprio ambiente pedagógico.

- Como se darão as interações e mediações durante as aulas?
  O ambiente arquitetado permite a comunicação e as intervenções instantaneamente; assim, todos poderão interagir entre si e com o meio, e, no sentido vygotskyano do conceito, poderá se concretizar a mediação.
- Quais os prerrequisitos necessários para enfrentar as situações-problemas?
  Os alunos precisam conhecer os conceitos básicos de Geometria, tais como ponto, reta, plano, segmento, ângulo, reta perpendicular, reta paralela, entre outros.

Concluída essa sequência de análises e escolhas, segue-se para o momento de levantamento de hipóteses. Elas afloraram de inferências sobre o conjunto de elementos analisados em concordância direta com os objetivos estabelecidos para a pesquisa explicitados no capítulo da metodologia. Elas foram as seguintes:

(1) O ambiente TeleMeios permite superar as fronteiras físicas e espaciais durante um curso de Geometria.

(2) A plataforma TeleMeios propicia maior interação dos sujeitos durante as aulas de Geometria.

(3) O ambiente TeleMeios possibilita ao professor desempenhar sua função de mediador de modo pleno e categórico.

(4) O compartilhamento em tempo real é indispensável para o bom aproveitamento dos alunos em um curso de Geometria em Ambientes Virtuais de Ensino – AVE.

(5) Não é necessária uma infraestrutura computacional sofisticada para a aplicação de um curso de *Construções Geométricas* empregando a plataforma TeleMeios.

(6) O TeleMeios é um ambiente computacional que favorece o ensino e a aprendizagem de Geometria.

(7) Atualmente é mais produtivo do ponto de vista pedagógico aplicar um curso de *Construções Geométricas* através do ambiente TeleMeios do que usando régua e compasso.

(8) O uso de tecnologias é elemento motivador e amplia o interesse dos sujeitos pelo estudo de Geometria.

(9) O *software* GeoGebra substitui, sem prejuízos, a régua e o compasso em um curso de *Construções Geométricas.*

(10) Os sujeitos têm mais facilidade de operar com o *software* do que com régua e compasso.

(11) Os alunos aprenderão os conteúdos de Construções Geométricas ministrados durante o curso.

Assentando que hipótese é uma proposição que se admite, independentemente do juízo de ser falsa ou verdadeira, como um princípio como suporte no qual se pode deduzir um determinado conjunto de consequências, sobreveio a hora da atividade empírica, a aplicação concreta do *Curso Construções Geométricas* ao grupo de sujeitos selecionados, o que narro na terceira fase da *engenharia*.

5.1.3 Experimentação Global

Para a concretização do experimento, elaborei inicialmente um evento-piloto para avaliar as condições de funcionamento de todo o aparato planejado, sendo de caráter preparatório; não foi incluído no plano do curso efetivo. O ponto de partida foi a instalação dos *softwares* nos três laboratórios que seriam utilizados. Para isso contei com o apoio e dedicação de Raimilson e Gerardo e não tivemos maiores dificuldades. Após a preparação do ambiente, partimos para a verificação das condições operacionais do sistema e do uso do GeoGebra. Nesse ponto Cláudio juntou-se ao grupo.

Assumimos os computadores e passamos aos testes de comunicação e compartilhamento, ressaltando que todas as ações realizadas por parte de cada um dos sujeitos era visualizada por todos os outros que estavam conectados. Depois das idas e vindas, costumeiras nos processos de implantação de estruturas computacionais, conseguimos nos comunicar e daí em diante gravamos todas as ações cuja transcrição encontra-se no Apêndice 1.

Chegamos, enfim, ao dia da primeira aula do curso. Para ela, como para todas as demais, reiniciamos todas as práticas prescritas pela Engenharia Didática, mas com enfoque diferente, agora com perspectiva local, onde cada sessão é estudada individualmente e os resultados são utilizados para a preparação da seguinte.

5.1.3.1 Aula 1

Engenharia Didática Local

Análise Preliminar

Na primeira aula, o tempo didático, pelo conteúdo previsto no plano, deverá ser dividido em três estádios: o primeiro para a acomodação dos sujeitos e colocação do aparato tecnológico (centrado no TeleMeios) em condições de plena utilização; depois, deverei dirigir as atividades para o *software* Geogebra, quando, além da apresentação, será necessário que os alunos pratiquem minimamente o uso das ferramentas para adquirir a habilidade necessária à elaboração das figuras iniciais e, finalmente, passarei ao estudo da Geometria propriamente dita com a construção da reta perpendicular, elemento básico para os passos seguintes do curso.

Para acessarem todos os sistemas, os alunos deverão fazer o *login* e, para isso receberão antecipadamente as senhas necessárias. A iniciação ao TeleMeios será feita por meio de apresentação das aplicações que ele oferece, percorrendo as cortinas e janelas que ele traz no seu *layout.* Essa fase não deverá trazer maiores obstáculos, porque todos os sujeitos possuem razoável competência na área computacional e o programa é bastante amigável e intuitivo.

Para desenvolver a habilidade de manipulação e usabilidade do GeoGebra seguirei, em princípio, o mesmo rito aplicado para o TeleMeios, porque, afinal de contas, trata-se de iniciação em um programa de computador. Quanto a usar os instrumentos com o fito de apreensão de conhecimentos de *Construções Geométricas* isso se dará quando da resolução das situações-problemas de Geometria propostas no decorrer do curso.

Na fase introdutória do curso não aceitarei as soluções mecânicas, aquelas que são dadas diretamente pelo computador. Para resolver o problema: ***construir a perpendicular a uma reta dada que passa por um ponto P exterior à reta,*** existem soluções clássicas, por meio de régua e compasso, de baixa complexidade, consolidadas desde a publicação dos *Elementos* de Euclides. No GeoGebra, para resolver a situação proposta é suficiente que o aluno *clique* sobre o ponto e sobre a reta e escolha a função *reta perpendicular*, ela “surgirá”, automaticamente, sem a aplicação de nenhum conceito geométrico. É óbvio que esta operação não traz nenhuma contribuição para a produção de aprendizagem e é fundamental que os alunos compreendam a essência da diferença entre as duas propposituras, com a primeira há a aproximação da ciência, enquanto com a segunda existe apenas a execução de rotinas predefinidas. Assim não vou, de início, acatar os processos maquinais. Adiante, quando os estudantes já dominarem os procedimentos geométricos clássicos e souberem justificar todos os fatos relacionados à construção da perpendicular, então estarão liberados para o uso imediato das funcionalidades do *software*, o que não trará prejuízos para a sua formação, porque já estarão seguros nos conhecimentos matemáticos. A mesma atitude sempre foi adotada no ensino das disciplinas de Geometria e Desenho ao longo de toda a história; após o completo entendimento de uma construção ideal, ela poderia ser usada na solução de questões mais complexas sem que fosse necessário repetir o processo na totalidade. Uma prova é que foram criados equipamentos auxiliares para acelerar os passos mecânicos do trabalho como são exemplos os esquadros e os transferidores. Dessa forma, a economia de tempo, a facilidade de construção e as opções de experimentação constituem grandes vantagens que o Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios proporcionará.

Análise *a priori*

Os objetivos do plano da primeira aula privilegiam a apresentação e ambientação dos alunos na plataforma computacional, notadamente no *software* TeleMeios, iniciação destes no GeoGebra e a introdução ao conteúdo geométrico do curso.

As questões tecnológicas serão abordadas desde o momento em que os alunos assumirem os computadores. As formas de acesso e *login*, bem como os primeiros passos, serão expostos aos sujeitos em momento anterior quando da sessão de teste. Após o acesso ao sistema, todo o curso já se dará de forma virtual.

Para que os sujeitos tomem conhecimento do GeoGebra, vou esquadrinhá-lo, percorrendo todas as janelas e cortinas do aplicativo, mostrando suas funcionalidades e potencialidades, destacando as possibilidades de simulação que são facilitadas com as das deformações às quais as figuras podem ser submetidas.

Após a iniciação no ambiente telemático, disponibilizarei tempo para que os estudantes possam fazer as próprias explorações e experimentações para tirar conclusões sobre a nova ambiência em que trabalharão. Não é demais reforçar a noção de que todas essas atitudes estão referendadas pelos indicativos da Sequência Fedathi.

Adentrando aos conteúdos de Geometria, fiz a escolha da situação-problema inicial, a mais praticada tradicionalmente, seguindo o roteiro do livro-texto do curso, ela é a seguinte: ***construir a perpendicular a uma reta dada que passa por um ponto P exterior à reta.***

A solução proposta pelos alunos, em primeira instância, deverá ser totalmente mecânica e se apoiar diretamente no *software* GeoGebra, mas não é a solução que preciso. O objetivo, de acordo com a *regra do jogo*, é que empreguem a régua e o compasso e, ao final da aula, alcancem a seguinte solução clássica:

> Com centro no ponto P traça-se uma circunferência que intercepte a reta. Com centro nos dois pontos de interseção sobre a reta traçam-se duas circunferências de mesmo raio e que se interceptem. Ligando os dois pontos de interseção das circunferências construídas obtém-se a perpendicular desejada.

Com o emprego do GeoGebra, a construção solicitada assume a seguinte apresentação:

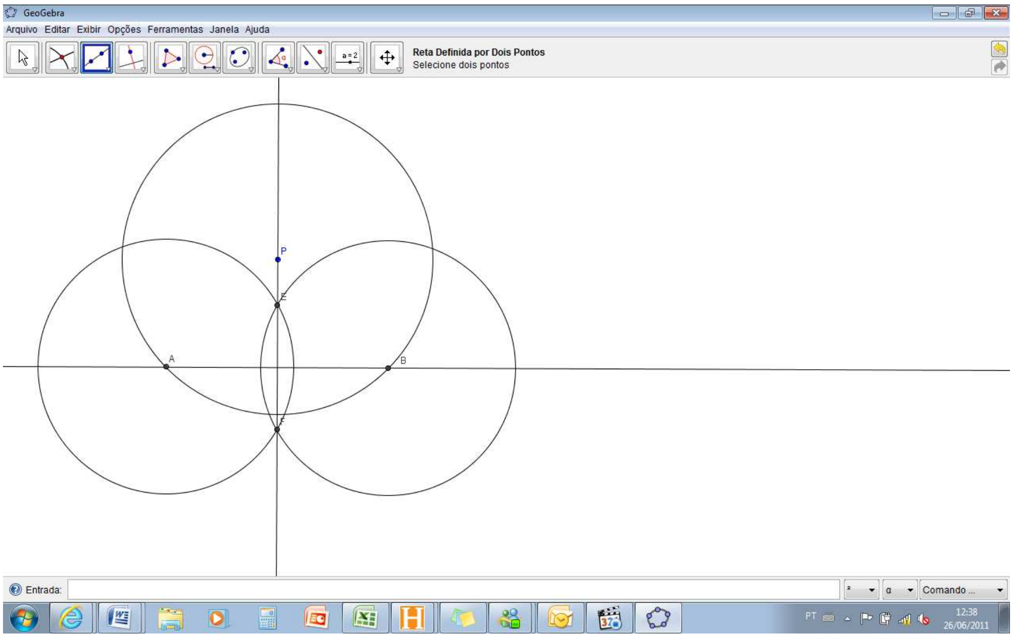


Figura 15: Construção da reta perpendicular no *GeoGebra*.

Obedeço rigorosamente os preceitos da Engenharia Didática ao fazer previsões, escolhas e a definição clara dos objetivos. Reforço a noção de que não se trata de manietar os sujeitos, eles estarão livres para propor suas ideias. Deixarei que eles as apresentem, mas na mediação, me posicionando segundo a Sequência Fedathi, discutirei as propostas e farei com que percebam a diferença entre os caminhos, me aproximando da consecução do propósito da aula. Os alunos provavelmente possuem os prerrequisitos necessários para a tarefa, pois eles são bastante elementares e se restringem aos conceitos de reta, segmento, círculo e triângulos e suas classificações.

Na esfera operacional, distribuirei os sujeitos nos três laboratórios disponíveis, ficando dois deles no LI 40, dois no LI 41 e eu estarei no LI 42, apoiando as três salas, Raimilson terá mobilidade para, se necessidade houver, amparar aqueles que se encontrarem em dificuldades.

A aula terá duração de duas horas que serão distribuídas da seguinte maneira:

- 20 minutos para distribuição dos alunos e acesso à plataforma computacional.
- 30 minutos para a apresentação e experimentação do *software* GeoGebra.
- 60 minutos para a construção e discussão da reta perpendicular.
- 10 minutos para os comentários e opiniões finais sobre o encontro.

Após essa análise de todas as variáveis em foco, tecnológicas e matemáticas, levanto as hipóteses locais (exclusivas para esta aula) a seguir, que serão verificadas, após o experimento, na fase chamada de análise *a posteriori*.

(1) O ambiente pedagógico montado funcionará perfeitamente após as adaptações feitas na aula teste.

(2) Os alunos, por possuírem experiência em informática, não terão problemas na utilização do TeleMeios.

(3) Os alunos, por possuírem experiência em informática, não terão problemas para trabalhar com o GeoGebra.

(4) Para resolução da situação-problema proposta, os alunos inicialmente tentarão uma solução mecânica via *software*.

(5) Os sujeitos possuem os prerrequisitos necessários para a construção da perpendicular com régua e compasso.

(6) A distribuição do tempo didático entre as etapas de ambientação no ambiente, exploração dos *softwares* e conteúdo geométrico é adequada.

(7) A interação dos sujeitos será maior do que se eles estivessem em uma sala de aula convencional.

(8) A função mediadora do professor será mais efetiva do que seria em uma sala de aula convencional.

(9) Ao final da aula, todos os alunos serão capazes de construir a perpendicular a uma reta passando por um ponto dado.

Experimentação

A aula foi agendada para o dia 19 de março de 2011 às 8h e todos os sujeitos estavam presentes nesse horário. Um dos laboratórios de informática reservado estava ocupado com uma atividade da Faculdade, por isso tivemos que nos dirigir para outro laboratório e perdemos algum tempo com instalação de equipamentos.

O grupo foi distribuído, ficando Fláudio e Cláudio no laboratório LI 41, Silvio e Gerardo no LI 40, eu no LI 42, enquanto Raimilson, como planejado, não ficou com uma posição definida para se deslocar entre as salas, verificando se tudo transcorria normalmente e intervindo quando necessário. O encontro efetivamente iniciou-se às 8h45min, quando todos já estavam conectados e em pleno uso do ambiente. Estabeleci o contrato didático, descrevendo os objetivos, como seria o andamento do curso, o que eu esperava de cada um deles e qual seria meu posicionamento.

Quero registrar o fato de que, nos muitos anos de prática docente em sala de aula, sempre adotei um estilo informal e um linguajar coloquial; sempre procurei dialogar com os alunos do mesmo modo que eles fazem entre si, e me parece que funcionou muito bem. Nas avaliações de alunos e superiores, tanto na educação básica quanto no ensino superior, invariavelmente, obtive resultados bastante positivos. Assim, resolvi fazer para o cenário digital uma transposição do modo de atuação que cultivo presencialmente com a esperança de tornar as aulas agradáveis e o relacionamento o mais afável possível.

Como nossa fala estava sendo gravada no próprio computador que operávamos, foi possível transcrever tudo o que foi abordado, como se verá a seguir[21]. É conveniente destacar agora, uma das principais dificuldades enfrentadas para a produção deste relatório: é que as transcrições não são capazes de reproduzir as entonações, os silêncios, a veemência com que os fatos são discutidos. Todos os alunos estavam vendo meu monitor. Então, era natural apontar com a ferramenta "*indicador*" e falar ***esse ponto***, ***essa interseção***, ***sobre esta reta***, o que, na transcrição, pela falta da imagem de toda a cena, representa um obstáculo para que o relato permaneça fiel ao que realmente estava acontecendo. Na expectativa de superá-lo, foi preciso recorrer a um grande número de ilustrações na descrição. É necessário que o leitor compreenda que todos, mesmo distantes, estávamos vendo tudo o que acontecia na figura. Era como se estivéssemos todos ao redor da mesma prancheta de desenho. Acreditando na força do projeto, espero que a descrição obtenha o mesmo sucesso que creio ter alcançado ao realizar o experimento.

[21] Para facilitar a leitura e distinguir as transcrições do restante do texto, elas foram digitadas na fonte Vijaya tamanho 14.

O CONTRATO DIDÁTICO

Adelmir: Esta é a pesquisa do Laboratório Multimeios da UFC, sobre construções com régua e compasso através de tecnologias digitais. As construções geométicas nasceram na Grécia antiga, que foi o berço da Geometria... Então ela foi, durante muito tempo, um dos tópicos, um dos itens mais importantes do estudo da matemática, e todo seu florescer aconteceu na Grécia... e tinha um problema grave: pra esse estudo, por uma influência de Platão, para os gregos só eram soluções puras aquelas que eram feitas através de régua e compasso apenas, onde a régua era uma régua sem escala, sem medidas, sem numeração, e o compasso era usado apenas para transferir medidas... se você queria transferir a medida de um segmento, você media com o compasso e levava para outra distância. Durante muito tempo, o ensino de geometria se baseou nessas construções geométricas, mas no Brasil, a partir dos anos 70, com a vinda de um movimento chamado de matemática moderna, o ensino de geometria se desvalorizou muito e as construções geométricas saíram praticamente das escolas, o que é uma grande pena porque são problemas interessantes, problemas instigantes. E no nosso projeto o que nós vamos fazer é um curso de construções geométricas, sendo que não usaremos a régua e o compasso convencionais... utilizaremos tecnologias digitais, softwares tanto na transmissão e na comunicação de dados, de imagens e de som... como também um software de geometria que será o GeoGebra. Eu gostaria de agradecer a presença de vocês, e vamos então combinar o seguinte: tudo será feito através do computador, o software que vamos usar é o GeoGebra, a tela que vocês estão compartilhando comigo.

Raimilson: Professor Adelmir?

Raimilson: Professor Adelmir? Alguém na escuta?

Gerardo: Raimilson, perdi o áudio do professor Adelmir.

Raimilson: Agora, professor Adelmir tá na escuta?

Adelmir: Tô na escuta!

Raimilson: Pronto, continue a falar porque parou aqui seu áudio, tô gravando todo seu áudio.

Adelmir: Eu acho que não parou o áudio não, eu acho que o gravador também tava gravando, eu acho que o gravador de som é que parou.

Raimilson: Eu acho que já descobri uma maneira de contornar esse problema.

Adelmir: Mas não vamos nos preocupar com ele agora não, tá?

Raimilson: Sem problemas.

Adelmir: Se você conseguir gravar, ótimo pra nós, mas eu tava gravando,... mas já não estou mais me preocupando com ele porque a gente precisa terminar o contrato.

Adelmir: Então veja só... como eu dizia, vocês trabalharão com duas versões do GeoGebra, uma onde vocês, quando forem propostas as atividades as situações problemas... vocês tentarão descobrir as soluções, as saídas e quando chegarem a uma conclusão ou quando tiverem alguma dúvida ou quiserem discutir, a gente representa nessa tela que está sendo compartilhada. Ficou claro pra todos?

Raimilson: Sim, tá claro.

Alunos: Ficou!

Adelmir: Então, beleza. Então... vocês estão com a tela do GeoGebra aí... o GeoGebra é um programa de geometria que oferece muitas funcionalidades... muitas facilidades para que a gente não tenha toda vez que repetir as construções. Então eu queria inicialmente... rapidamente mostrar as ferramentas a vocês, o que vai levar pouquíssimo tempo e o que vai fazer com que nós manipulemos bem as ferramentas... é a nossa experiência.

Cláudio: Tô ouvindo.

Adelmir: Gerardo, tá ouvindo?

Gerardo: Tô sim, professor.

Adelmir: Ok então. Por um momento vocês... um rápido momento vocês vão ficar sem a possibilidade de se comunicarem comigo porque eu estarei com o som ativado, só para percorrer as cortinas do GeoGebra.

Raimilson: Só um parêntese... tô gravando o áudio. Pode falar à vontade.

Finalizado o contrato, a meta passou a ser a apresentação do *software* GeoGebra. Em razão dos problemas iniciais com mudança de sala, instalação e teste de equipamentos, repassamos para consolidar, de outra forma, os principais elementos do contrato didático.

Adelmir: Como em toda aula que se preza, eu vou começar fazendo chamada, tá certo? Então eu vou chamar o nome de vocês e, na ordem em que eu chamar, eu quero que você responda. Pra isso, aproveita e testa o som e, além de responder, eu queria que você repetisse seu nome e dissesse o que você está estudando no momento. Então vamos começar a nossa chamada. Cláudio?

Cláudio: Tô aqui, meu nome é Cláudio, e no momento estou estudando na Fa7.

Adelmir: Que curso você faz Cláudio?

Cláudio: Tô no 3º semestre de Sistemas de Informação

Adelmir: Ok então, obrigado por ter vindo! Fláudio?

Fláudio: Ok, professor Adelmir, estamos aqui testando o software GeoGebra, sou aluno da Fa7, cursando o 4º semestre.

Adelmir: De que curso?

Fláudio: Sistemas de Informação

Adelmir: Obrigado Fláudio! Silvio?

Silvio: Eu sou Silvio, faço Sistemas de Informação e eu tô no 7º semestre.

Adelmir: Obrigado, Silvio! Algum de vocês dá notícias do aluno Gerardo? Eu não tô vendo ele na sala.

Silvio: Ele tá instalando o arquivo!

Quando comentamos que Gerardo não está na sala, isto foi possível porque o TeleMeios oferece a funcionalidade de listar em uma de suas janelas todos os sujeitos que estão conectados, o momento de acesso e de saída, como se vê na Figura 16.

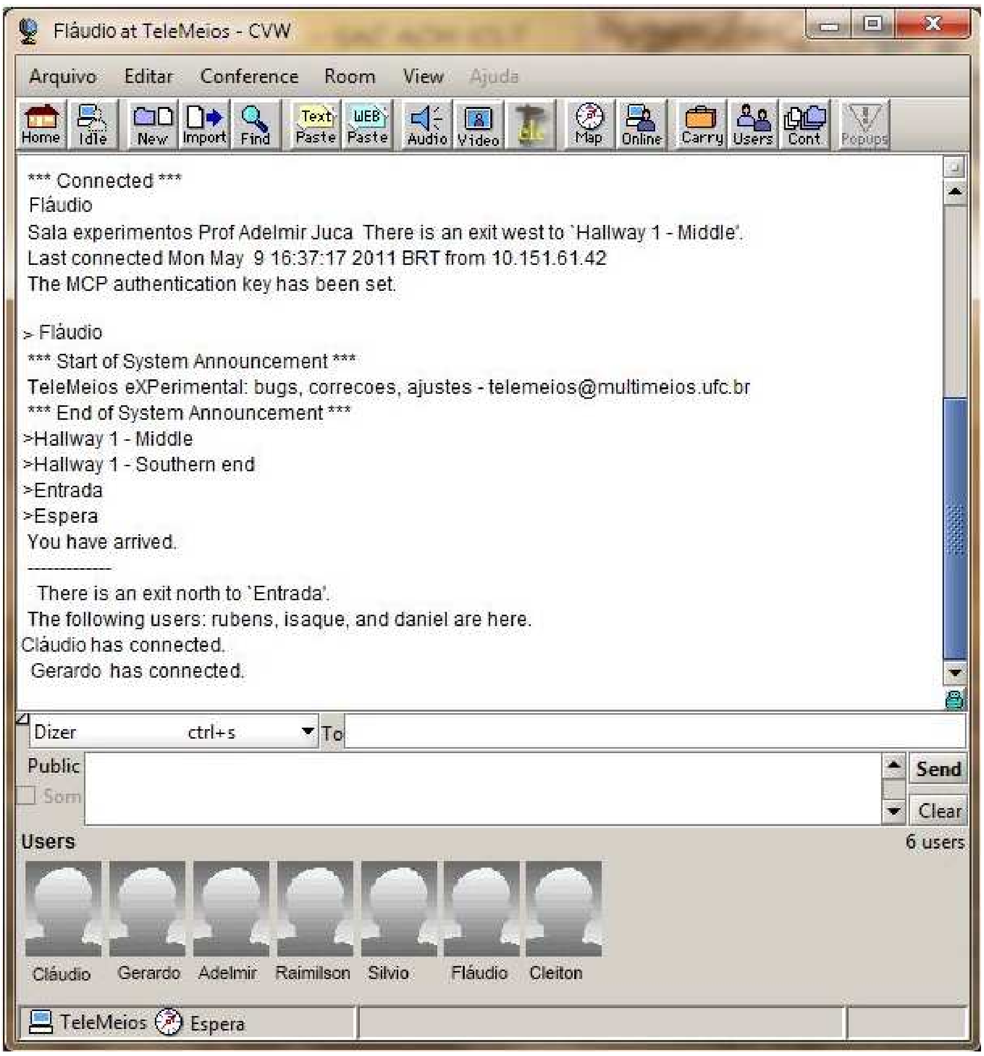


Figura 16: Interface exibindo os alunos na sala do TeleMeios.

Adelmir: Ok! Então vamos começar pessoal. Essa nossa aula de hoje faz parte da pesquisa base do nosso trabalho de tese de doutorado, e o que nós vamos fazer é um curso de construções geométricas. Pra fazer esse curso de construções geométricas, nós vamos utilizar dois suportes fundamentais. O primeiro deles é um ambiente computacional, TeleMeios, com as funcionalidades, as facilidades que estão sendo introduzidas na pesquisa de doutorado de Daniel Capelo Borges. Além de usar o TeleMeios, durante todo o curso... além de mostrarmos, usaremos as suas funcionalidades e poderemos testar a sua usabilidade. Nós teremos como base... como ferramenta de trabalho, o software GeoGebra. GeoGebra é um software para estudo de Geometria, é um software livre, como nosso curso é de Geometria nós vamos ter que desenhar, vamos ter que construir e então a nossa base vai ser o GeoGebra, nós *estaremos compartilhando som, a própria tela do computador, todos os aplicativos que forem usados e, além disso, nós poderemos ter uma intervenção em tempo real, qualquer um dos alunos presentes no curso. Construções geométricas. Esse tópico da Matemática, ele tem sua origem lá na Grécia antiga. Os gregos fizeram um grande desenvolvimento da Geometria e tem como marco um símbolo não na história da matemática, mas na própria história da ciência como um todo... é que lá na Grécia, no século III antes de Cristo, a gente tem um marco que é a publicação da obra Elementos de Euclides, e nessa obra ele faz o desenvolvimento do método axiomático dedutivo, que até hoje é um dos mais fortes recursos que a ciência tem para demonstração e prova dos mais diversos fatos. Então lá na Grécia antiga, as construções tiveram um grande impulso. Agora... há dois tipos de construções. Existiam construções geométricas que tinham um sentido utilitarista, que as pessoas usavam na prática, na construção das suas casas, na divisão de seus terrenos, na demarcação de territórios e há uma outra parte também em Geometria que o que valiam eram as ideias, isso por uma influencia platônica muito forte. Platão,... pra ele só eram construções ideais, só eram construções válidas aquelas que fossem feitas com régua e compasso. A régua é uma régua sem escala não é numerada e o compasso com sua abertura para transportar distância. Então o nosso curso de Geometria será um curso na visão grega, na visão helênica, nós vamos fazer problemas de matemática usando régua e compasso. Ora, a grande novidade que nós vamos ter é que um pouquinho diferentemente dos gregos, nós vamos ter recursos computacionais que vão facilitar muito a nossa vida. Imagine que hoje alunos do ensino fundamental onde se inicia o estudo mais formal da geometria, os alunos nem manuseiam, nem usam o compasso e uma régua e tem muita dificuldade pra usar esse equipamento. O que nós trazemos, o que nós incorporamos à teoria é essa funcionalidade de usar o computador, e não nos afastaremos dos rigores, dos princípios da matemática, porque vamos tentar dar as explicações, as justificativas de todos os fatos e durante nosso curso só poderemos usar recursos computacionais. Essa é a regra do jogo e poderemos testar, falar, intervir na hora que quiser, estaremos todos à vontade para isso. Então passaremos primeiro pelas construções elementares* *que são construções de retas, pontos, depois o traçado da bissetriz, da mediatriz, da perpendicular, da paralela, e veremos como se dá... Como funciona isso, através de um meio... de um ambiente totalmente diferente daquele que os gregos usaram antes ainda da era cristã. Então, além do convite, fica o desafio, fica o desafio para que nós tenhamos um bom curso. Sei que posso contar com o apoio de todos. Observem que o aluno Gerardo acaba de chegar atrasado e ele perde, então, a parte mais bonita, mais emocionante que foi a história, nós temos aqui o aluno Cláudio já com lágrimas, nos olhos, emocionado com tudo o que ouviu, viu? Então nós começaremos agora*

Gerardo: Sim.

Fláudio: Ok, professor Adelmir.

Cláudio: Sim

Adelmir: Então na sua tela é pra que você esteja vendo o GeoGebra da minha versão, agora no GeoGebra eu vou fazer uma figura e eu queria que vocês me dissessem se estão vendo que figura eu estou desenhando.

Adelmir: A figura que eu desenhei apareceu no GeoGebra de vocês?

Cláudio: Não, professor, eu não tô visualizando não.

Gerardo: Nem eu.

Fláudio: Ainda não consegui visualizar nada.

Adelmir: Vocês têm que pedir o compartilhamento do GeoGebra.

Mesmo sendo sujeitos com larga experiência em informática, nesta primeira aula, tive que mudar em alguns momentos o andamento das explicações porque um ou outro aluno se esquecia de *clicar* em algum botão e acionar ferramentas indispensáveis. Isto pode ser justificado pelo pouco tempo de prática com os aplicativos e as dificuldades foram superadas rapidamente.

Cláudio: Tô visualizando, professor.

Gerardo: Agora apareceu um triângulo.

Fláudio: Ok, professor Adelmir, consegui visualizar um triângulo.

Adelmir: Silvio? Gerardo?

Gerardo: Oi, professor?

Adelmir: Vocês já tão vendo o triângulo aí na sua tela?

Gerardo: Como é?

Adelmir: Você já está compartilhando o meu GeoGebra, já está com o triângulo aí na tela?

Gerardo: Positivo.

Adelmir: Pessoal, o grande diferencial do nosso trabalho é que estamos em espaços diferentes, mas não temos a limitação espaço-tempo e todos vocês estão nessa mesma tela. Todos se clicarem aí, eu queria por ordem que o Cláudio desse um clique lá na nossa tela. Então, veja que você já está participando, já está compartilhando conosco o aplicativo. Fláudio, por favor, dê um clique na nossa tela.

Adelmir: Excelente! Gerardo? Gerardo, por favor, faça alguma ação sobre o triângulo?

Gerardo: Alguma ação sobre o triângulo professor?

Adelmir: Para que possamos verificar se realmente você está compartilhando a tela conosco.

Adelmir: Perfeito! Obrigado Gerardo. Silvio, por favor, clique na nossa tela aí, clique sobre o triângulo.

Adelmir: Perfeito Silvio, muito obrigado.

Então todos perceberam que nós estamos realmente compartilhando, estamos usando o mesmo aplicativo. Então, a qualquer momento do nosso curso, podemos fazer intervenção nessa tela. Quando você quiser questionar, quiser discutir, apontar uma reta... a qualquer hora, você pode fazer isso, tá? Então vamos iniciar com uma rápida exposição sobre GeoGebra. Como nós falamos inicialmente, o GeoGebra é um software de Geometria Dinâmica. A Geometria Dinâmica se caracteriza por podermos deformar figuras, elastecer, ampliar, reduzir e isso é uma vantagem muito grande sobre o papel e o lápis porque, com pequenos movimentos, podemos testar uma infinidade de situações, e a Matemática é basicamente uma ciência de teste de situações. Então nós vamos começar e eu queria a atenção de vocês para o seguinte: o ***software*** *é bastante intuitivo. Quando do convite aos senhores, a intenção era de ter pessoas já iniciadas em informática para que não perdêssemos tempo com as etapas de manuseio tanto do* ***hardware*** *quanto do* ***software****.*

Como já havia acontecido na aula de teste, o momento de exposição das ferramentas do GeoGebra ficou muito centrado na figura do facilitador. Não tive como evitar este acontecimento no período inicial. Como se tratava de um aplicativo novo para eles, tive que percorrer todas as *janelas* e *cortinas*, mostrando o que poderiam obter em cada uma. Empregando a linguagem operacional da informática, posso dizer que se tornou quase um treinamento, uma formação. Tive como aliados, para evitar a monotonia e a desmotivação, a diversidade e a alternância dos cenários expostos e o próprio ambiente pedagógico criado, pelo que trazia de novo e inusitado.

> *Então lá em cima existem várias janelas que ao clicarmos vão aparecer algumas cortinas... Na primeira cortina nós temos a seta que serve para indicar, marcar, assinalar os objetos e deslocar os objetos com mouse fixado. Você desloca os objetos, no mesmo, numa mesma cortina nós temos: girar em torno de um ponto, você tem um objeto e quer girar em torno de um ponto, ai você vai usar a mesma cortina. Gravar para planilha de cálculos... o* ***software*** *tem a funcionalidade de uma planilha em que nós poderemos gravar as informações nela, no momento ela não será utilizada. Na segunda cortina, nós temos as ferramentas pra marcar ponto; quando você marca o ponto, pode nomeá-lo. O nome de um ponto vocês lembram, é, geralmente, uma letra maiúscula. Nesta cortina também quando eu tenho duas curvas eu posso marcar a sua interseção e posso diretamente, dados dois pontos, marcar o ponto médio entre eles. Então se eu tenho este ponto e este ponto for na segunda cortina e pedir o ponto médio, informando quais são os dois pontos que eu quero o médio, ele vai surgir lá no meio automaticamente. Em seguida, temos reta definida por dois pontos, se você quer fazer uma reta você marca dois pontos e é só usar a ferramenta, por exemplo, eu posso com esses dois pontos fazer uma reta e ela está definida, então essa vai ser a facilidade que nós teremos pra desenhar uma reta. No mesmo menu, nós podemos, ao invés de uma reta, fazer um segmento e a diferença que no segmento nós teremos as duas extremidades definidas, as duas extremidades fornecidas. Eu vou lá então, posso pegar um ponto, um outro ponto... marquei dois pontos. Pra fazer um segmento é suficiente que eu clique nessas extremidades que eu tinha determinado e veja que é diferente de uma reta. Ainda nessa posição nós podemos fazer um segmento com comprimento fi-*

xo, isso quer dizer o quê? Considere um segmento de 10 cm... você determina a distância, ao clicar nesta ferramenta ele vai pedir o comprimento que você quer e daí ele já faz esse segmento. Temos ainda vetor definido por dois pontos e vetor por um ponto, nós não... o nosso curso não chega ao conteúdo de vetores. Pra fazer qualquer curso de geometria, nós temos que fazer um corte, escolher, definir o que nós vamos estudar, não necessariamente nós utilizaremos todas as ferramentas do software, porque algumas delas são para aplicações que fogem ao escopo desse curso. Em seguida, nós podemos desenhar retas perpendiculares, paralelas, mediatrizes, bissetrizes, tangentes. Em seguida, nós temos os polígonos... eu posso desenhar triângulos, quadrados, pentágonos e posso desenhar polígonos regulares. Polígonos regulares são aqueles que têm os lados iguais e os ângulos iguais. Aqui as ferramentas circulares, eu posso fazer um círculo definido pelo centro do triângulo dos seus pontos, então eu venho aqui, defino o centro, e digo onde eu quero o círculo. Pra deslocar eu vou na primeira janela e posso mexer o que eu quiser. Então para desenhar um círculo, marca o centro, com o outro ponto... eu fechei o círculo. As ferramentas do Windows são todas aplicáveis como "CTRL C", "CTRL V", como "CTRL Z", eu apenas voltei aqui. Eu posso fazer um círculo tendo o centro e o raio, que é diferente de um centro e um ponto. Centro e um raio eu vou marcar o centro e ele vai me perguntar quanto é o tamanho do raio, e aí eu vou botar o número, vou botar a unidade que eu quero e ele vai e marca, vai desenhar esse círculo. Eu tenho também o círculo definido por três pontos, arcos, setores. Mas uma ferramenta importantíssima para nós é o compasso. A utilização do compasso é a seguinte: para que eu use o compasso eu preciso de dois elementos, primeiro eu preciso dizer o tamanho do arco, o tamanho da abertura do nosso compasso. Pra isso eu preciso de um segmento ou então dois pontos, porque quando eu tenho dois pontos não preciso nem traçar. Você sabe que aquilo representa um segmento. Então veja só... se eu faço agora um segmento eu estou apto a usar a ferramenta compasso, clicando lá em compasso. Na hora que eu clico no segmento veja que ele me dá esta medida do segmento, como sendo o raio que o compasso vai fazer... é a abertura do compasso. Olha como é legal, ele me dá a abertura do compasso *e eu levo essa distância que tinha ali, para onde eu quiser, por exemplo, eu quero trazer para cá, o meu compasso transferiu aquela distância, que distância é aquela? É o tamanho do raio dessa circunferência. Por exemplo, olha que coisa legal, se eu tenho aqui um triângulo e eu quero trazer exatamente o comprimento deste lado do triângulo, deste lado do triângulo, eu quero trazer pra sobre esta reta. Qual é a ferramenta que eu devo usar? O compasso. Vou no compasso, a distância que eu quero transferir é esta, ele já me deu a medida e eu trago pra exatamente sobre a reta, é assim que eu transfiro uma distância usando o compasso. Então, para usar o compasso, nós precisamos primeiro de um segmento, esse segmento vai me dar exatamente a distância a ser transferida. Quando eu clico na outra posição, a distância que foi transferida é o raio da circunferência que foi desenhada. Aqui nós temos elipse, hipérbole, parábola e cônica, em nenhum momento as utilizaremos no curso. A ferramenta seguinte tem uma funcionalidade excelente, porque ela nos dá, ela mede realmente, os ângulos, as distâncias, os comprimentos. Então veja só, se eu quiser saber, por exemplo, qual é o raio desta circunferência basta que eu faça a medida aqui olha, ele vai me dizer, ele me deu que o perímetro, quando eu cliquei sob a circunferência, ele me deu que o perímetro da circunferência, o comprimento da circunferência é 7,4. Se eu quiser a medida desse segmento, ele me diz que é 0,87. Ele dá a medida exatamente. Essa é uma coisa maravilhosa para essa nossa visão mundana de homem moderno do século XXI. Lembrem-se de que os gregos não usavam medidas, as construções deles eram ideais, eram platônicas, então nas nossas construções nós também não vamos medir.*

Além disso, nós temos ferramentas de ampliar, refletir que serão muito pouco usadas, inserir texto, imagem e uma coisa muito importante: na penúltima cortina, relação entre dois objetos. Observe o seguinte: se eu tenho, eu cliquei no círculo e na reta e ele me informou que a reta intercepta o círculo duas vezes. Quando medir segmento, ele vai me dizer se os segmentos têm os mesmos comprimentos. Quando eu pegar duas retas, ele vai me informar se são perpendiculares, se são paralelas. Então isso que nós encontramos é uma funcionalidade excelente da penúltima cortina. E a última ferramenta é para ampliar, reduzir, desenhar, copiar, apagar objetos, tá?

Então isso posto, vou selecionar todas as figuras, seleciono tudo com "C-TRL A", vou apagar e a nossa tela tá livre. Como nós combinamos no início, vocês devem abrir uma versão do GeoGebra, para que vocês façam seus estudos, para que seja seu rascunho, para que seja seu caderno de borrão. Todo matemático precisa ter borrão. Então eu queria que vocês abrissem o GeoGebra e em cinco minutos eu queria que vocês percorressem as ferramentas, clicassem e ficassem à vontade para pesquisar todo o software e tentar descobrir as suas funcionalidades. Então fiquem à vontade e a gente vai poder ter cerca de cinco minutos pra que vocês testem sua curiosidade, se divirtam à vontade e à medida que forem surgindo dúvidas vocês nos perguntam.

Temos que nos disciplinar para as discussões das nossas ideias matemáticas, por isso a gente pediu que você abrisse uma outra versão do GeoGebra, para que você pudesse trabalhar tranquilo. Quando você tiver com uma ideia que você pretende desenvolver. Na hora que quiser discutir essa ideia, vem para a nossa tela pública. Ok? Estou vendo que já mexeram bastante, tô vendo que alguns já estão parecendo o próprio Pitágoras, então vamos começar pessoal.

A primeira situação prática eu gostaria que vocês observassem a situação que nós vamos propor.

Ao propiciar esse momento de ambientação, quando os sujeitos exploravam o *software*, se ambientavam com os dispositivos tecnológicos e esquadrinhavam as propriedades geométricas que o GeoGebra tinha à sua disposição, estava atendendo às recomendações da Sequência Fedathi na etapa denominada **tomada de posição**, na qual os sujeitos entram em contato com a situação que devem enfrentar e começam a estabelecer suas atitudes pessoais diante da nova situação. Ainda seguindo as indicações da *Sequência*, chamo a atenção e explico detalhadamente o problema, o desafio com o qual iriam se defrontar.

Adelmir: Inicialmente, eu vou traçar um segmento... eu tracei um segmento que foi chamado de "a" ... e agora eu estou desenhando um ponto que vou colocar o nome de "C". Esse nome pode ser mudado a qualquer instante. O rótulo do ponto, clicando com o botão direito do mouse e clicando em renomear, eu chamarei então o ponto de "P" se quiser. Você pode sempre fazer essas *alternativas. O segmento se eu quiser renomear, o procedimento é o mesmo, o botão direito. Posso chamar o segmento de "s", então com o segmento "s", eu posso definir, nomear as extremidades, exibindo rótulo, os pontos que definem as extremidades desse segmento. Então a nossa situação é a seguinte: eu tenho o segmento "s" de extremidades "A" e "B" e tenho, fora desse segmento um ponto "P". O desafio é o seguinte: pelo ponto "P", traçar uma perpendicular ao segmento "AB". Pelo ponto "P" nós devemos traçar a perpendicular ao segmento "s". Fiquem à vontade, e mãos à obra. Se quiserem inicialmente fazer um esboço, um estudo, um rascunho, na sua versão, no seu borrão, fiquem à vontade, e aqueles que já estiverem prontos podem apresentar a solução na nossa lousa.*

Cláudio: Professor, eu posso tentar aqui?

Adelmir: Fique à vontade, Cláudio.

Cláudio: Estaria certa essa solução?

Tinham decorrido 29 segundos até que Cláudio apresentasse a solução. A exatidão na medida do tempo é possível porque todas as ações dos sujeitos ficaram gravadas no computador. Ele utilizou o que resolvi chamar de solução mecânica, isto é, usou uma das ferramentas do GeoGebra que apresenta automaticamente o resultado desejado. Este é apenas um sinal de como o Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios pode apressar a solução do problema.

Adelmir: Pessoal, o Cláudio desenhou uma perpendicular. Será que essa reta tá perpendicular mesmo? O que alguém poderia propor para a gente saber se essa reta é perpendicular?

Cláudio: Poderia verificar o ângulo dela?

Adelmir: Faça isso!

Cláudio: Pronto, professor!

37 segundos depois Cláudio concluiu a explicação dos seus procedimentos, levou mais tempo para descrever do que para executar.

Adelmir: Que vocês acham da solução do Cláudio?

Fláudio: Tá correta.

Adelmir: Tá correta. Sem dúvidas é uma reta perpendicular, mas lembrem-se: nós não somos micreiros, informáticos, esses meninos que sabem mexer, clicar, demasiadamente, em computadores, nós somos homens gregos, veja que nós *somos homens das ideias, nós estamos no século III antes de Cristo, depois nós vamos chegar aos computadores. Como nós estamos no ano III, no século III, antes de Cristo, eu lamento meu amigo Cláudio, mas eu vou rejeitar a sua solução, Eu quero mudar o desafio. Nós já vimos que o Cláudio foi rápido, perfeito, ele chegou lá e usou a ferramenta do software, ele usou traçar a perpendicular diretamente, vou recusar sua solução meu caro Cláudio, por enquanto. Eu vou voltar à solução anterior, eu quero traçar por traçar por "C" uma perpendicular ao segmento "a", mas eu só posso usar duas ferramentas do software: a reta que é a régua e o compasso. Nada, além disso, poderá ser usado. Enquanto vocês pensam, eu vou renomear aqui meu ponto "C".*

Então, olhe só, eu quero desenhar pelo ponto "P" uma perpendicular ao segmento "s", mas só posso usar as ferramentas reta e compasso.

Gerardo: Posso fazer um teste, professor?

Adelmir: Vamos fazer o teste, Gerardo. Se você pudesse a cada passo explicar a solução seria interessante.

Gerardo: Ok.

Gerardo: Primeiramente, eu vou gerar um círculo a partir do ponto "P". Só um instante, professor Adelmir.

Adelmir: Os que quiserem interferir fiquem à vontade.

Gerardo: Retomando aqui... eu fiz uma circunferência, certo? Partindo como centro o ponto "P", vou identificar aqui agora os pontos dos segmentos, agora vou marcar as intersecções entre a circunferência de centro "P" e o segmento "E". Marcados os pontos, vou renomeá-los agora, e utilizando a ferramenta compasso eu vou gerar um círculo de raio igual ao segmento "DE" que são os pontos de interseção. Gerei o meu primeiro círculo de centro "D", gerei meu segundo círculo de centro "E" e agora vou fazer uma interseção entre os dois. Vou marcar os pontos, e agora vou traçar uma reta passando pelos meus pontos de interseção "F" e "G". Só para mostrar que a reta é perpendicular, eu vou utilizar a próxima ferramenta. Demonstrando que a reta passa pelo ponto "P" e ela é perpendicular ao segmento "AB".

A solução de Gerardo levou 4 minutos e 54 segundos.

Adelmir: Ok Gerardo, excelente! Eu gostaria de saber dos colegas, se todos entenderam a solução que o Gerardo fez e se a gente é capaz de reproduzir, tá? Vamos recordar? Eu tenho uma ferramenta no software que pode repetir a construção. Esse foi todo o andamento da solução do Gerardo... se nós voltarmos (eu estou lá em protocolo de construção)... se nós voltarmos nós teremos toda a sua construção.

Inicialmente foram marcados os dois pontos do segmento, criou-se o segmento, o ponto "P", em seguida construiu-se uma circunferência... marcou-se a interseção, veja que fica em negrito o passo que está sendo dado, quando eu reconstruo a figura, então o ponto de interseção entre "C" e "S", a circunferência "C" e o segmento "S" que foram os pontos "D" e "E", em seguida ele traçou um círculo com centro em "D", depois outro círculo com centro em "E", determinou os pontos de interseção e ligou a reta. Toda vez que você quiser realizar uma solução, reprisar os passos dela, basta que vá lá em exibir, protocolo de construção e você tá pronto para repetir os passos. Silvio, você acompanhou direitinho a solução do Gerardo?

Silvio: Sim, senhor!

Adelmir: Cláudio, como é que foi?

Cláudio: Acompanhei também, tudo muito bem.

Adelmir: A minha pergunta é: a gente seria capaz de reproduzir a solução?

Cláudio: Creio que sim.

Adelmir: Então eu gostaria que cada um, ou melhor, que todos partissem novamente... e vamos pra o momento zero do nosso problema e eu gostaria que todos construíssem uma perpendicular.

Esta é a nossa situação, eu gostaria que todos tentassem construir a perpendicular e depois eu gostaria que a gente fizesse uma construção coletiva.

Fláudio: ...

Adelmir: Fláudio eu não lhe ouvi.

Fláudio: Não estou vendo o GeoGebra.

Adelmir: Ok Fláudio, ele vai tá, o Geogebra está na sua área de trabalho, tem um ícone aí do GeoGebra, ou não?

Fláudio: Não!

Adelmir: Então vamos, vamos abrir uma outra seção.

Adelmir: E Fláudio, você pode trabalhar no meu GeoGebra, sem nenhum problema.

Como Silvio era o menos participativo até o momento, de vez em quando precisava provocá-lo para acompanhar o andamento dos seus trabalhos.

Adelmir: E aí Silvio? Conseguiu?

Silvio: Tô tentando!

Adelmir: Qual foi o primeiro passo da solução do Gerardo?

Silvio: Fazer uma circunferência.

Adelmir: Então vamos adiante.

Cláudio: Esse foi o primeiro passo do Gerardo.

Adelmir: Foi traçar uma circunferência que interceptasse o segmento, foi isso?

Cláudio: Isso!

Adelmir: Segue adiante!

Cláudio: Como, professor?

Adelmir: Siga adiante!

Cláudio: Depois ele marcou os pontos de interseção.

Adelmir: Tô esperando.

Cláudio: Só um minuto, professor, eu tô tentando relembrar aqui a solução.

Adelmir: Não tente só relembrar, meu caro Cláudio, tente realmente absorver como foi feito, em que ele se baseou, porque se não a gente vai tentar um procedimento antigo que as pessoas adotavam que era só de decorar os passos...

Ao perceber na fala de Cláudio que ele queria simplesmente recordar os passos da construção, lembrei que esse era exatamente o comportamento induzido pelos métodos tradicionais, quando se pretendia que o aluno apenas reproduzisse o passo a passo que tinha sido receitado anteriormente.

Adelmir: Tá avançando, Fláudio?

Fláudio: Tá dando erro...

Adelmir: Que erro? Não tá conseguindo mais logar?

Cláudio: Não, tá errado.

Adelmir: Que foi que aconteceu aí, meu amigo Cláudio?

Cláudio: Eu tinha feito no meu GeoGebra e tinha dado certo, só que deu alguma coisa errada aqui... peraí que eu vou ver o que é.

Adelmir: Observe o que foi, eu vi!

Ressalto novamente que a intervenção mediadora era facilitada porque conseguíamos ver em tempo real os procedimentos de cada um dos sujeitos, destacando que a iniciativa de verificar o erro foi do próprio aluno.

Adelmir: Tá de volta, meu amigo Fláudio?

Fláudio: Tô.

Adelmir: Cláudio, quando você retorna, você vai bem mais rápido com o "crtl Z". Cláudio você vai mais rápido com o "crtl Z"

Cláudio: Porque eu tô tentando e não tá funcionando o comando de "crtl Z".

Adelmir: O seu comando "ctrl Z" não está funcionando?

Cláudio: Não!

Cláudio: Agora deu certo!

Silvio: Não tá reto!

Adelmir: E aí, Silvio? Oi Silvio, cadê você?

Silvio: Tô aqui!

Adelmir: E como é que vai a nossa perpendicular?

Adelmir: Quando aparece essa caixa de diálogo, Cláudio, é porque ele (o software) ficou em dúvida sobre o que você marcou, se foi o segmento ou se foi o ponto, então você clica em segmento se você não quiser voltar.

Cláudio estava tendo dificuldades com a utilização do *software*, ele não conseguia comandar corretamente os objetos sobre os quais a ação deveria ser aplicada. Isso acontecia, provavelmente, pelo pouco tempo de prática e com a rápida intervenção creio que tenha sido superado o problema.

Cláudio: Ok. Pronto, professor, eu acho que é isso aí!

Adelmir: Vocês viram a solução do Cláudio? Você acompanhou, Fláudio? Acompanhou Silvio?

Silvio: Sim Senhor!

Adelmir: A solução do Gerardo... nós temos alguns questionamentos a levantar, vamos tentar lembrar a solução do Gerardo, mas antes vamos apontar... eu vou voltar três passos pra que a gente analise a solução do Cláudio, pra que gente possa ver o que aconteceu. Ver se tudo que ele fez tá correto, ver se *tudo que ele fez era necessário, finalmente ele chegou a uma perpendicular, tá? Uma coisa maravilhosa em matemática pessoal, é que quando a gente termina uma solução, nós podemos depurar, nós podemos melhorar, nós podemos evitar passagens desnecessárias, nós podemos simplificar a solução. Então vamos voltar aqui nos passos do Cláudio, vamos tomar como base a construção.*

Cláudio: Fláudio, tá ouvindo a voz dele?

Adelmir: Desculpe, eu... a voz... eu me esqueci de clicar. Então essa é a situação inicial, eu tenho os dois pontos, tenho o ponto "P" e tenho o segmento. Então vamos ver o que que o nosso amigo Cláudio fez. Ele traçou um ponto embaixo dessa reta. O que você queria com isso Cláudio?

Cláudio: Construir a circunferência

Adelmir: O que que você queria?

Cláudio: Construir a circunferência em cima da reta

Adelmir: Pra construir a circunferência, pessoal, ele precisava desse ponto?

Gerardo: Não!

Adelmir: O ponto que está abaixo da reta?

Gerardo: Ele podia ter se utilizado do ponto "P".

Adelmir: Olha só, esse ponto que está lá embaixo ele não precisava, porque ele poderia usar a circunferência feita por um ponto, mas eu acho interessante a solução do Cláudio, Gerardo, porque ele usou a ferramenta compasso. Veja que ele tá usando a ferramenta compasso. Pra ele traçar a circunferência, ele precisou de um outro ponto pra construir o segmento... então ele usou a ferramenta compasso, o que tá muito legal . Até agora o Cláudio determinou um ponto, com isso ele criou um segmento, ele tem um raio, ele pode usar o compasso. Então veja só a ideia que era usar o compasso, na realidade não foi usada, porque a ferramenta que tá ressaltada é círculo com centro em "P" e raio, então para fazer uso dessa ferramenta ele não precisava, o compasso sim, teria sido mais interessante. Em seguida, ele determinou os dois pontos de interseção da circunferência com o segmento, logo depois, ele traçou um círculo com centro em "E" e raio "PE", "E" é este o ponto. Vou nomeá-lo. Então ele traçou um círculo com centro em "E" e *raio "PE". É necessário que o raio seja "PE"? O que você acha, Silvio, será que é necessário que o raio seja "PE"?*

Silvio: Pode ser!

Adelmir: Que pode ser nós já vimos. A nossa questão é a seguinte, e essa é a grande tragédia dos matemáticos: a gente quer sempre o caso geral. A minha pergunta é... ele traçou com círculo "PE", em seguida ele traçou outro círculo com o mesmo raio, e a minha pergunta é se é necessário que o raio seja este. Que que você acha, Fláudio, será que o raio é obrigado a ser esse?

Fláudio: Talvez.

Adelmir: Vamos testar, será um exercício pra nós... o raio pode ser qualquer. Basta que os círculos tenham o mesmo raio e que se interceptem. Não precisa ser nenhum dos segmentos. O Gerardo já tinha comentado na solução dele que ele ia fazer um círculo com raio "DE", não era necessário que fosse "DE", bastava que fosse igual e que se interceptassem. Depois foi determinada a interseção... determinadas as duas intersecções, o nosso amigo Cláudio cometeu um pequeno deslize, que foi na hora que ele foi traçar a reta, e na solução anterior já tava perfeita. A solução dele, ele chegou... Morreu na praia, igual ao Ferroviário. O que aconteceu, meu caro Cláudio, observe aí, Silvio, você chegou nesse ponto e você precisava agora fazer uma reta ligando o ponto "P" a outra interseção, você precisava ligar o ponto "P" ao ponto "I". Na realidade, o que você fez... observe o que você fez, você saiu de "P", traçou um outro ponto, só que, quando você marcou esse ponto esse é um ponto livre, você não tem nenhuma garantia sobre ele. Sobre o de baixo você tem, porque ele é interseção de duas figuras, então você fez a sua reta e foi só um acaso ter acertado da segunda vez. Da primeira não deu certo, porque você fez a sua reta, observe, ligando o ponto "P" ao novo ponto azul que você criou, enquanto que a construção correta seria... (você não precisa desse ponto) você poderia, observe... você não precisa do ponto azul, você já tem o ponto "P" e o ponto "I" e só eles podem lhe garantir que a reta é perpendicular, reta definida por dois pontos. Agora sim, eu garanto que é perpendicular.

Reitero o fato de que todos se debruçavam sobre a mesma figura onde os elementos eram apontados a cada instante com a seta do mouse. Por isso, era natural que nosso diálogo possuísse tantas reticências, frases inconclusas e silêncios que ocorriam enquanto os movimentos fluíam no monitor. No momento da situação específica de há pouco, a visão que se tinha da construção, reproduzida na Figura 17, exemplifica nosso modo de trabalho.

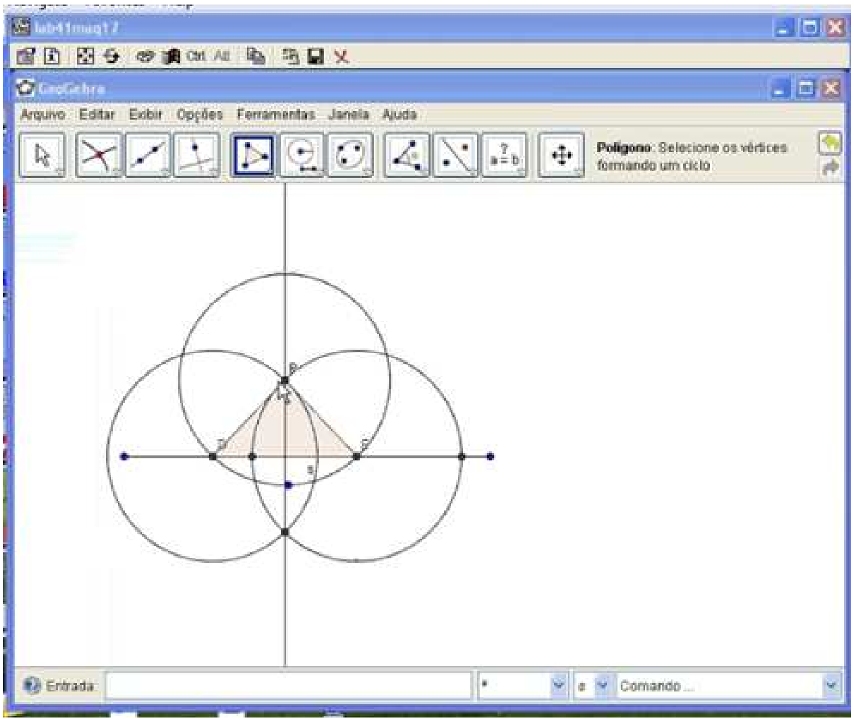


Figura 17: Interface reproduzindo a construção da perpendicular no *GeoGebra*.

Adelmir: E há um problema, viu, meu amigo Gerardo. Você fez uma afirmativa que foi a seguinte... você comparou dois objetos, nesta cortina, fez a relação entre os objetos e o computador disse que era perpendicular. Não é essa a nossa prova, a nossa prova é outra, a nossa prova é matemática e não informática. Observe que se eu faço o triângulo, observe que esse triângulo é um triângulo isósceles. O que é um triângulo isósceles?

Cláudio: Tem todos os lados iguais.

Adelmir: O triângulo isósceles tem todos os lados iguais, Fláudio?

Gerardo: Tem dois lados iguais.

Cláudio: Dois, isso.

Adelmir: O isósceles tem três ângulos iguais? A gente não tá fazendo confusão entre os nomes desses triângulos.

Gerardo: O triângulo isósceles, ele tem dois lados iguais, não professor?

Cláudio: Isso são dois lados.

Adelmir: Na realidade, o que tem três é o equilátero, tá? O isósceles; dois.

Adelmir: Observe que a distância "PE" é o raio do círculo, a distância "PD" também é raio do círculo. Ora, os dois círculos são iguais, a gente construiu com o mesmo raio. Se eles têm o mesmo raio... o raio é a medida em qualquer... em qualquer posição do círculo, então observe, que como os círculos têm o mesmo raio, eles são congruentes (não iguais) congruentes. Eu posso garantir que neste triângulo o lado "DP" é igual ao lado "PE", então é um triângulo isósceles. Se ele é um triângulo isósceles, ele tem dois lados iguais e dois ângulos da base iguais. Ora... observe que uma reta tem um ângulo de 180 graus, se esse é um triângulo isósceles, os dois triângulos quando ele fica dividido pela reta que o Cláudio traçou... nós formamos dois triangulozinhos. Esses dois triângulos têm os dois ângulos da base iguais porque o grande é isósceles. Se ele é isósceles, a altura cai no centro, então esses lados são iguais. Observe que os três lados dos dois triângulos são iguais, eles são dois triângulos congruentes, então essa medida... as medidas marcadas sobre a base são iguais, essa reta tá passando no centro e o ângulo é de 90 graus. Então a gente pode demonstrar isso só matematicamente sem o recurso computacional. Nós vamos parar por aqui. O que importa é que nós já sabemos construir uma perpendicular, o que acontece... o que vai acontecer daqui pra frente... nós já sabemos como os gregos construíam uma perpendicular . Todo problema que nós formos fazer daqui pra frente vai usar a perpendicular... só que eu não vou nunca mais ter esse trabalho, porque... porque eu vou usar a primeira solução do Cláudio, no comecinho da nossa aula. Eu vou usar a perpendicular do computador, então quando eu tiver um segmento, daqui pra frente, tiver um ponto... e por esse ponto quiser traçar uma perpendicular, esta vai ser a nossa solução.

Nós vamos levar exatamente esse tempo, nós vamos usar o recurso computacional, mas estamos usando de uma honestidade tão grande, eu estou usando para simplificar a minha vida, eu sei como é que constrói, eu sei qual é a explicação.

Na próxima segunda feira, nós vamos construir a paralela, a bissetriz e a mediatriz e vamos resolver alguns problemas. Nós não teremos mais a perda de tempo que tivemos hoje, pra instalação, testes, porque eu gostaria que todas as máquinas fossem preservadas como estão e nós nos encontraría-

mos então na próxima segunda feira. Qual foi o horário que ficou combinado?

Gerardo: O horário não ficou definido não, professor. A gente aguardava que o senhor dissesse o melhor horário.

Adelmir: Que tal de quatro às seis? De quatro às seis tá legal pra todo mundo?

Gerardo: Por mim, tá ok!

Adelmir: Então, pessoal, nós vamos começar religiosamente as quatro e nós não poderemos mais perder tempo com instalação, testes e novas experiências. Nós vamos trabalhar nosso curso realmente e tenho certeza... e acho que já começaram a visualizar tudo...

Meu medo é que vocês saiam do curso de Sistema de Informação e amanhã de manhã já queiram... Todo mundo queira ser geômetra, todo mundo já ser matemático.

Muito obrigado a todos vocês e um bom fim de semana.

Análise *a posteriori*

Na análise a *posteriori*, a atividade do pesquisador se consolida quando a partir das análises dos fenômenos efetivamente observados na experimentação, as hipóteses levantadas na etapa da análise a *priori* são confrontadas com o que realmente pode ser verificado, e, então, são legitimadas ou contestadas. Para isso, nenhum detalhe pode ser olvidado. No meu trabalho, tive a enorme vantagem de poder repetir todos os passos, quantas vezes necessitei, sustentado pelo sofisticado sistema de gravações utilizado, salvando os arquivos no próprio computador em que operava.

No aspecto organizacional, começamos com problemas, porque a aula iniciou com 45 minutos de atraso. O contratempo ocorreu porque tivemos que mudar uma das salas reservadas para o curso, o que implicou adaptação dos equipamentos e instalação de *softwares*. Além do incomodo que a situação acarretou, ela jogou por terra uma de minhas hipóteses previstas para esse encontro.

(1) O ambiente pedagógico montado funcionará perfeitamente após as adaptações feitas na aula teste.

Não foi o que se verificou.

Arrostei esse fato como relevante, porque o projeto, além da vertente do ensino, possui uma forte componente no ângulo tecnológico. Após a sessão, em contato com a Instituição que nos abrigava, enfatizei que a agenda não poderia ser mudada e que os espaços, pelas características particulares que precisavam apresentar, não poderiam ser alterados. Obtive a garantia de que os fatos não se repetiriam e aproveitei para refazer os testes com os equipamentos e *softwares* que seriam empregados no restante da programação.

Superadas as dificuldades operacionais, iniciei o experimento e como havia previsto não houve maiores entraves para a usabilidade do TeleMeios. No momento do compartilhamento, é necessário ativá-lo com um clique sobre o botão específico. Os sujeitos não haviam tomado essa iniciativa, mas com minha intervenção em pouquíssimo tempo estavam conectados em tempo real. Assim fica comprovada minha conjectura:

> (2) Os alunos, por possuírem experiência em informática, não terão problemas na utilização do TeleMeios.

Desse modo, posso assinalar que pessoas com alguma prática em ambientes telemáticos têm condições de utilizar o ambiente TeleMeios sem a necessidade de investimento de muito tempo em processos de treinamento.

Avançando para a exploração do GeoGebra, um fato não previsto ocorreu. Alunos passaram a demonstrar dificuldades maiores do que eu esperava e a desenvoltura suposta não se confirmou, provavelmente porque os objetos mostrados a cada ferramenta acionada saíam da esfera da informática para se ancorar na da Geometria. Posso inferir que ficaram assustados com os elementos ofertados nos *menus*. É aceitável o fato de que, ao abrir uma janela onde surjam expressões como vetor, cônica, hipérbole, entre outras, o sujeito com poucos conhecimentos de Matemática, como eram os nossos, se "assuste" um pouco. Assim, a afirmativa:

> (3) Os alunos, por possuírem experiência em informática, não terão problemas relativos ao manuseio o GeoGebra;

Não pode ser validada. É recomendável, pelo que observei, que o professor tenha o cuidado de evidenciar quais componentes do aplicativo serão efetivamente utilizados para que os alunos não se atemorizem e adotem uma posição de rejeição diante da empreitada.

Apesar de já haverem concluído a Educação Básica, os alunos se confundiram na hora da verbalização de definições e conceitos bastante elementares. Por exemplo, chegaram a afirmar que um triângulo isósceles possui os três lados iguais, mas essas impropriedades não foram fator limitante na compreensão das situações matemáticas abordadas, logo, posso concluir que para alunos com conhecimentos básicos de Matemática a afirmação:

(5) Os sujeitos possuem os prerrequisitos necessários para a construção da perpendicular com régua e compasso

é verdadeira.

O ambiente pedagógico montado, concretamente, favoreceu a interação dos alunos e a mediação do professor, mesmo tendo como ponto desfavorável o fato de ser o primeiro encontro. Creio, porém, que as observações colhidas não são suficientes para uma comparação com as aulas convencionais. Por isso adiarei a conclusão sobre as hipóteses

(7) A interação dos sujeitos será maior do que se eles estivessem em uma sala de aula convencional.

(8) A função mediadora do professor será mais efetiva do que seria em uma sala de aula convencional,

que continuarão em aberto para as aulas seguintes das quais continuarão sendo parte integrante nas análises a *priori*.

Quanto à partilha do tempo didático, devo dizer que, ao final da aula, todas as fases previstas foram cumpridas, mas não dentro das subdivisões que eu havia pensado. O tempo efetivo de aula foi de 1 hora e 16 minutos. Para a construção da perpendicular, discussão e prova foram 47 minutos e 31 segundos. Sobre

(6) A distribuição do tempo didático entre as etapas de ambientação no ambiente, exploração dos *softwares* e conteúdo geométrico é adequada,

posso garantir é que, para os sujeitos com o perfil selecionado, é correto dizer que uma aula de duas horas é suficiente para apresentar o ambiente TeleMeios, explorar o GeoGebra e construir a perpendicular usando o Ambiente Virtual de Ensino – TeleMeios com as características daquele que montei.

Cláudio foi o agente catalisador para a comprovação total da hipótese:

(4) Para resolução da situação-problema proposta os alunos inicialmente tentarão uma solução mecânica via *software*.

Como relatado, ele, imediatamente, usou a ferramenta disponibilizada pelo *software*. Acredito que este foi um dos momentos mais profícuos da aula porque possibilitou abrir as discussões sobre a diferenciação entre construções mecânicas e a verdadeira construção com régua e compasso. Ao rejeitar sua solução, não o fiz apenas dizendo que estava errada, ao contrário, ela foi valorizada e foi o elemento provocador de todos os direcionamentos seguintes. Saliento que esse posicionamento foi o escolhido por privilegiar diversos princípios da Sequência Fedathi como valorizar o erro e trabalhar com contra-exemplos.

Finalmente,

(9) Ao final da aula todos os alunos serão capazes de construir a perpendicular a uma reta passando por um ponto dado,

que era a mais importante de minhas conjecturas, mediante a solução de Gerardo, foi comprovada totalmente, o que nos motivou ainda mais para a realização do segundo encontro.

Adicionalmente, depois da aula, pedimos a cada aluno que preenchesse um pequeno questionário onde apontassem os pontos positivos e negativos da experiência. Eles se encontram na íntegra no Apêndice 2. Na leitura desses instrumentos, é possível observar que:

- Cláudio teve dificuldades por não recordar de conceitos e normas de Geometria, ser o responsável pela gravação do som e crer que a configuração dos equipamentos era limitada. Em contrapartida, afirmou ser fácil a comunicação, e que se sentia à vontade para perguntar através do computador.
- Fláudio teve problemas com o uso do *software* e com conceitos geométricos e creditou como positivo ser apresentado ao novo cenário educativo.
- Silvio reclamou que em alguns momentos não ouviu o que outros alunos falavam e imputou a falha às condições do computador que utilizava. Não se lembrava, como seus colegas, do conteúdo matemático. Achou a metodologia diferente e asseverou que se sentiu mais motivado para aprender Geometria.
- Gerardo afirmou que não teve nenhum problema com o aparato computacional, suas complicações foram relativas à explicação dos procedimentos geométricos adotados. Classificou o experimento como interessante e envolvente.

Finda a etapa inicial, passemos para os preparativos da segunda aula. Afirmo que as análises teóricas feitas quando da concepção da engenharia foram alteradas com base em todos os dados coletados na primeira aula.

5.1.3.2 Aula 2

Análise Preliminar

Espero, após as providências tomadas, não passar pelos embaraços que tive na primeira aula quanto ao uso do espaço e à operacionalidade do aparato tecnológico. Os alunos já possuirão maior perícia no *manuseio* das ferramentas, tanto do TeleMeios quanto do GeoGebra, o que nos permitirá avançar mais rapidamente nos conteúdos matemáticos do curso. Assim, creio que o tempo previsto para a sessão, duas horas, será suficiente para um momento inicial de sedimentação das ideias discutidas no encontro anterior; permitir o avanço para a construção do ponto médio de um segmento, da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, da reta paralela a uma reta dada passando por um determinado ponto; e cabendo ainda a resolução de algumas aplicações dos conteúdos apreendidos.

Para a construção do ponto médio, da mediatriz e da bissetriz, tanto os fundamentos matemáticos quanto os instrumentos necessários já foram contemplados na aula passada e, dessa forma, é de se esperar que os alunos apresentem propostas de solução rapidamente.

A maior dificuldade ocorrerá, provavelmente, quando da construção da paralela. A situação a ser enfrentada será posta do seguinte modo: ***dados uma reta e um ponto fora dela construir a paralela à reta passando pelo ponto.*** A solução que espero, já consagrada e sugerida por Wagner (1993), não é tão imediata quanto as que já foram realizadas e envolve um raciocínio mais sofisticado. Desse modo, acredito que será necessário fazer a exposição do modelo, Figura 18, e à medida que a construção for sendo elaborada facilitarei o envolvimento dos estudantes.

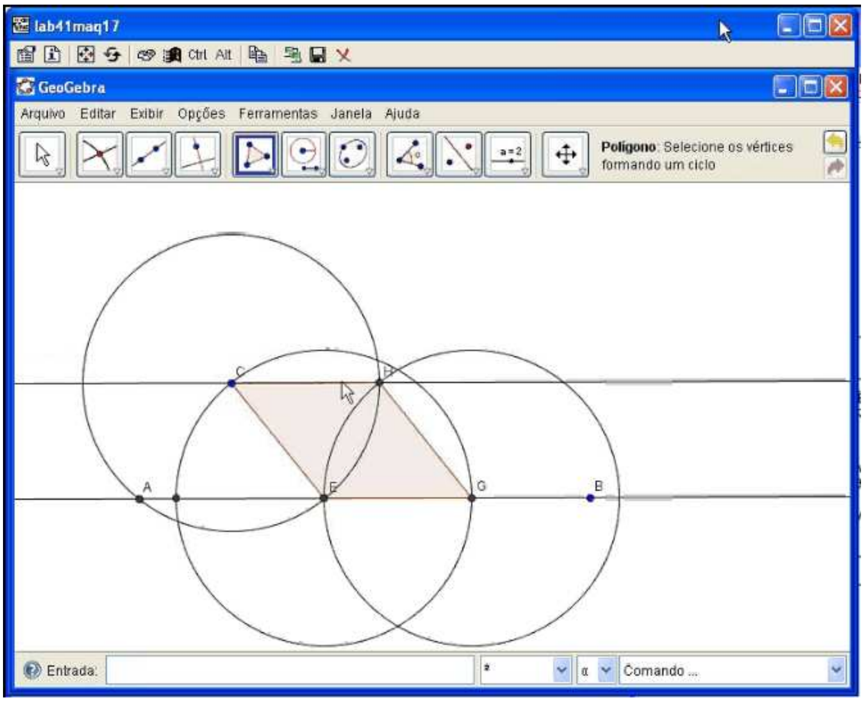


Figura 18: A construção da paralela utilizando o *GeoGebra*

Nesse instante, sei que corro o risco de me aproximar do método tradicional de exposição. Mesmo acreditando, porém, que os alunos devem cultivar uma cultura construtivista na aquisição de conhecimentos, em determinados momentos, seria ilusório esperar que um problema que levou muito tempo para encontrar uma solução satisfatória pela comunidade matemática seja resolvido por aprendizes em poucos minutos numa sala de aula. Alguns conteúdos matemáticos, pelo seu nível de complexidade, necessitam ser apresentados aos alunos, porque, de outra forma, se perderia muito tempo em busca de uma ideia luminosa, correndo-se o grande perigo de nenhum progresso ser alcançado.

Análise *a priori*

Inicialmente, procederei à *tomada de posição*, obedecendo a Sequência Fedathi, comentarei informalmente a aula anterior, deixando os alunos descontraídos; retomarei brevemente a construção da perpendicular e darei continuidade à execução do plano para curso, lançando o primeiro questionamento do dia:

Dado um segmento AB determinar o seu ponto médio.

A determinação do ponto médio não oferece grandes dificuldades e o procedimento para sua obtenção em muito se assemelha ao empregado para a construção da perpendicular, Figura 19. É suficiente usar o compasso com abertura com a mesma medida do comprimento do segmento, com centro nas extremidades do segmento, traçar duas circunferências e, pelas intercessões das circunferências construir uma reta e, na interseção desta com o segmento inicial, está o ponto médio.

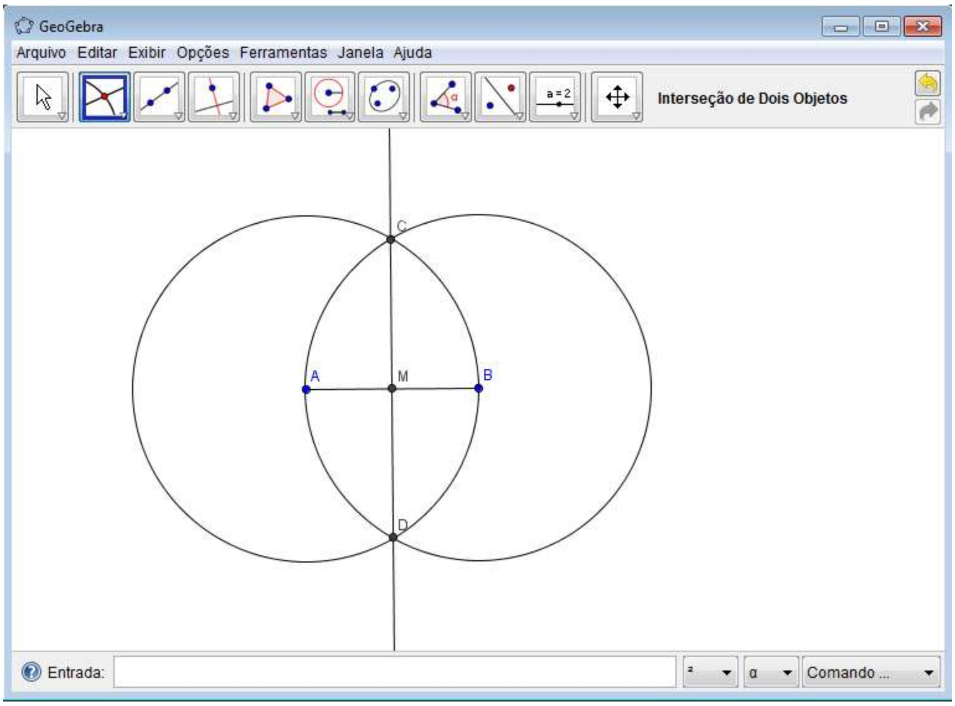


Figura 19: Determinação do ponto médio de um segmento usando o *GeoGebra*.

Esta solução deverá ser apresentada sem muita demora pelos alunos.

Concluída essa fase, será proposto, então, o segundo problema:

Construir a mediatriz de segmento AB dado.

Essa questão já foi resolvida no problema anterior. A mediatriz é a reta que divide o segmento ao meio, é a perpendicular que passa pelo ponto médio Só lançarei a propositura para firmar definitivamente a caracterização da mediatriz, o que ainda não foi feito.

Para não ficar apegado apenas às construções elementares adicionando novos conteúdos, e considerando os conhecimentos que o grupo já adquiriu, lançarei uma questão inicial retirada do livro texto:

Construir um quadrado, conhecendo sua diagonal.

Creio que não haverá embaraços para a obtenção de soluções que deverão surgir facilmente. Em seguida, apresentarei uma situação-problema mais instigante:

Construir um quadrado, dados em posição os pontos médios de dois lados adjacentes.

Mesmo com um espaço dedicado à *maturação* (tempo dedicado à discussão e entendimento do que se pede) alguns dos alunos poderão sentir, em princípio, dificuldades na compreensão da proposta, e apresentarão soluções em desacordo com enunciado. A Figura 20 exibe uma das respostas para o que está sendo solicitado.

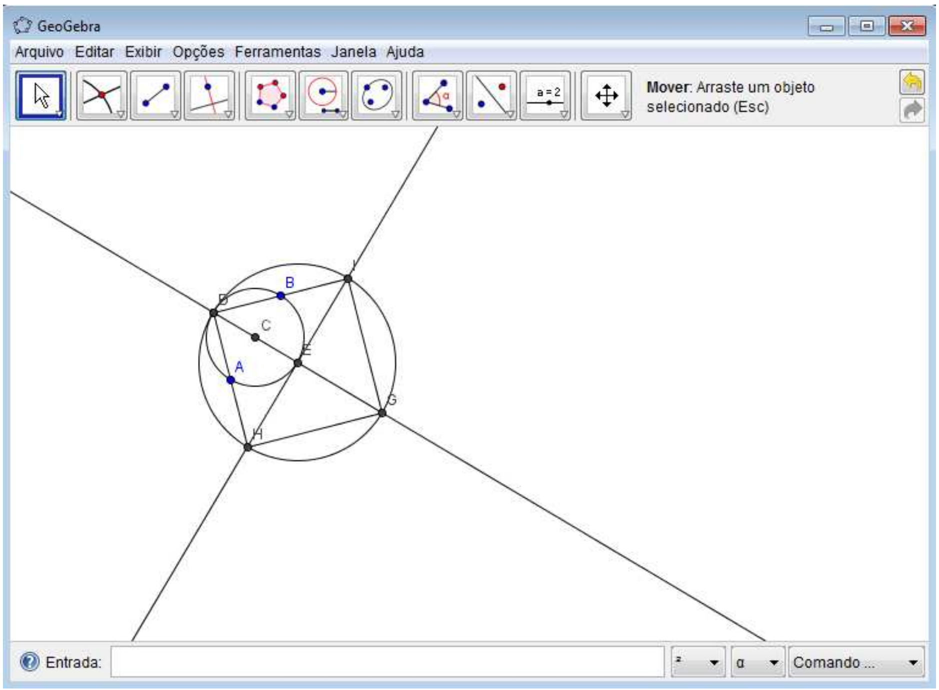


Figura 20: Construção do quadrado, dados os pontos médios de dois lados adjacentes.

Finalmente é possível chegar à construção da reta paralela, para a qual não aceitarei uma solução mecânica com o traçado no *software* apenas de retas perpendiculares. Essa solução deve ser rejeitada porque historicamente não se pode garantir que a construção da perpendicular é anterior à da paralela; assim, vigorará a combinação inicial, somente emprego de régua e compasso. Não é provável que os alunos apresentem a solução esperada citada nas análises preliminares.

Tendo em mente todas as considerações até aqui levantadas, suscitei as hipóteses a serem verificadas a partir da segunda experimentação. Como na análise *a posteriori* da Aula 1 não me achei em condições de decidir sobre as hipóteses (7) e (8), elas continuarão submetidas a observações, compondo a relação de conjecturas para a Aula 2, que enunciamos a seguir.

(1) A interação dos sujeitos será maior do que se eles estivessem em uma sala de aula convencional.

(2) A função mediadora do professor será mais efetiva do que seria em uma sala de aula convencional.

(3) Os alunos determinarão rapidamente o ponto médio de um segmento.

(4) Os alunos perceberão que a construção da mediatriz já estava efetivada quando da determinação do ponto médio.

(5) Os estudantes não serão capazes de construir a reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto determinado.

(6) Os alunos apresentarão dificuldades para o entendimento das situações-problema.

(7) O emprego do GeoGebra como material de desenho em um curso de Construções Geométricas é mais vantajoso do que o da régua e do compasso.

(8) O ambiente oferecerá as condições para que o professor adote as atitudes recomendadas pela Sequência Fedathi.

Experimentação

A Aula 2 aconteceu no dia 21 de março e teve seu início no horário marcado, 16h, com a presença de todos os sujeitos. A distribuição do grupo foi a mesma da sessão anterior e não ocorreu nenhum empecilho de ordem técnica, de sorte que foi possível passar imediatamente para as atividades didáticas propriamente ditas. Todos os acontecimentos podem ser acompanhados detalhadamente seguindo o relato abaixo.

Adelmir: Com a análise que eu fiz do nosso primeiro encontro, eu fiquei tremendamente satisfeito, porque, pra ser nosso primeiro encontro e com todas as dificuldades que nós tivemos, de mudança de sala, e ter que instalar ainda alguns equipamentos, foi um resultado muito proveitoso. Nós vamos caminhar agora centrados no nosso foco que são as construções geométricas, e a gente agradece as observações que a Diana for anotando para a nossa pesquisa. No final do encontro, eu vou passar uma pequena ficha para que vocês preencham com as opiniões de vocês, com as observações que vocês forem trazendo, então tudo que vocês notarem de dificuldades, de pontos positivos, do que que melhorou da aula passada pra cá seria importante que vocês anotassem.

Diana, bolsista de pesquisa do Laboratório Multimeios, foi voluntária para fazer observações e anotações no segundo dia o curso.

Eu queria começar voltando um pouco o que nós fizemos na semana passada. Nós combinamos inicialmente que nós... o nosso trabalho, construções geométricas, se baseia na ideia grega de que só é construção geométrica aquilo que pode ser feito com régua e compasso. No nosso primeiro encon-

tro nós aprendemos a construir a perpendicular. Foi uma construção coletiva, todos nós trabalhamos, tivemos idas e vindas, o que é normal em todo processo de aprendizagem matemática. Então nós vamos... eu queria, no primeiro momento, combinar com vocês que agora que nós conhecemos mais propriedades do software, nós vamos fazer as nossas construções usando régua e compasso, lembrando a vocês que a régua pra nós, ela é representada por uma reta definida por dois de seus pontos e que o compasso... toda vez pra trabalhar com o compasso eu preciso definir uma distância, que vai ser o raio da circunferência. Essa distância eu posso pegar quaisquer dois pontos para que seja esse raio, eu posso fazer um segmento, mas não necessariamente preciso ligar os dois pontos, porque na hora que eu tiver dois pontos, olha como é interessante... esses dois pontos que vão definir a abertura do compasso, imagine um compasso fisicamente, é como se você tivesse as duas pontas do compasso. As duas pontas do compasso significam esses dois pontos que vão ser a distância da abertura que nós vamos usar. Esses dois pontos significam a distância da abertura. Então, no nosso encontro passado, nós tínhamos um ponto e por esse ponto nós traçamos uma perpendicular. Então veja só: a nossa situação era aproximadamente a que está exposta agora, eu tenho uma reta que passa pelos pontos "A" e "B", tenho um ponto "E" e por ele eu quero traçar uma perpendicular e nós só podemos usar régua e compasso. A construção que nós fizemos foi a seguinte: pelo ponto "E" traçamos uma circunferência, usamos pra isso o compasso, traçamos uma circunferência que tinha centro em "E". Obviamente que essa circunferência intercepta a reta em dois pontos. Esses pontos de interseção... podemos marcar com interseção entre dois objetos... então a circunferência interceptou a reta nos pontos "F" e "G", pra exibir o rótulo, vocês estão lembrados, basta que nós cliquemos com o botão direito do mouse. A partir dos pontos "F" e "G", com a nossa ferramenta compasso, vamos traçar uma circunferência, primeiro centrada em "F" e em seguida com o mesmo raio, não podemos nos esquecer. Com o mesmo raio nós traçamos uma outra circunferência que agora tem o centro em "G". As duas circunferências traçadas se interceptam. Assinalando esses pontos de interseção, vamos encontrar o ponto "I" e o ponto "E". Se *agora eu traço uma reta pelos dois pontos, eu tenho a perpendicular pelo ponto "E," a reta que passa por "A" e "B". Essa foi a construção que nós fizemos na aula passada. Vamos avançar um pouco, e com tudo isso que nós aprendemos, para que a gente possa começar a tarde de maneira bem participativa, nós vamos propor uma situação que é uma decorrência imediata da que enfrentamos até agora.*

Assinalo que até este ponto do segundo encontro estava seguindo, fielmente, as indicações da primeira fase da Sequência Fedathi, quando, na *tomada de posição*, ela me diz que inicialmente o professor deve certificar-se de que todos os alunos dominam uma base comum de conhecimentos, possuem todos os prerrequisitos, com amparo na qual podem se debruçar sobre um novo desafio. Essa recomendação não se destina a aulas virtuais apenas, ela é um aconselhamento precioso para qualquer situação de ensino, pois garante que as atividades não serão interrompidas por questões já abordadas e que os alunos não ficarão excluídos do andamento da aula por falta de informações prévias. No caso de minha aula, em apenas 5 minutos e 51 segundos, foi revisado o conteúdo mais relevante da sessão anterior e preparado o terreno para o lançamento do novo desafio, o que é um investimento de tempo bastante curto diante dos benefícios que com certeza serão obtidos. Saliento que não chamo a atenção dos alunos afirmando que se vai fazer uma revisão, pois a experiência diz que isso, geralmente, produz um efeito desmotivador. Reconstruímos a perpendicular em uma conversa quase que informal, como se fosse um convite, um chamado de boas-vindas.

Adelmir: Observe que a nossa situação agora é a seguinte: vou pegar um segmento, e o que caracteriza um segmento de reta é que as suas duas extremidades são conhecidas. Então estou tomando o segmento de reta "AB", vou tomar um ponto, antes de tomar o ponto, dado esse segmento "AB", eu quero encontrar o ponto médio desse segmento. O desafio está lançado e podem usar... abrir uma versão do GeoGebra na sua máquina, usando o mesmo princípio da aula passada, que nós trabalhamos com o nosso borrão, e quando tiverem prontos me avisem, eu quero determinar o ponto médio desse segmento...

O segmento pode ser qualquer, até porque, como nós estamos trabalhando com geometria dinâmica, você pode deformar esse segmento, então você não precisa se preocupar com o tamanho dele porque, quando nós construímos o ponto médio de um segmento, nós estamos construindo de uma ma-

neira matemática tal que nós não construímos desse segmento específico, mas vamos construir de qualquer segmento. O processo terá que ser o mesmo.

Nesse momento, pode ser percebida a função mediadora do professor. Como os alunos tinham que praticar no borrão, verifiquei que alguns estavam com dificuldades, tentando representar exatamente o mesmo segmento que havia sido traçado na proposta da questão. Não podia deixar escapar esta oportunidade para afirmar que os processos que estávamos empregando independiam do objeto particular sobre o qual se operava, mas que deveriam ser válidos para todos os entes da mesma categoria.

Fláudio: Somente a régua e o compasso, não é, professor Adelmir?

Adelmir: Régua e o compasso. Se tiver outra solução, Fláudio, e quiser apresentar, você pode apresentar. Vamos discutir depois como transformar em régua e compasso, ok? Quer apresentar?

Cláudio: Vai apresentar agora, Fláudio?

Fláudio: Falta um detalhezinho aqui.

Cláudio: Eu posso expor a minha, professor, por enquanto?

Adelmir: Pode fazer, à vontade.

Cláudio: Tudo bem, eu vou tentar.

Haviam se passado três minutos e cinco segundos até que Cláudio apresentasse sua solução. Notemos que todos os alunos são iniciantes tanto no uso do Geogebra quanto nas construções geométricas. Ao se imaginar as mesmas condições dos sujeitos em um curso usando os instrumentos convencionais régua e compasso, creio que o tempo demandado seria bem maior.

Cláudio: Essa ideia estaria correta, professor?

Adelmir: Vamos fazer assim, Cláudio: a primeira coisa que vou fazer é salvar a sua solução para discutirmos. A partir de agora, as soluções apresentadas nós vamos salvar para que sirvam de material para nós analisarmos depois. Então nós vamos fazer o seguinte: me dêem licença um minuto no mouse pra eu salvar a solução do Cláudio. Então arquivo... eu vou gravar essa solução e vou chamar de ponto médio do Cláudio. Então essa possibilidade... esse arquivo ficou salvo, eu vou selecionar tudo e vou apagar a solução do Cláudio, mas olhem agora: arquivo, abrir, olha aqui ponto médio do Cláu-

dio. E voltou lá a sua solução Cláudio, e nós vamos salvar para cada uma daqui em diante. Antes que nós analisemos a solução do Cláudio, alguém quer apresentar alguma?

Fláudio: Professor, o segmento, ele seria "AB". Eu pensei em círculo e diâmetro "AB", traçando-se uma perpendicular à reta, no caso seria "R", e do segmento "AB".

Adelmir: Vamos chamar uma nova seção e, por favor, apresente a sua solução, Fláudio.

Fláudio: Professor, eu só tenho uma certa dificuldade no desenho.

Adelmir: Tá aí o segmento "AB". Veja a dificuldade que você tem e me diga. Vamos discutindo conosco e todos podem participar. Vamos tentar ajudar o Fláudio na sua construção. O que você quer fazer?

Fláudio: Um círculo de diâmetro "AB".

Adelmir: Um círculo de diâmetro "AB" é o que você quer fazer. Faça.

Fláudio: Não acerto o desenho não, professor.

Adelmir: Veja bem, Fláudio, você tá querendo construir um círculo de diâmetro "AB", mas pra você construir esse círculo de diâmetro "AB", você precisa do raio. O raio terá que ser exatamente a metade disso, e você precisa do ponto médio. É ele que você tem que determinar, se você determina o ponto médio, você terá o círculo que você quer.

Adelmir: Silvio, e aí, a sua solução?

Silvio: É parecida com a do Cláudio.

Adelmir: Você quer mostrar pra nós como foi que fez no monitor?

Silvio: Aqui eu fiz um losango, aí, como os quatro lados são iguais, a média dá pra fazer com interseção das duas linhas, dos dois pontos. Foi assim que eu fiz.

Cláudio: Mas pra que esse losango?

Silvio: É pra dizer que, como o losango são quatro lados iguais, aí dá pra dizer que... dá pra afirmar que é mediana o lado, a reta "AB".

Adelmir: Eu vou salvar a solução do Silvio, também vamos discutir. Fláudio, e aí? Avançou naquela sua solução? Conseguiu desenhar o círculo?

Fláudio: Não, professor, não consegui não.

Fláudio não percebia que é impossível construir o círculo tendo apenas as extremidades de um diâmetro, que é necessário conhecer o centro, exatamente o ponto médio. Então, conhecer o ponto médio era uma condição anterior. Ele tentou construir várias vezes, o que ressalta a vantagem do *software* ante a régua e o compasso, porque ele teve a possibilidade de simular rapidamente e sem dificuldades diversos casos. Valendo assinalar que sua dificuldade não era com o desenho, como afirmou, e sim com a Matemática.

Adelmir: É nós vamos discutir as duas soluções e depois eu vou pedir que todos pensem em como ajudar o Fláudio sem usar o ponto médio, ele quer desenhar um círculo de diâmetro "AB", mas ele não conhece o centro. Vamos analisar primeiro a solução do Cláudio. Sabemos que tudo que o Cláudio fez pode ser analisado. Se nós formos lá em exibir o protocolo... tudo que você fizer pode ser usado contra você, tá?

A função exibir *protocolo de construção* que o Geogebra disponibiliza oferece uma opção que enriquece e facilita a tarefa do professor-pesquisador. Após um procedimento ser salvo, ele pode ser reconstituído, passo a passo, descrevendo todas as ações que o sujeito empreendeu. Assim, sempre era possível, durante as aulas, retornar, debater e analisar, quantas vezes foram necessárias, as soluções apresentadas pelos alunos. E, além disso, quando das análises posteriores, desempenhando a tarefa do pesquisador, tinha todos os dados à disposição como se os fatos estivessem acontecendo novamente. No protocolo da Figura 21 é possível verificar todas as ações empreendidas por Cláudio na sua solução. Ela foi reapresentada à turma, passo a passo, dando chances para que Cláudio pudesse explicar seus procedimentos e o restante do grupo fazer comentário e questionamentos.

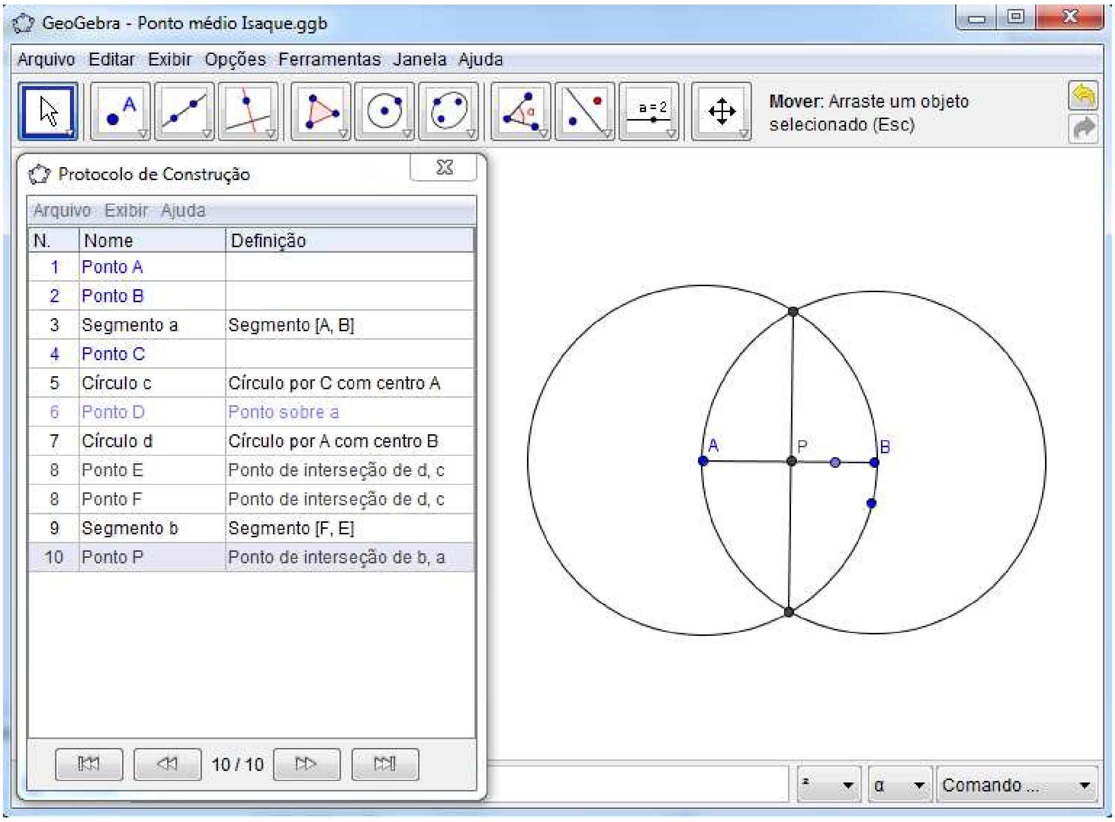


Figura 21: Protocolo de construção do ponto médio.

Adelmir: Tínhamos um segmento, o Cláudio marcou um ponto fora do segmento, ele tava tentando usar o compasso.

Cláudio: Esse aí foi sem querer.

Adelmir: Esse aí foi sem querer, ele voltou ...recomeçou. Veja, Cláudio, esse círculo que você traçou aí, tá um círculo por "C". "C" é o último ponto que você traçou, tá vendo, com centro em "A". Então esse primeiro círculo não atingia o seu desejo. Vamos ver como é que funciona mais pra frente, porque eu vi o que aconteceu. Em seguida, fez as duas intersecções, e daí traçou um segmento e depois fez o ponto de interseção.

Cláudio: Então eu errei por conta daquele ponto indesejado que eu fiz, né?

Adelmir: Então, aquele ponto lá não garante que a sua solução está correta, porque aquele ponto tá fora, né? Embora até pareça que o ponto seja médio, mas em matemática a gente tem que ter certeza. Esse foi o único o único problema, foi aquele ponto solto, inclusive você podia ter deixado lá, Cláudio, desde de que você tivesse feito a circunferência com o "C", entendeu?

Cláudio: Foi porque eu fiz nele sem querer mesmo, mas eu entendi sim a essência de como fazer, de como descobrir o ponto médio, usando o compasso.

Adelmir: Não tenho nenhuma dúvida, a sua lógica tá perfeita. Eu aproveitei exatamente. Eu sei que a sua construção tá corretíssima; eu aproveitei exatamente só pra falar, ok?

Cláudio: Ok, professor!

Obviamente que o ponto marcado sem querer torna matematicamente incorreta a solução de Cláudio, mas ficou claro para mim, por meio de seus esclarecimentos, que ele sabia fazer a construção, daí ter aceitado o procedimento como correto. Acredito que a análise não seria tão detalhada como feita se a sua solução estivesse pronta em uma folha do caderno.

Adelmir: Vamos observar agora o ponto médio do Silvio (Figura 22).

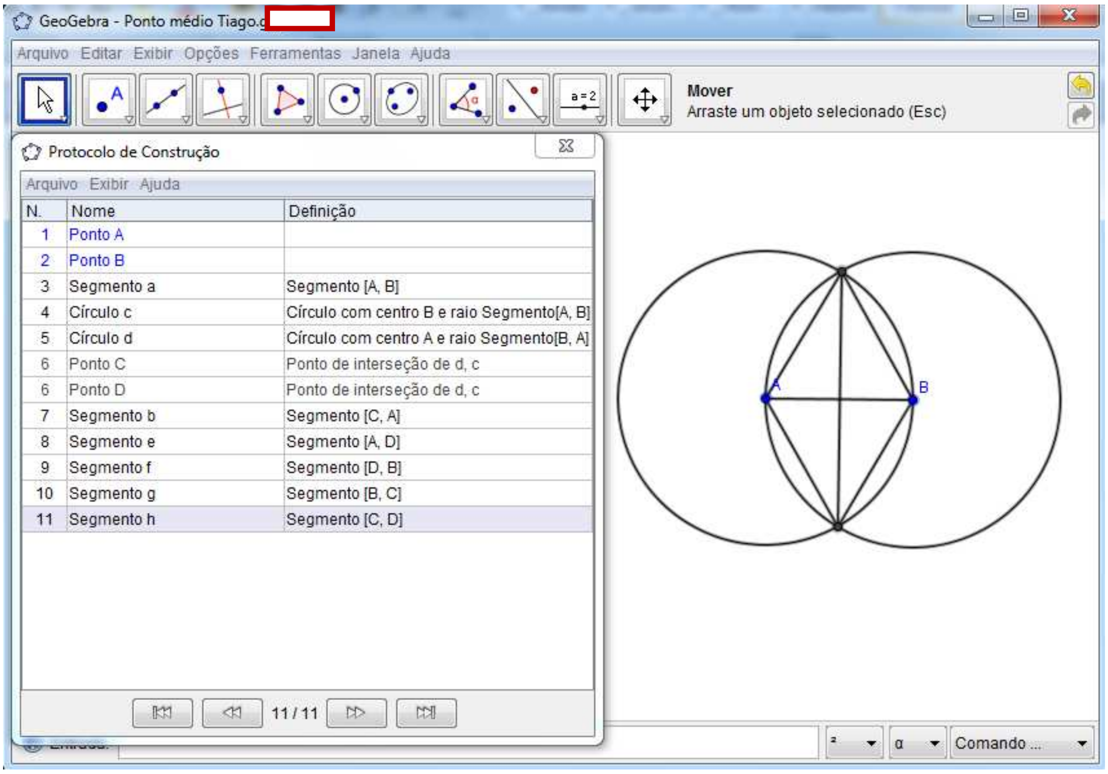


Figura 22: Construção do ponto médio.

Adelmir: Tínhamos o segmento, o Silvio usou a ferramenta compasso, como a gente recomendou, e fez um círculo com centro em B e raio AB. Em seguida ele fez um círculo com centro A e raio BA, ele fez os pontos de interseção, em seguida ele traçou quatro segmentos pra formar o losango e depois ele ligou os dois pontos. A pergunta é: é necessário fazer o losango.

Cláudio: Na minha opinião, não.

Adelmir: Pode falar, Cláudio!

Cláudio: Porque eu acho que só com a interseção dos dois pontos do círculo já é possível saber o ponto médio. Feito da forma que ele fez, ele poderia ter feito direto, sem ter feito o losango já daria o ponto certo; eu penso assim.

Adelmir: Que você acha, Fláudio?

Fláudio: Eu acho também, professor, que não, que não precisava do losango

Adelmir: É interessante a gente observar, Silvio, que, quando você faz o losango... vamos voltar pra observar. Olha, você estava nessa situação. A partir daí, você traçou esse segmento, esse segmento, esse segmento e esse segmento. Note que, traçando esse segmento você não alterou em nada a posição dos pontos, depois você vai ligar os mesmos pontos. Como você vai ligar os mesmos pontos, era desnecessária essa parte do losango, que, por sinal, nós vamos precisar daqui a pouco pra outra coisa, mas ela era desnecessária. A sua solução é perfeita a menos do losango. E juntando o que você fez com o que o Cláudio fez, nós temos a solução corretíssima. O Cláudio clicou fora e foi apenas um acidente do mouse, e você chegou à solução bem antes, não precisava que você fizesse um losango. Eu tô muito satisfeito com a solução, é essa mesma, não precisa do losango. Agora, porque que a gente pode garantir que esse ponto é médio, hein? Essa era a nossa situação, vamos otimizar agora as nossas soluções. Faremos assim, olha! Eu preciso de um argumento que me garanta que esse ponto aí é médio. Quem quer me dar uma explicação por que que "M" é ponto médio?

Gerardo: Posso fazer, professor.

Adelmir: Alguém poderia dizer: eu num tô vendo que o bicho tá mesmo no meio rapaz, será possível? É muito azar se não for. Não é assim em Matemática. A gente tem que ter um argumento que valha sempre.

Gerardo: Professor, eu posso demonstrar aí?

Adelmir: Claro, Gerardo.

Gerardo: Nós temos aqui um triângulo isósceles, ou seja, com dois lados iguais, e segundo já foi explicado anteriormente, no caso do triângulo isósceles, a altura do triângulo que o segmento que vai de "C" até "M", ela divide o lado oposto, no caso, o segmento "AB" ao meio, garantindo um ponto médio do segmento.

Adelmir: Perfeito, Gerardo. A gente ainda podia até ver outra coisa: esse triângulo, além de ser isósceles, ele é equilátero; além de dois lados iguais, ele tem três. Observe: "BC" é um raio de uma circunferência. "AC" também é raio da circunferência, da outra circunferência, mas, como nós fizemos com o mesmo raio, eles são iguais e AB é o raio da outra circunferência. Num triangulo eqüilátero, as principais cevianas, que são as retas de um triângulo, coincidem no mesmo ponto, a mediatriz coincide com a altura, com a mediana e com a bissetriz, então realmente esse ponto é um ponto médio, oK? E foi construído de uma maneira muito eficiente.

Como estava iniciando um novo momento na aula era necessário que os alunos se envolvessem com a nova situação. Estimulei o diálogo, provoquei os sujeitos a emitirem opiniões e discutissem entre si. Estava, novamente, me posicionando como recomenda a etapa ***tomada de posição*** da Sequência Fedathi.

Adelmir: A nova situação é a seguinte: dado o segmento AB, eu quero construir a reta mediatriz dele. Mediatriz é a reta que passa pelo centro e que faz 90º graus com o segmento. Vamos lá, alguém se habilita a construir a reta mediatriz desse segmento?

Silvio: Professor, no problema passado eu fiz a mediatriz, não foi?

Adelmir: Você fez, quase que você fazia a mediatriz porque você só ligou os dois pontos, não foi assim? Mas lembre-se de que você ligou com o segmento. Na realidade eu quero reforçar. A construção é praticamente a mesma construção.

Silvio: E qual é a diferença?

Adelmir: Exatamente nenhuma. Quando eu pedir a mediatriz, eu quero a reta. Ali você tinha me dado só o segmento, era só a parte final, para você construir uma reta.

Adelmir: Lembre-se de que quando, Silvio, ligou lá os vértices do seu losango, você fez um segmento, eu quero a reta toda, era só ao final, ao invés de usar o segmento, usar a reta. Você quer construir, Fláudio?

Fláudio: Posso tentar, professor.

Adelmir: Vamos em frente!

Adelmir: Fláudio, você fez uma passagem a mais, que foi a construção dessa circunferência que não era necessária. Você já tinha, e a única coisa que você faltou garantir é que aqueles dois pontos eram realmente pontos de interseção. Então para você garantir que ele é o ponto de interseção, você tem que assinalar na ferramenta e marcar o ponto de interseção, ok? Somente essa. Tenho certeza que você entendeu bem.

Eu já estou vaidoso da minha turma. Nós tivemos uma construção aí, com participação exatamente de todos os alunos. Estou me sentindo num congresso de geômetras de alto nível, já estou emocionado. Agora, vamos combinar a partir daqui. Nós já sabemos construir e explicar como se constrói uma perpendicular, nós já sabemos construir o ponto médio e nós já sabemos construir a mediatriz de um segmento. Ora, pessoal, o nosso software... e essa é a vantagem de nós estarmos adotando métodos computacionais... o nosso software tem todas essas ferramentas e como nós já sabemos construir, para que não fiquemos repetindo... imagine que nós vamos fazer um problema que tem que construir dez perpendiculares... se pra cada uma a gente for ficar repetindo, repetindo, repetindo, perde toda a graça. Então a grande vantagem do processo, o ponto de partida é que nós podemos agora usar, sem nenhum pudor, sem nenhuma vergonha, sem nenhum medo, as ferramentas do software. Nós podemos usar já perpendicular, ponto médio e que estão aqui nas nossas cortinas, olha... ponto médio ou centro, eu não preciso mais ir lá fazer compasso, fazer toda a construção, quando você precisar do ponto médio, pode usar direto, porque você sabe construir um ponto médio. Você já tem aqui, olha, reta perpendicular, nós não precisamos mais ficar repetindo, nós vamos usar direto, porque agora nós vamos começar a resolver problemas e veja que aqui eu também, já tenho também a mediatriz. Então essas três ferramentas: perpendicular, mediatriz e ponto médio, elas já são do nosso uso.

Findas as discussões sobre o ponto médio e a mediatriz, cumpre-me sublinhar que todos os sujeitos participaram ativamente das construções. Posso testemunhar que em toda minha larga experiência em sala de aula nunca tive oportunidade de acompanhar uma interação tão efetiva entre os alunos. Todos se ofereceram para exibir suas soluções (o que é muito raro nas turmas tradicionais), comentaram as soluções dos colegas, deram explicações e justificativas. Acredito assim estar diante de uma nova dimensão bastante favorável ao ensino e à aprendizagem.

*Adelmir: E agora, usando as ferramentas do software, eu quero que vocês façam um problema... **usando as ferramentas do software.** Não precisa mais se prender aos desenhos delas, tá? E o problema é o seguinte: o segmento "AB" é a diagonal de um quadrado... **o segmento "AB" é a diagonal de um quadrado**. Eu quero que vocês desenhem esse quadrado. Mãos a obra. Lembrando o que que nós podemos usar: perpendiculares, pontos médios, mediatrizes, mas não esquecer que nós só podemos usar régua e o compasso. Podem conversar entre vocês, podem discutir, podem pedir a opinião, e eu fiquei muito feliz, hoje, quando eu cheguei, quando nós abrimos a sala do nosso encontro, que o Silvio e o Cláudio estavam discutindo uma solução, veja, estavam curiando aí uma solução pra um problema, e eu fiquei muito feliz com a curiosidade deles, o mesmo pode acontecer agora. Podem conversar através do TeleMeios.*

Adelmir: E então?

Silvio: Professor, vou tentar. Eu fiz assim:, eu fiz o ponto médio entre "AB", fiz o compasso entre o "A" e o ponto médio, aí eu fiz uma perpendicular no ponto médio, aí fiz a interseção do ponto médio com o círculo, aí depois desenho o quadrado, o desenho, aí está. (Figura 23).

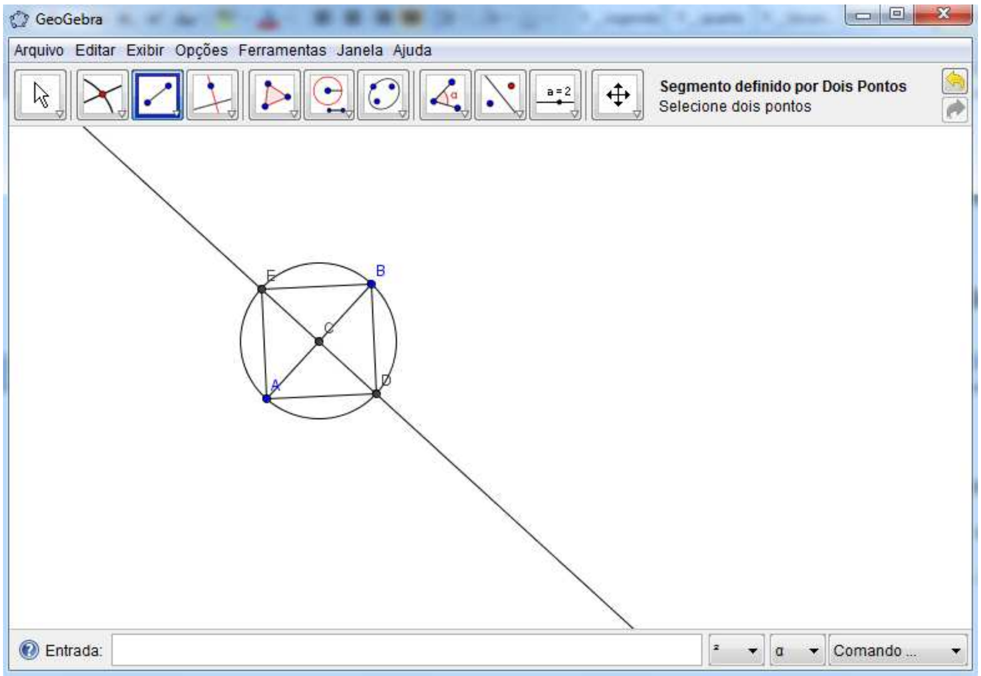


Figura 23: Construção de um quadrado, conhecendo sua diagonal.

Adelmir: E aí, Cláudio, o que você achou da solução?

Cláudio: Eu acho que tá certa.

Adelmir: Por quê?

Cláudio: Porque, não sei, não tenho certeza, sei não.

Adelmir: Através do software, Fláudio, através do software mesmo, como é que nós podemos verificar se isso é um quadrado ou não?

Fláudio: Professor Adelmir, pelo software eu não saberia explicar, mas eu penso que o segmento AB, como diâmetro do círculo, e o ponto EF diâmetro do círculo, esse ponto do meio seria comum a triângulos de lados iguais, tá formando quatro triângulos iguais, então é um quadrado.

Cláudio: Fala mais perto, tá dando pra ouvir direito não.

Adelmir: Uma explicação bem legal, Fláudio. Nós estamos nos aproximando de explicações bem consistentes. Com o software, nós temos uma ferramenta aqui que dá a medida, lembra disso? O quadrado é aquele polígono que tem quatro lados iguais e quatro ângulos iguais. Nós estamos vendo aí que realmente é um quadrado. A outra maneira é... eu tenho que mostrar que aqueles lados são iguais, mas observe o seguinte: observe que a distância "CB" é igual à distância "CD" porque são raios, então o triângulo CBE e o triângulo CBD, eles já tem um lado igual, eles já têm lado "CD" igual ao lado "CE", o lado "CB" é comum, então ele já tem dois lados iguais. Como essas retas são perpendiculares, porque o Silvio usou a perpendicular, o ângulo formado por esses dois lados são iguais. Isso me garante que, se eles têm lado, ângulo e lado congruentes, esses dois triângulos são congruentes, que era o que você, quando você falou lá em triângulos iguais, esses dois triângulos sendo congruentes, os terceiros lados deles obrigatoriamente são iguais. Eu já garanti que esses dois lados são iguais, ora, esses dois lados são congruentes e do mesmo modo eu poderia então extrapolar esse raciocínio para os outros dados e a figura realmente é um quadrado e nós vamos gravar a solução do Silvio, que foi uma solução perfeita, foi uma solução muito boa.

Antes de nós chegarmos adiante, e já nos encaminhando para o final da seção de hoje, eu tenho mais um desafio, depois eu faço a apresentação de *outra ferramenta importante pra nós. Esse desafio é o mais legal, mas usando tudo que o Silvio nos explicou tão bem e o que nós já sabemos é que nós vamos conseguir chegar lá. O desafio é o seguinte:*

o ponto "A" é ponto médio de um lado de um quadrado; o ponto "B" é ponto médio do lado do mesmo quadrado; esses dois lados são dois lados adjacentes, são dois lados vizinhos, então o ponto "A" é ponto médio de um lado de quadrado e o ponto "B" é ponto médio de outro lado desse quadrado, então, sabendo que os dois são pontos médios de lados adjacentes de um quadrado, eu quero que você desenhe o quadrado.

Cláudio: Bora Gerardo, essa aí é contigo!

Adelmir: Todos entenderam o que eu quero, nós vamos fazer aí um quadrado. Quando a gente terminar de desenhar esse quadrado, a gente tem que ter certeza que "A" é ponto médio e que B é o ponto médio de lá.

Adelmir: Não paga nada para perguntar.

Adelmir: E aí, Fláudio, tá pensando em quê? Já tem um plano?

Fláudio: Eu tô vendo desenho aqui que eu acho que não entendo, nem eu entendo.

Adelmir: Tente entender. Se for preciso, você volta à construção, mas tente entender. Um raciocínio que se usa muito em Geometria é fazer um esboço de como vai ficar a figura, que aí você vai ter a ideia de como vai ser. Por exemplo, seria alguma coisa assim... Essa minha figura não tem nenhum fundamento, porque eu não posso garantir que isso é um quadrado, eu não posso garantir que isso é um ponto médio, eu não posso garantir nada disso, mas a gente fica... quando a gente faz um raciocínio desses em matemática é uma jogada pra gente entender como é que as coisas poderiam se passar, entendeu? A gente diz: considere a figura feita. Considerar feita é o que que a gente tem que fazer pra chegar aí ao final.

Evidencio aqui mais um ponto da aula onde pontifica a mediação do professor; o aluno, apesar de seu esforço, não estava conseguindo avançar e, sem apresentar a solução, forneço elementos que favorecem o encontro de um caminho para a conclusão da tarefa.

Cláudio: Professor, eu tenho uma solução, eu vou apresentar, viu?

Cláudio: Então, já pode ser usada a ferramenta do software para ver se está correto?

Adelmir: Pode.

Cláudio: É não tá certo!

Gerardo: O ângulo de 270º, também acho, acredito que prova que seria um quadrado.

Cláudio: É, eu também, mas só que no caso já deram errados os lados, um tá dando 86 e outro 88.

Para verificar a correção da construção de Cláudio, dois alunos usaram as ferramentas de medida de ângulo e comprimento. Após a medição, o próprio Cláudio rejeita sua proposta inicial. Sei que tal atitude não leva a uma demonstração plena em Matemática, mas a verificação abre o caminho para a prova definitiva; essa alternativa de medir rapidamente os elementos de uma figura é mais uma vantagem que o GeoGebra oferece quando comparado à régua e ao compasso.

Fláudio: Mesmo traçando perpendiculares e paralelas.

Adelmir: E a gente tem outro problema aí, Cláudio. É que, se fosse um quadrado, você não tinha respondido o que eu pedi, porque eu pedi que o ponto "A" e o ponto "B" fossem pontos médios dos lados.

Cláudio: Não, é verdade, eu me enrolei aqui.

Adelmir: Nada que você não possa começar novamente.

Silvio: Professor, eu achei uma solução aqui.

Adelmir: Por favor, apresente, Silvio!

Silvio: Peraí!

Silvio: Peraí!

Adelmir: Não ouvi, Silvio.

Silvio: É que eu não tô mais lembrando, peraí!

Adelmir: Volte e comece de novo. Só um minuto, Silvio, só um minuto. Quando tiver pronto pode falar, Cláudio. Gerardo, o que foi que houve com você, meu filho, que você tá tão triste?

Gerardo: Tô fazendo alguns testes aqui, professor, alguns esboços.

Adelmir: Ok!

Silvio: Professor, vou tentar de novo.

Adelmir: Vou desenhar o ponto de partida de novo pra o que você tem. Esses dois pontos são pontos médios dos lados de um quadrado.

Silvio: Ei, professor, eu posso tentar de novo?

Adelmir: Claro, a gente sempre pode. Fique à vontade!

Silvio: Prontinho, professor! É mediana. (Figura 24).

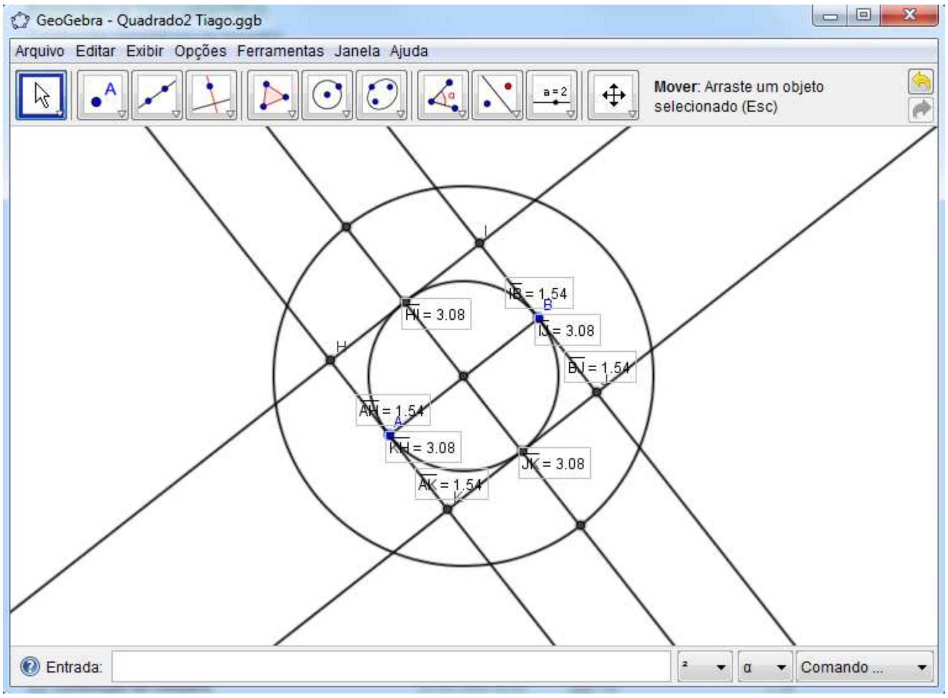


Figura 24: Construção do quadrado, dados os pontos médios de lados opostos.

Adelmir: Olhe, vocês tão vendo aí o Silvio. Isso é coisa mais maravilhosa que existe na Matemática, é que nós, matemáticos, somos arrogantes, com pouco tempo que a gente tá numa coisa, a gente já dá um show desse.

Silvio: Tira o mouse da tela do professor, alguém!

Adelmir: Antes de mais nada, eu vou salvar o quadrado do Silvio, pra que a gente possa conversar. Agora eu quero ouvir vocês. O que você diz Cláudio?

Cláudio: Eu, na realidade, tinha entendido a questão errado. Acreditava que os lados, que era esse ponto mediano, seriam só lados que estariam juntos em interseção, entendeu? Eu não tinha entendido que poderia ser qualquer lado do triângulo.

Adelmir: Não tá clicando no botão do som.

Cláudio: Na realidade eu entendi a questão errado. Eu achava que esses pontos médios desses lados do quadrado teriam que ser em dois lados que se intercediam.

Cláudio tem problemas com a linguagem e a nomenclatura matemática. Como esta não é disciplina com a qual trabalhe sistematicamente, ele se confunde com os termos. Sem desprezar o rigor, sempre necessário na ciência, não fiz desse ponto a parte central do trabalho, e, aos poucos, sem acirrar críticas, fui fazendo as devidas correções.

Adelmir: Pois você entendeu corretamente; a solução do Silvio tá linda, mas não resolve o nosso problema. Ele resolveu um outro problema, ele construiu um quadrado, tá perfeito, com dois pontos médios dos lados, mas são lados opostos. Eu não quero os lados opostos, eu quero os lados vizinhos, então a solução dele é muito boa para outra questão, pra nossa não. Ainda estamos esperando uma solução, viu?

Cláudio: Ah! Então eu entendi certo como é pra fazer, então, é isso?

Adelmir: Exatamente o entendimento é o do Cláudio, tá? Cadê a figura?

Adelmir: A figura sumiu?

É evidente desde o primeiro instante que Silvio não entendeu o que eu pedia e que sua solução não era adequada, mas não a desprezei, aproveitei para que os outros sujeitos a discutissem, valorizando seu erro, como dita a Sequência Fedathi. A intervenção de Cláudio, além de mostrar o quão próxima era a mediação, tem um caráter mediador porque, ao questionar sua solução, mostra a Silvio que seu percurso estava equivocado.

Como nenhum aluno mostrou uma solução correta para a construção do quadrado, sendo dados os pontos médios dos lados adjacentes, resolvi deixar a tarefa para que continuassem pensando e a apresentassem na próxima aula.

Nesse instante, aconteceu um imprevisto técnico; perdemos a gravação das vozes por alguns minutos, o que impossibilitou a transcrição da construção da bissetriz e o início da construção da paralela a uma reta dada passando por um ponto determinado, cujo relato final foi possível transcrever após a retomada da gravação de áudio.

Adelmir: ...As intersecções entre o primeiro círculo e o último ─ observe o ponto "H". Se eu ligo o ponto "C" ao ponto "H", eu afirmo que essas duas retas são paralelas. Como é que eu posso garantir que elas são paralelas? Observe que o polígono formado por "C", "H", "G", "E", "C", esse polígono é um losango. O losango, não sei se vocês lembram do começo da aula, o Silvio definiu muito bem, que disse que o losango tinha os quatro lados iguais, isso é verdade. Observe que "CH" é raio do primeiro círculo, "CE" é raio do primeiro círculo, então esses dois já são iguais, "GH" é raio do terceiro círculo, "GE" é raio do terceiro círculo, mas os três círculos têm o mesmo raio, então, como tudo é raio, esses quatro lados são iguais. E em todo lo-

sango os lados opostos são paralelos. Como "CH" é paralelo a "ED", eu posso garantir que as duas retas são paralelas. Vou salvar, pra quem quiser utilizar, com o nome de paralela. Vamos voltar? Olhe só, eu tinha uma reta, tinha um ponto, daí tracei uma circunferência que interceptava a reta, com a ferramenta marquei a interseção dessa reta, é assim? Em seguida, com a ferramenta compasso, com o mesmo raio da primeira, garanti que o raio era "C", tracei uma outra circunferência, determinei a interseção com a reta, usei a ferramenta compasso, e , com centro em "G", tracei uma outra circunferência, fiz a interseção entre a primeira e a terceira, determinando o ponto "H", liguei os dois pontos à reta paralela. Ok? A gente vai ficar por aqui, e só uma brincadeira: vocês tão muito craques, são muito sabidos, muito bonitões, eu tenho, só pra brincar, isso aqui é uma reta, isto aqui é um ponto, eu pergunto: todos vocês sabem construir uma perpendicular, todos sabem construir a perpendicular que passa pelo "C" e é perpendicular à reta? Vocês lembram, né, da construção do começo. Não vamos fazer agora não, só quero saber se você quem tem coragem de me dizer que sabe construir.

Gerardo: Sei sim, professor.

Adelmir: Sabe... o Cláudio já sabia desde o começo. Ele fez, foi tão generoso que ainda construiu um losango pra gente. Pois eu vou fazer uma brincadeira com vocês: eu quero que vocês construam a perpendicular a esse ponto, só que ele está nessa posição e não vale mexer. Ele tá no cantinho da sua folha de papel. Você se lembra como era a construção? Você ia lá, desenhava uma circunferência pra pegar os dois pontos. E agora? Mas eu não quero saber dessa resposta agora não, agora eu queria agradecer a presença de vocês e dizer que foi muito legal e amanhã a gente já pode usar também a paralela. Muito obrigado.

Análise *a posteriori*

De posse de toda a documentação coletada através das gravações de imagens e áudio, bem como dos arquivos salvos com a participação dos sujeitos, foi possível comparar o que havia sido projetado com o que se consumou na segunda aula do curso. A aula teve duração efetiva de uma hora e 31 minutos.

Logo de início verifiquei a participação efetiva dos alunos, não apenas colocando-se como voluntários para apresentar seus trabalhos, mas também interagindo na discussão das soluções dos colegas. Entre os vários pontos em que isso ocorreu posso exemplificar por meio do diálogo de Silvio e Cláudio na construção do ponto médio:

Silvio: Aqui eu fiz um losango, aí...

Cláudio: Mas pra que esse losango?

Silvio: É pra dizer que...

ou na avaliação feita por Gerardo da construção do quadrado por Cláudio:

Cláudio: É não tá certo!

Gerardo: O ângulo de 270º, também acho...

Cláudio: É, eu também, mas só que no caso já deram errados os lados, um tá dando 86 e outro 88.

ou ainda quando do debate em que Cláudio e Fláudio deixam claras suas opiniões ao comentarem uma construção:

Cláudio: Na minha opinião, não.

Adelmir: Pode falar Cláudio!

Cláudio: Porque eu acho que só com a interseção dos dois pontos...

Adelmir: Que você acha, Fláudio?

Fláudio: Eu acho também, professor, que não, que não precisava do losango...

Não posso em minha análise deixar de me referir à experiência no magistério e posso garantir que, mesmo em sala de aulas muito participativas, é muito difícil alcançar um nível de interação de tal modo estreito entre os estudantes. Esse sentimento podia ser percebido também entre os sujeitos, como se pode depreender da fala de Cláudio (Apêndice 2):

> FACIL COMUNICAÇÃO, ALTA INTERATIVIDADE E COMODIDADE POR ESTÁ TENDO AULA EM UM COMPUTADOR, ONDE PODE ME SENTIR MUITO AVONTADE PARA PERGUNTAR E PARA APRENDER E RELEMBRAR COISAS DA GEOMETRIA.

Desse modo, decidi acatar, sem dúvidas, a conjectura:

(1) A interação dos sujeitos será maior do que se eles estivessem em uma sala de aula convencional.

Em tempos diferentes, durante a aula, provoquei a participação dos sujeitos nos eventos que estavam em curso, como se pode ver:

Adelmir: Vamos tentar ajudar o Fláudio na sua construção. O que você quer fazer?

Fláudio: Um círculo de diâmetro "AB".

Adelmir: Um círculo de diâmetro "AB" é o que você quer fazer. Faça.

Fláudio: Não acerto o desenho não, professor.

Adelmir: Veja bem, Fláudio, você tá querendo construir um círculo de diâmetro "AB", mas pra você construir esse círculo de diâmetro "AB", você precisa do raio...

ou durante a ausência mais prolongada de Gerardo:

Adelmir: ... Gerardo, o que foi que houve com você, meu filho, que você tá tão triste?

Gerardo: Tô fazendo alguns testes aqui, professor, alguns esboços.

ou ainda quando orientávamos Fláudio:

Fláudio: Eu tô vendo desenho aqui que eu acho que não entendo, nem eu entendo.

Adelmir: Tente entender. Se for preciso, você volta à construção, mas tente entender. Um raciocínio que se usa muito em geometria é fazer um esboço de como vai ficar a figura, que aí você vai ter a ideia de como vai ser.

Assim, sem hesitação, pude defender a existência real de uma íntima interação do professor com os alunos. Essa comunicação se reverteu, ocasionalmente, em mediação. Mesmo com os indicativos positivos, no entanto, pela importância da questão, e sua relação com as questões globais desta pesquisa decidi que a hipótese

> (2) A função mediadora do professor será mais efetiva do que seria em uma sala de aula convencional,

permanecerá em análise até a última aula do curso, quando, adicionando todas as observações que eu captar sobre o tema, emitirei um parecer definitivo sobre ela.

A inferência,

(3) Os alunos determinarão rapidamente o ponto médio de um segmento, não oferece nenhuma resistência para comprovação. A primeira solução foi apresentada poucos minutos após a sua proposição, e mais de um estudante já estavam com a resposta pronta. Mais importante do que a resposta para a questão é o fato de que, pela similitude que apresenta com a construção da perpendicular, posso concluir que os conteúdos da aula anterior foram realmente assimilados.

Existia estreita relação entre a hipótese (3) e a próxima:

> (4) Os alunos perceberão que a construção da mediatriz já estava efetivada quando da determinação do ponto médio.

Como já comentamos, a quarta era um subconjunto da terceira. Os alunos perceberam isto, e, por ser um fato tão óbvio, a pergunta causou estranheza nos alunos e deixou o professor em situação delicada para explicar o motivo da propositura:

Silvio: Professor, no problema passado eu fiz a mediatriz, não foi?

Adelmir: Você fez, quase que você fazia a mediatriz porque

Silvio: E qual é a diferença?

Adelmir: Exatamente nenhuma. Quando eu pedir a mediatriz, eu quero a reta. Ali você tinha me dado só o segmento...

Logo, não há como negar a hipótese que queda comprovada.

Como prevíramos:

(5) Os estudantes não serão capazes de construir a reta paralela a uma reta dada passando por um ponto determinado;

e procedemos à exposição de um modelo de construção da reta paralela. Como isto ocorreu já no final da aula e com pouco espaço de tempo, terei de retomar esse conteúdo no próximo encontro.

O fato de termos vivido, por várias vezes, em minhas salas de aula na Educação Básica, conjunturas em que os alunos não se apercebiam do que realmente eu estava pedindo a eles, foi a motivação para levantar a suposição de que

(6) Os alunos apresentarão dificuldades para a compreensão das situações-problema.

Eis a conversa com Fláudio:

Adelmir: E aí, Fláudio, tá pensando em quê? Já tem um plano?

Fláudio: Eu tô vendo desenho aqui que eu acho que não entendo, nem eu entendo;

e o fato de Silvio ter resolvido outro problema quando foi construir o quadrado me dá a garantia de que estava certo ao supor as dificuldades de compreensão que os estudantes enfrentariam, o que, mais do que nunca, deve servir como um indicativo para que o professor não queime etapas e invista o tempo que for necessário na explicação do que está sendo proposto, como alerta Fedathi na *tomada de posição.*

Sem temer a crítica dos puristas e conservadores não tenho nenhuma insegurança ao afirmar que

(7) O emprego do GeoGebra como material de desenho em um curso de construções geométricas é mais vantajoso do que o da régua e do compasso.

A firmeza que assumi ao concretizar esta tese vem de vários fatos distintos. Em primeiro lugar, situo que, em minha época de estudante, e posteriormente como professor, estudei as construções geométricas seguindo o modelo tradicional, e as dificuldades que deparei ainda são recordações muito presentes:

- o uso da borracha para corrigir pequenos erros podia acarretar a perda de parte da construção, pois deixava borrões que sujavam o desenho e por muitas vezes danificavam o caderno;
- o desgaste do grafite do lápis alterando o diâmetro da ponta alterava a posição dos pontos, de modo que o fechamento das figuras era um desafio que ficava sujeito ao acaso;
- a abertura do compasso dependia do controle motor do sujeito e uma ínfima diferença no início de uma construção poderia levar a erros monstruosos na conclusão da tarefa; e
- mesmo dominando todo o conteúdo e seguindo um raciocínio adequado, o estudante poderia chegar a uma resposta inconveniente ocasionada pela imprecisão dos equipamentos.

Com a utilização do GeoGebra, porém, o aluno poderá se ater apenas aos procedimentos matemáticos; o aplicativo garante a exatidão da construção. Voltar, refazer, repetir, experimentar são tarefas que não oferecem maiores dificuldades, liberando o aprendiz para pensar, criar e experimentar. É o que pode ser comprovado quando Gerardo diz que está fazendo *alguns esboços*, comportamento altamente desejável no aprendizado de Matemática, e que se torna exequível pelas funcionalidades oferecidas pelo GeoGebra. Quando Silvio afirma *vou tentar de novo*, lembro-me de que no ambiente, com dois cliques, estará pronto para recomeçar e nada se perdeu, enquanto se estivesse trabalhando no caderno de desenho sua tarefa seria muito mais árdua. É muito mais simples *deletar* uma figura e começar de novo do que apagar e tentar reconstruir com régua e compasso no caderno de desenho.

Lembrando que a aula foi iniciada conversando com os alunos sobre a construção da perpendicular, abordada na aula anterior, revisamos os conteúdos que já havíamos discutido e que poderiam ser usados diretamente no computador. Quando estava certo de que os alunos dominavam uma base mínima de conteúdos a partir da qual poderiam caminhar sozinhos, lançei o primeiro desafio. Deixei que se debruçassem sobre a tarefa, discutissem entre si e apresentassem suas soluções. Discuti cada uma das propostas, realizando a sua depuração e prova. Ora, esses procedimentos correspondem diretamente às quatro etapas da Sequência Fedathi: tomada de posição, maturação, solução e prova. Desse modo posso garantir que

8) O ambiente TeleMeios oferecerá as condições para que o professor adote as atitudes recomendadas pela Sequência Fedathi –

sem dúvida, é uma afirmativa verdadeira.

É alentador frisar que na discussão da solução de Cláudio, seu colega Gerardo, ao medir o ângulo e verificar se era correta, mostra, de forma definitiva, o poder do ambiente TeleMeios ao permitir que um sujeito, a distância, pudesse fazer medidas no desenho de outro.

Ao final da aula, coletei a opinião dos alunos sobre o encontro daquele dia (Apêndice 2) e selecionei os pontos mais importantes destacados por eles:

- Cláudio insistiu em que a configuração do computador é limitada, mas elogiou a possibilidade de salvar as telas e não teve dificuldades para entender o conteúdo. Sentiu mais interesse pela Geometria e afirmou que o *software* é muito interessante.
- Gerardo não teve problemas com o ambiente computacional que, afirmou, está cada vez mais fácil. Considerou positivo o compartilhamento de ideias e a interação com os outros participantes. Complicou-se com as ideias geométricas para resolver os problemas.
- Fláudio não encontrou obstáculos na parte telemática, o que se verificou com os desenhos geométricos. Julgou um avanço em relação à aula anterior conhecer mais funções do GeoGebra e relembrar novos conceitos de Matemática.
- Silvio não ouviu alguns comentários de seus colegas imputando a falha à qualidade do equipamento. Sentiu-se empolgado para resolver os problemas de Geometria que lhe pareceram mais interessantes e esteve mais confortável na aplicação do *software*.

Concluindo aqui os trabalhos relativos à Aula 2 avanço, então, para o realinhamento do projeto e realização da terceira aula.

5.1.3.3 Aula 3

Análise preliminar

Considerando o êxito obtido no segundo encontro, posso considerar superados os entraves encontrados na primeira aula no que diz respeito à utilização do ambiente telemático e posso centralizar as ações no Curso de Construções Geométricas, progredindo significativamente nas atividades previstas na sua programação.

Como a *construção da paralela a uma reta dada passando por um ponto determinado* é um tema de grande importância e foi realizada apenas no final da aula passada, sem muito tempo para discussões, na *tomada de posição,* começarei rememorando este assunto. Também na aula anterior, foram deixados em aberto dois desafios e acredito que, se realmente o curso estiver criando o espírito motivador que imagino nos alunos, alguns deverão trazer propostas para solução. Farei, pois, a discussão de suas ideias, mesmo sabendo que os problemas propostos possuem maior índice de dificuldade e, por isso, requerem raciocínios bem mais sofisticados do que os que foram utilizados até agora.

Introduzindo outros conteúdos, previstos para esse momento corrente, abordarei: *transferência de ângulos, divisão de um segmento em partes iguais* e o *arco capaz*. Quanto à transferência de ângulos, penso que os alunos assimilarão sem maiores dúvidas porque é uma construção que mantém alguma similaridade com as já concretizadas. Para dividir um segmento em partes iguais, terá que ser introduzida uma semirreta auxiliar, uma novidade, e aqui poderei encontrar alguma resistência. Já em relação ao arco capaz tenho a convicção de que é um tema praticamente desconhecido pelos sujeitos; atualmente, ele não é contemplado nos programas escolares da Educação Básica, por isso minha tarefa, certamente, terá que passar pela apresentação, para depois construí-lo e finalmente chegar às propriedades.

Análise *a priori*

Após a ambientação do grupo e a reconstrução da paralela (*tomada de posição),* solicitarei que apresentem suas soluções para o primeiro desafio que deixei para que tentassem após a aula:

Construir um quadrado, dados em posição os pontos médios de dois lados adjacentes.

Os sujeitos já entenderam claramente o que se pede no enunciado, pois na aula anterior houve um grande espaço de discussão sobre esse ponto, quando tiveram oportunidade de verbalizar o que estavam pensando da solicitação. Chegaram, mesmo, a apresentar suas tentativas, como Silvio, que por falta de entendimento, construiu outro quadrado e não o que eu havia pedido. Assim, por toda a maturação que o problema passou e pelo tempo que tiveram para exercitar, acredito que, imediatamente, serão voluntários para executar a construção. Acredito que alcancem a *solução esperada*, exposta na Figura 20.

Após a *depuração* e a *prova* do primeiro problema, pedirei, também, que apresentem a resolução do segundo questionamento que ficou como tarefa de casa, cuja proposição formal é a seguinte:

Construir uma perpendicular ao segmento AB pelo ponto A,
estando este ponto muito próximo da borda do papel.

A questão não é trivial. Mesmo no curso de Matemática, testemunhei as dificuldades que os alunos têm para resolver o problema e poucos conseguem utilizando apenas régua e compasso.

Na Figura 25 exibi a situação e uma solução que emprega a propriedade de que as três alturas de um triângulo se interceptam em um ponto, o ortocentro. Para realizá-la, construí um triângulo com os pontos auxiliares “C” e “D” sobre a reta; tracei as alturas relativas aos lados “CD” e “PC”, determinando no seu encontro o ponto “O”, ortocentro do triângulo. A reta que passa por “P” e “O” é suporte da altura relativa ao lado “CD”, logo, perpendicular à reta dada.

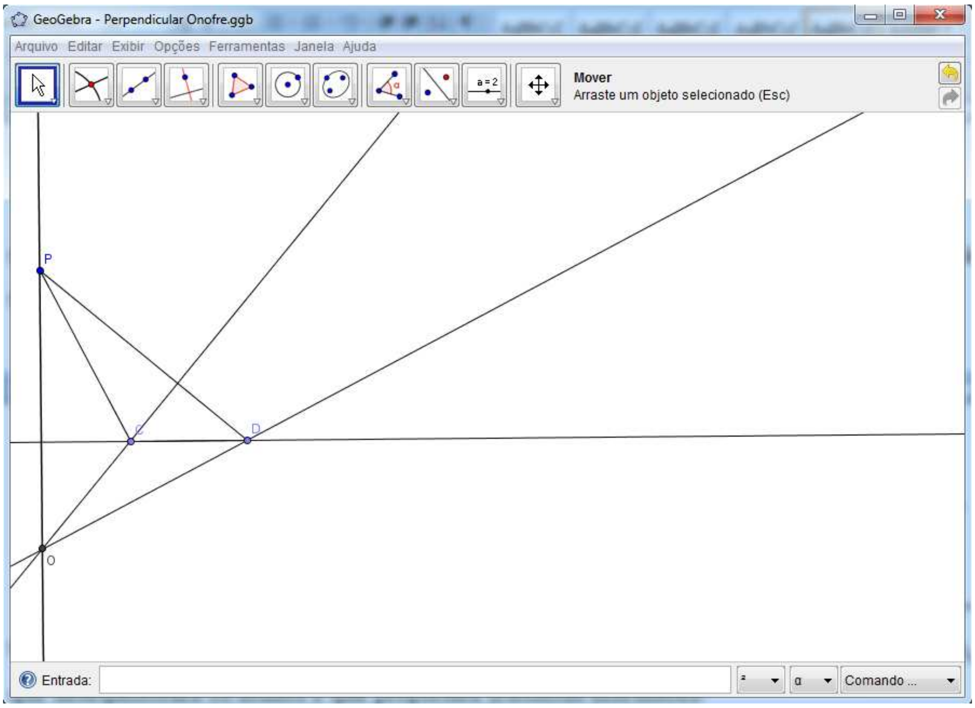


Figura 25: Construção da perpendicular à uma reta passando por um ponto dado, estando o ponto muito próximo da borda do papel.

Não é objetivo do curso elevar demasiadamente o nível dos questionamentos, mas decidi propor a situação por acreditar que é por demais instigante e motivadora, que desequilibrará os alunos e que propiciará frutíferas discussões.

Mesmo usando, basicamente, retas perpendiculares para a resolução, não acredito que o grupo alcance o resultado desejado, por desconhecimento da propriedade do ortocentro. Isso não invalida a proposta e apresentarei a construção após a discussão.

Prosseguindo na direção dos novos conteúdos cumprirei a tarefa:

Transportar um ângulo para o vértice de uma semirreta dada.

que está demonstrada na Figura 26.

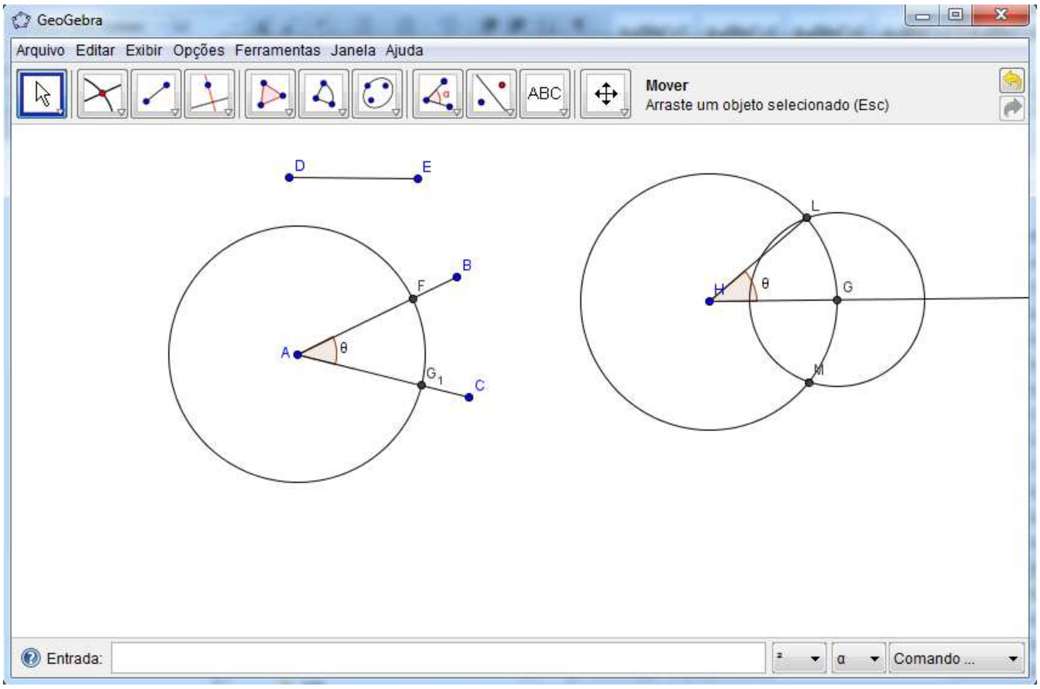


Figura 26: Transporte de um ângulo.

Não deverei enfrentar obstáculos nessa construção porque os alunos já estão habituados a transferir distâncias usando o compasso, e não têm trabalho para determinar pontos de interseção, que são, praticamente, os elementos necessários.

O tópico divisão de um segmento em partes iguais será introduzido com a colocação, para o grupo, da atividade:

Dividir um segmento dado em cinco partes iguais.

Avalio, então, que formulações apresentarão para o cumprimento da tarefa, ilustrada, com a respectiva construção na Figura 27.

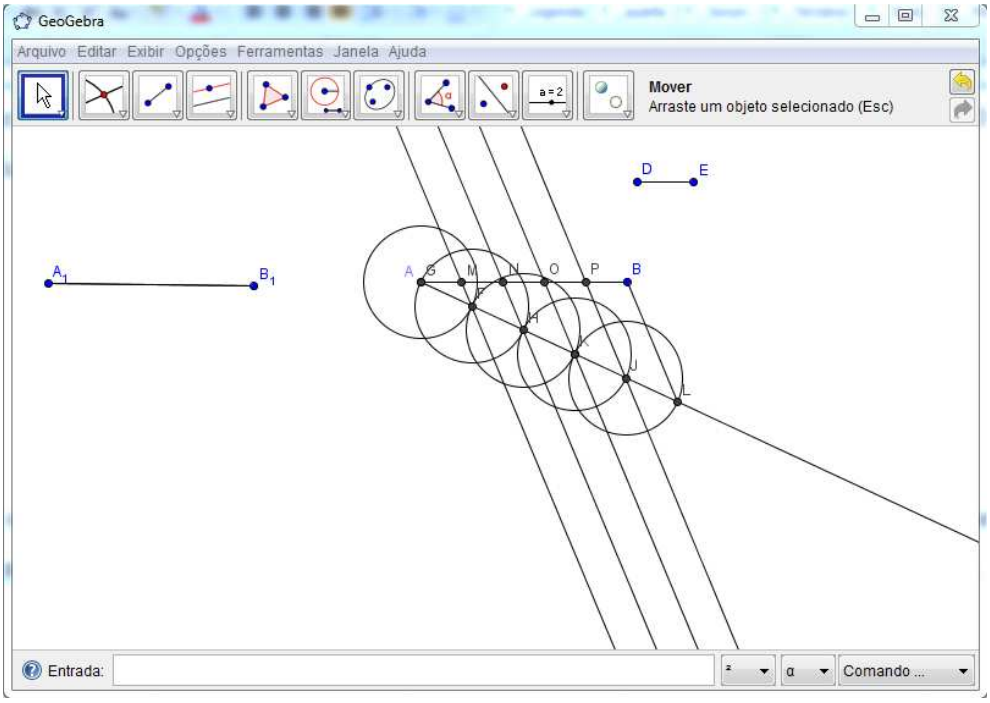


Figura 27: Divisão de um segmento dado em cinco partes iguais.

Não creio que os estudantes cheguem de imediato ao processo canônico, principalmente pela necessidade da introdução da semirreta, acontecimento inusitado até este ponto do curso, mas, por meio das ideias que lançarem, é possível sentir o quanto já progrediram nos conhecimentos das construções.

O estudo do arco capaz possui uma particularidade que poderá se transformar em obstáculo para sua compreensão. Além de ser um conteúdo novo no curso, o assunto não é coberto pelos programas usuais de Geometria na Educação Básica; poucos alunos o conhecem. O perfil dos sujeitos, que já conheço, fundamentado nos encontros anteriores, não é o de expertos na matéria, de sorte que,

Construir o arco capaz de um ângulo dado sobre um segmento dado.

deverá ser um dos temas que tomará mais tempo e exigirá maior esforço do professor durante a aula.

Fiel à pauta estabelecida pela Engenharia Didática, trouxe à colação, durante a *experimentação* da terceira aula, as hipóteses da sequência.

(1) Todos os problemas causados pelo aparato tecnológico foram superados.

(2) Pela experiência já adquirida no ambiente TeleMeios, a interação entre os sujeitos será maior do que nas aulas anteriores.

(3) A função mediadora do professor será mais efetiva do que seria em uma sala de aula convencional.

(4) Os alunos apresentarão soluções satisfatórias para as tarefas de casa.

(5) O emprego do Geogebra facilitará a construção da perpendicular a uma reta passando por um ponto, estando esse ponto próximo a borda do papel.

(6) Os estudantes não serão capazes de construir sozinhos a reta paralela a uma reta dada passando por um ponto determinado.

(7) Os alunos apresentarão dificuldades para a compreensão das situações-problema.

Experimentação

A Aula 3, que estava marcada para o dia 22 de março às 16h, teve seu início retardado em 25 minutos. O servidor da rede localizado no Laboratório Multimeios da UFC ficou fora do ar por alguns minutos e necessitei recorrer à ajuda de Raimilson para resolver essa pendência tecnológica. Com as conexões estabelecidas, comecei a aula seguindo o mesmo roteiro já estabelecido na anterior.

Adelmir: Cláudio?

Cláudio: Presente.

Adelmir: Tudo compartilhado, Cláudio?

Cláudio: Tudo ok, professor.

Adelmir: Fláudio?

Fláudio: Presente, professor.

Adelmir: Gerardo?

Gerardo: Presente

Adelmir: Silvio?

Silvio: Presente.

Adelmir: Então vamos começar, né? Inicialmente, vamos lembrar o que já sabemos e podemos já ser considerados craques.

Para criar a ambientação necessária e deixar marcados os fundamentos sobre os quais o encontro se sustentará, em todas as aulas, mantendo-me fiel aos princípios da Sequência Fedathi, é imperativo começar pela *tomada de posição*:

Primeira coisa: nós já sabemos, dado um ponto e uma reta, construir a perpendicular; nós já sabemos construir a mediatriz de um segmento, e ... já o *ponto médio. E ontem, no fim da aula, nós tivemos uma construção um pouco mais sofisticada, que foi a construção da paralela. Para construir essa paralela, recordando um pouco: dada uma reta e um ponto fora dela, por este ponto eu quero construir uma reta paralela a ela. Para isso, nós vamos utilizar o nosso compasso, ferramenta padrão, e com o centro em "C" e um raio qualquer, desde que ele intercepte a circunferência, nós traçamos, construímos essa circunferência. Vou determinar o ponto de interseção entre a circunferência e a reta, vou lá em ponto de interseção. Pra fazer a interseção, eu vejo que nós precisamos de dois objetos, mas só uma dica pra vocês do software: se vocês já forem pra cima, toda vez que nós clicamos em cima do objeto, observem, ele fica aceso, ele fica ressaltado. Vejam que, se eu vou pra cima do ponto de interseção, os dois objetos ficam acesos. Se os dois ficam acessos, ele já vai marcar o ponto de interseção... para você não dar dois cliques. Então... eu marquei o nosso ponto de interseção, usando o nosso compasso e, com o mesmo raio da circunferência anterior, centrado em novo ponto, traço uma outra circunferência, vou determinar a interseção... novamente utilizo o compasso com o mesmo raio, construo uma nova circunferência e determino a interseção entre a primeira e a última. Com esta interseção, se eu ligo os pontos agora, o que nós temos é uma paralela à reta dada.*

Então... voltando a tudo que nós já sabemos construir: perpendiculares, paralelas, pontos médios, e mediatriz, mas ontem, ontem nós ficamos com algumas pendências da aula, que nós vamos tentar resolver agora.

Vamos trabalhar... e o Silvio tava sugerindo que a gente trabalhasse mais juntos, quando um começar a desenhar, pode dar palpite, pode perguntar pro outro e vale tudo. Então a situação que ficou pendente, não sei se vocês se lembram, era assim olhe: eu tenho um ponto "A", tenho outro ponto "B" e afirmei a você que estes dois pontos eram pontos médios dos lados de um quadrado, e eu quero então que você exiba, que você construa o quadrado. Os pontos "A" e "B" são pontos médios ... e eu quero que a gente construa esse quadrado.

Gerardo: Posso começar, professor?

Gerardo postou-se como voluntário exatamente oito segundos após ter concluído a pergunta. É um indicativo claro de que ele continuou trabalhando no problema após a aula. Considero esse fato auspicioso, porque a atividade não valia nota, o curso não conferia diploma, mas, mesmo assim, os alunos sentiram-se estimulados e desafiados a resolver a questão. A motivação nasceu da própria Geometria e da ambiência pedagógica que experimentavam.

Adelmir: Fique à vontade.

Gerardo: Primeiramente, eu criei um segmento ligando os dois pontos "A" e "B" e tracei a mediatriz. Agora vou fazer a interseção entre eles. De posse da interseção, eu utilizei o segmento "AC" como raio e gerei um círculo, com centro em "C". Da interseção entre esse círculo e a mediatriz eu vou formar um dos pontos ou uma das arestas do quadrado, mas também eu agora tenho um outro círculo de centro em "E" com raio "ED", e é esse círculo agora que vou construir. Novamente vou gerar interseção, e com ele eu tenho dois pontos do meu quadrado, duas arestas dele.

Adelmir: Gerardo, no quadrado são lados, arestas nós usamos para sólidos e os pontos são vértices mesmo. Tá perfeita a sua solução!

Gerardo: Obrigado pela correção, professor, era arestas, ou melhor, vértices. Liguei o ponto "D" até "A", criando o um novo raio e gerei o círculo partindo desse raio, o que vai me dar mais um ponto do quadrado, mais um vértice. Pro outro lado, o procedimento vai ser mesmo, ligando os pontos "D" e "E".

Cláudio: Eita! (risadas)

Gerardo: Agora só ligar os demais pontos. Pronto criei o quadrado, (Figura 28).

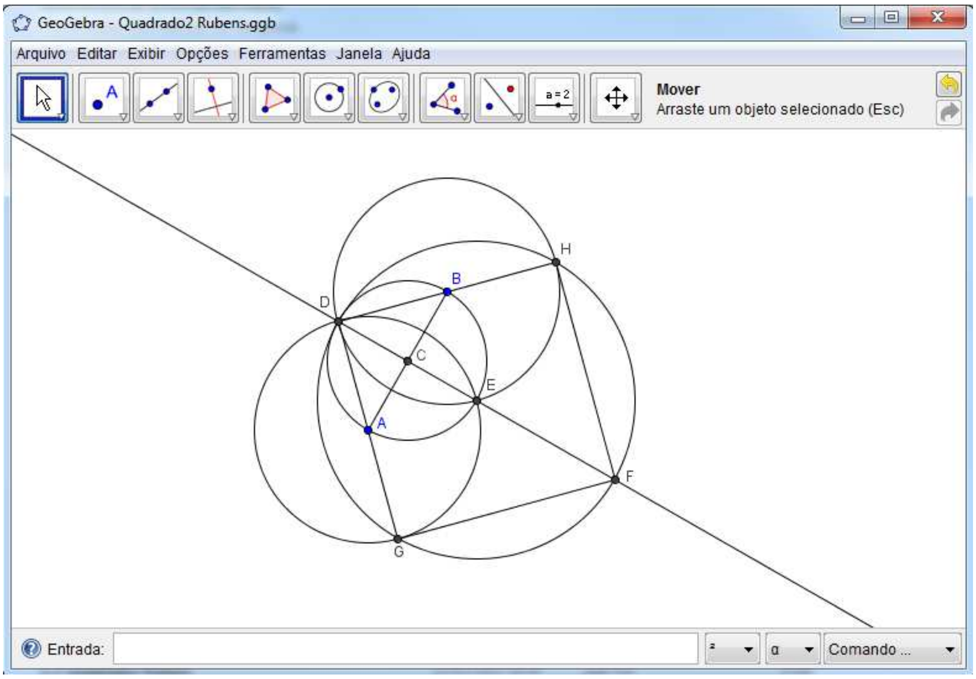


Figura 28: Construção do quadrado, dados os pontos médios de dois lados adjacentes.

Adelmir: Obrigado, Gerardo, e aí, Cláudio, que você achou?

Cláudio: Se garantiu!

Adelmir: Se garantiu é ótimo! A minha pergunta é se algum de vocês tem uma solução diferente dessa?

Cláudio: Eu não tenho.

Silvio: Eu tenho.

Adelmir: Então agora vamos ver a sua solução Silvio, faço questão, só um minuto que vou abrir um novo documento.

Cláudio: Caraca, doido!

Adelmir: Vou mostrar a situação. Aí estão os dois pontos, são pontos médios dos lados de um quadrado e vocês estão à vontade para construir.

Fláudio: Silvio, vai explicando. Silvio, eu não tô entendendo.

Silvio começou imediatamente a construir sua figura, o que, indubitavelmente, demonstra que ele preparou a solução anteriormente da mesma forma que aconteceu com Gerardo. Estava preocupado apenas em concluir o desenho, o que provocou a reivindicação de Fláudio por explicações. Novamente pude identificar um momento de forte interação dos alunos, mesmo estando fisicamente distantes uns dos outros. Reforcei aqui nossa satisfação pelo interesse e a curiosidade que o curso despertou em alunos que eram voluntários e nada ganhariam, a não ser o conhecimento, pela dedicação ao curso.

Silvio: Eu fiz um ponto médio entre "A" e "B", fiz o círculo, o raio até "A", e fiz uma perpendicular e agora vou marcar a interseção, agora vou fazer os pontos. Agora vou fazer outro raio de "ED", agora vou pegar o ponto "D" e fazer uma perpendicular, aí vou marcar a interseção das retas com o raio do círculo maior. Agora é só ligar os pontos. Fiz o quadrado. (Figura: 29).

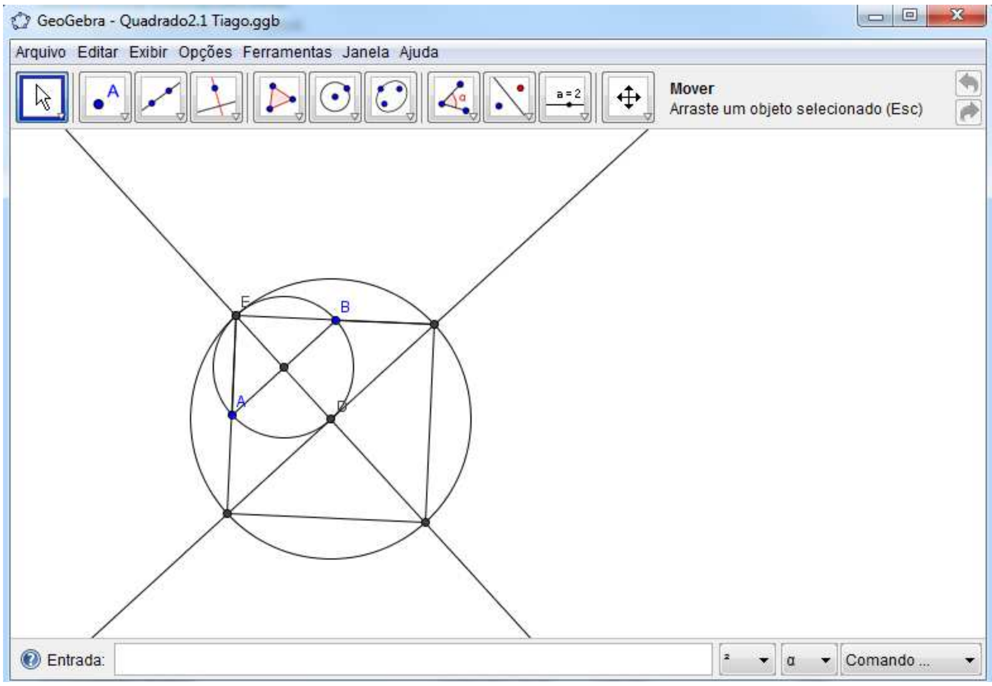


Figura 29: Construção do quadrado, dados os pontos médios de lados adjacentes.

Adelmir: Muito bom, Silvio. E aí, Fláudio, qual é a melhor solução? A primeira ou a segunda?

Fláudio: Não é desmerecendo não...

Adelmir: Ó Fláudio, veja se seu simbolozinho tá fone de ouvido no som.

Fláudio: Tá, professor.

Adelmir: Eu não tava ouvindo direito. Por favor, repita seu comentário, que eu não ouvi.

Fláudio: Não desmerecendo... a resolução do Silvio foi bem mais simples.

Adelmir: Você, Cláudio, que ainda não participou hoje. Que achou?

Cláudio: Eu achei a do Silvio mais interessante, mais eficaz, mais simples, mais rápida e que também prova.

Adelmir: O Cláudio usou uma palavra importante em Matemática, que é a palavra eficaz. Quando a gente termina uma solução em matemática... e isso é uma das etapas da Sequência Fedathi, a teoria que nós usamos no nosso traba-

lho... devemos fazer a depuração da solução, é encontrar a solução melhor. É claro que a solução do Gerardo é perfeita. Se ele tem um problema concreto para resolver, e o que vale é resolver o problema, ele teria atingido seu objetivo plenamente, mas, sem dúvidas, a solução do Silvio foi mais limpa, talvez a do Gerardo se deva até porque desde antes ele tava com a solução e talvez nem tenha usado ferramentas que ele conheceu depois, mas foi muito boa.

Adelmir: Aqui não tem solução errada, tá? Aqui não tem solução errada. As duas estão corretas, é só o que a gente chama de depurar. Só uma observação Silvio, é que quando você foi ligar as retas, você ainda parou no ponto "A" e no ponto "B", nem precisava mais, né? Nem precisava, e a gente pode até verificar, fazer aquele testezinho que você fez ontem, assim, ó...

Foi muito proveitosa a apresentação das duas soluções, ambas de autoria dos sujeitos, por nos dar a possibilidade de fazer as comparações, e para que os outros alunos pudessem avaliar qual o melhor caminho. Foi uma chance ímpar de chamar a atenção para o fato de que uma questão não está totalmente concluída quando se aporta à primeira resposta. Ela deve ser analisada e, se possível, aperfeiçoada consoante a Sequência Fedathi ao recomendar a depuração para que a prova seja alcançada.

Adelmir: Eu vou mais adiante. Ficou mais um desafio ontem, não sei se vocês lembram. Vamos ver se alguém conseguiu caminhar com ele. A situação foi a seguinte: dada uma reta e um ponto fora dessa reta, eu quero construir a perpendicular a essa reta, mas eu não posso mexer na figura, ela tá aí, bem pertinho do término do papel, vamos ver se alguém conseguiu.

Adelmir: Nesse problema só vamos:...é, nós vamos ter que... não vale usar a perpendicular direto porque é covardia, bastava que eu fizesse clique aqui, e tava feito. Eu quero... o problema todinho é que naquela nossa construção antiga nós precisávamos de dois pontos sobre a reta. Vê se lembra.

Adelmir: O que eu preciso é de um artifício pra fugir dessa circunferência que corta a reta em dois pontos, porque, como tá muito próximo o ponto... quando eu boto o ponto muito próximo, eu não consigo desenhar a circunferência.

Silvio: Professor, eu consegui fazer.

Adelmir: Mande bala, meu amigo Silvio.

Silvio: Mas tá faltando outro ponto.

Adelmir: Qual é o ponto que tá faltando?

Silvio: É que eu consigo com dois pontos na reta, só tô vendo um.

Adelmir: Eu vou ser mais cruel com você: não tem é nenhum. Esse daí foi só pra eu construir. Eu vou fazer assim... Deixei o ponto bem longe. E você tá precisando de ponto...

Silvio: Não eram dois pontos ontem?

Adelmir: Ontem, você construía aqueles dois pontos porque você fazia um círculo com o centro lá no ponto dado, com o centro no ponto "K", nós fazíamos dois pontos. Agora, a dificuldade é que eu não consigo porque quando eu for desenhar a circunferência ela cai lá do lado de fora do papel.

Adelmir: E aí, querem pensar mais?

Cláudio: Eu vou tentar uma solução aqui, professor.

Cláudio: Tá aí, professor, a solução que eu pensei.

Adelmir: Cláudio, mas eu queria que ela passasse pelo ponto "K".

Cláudio: Ah! Tá certo. Aí, fica difícil.

Silvio: Professor, a gente utiliza um ponto ou dois pontos que tá na reta?

Adelmir: Silvio a princípio na reta não tem nenhum ponto. Se você precisar, você faz, mas em princípio não tem nenhum ponto, a construção não dá nenhum ponto, esses pontos estão aí só para construir a reta.

Fláudio: Professor Adelmir, posso tentar a solução que eu fiz aqui?

Adelmir: Oh, Meu amigo Fláudio, faça o favor.

Fláudio: Professor Adelmir, antes tinha um terceiro ponto aqui, né?

Adelmir: Eu não ouvi Fláudio.

Fláudio: Antes, tinha um terceiro, eram três pontos, o "K" e dois pontos.

Fláudio tentou usar arcos e, mediante um procedimento não muito claro, chegou a uma perpendicular, mas nem de perto respondia à questão proposta. Sua reta nem passava pelo ponto especificado, como se pode verificar na Figura 30.

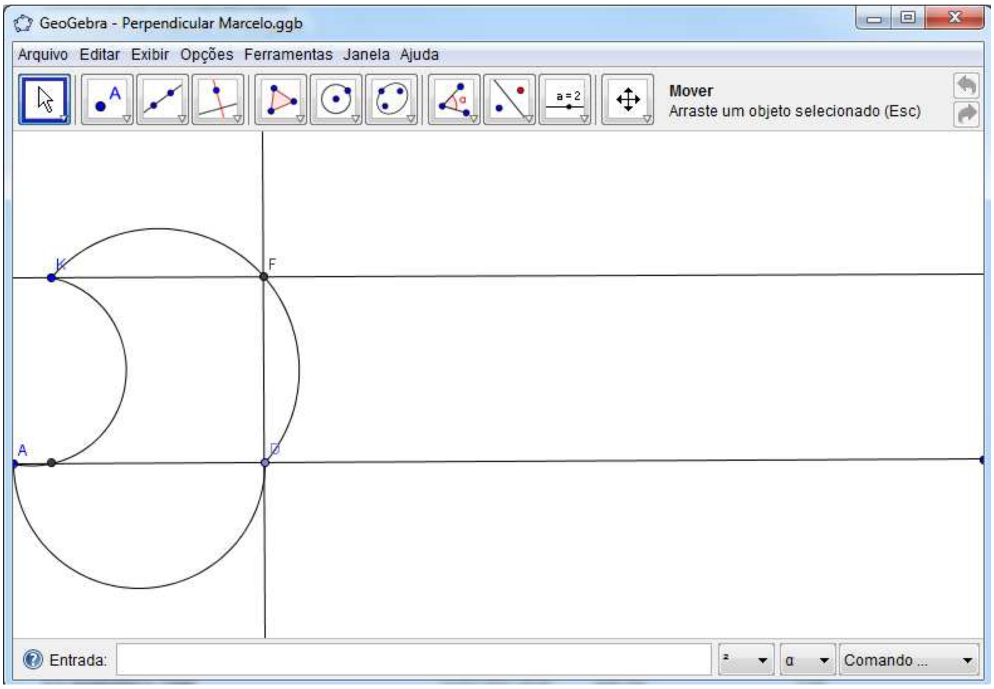


Figura 30: Construção da perpendicular, a uma reta passando por um ponto dado, estando o ponto muito próximo da borda do papel.

Adelmir: Vamos combinar o seguinte: como esse ponto tá atrapalhando vocês, não tem nenhum ponto, você não pode usar nenhum ponto, se você precisar, bote.

Fláudio: Ok!

A questão proposta realmente funcionou como um desafio, desequilibrou os alunos e fez com que eles experimentassem muitas variantes. Posso depreender que eles não conseguiam se distanciar da primeira construção de perpendicular feita; sentiam necessidade dos pontos sobre a reta e foi gasto muito tempo na etapa de ***maturação*** do problema. Entendo isso como um fato muito positivo porque trouxe todo o grupo para o debate. Questionaram, reclamaram, acharam difícil, seguiram por vertentes infrutíferas, deixando evidente a participação de todos na aula. A correção das soluções que eles apresentavam inicialmente não era o que mais me importava, mas o envolvimento, a interação deles. A mediação do professor ficou evidente, ora auxiliando, ora apresentando contraexemplos para rejeitar um raciocínio. O ambiente TeleMeios criou as condições para todo o processo que, invocando novamente minha experiência de magistério, muito dificilmente se reproduziria em salas de aula convencionais.

Fláudio: Tá certo, professor Adelmir?

Adelmir: Veja só: você construiu uma perpendicular, mas eu quero uma perpendicular que passe por "K". Esta é a perpendicular, essa que tá ficando iluminada, essa é paralela. Eu quero uma perpendicular que passe por "K".

Adelmir: Conseguiu, Fláudio?

Fláudio: Eu pensei aqui, mas num dá certo não.

Adelmir: Eu achei a solução do Cláudio muito próxima da verdade. Ah, você quer começar daquele mesmo jeito, Cláudio, pra ver se a gente termina junto?

Cláudio: Pode ser.

Adelmir: Vamos tentar fazer junto. Silvio, dá uma ajuda aí. Gerardo também. Vamos ver se a gente consegue.

Fláudio: Bom, eu tava pensando mais ou menos assim: criar um ponto na reta, fazer um círculo com um raio entre os dois pontos e outro círculo com o mesmo raio tendo como centro o novo ponto que foi criado. Essa seria a perpendicular, só que não é ainda o ponto que tá querendo, que é o que... vou dar algum nome aqui pra ele. Pronto, tem que passar no ponto "C".

Adelmir: Olha só, Fláudio, me dá licença fazer. Eu vou alterar uma passagem sua.

Fláudio: Oi?

Adelmir: No lugar de usar o segmento eu vou usar a reta pra ficar mais fácil pra eu trabalhar. Note o seguinte: essa reta é perpendicular à reta dada, não precisa nem a gente verificar, e como a gente já sabia fazer essa daí, a gente podia até ter ido mais rápido... porque eu fiz questão que fizesse pra gente ficar revendo a solução. Então veja bem... não dá para eu fazer a perpendicular naquele ponto, porque estou com a limitação do papel, mas será que dá pra eu fazer a paralela?

Adelmir: Observe que a reta que o Cláudio fez podia tá em qualquer lugar. A paralela a gente fez assim, vê se lembra.

Adelmir: Só vou baixar, não vou fazer covardia não, tá? Pra minha paralela lá ficar aparecendo... só quero baixar. Veja que por ali eu podia traçar... na interseção da primeira com a terceira a gente tem uma paralela. A primeira com a terceira, na realidade... é essa. Essa é paralela a reta dada e veja que eu não precisei..., bastava que eu fizesse uma perpendicular em qualquer ponto, como o Cláudio fez, e em dado momento fazer a paralela, essa seria uma solução. Estamos abertos a outras.

Silvio: Eu achei uma bem mais fácil.

Adelmir: Vocês ouviram que o Silvio disse que achou uma bem mais fácil? Bora lá, Silvio!

Silvio: Eu crio dois pontos na reta, que são esses dois pontos que tá aí, tanto faz a distância, aí eu pego o compasso, agora eu vou abaixar aqui. Professor, tu pode baixar a figura? Vou fazer uma interseção dos dois raios, agora fazer uma reta, tá aí, fiz uma perpendicular, com dois pontos.

Adelmir: Vamos analisar aqui, né, meu amigo Silvio; tô gostando muito da solução, mas deixa eu entender (Figura 31).

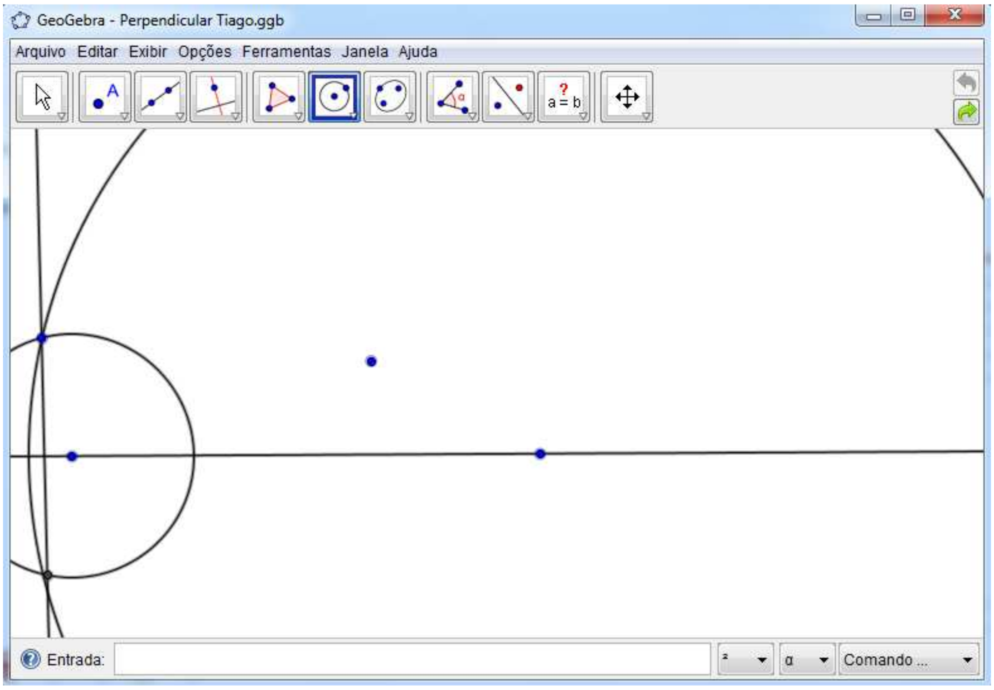


Figura 31: Construção da perpendicular a uma reta, passando por um ponto dado, estando o ponto muito próximo da borda do papel.

Adelmir: Silvio, muito legal, viu? Muito legal. Acho que a gente tá avançando bem. Mas não é a solução que eu esperava...se fosse no papel você não ia desenhar a circunferência grande... eu tenho outra aqui... deixa eu mostrar...ai a gente segue adiante..,

O GeoGebra favoreceu a construção de Silvio, que não seria possível com régua e compasso. Partes das figuras cairiam fora do papel, o que não ocorre no computador porque ele exibe no monitor a figura parcialmente. Desse modo, a sua solução não poderia ser aceita em um curso tradicional, mas eu não poderia declará-la incorreta dentro das condições que foram oferecidas a ele. Em razão de episódios como este é que algumas pessoas argumentam que a Geometria Dinâmica é outra geometria que não a de Euclides. Não acato essa posição porque acredito que apenas algumas potencialidades do cenário de trabalho foram alteradas, mas os argumentos usados foram matematicamente corretos.

Após apresentar a solução esperada, prossegui com as atividades previstas.

Adelmir: Pra fechar essa nossa parte de fundamentos, eu queria fazer mais duas coisas, aí a gente passa para novos desafios, porque vocês tão gostando é de tentar as soluções. Então vamos nessa. Diana, por favor, se você puder dê uma olhadinha se o tá Cláudio trabalhando, que eu acho que ele tá na internet hoje, que ele não falou nada ainda. Mas vá bem escondidinha, que é pra ver se ele não tá... não tá fazendo outra coisa, viu? O Gerardo, que não falou nada, eu tenho certeza que ele tá fazendo outra coisa. Então é sempre bom a gente pedir pra eles falarem e ver o que eles tão desenhando.

Cláudio: Tô tentado, professor.

Gerardo: No meu caso, professor, eu tava observando aqui as soluções.

Adelmir: Ok, Gerardo!

Percebendo a pequena participação de alguns dos alunos, por meio de um gracejo, chamei sua atenção para que se reintegrassem ao grupo. Esse episódio me propicia levantar a discussão sobre um ponto crucial no novo ambiente: como garantir a efetiva participação de todos do grupo no desenvolvimento das atividades? Essa é uma tarefa que pode ser controlada pelo professor, como fiz no relato acima, mas é necessário que ele esteja atento tanto às intervenções dos alunos quanto às ferramentas do TeleMeios, visto que o programa permite acompanhar as ações de cada sujeito. O problema não é novo, todos os professores se deparam com ele em suas salas de aula. A novidade é que os estudantes estão expostos a maiores fatores de dispersão, conectados que estão na internet e podem navegar para bem distante. Em contrapartida, o mediador tem melhores instrumentos de intervenção por poder agir diretamente sobre cada participante.

Adelmir: Agora, pessoal, precisamos de mais só, só dois fundamentos teóricos mais e eu vou pedir, depois desses fundamentos, que a gente ainda faça alguns exercícios amanhã e a gente faz o fechamento na quinta, tá? Mas acho que a gente tem avançado bem e eu queria receber hoje as impressões de vocês, que quase todos já me entregaram, e também desse terceiro encontro.

A situação agora é o seguinte: dado um ângulo numa posição qualquer, eu quero transferir esse ângulo de um local para outro, por exemplo, eu tenho esse ângulo ABC com vértice em "B" e quero transferir... e quero transferir esse ângulo para reta "C". Alguns fundamentos teóricos são necessários que a gente fale, porque, como a gente já comentou, isso não são coisas simples, esses problemas que nós estamos batendo aqui, as pessoas... a humanidade passou muito tempo para resolver e, se vocês se depararem com os problemas do real, do concreto, vocês vão ver que ainda hoje as pessoas que não são iniciadas, que não têm um treinamento, que não têm um raciocínio desenvolvido pra geometria, elas têm muita dificuldade pra construir alguns objetos.

Só como curiosidade, outro dia, eu estava visitando uma obra e (falando com um pedreiro)... ele estava querendo cortar uma cerâmica de formato quadrado e ele ia cortar na diagonal, em Engenharia se chama cortar a 45°, para fazer pisos... é uma estratégia de sentar a cerâmica, pode ser a 90 ° ou a 45°, aí precisa fazer alguns cortes... e ele tava em dúvida se a máquina que ele tinha pra cerrar a cerâmica cabia. Eu disse cabe sim, pois essa cerâmica tem 40 cm, então é fácil porque esse tamanho vai dar 56 cm, e aí dá na máquina.

Aí ele ficou olhando... olhando... quando me afastei, eu notei que ele tava medindo a diagonal do quadrado Me perguntou depois: professor, como é que o senhor faz aquela soma lá? É obvio que eu não tava fazendo uma soma, e eu achei muito bonito, muito pura a sua intervenção, e aqui não há nenhuma frescura, mas não era nem soma, mas é que eu calculei a diagonal do quadrado, pelo teorema de Pitágoras mentalmente, e pra ele isso só existe se for fazendo a medida com a trena. Então essa é a diferença do conhecimento. O conhecimento nos permite trabalhar de uma maneira abstrata, eu não preciso pegar numa cerâmica para saber quanto é que vai ser a medida da sua diagonal.

Então em alguns passos são necessários a nossa interferência, porque se não nós perderemos muito, muito tempo. Não necessariamente em Educação a gente precisa seguir todos os passos que a humanidade seguiu para desenvolver um certo conhecimento.

Então qual é o nosso desafio agora? É dado esse ângulo, trazer essa medida exatamente pra sobre essa reta. Então vou fazer assim. É uma construção fácil também, vou marcar um ponto sobre a reta, vai ser o ponto "F". Ele vai ser o vértice do meu ângulo. Se eu tivesse uma posição determinada, você traria esse ponto pra cima daquela posição que foi definida. Agora nós vamos fazer assim: com o compasso sobre esse ângulo, com o compasso eu vou traçar no vértice desse ângulo, esse círculo, essa circunferência e vou determinar as intersecções. Com o mesmo raio e usando compasso... com o mesmo raio... eu vou até agora ao ponto "F" e traço a mesma circunferência, então este raio é igual ao anterior. Observe agora que, com o compasso, eu vou traçar, com a abertura determinada pelas duas intersecções... antes vou determinar a interseção... Por que que nós fazemos a interseção? Porque o nosso olhar nos engana, a gente pode pensar que está em cima da interseção e colocar o ponto de maneira errada, isso já aconteceu no nosso curso, então determinei a interseção e com o compasso e a abertura limitada por este arco, eu vou traçar a circunferência, vejo a interseção, e agora, quando eu traço este segmento, eu garanto a você, que o ângulo desenhado é exatamente igual àquele...eu usei um arco muito pequeno lá pro ângulo, mas o ângulo tem a mesma medida. Voltando um pouco à solução, eu tinha um ângulo, nesse ângulo tracei um círculo com o compasso pra identificar esses dois pontos. Com o mesmo raio e no vértice pra onde eu quero transferir, eu agora trouxe o círculo com o mesmo raio, com a abertura dos dois pontos do ângulo que forma um arco sobre círculo, eu marquei um novo círculo, liguei o ponto, o ângulo tá transferido, tá?

Uma outra construção interessante que nós vamos precisar é: dado um segmento, dividir esse segmento num número de partes iguais. Ah se vocês imaginarem a complexidade desse problema... imagine que é um terreno que os caras iam dividir em partes iguais, sem ter números. Os gregos não tinham número, eles faziam só a medida dos segmentos e faziam a razão, tá? Então enquanto eu tomo aqui uma gota de água, eu gostaria que vocês, nesses 15 minutos finais, dividissem esse segmento que eu desenhei em cinco partes iguais.

Cláudio: Pode usar a ferramenta de ponto médio?

Fláudio: O professor Adelmir saiu.

Cláudio: Quê?

Fláudio: O professor Adelmir saiu.

Cláudio: Eu sei, tô perguntando para o resto do pessoal aí.

Fláudio: Cláudio, eu acredito que pode usar qualquer ferramenta.

Cláudio: Eu acho que se a gente usasse ponto médio...

Fláudio: São partes iguais.

Adelmir: Adelmir, eu sai partindo aqui assim no olho... eu acho que tá mais ou menos sabe... Não vale! Infelizmente essa é a tragédia... eu tenho que garantir que eles são iguais.

Gerardo: Tem que dividir em quantas partes?

Adelmir: Cinco.

Adelmir: Existe o teorema, não sei se vocês lembram, que é o famosíssimo teorema de Tales, Tales de Mileto. O teorema de Tales talvez tenha sido o primeiro teorema realmente demonstrado na Matemática. Ele é assim... (Figura 32).

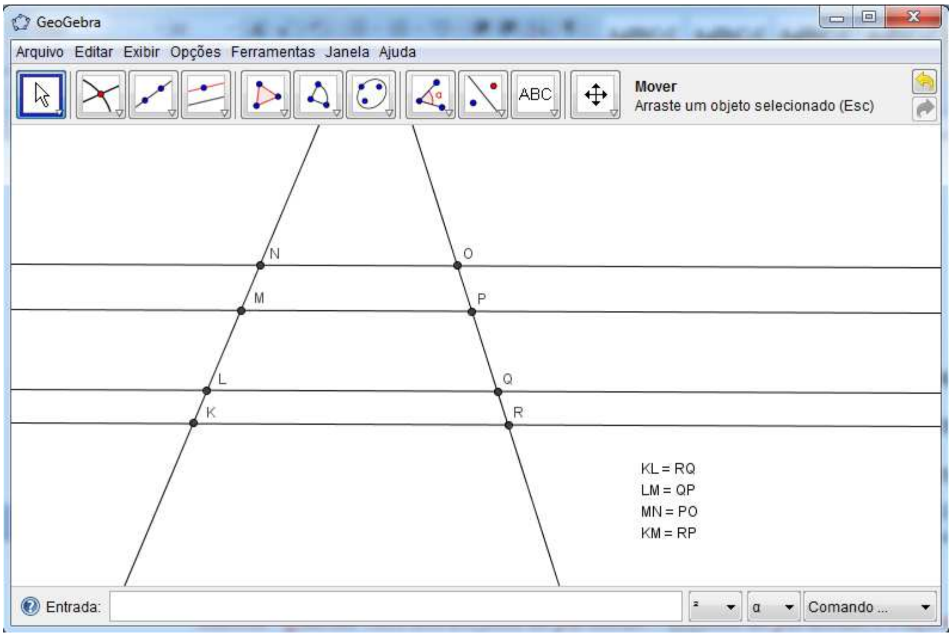


Figura 32: Teorema de Tales.

Adelmir: Quando você tem um feixe de paralelas... um feixe de paralelas, e traça as transversais... os segmentos que ficam determinados sobre cada transversal *são iguais, é esse o princípio que nós vamos usar... Isso se justifica por semelhança de triângulos, né?*

Adelmir: O procedimento é o seguinte: uma extremidade do segmento que eu quero dividir, eu traço uma semirreta começando nesse ponto... Essa semirreta pode ser qualquer. Com a ferramenta compasso eu vou traçar um círculo com raio qualquer também. Meu compasso não tá indo... vou tirar essa medida fora. Essa medida pode ser qualquer. Pra ser o círculo, eu vou determinar a interseção com a semirreta auxiliar que eu fiz, com o mesmo raio vou traçar um novo círculo com centro nesta interseção.

Adelmir: Veja que eu tracei cinco círculos com o mesmo raio, então os segmentos que estão determinados na semi-reta são todos congruentes, têm a mesma medida. Eu vou pegar a última interseção e vou ligar a extremidade do segmento. E agora eu vou traçar, por cada uma das intersecções da semi-reta, uma paralela à reta que eu encontrei inicialmente. Vou marcar as intersecções. O segmento está dividido em cinco partes iguais.

Fláudio: Professor, isso só é possível porque os ângulos são iguais, né?

Adelmir: Excelente observação, Fláudio. O que me garante que os ângulos são iguais é que elas são paralelas... tá certo? Também é uma decorrência do teorema de Tales. Olhe como é interessante...

Fláudio: Professor como é que é o nome dos ângulos?

Adelmir: Exatamente. Vamos lembrar a pergunta do Fláudio. É bem legal?

Cláudio: Ei, Fláudio, tá no máximo o volume do teu microfone? Tá no máximo? Tá bem baixinho.

Adelmir: Observe essas duas paralelas agora, Fláudio. Nessas duas paralelas eu vou traçar uma transversal. Note...

Cláudio: Ei, macho, tô fazendo trabalho, depois eu falo contigo. Valeu!

Como Cláudio estava conectado à internet recebeu um chamado através de uma das redes sociais ...

Adelmir: Observe – este ângulo e este ângulo são correspondentes, eles têm a mesma medida; este ângulo, este ângulo e este ângulo do lado de cá, eles são ditos alternos /internos, eles estão de lados opostos da transversal, mas dentro da paralela, alternos internos, eles são congruentes. Esses dois aqui de fora, olha, este e este, eles são alternos externos, estão do lado externo da trans-

versal, do lado externo da paralela e de lados opostos à transversal. Eles também são congruentes, eles têm a mesma medida. Então o que nós trabalhamos aqui foi sempre com ângulos correspondentes, este ângulo é correspondente a esse, então a nossa medida aí é satisfatória.

Adelmir: Sendo que vocês todos perderam o GeoGebra por aí, né? Eu fiz sem querer, mas vou abrir novamente. Pergunto: o GeoGebra já está compartilhado com vocês novamente? Então veja, isso é uma observação importante pra nossa pesquisa. O software *foi fechado involuntariamente e, como ele foi fechado involuntariamente, todos devem pedir novamente o compartilhamento. Por favor, façam isso.*

Adelmir: Já estão compartilhando?

Alunos: Sim.

Adelmir: O Cláudio sim?

Adelmir: E o Fláudio?

Fláudio: Ok, professor Adelmir!

Adelmir: Gerardo?

Gerardo: Normal, professor.

Adelmir: Silvio?

Silvio: Sim.

Adelmir: Eu quero fazer mais uma observação interessante e a gente fecha, tá? Mais dois minutos.

Adelmir: Eu fiz um círculo com o meu compasso e tracei uma corda desse círculo; corda é qualquer segmento que liga dois pontos do círculo, tá certo?

Fláudio: Certo.

Adelmir: Esse caminho CÂD... esse caminho CÂD, sobre a circunferência é o que a gente chama de arco, quando eu traço uma corda ou quando marco dois pontos quaisquer sobre uma circunferência, eu faço dois arcos, então eu tenho um arco que sai de "C" e vai até "D", um arco maior, e tenho um arco menor. Vamos considerar este arco maior. Eu vou fazer o seguinte ó: sobre esse arco eu marquei esse ângulo CÂD, eu vou marcar a medida. É sempre assim como a gente acha o ângulo interno, porque muitas vezes vocês... ou eu quando queremos marcar... estamos marcando um outro ângulo. Observem a medida desse ângulo e vejam a brincadeira que eu vou fazer. A corda *sobre a circunferência, o ângulo que você olha para corda onde você estiver é sempre o mesmo, então olha: se eu fiz outro ângulo... Embora eles nos pareçam totalmente diferentes, a medida é sempre a mesma. Esse arco que subentende esse ângulo é chamado de arco capaz. O arco capaz é aquele arco... arco capaz desse ângulo é esse arco que faz com que eu veja o ângulo sempre, veja o segmento sempre sob o mesmo ângulo, por mais que eu me desloque vou encontrar sempre o mesmo.*

Vamos parar por aqui agora. A tarefa de casa é a seguinte: eu entreguei um resuminho pra vocês. Eu estou me orientando no curso de construções por aquele livro que é o livro do prof. Eduardo Wagner... professor Eduardo Wagner que era professor do INMPA... é considerado... o livro dele de Construções Geométricas, o melhor livro. E eu tenho uma proposta aos amigos: dar um presente ao professor Eduardo Wagner, resolver todos os problemas do livro dele. Isso já foi feito, eu tinha essa ideia, mas alguém mais rápido do que eu, ano passado, publicou um livro com as soluções do livro do professor Wagner. Só que essa pessoa publicou as soluções usando régua e compasso. A minha ideia é a gente fazer usando Geogebra, usando geometria dinâmica. Então a tarefa de casa e eu não quero... não tenho pedido muito a vocês... porque eu sei que esse trabalho voluntário, já é demais, estão ajudando muito com a minha pesquisa, mas a tarefa seria daquele livro escolher dois problemas que você soubesse resolver pra nos apresentar amanhã. Escolhe dois, quaisquer dois, e apresentaria amanhã pra gente ver como a gente se sai. Você vai lançar o problema, vamos ver se os colegas fazem e se não, você apresenta a solução e se tiver errada não tem problema nenhum, a gente só vai dar um salga em você, mas é coisa pouca, não vai ser muito violento não. Obrigada a todos.

Aluno: Professor, mas é pra resolver só usando régua e compasso também?

Adelmir: Você já pode usar direto as ferramentas que a gente conhece, você já pode usar perpendicular, mediatriz, bissetriz, paralela, já pode usar ponto médio e já pode dividir um segmento direto se ele dividir lá, tá certo? Fique à vontade pra usar as ferramentas que já conhecem.

Aluno: Tá bom.

Adelmir: Obrigado a todos.

Análise *a posteriori*

A terceira aula teve duração efetiva de uma hora e 28 minutos.

Os problemas com a tecnologia que tive ao iniciar a aula de nenhuma maneira inviabilizam a consolidação do meu projeto. Trata-se de um novo ambiente, em pleno processo de desenvolvimento, e que ainda pode apresentar inconsistências; falhas nas comunicações não são privilégios do aparato que montei, elas acontecem não raramente na rede bancária, nos órgãos governamentais e até em ambientes muito mais delicados como no controle aéreo. Sabe-se que a justificativa não anula o estorvo da espera, mas é uma variável que fica fora de controle. Não é uma questão do ambiente pedagógico, mas de tecnologia em escala global. Mais importante é que os aspectos de ensino e aprendizagem, questões centrais desta pesquisa, não foram afetados pelo inconveniente produzido pela queda da rede.

A esperança de que não haveria mais entraves causados pela tecnologia não se concretizou. E pela conjuntura atual, posso pensar que os eventos a distância estarão sempre sujeitos a estes embaraços que fogem ao controle dos organizadores. De modo que a afirmação

> (1) Todos os problemas causados pelo aparato tecnológico foram superados,

é indecidível no âmbito deste projeto. Por mais que me cerque de todos os cuidados para que tudo funcione a contendo, sempre fico na dependência de fatores externos que podem afetar a concretização dos eventos.

Percebo que a interação dos alunos e a destes com o professor vêm descrevendo uma trajetória ascendente, o que pode se revelar em momentos diversos dos nossos encontros. E o TeleMeios, afirmo sem vacilação, é um elemento fundamental para isso, pois os alunos, atualmente, sentem-se mais à vontade para interagir por intermédio do computador do que na sala de aula. Tal comportamento se verifica porque o veículo já é exaustivamente usado em suas atividades cotidianas, na conversa com os amigos e no grande número de relações virtuais que estabelecem através da rede. Assim não é difícil inferir que

> (2) Pela experiência já adquirida no ambiente TeleMeios a interação dos sujeitos será maior do que nas aulas anteriores –

é uma proposta verdadeira. Posso elucidar, mais ainda, esta conclusão, pinçando o seguinte diálogo:

Cláudio: Pode usar a ferramenta de ponto médio?

Fláudio: O professor Adelmir saiu.

Cláudio: Quê?

Fláudio: O professor Adelmir saiu.

Cláudio: Eu sei, tô perguntando para o resto do pessoal aí.

Fláudio: Cláudio, eu acredito que pode usar qualquer ferramenta.

Cláudio: Eu acho que se a gente usasse ponto médio...

Fláudio: São partes iguais.

Mesmo levando em conta a determinação anterior de que só emitiríamos juízo sobre a questão segundo a qual

> (3) A função mediadora do professor será mais efetiva do que seria em uma sala de aula convencional,

posso acumular o trecho a seguir como subsidio para decisão futura, porque ele é revelador de efetiva mediação durante a aula.

Silvio: Professor, eu consegui fazer.

Adelmir: Mande bala, meu amigo Silvio.

Silvio: Mas tá faltando outro ponto.

Adelmir: Qual é o ponto que tá faltando?

Silvio: É que eu consigo com dois pontos na reta, só tô vendo um.

Adelmir: Eu vou ser mais cruel com você: não tem é nenhum. Esse daí foi só pra eu construir. Eu vou fazer assim... Deixei o ponto bem longe. E você tá precisando de ponto...

Silvio: Não eram dois pontos ontem?

Adelmir: Ontem, você construía aqueles dois pontos porque...

Havia deixado dois problemas para que resolvessem em casa, e foi com muito entusiasmo que recebi a devolutiva dos alunos. Quando perguntei se tinham cumprido a tarefa em menos de dez segundos já haviam se voluntariado para a resolução da primeira questão. Duas versões foram apresentadas, permitindo que os alunos as comparassem e percebessem os efeitos da depuração, da otimização de uma solução em Matemática. Quanto à segunda pergunta, não trouxeram respostas elaboradas como para a primeira, e creio que isso ocorreu pela maneira como a propus, rapidamente, no finalzinho da aula.

Adelmir: Pois eu vou fazer uma brincadeira com vocês: eu quero que vocês construam a perpendicular a esse ponto, só que ele está nessa posição e não vale mexer. Ele tá no cantinho da sua folha de papel. Você se lembra como era a construção? Você ia lá, desenhava uma circunferência pra pegar os dois pontos. E agora?

Não houve a *maturação* com a mesma intensidade desenvolvida na primeira. Quando lanço a conjectura:

(4) Os alunos apresentarão soluções satisfatórias para as tarefas de casa

que, sabia, aparentar ser uma proposição muito vaga e desprovida de substância, na realidade, com ela, queria avaliar o efeito motivador que o curso, com suas particularidades, estava exercendo sobre o grupo. Se, realmente, era possível despertar o interesse pela Geometria em sujeitos que não possuíam nenhuma motivação prática e objetiva para o seu estudo. Assim, a propositura deve ser acatada, podendo guardar-se como subproduto, mas não menos importante, que a *maturação* é decisiva na forma como os alunos farão frente aos desafios propostos.

Quando lancei a situação-problema – construir uma perpendicular ao segmento AB pelo ponto A, estando este ponto muito próximo da borda do papel – já sabia da série de questionamentos que ela ocasiona. Por duas vezes, uma na disciplina de Geometria do curso de Matemática da Universidade Federal do Ceará, e outra no Grupo de Estudos de Geometria do Laboratório Multimeios, quando deparei a questão testemunhei o efeito desestabilizador que ela proporciona. Por sair do convencional, ela faz com que as pessoas, diante dos obstáculos enfrentados, tentem as mais inusitadas estratégias. Era de se esperar que neste curso o efeito fosse análogo.

Tamanho foi o desafio que, considerando todas as discussões, dediquei 28 minutos à sua abordagem. A solução de Silvio, que considerei satisfatória, não seria possível com a régua e o compasso, pois as circunferências cairiam fora do papel, mas foi possível usando o *software*, de sorte que, para a questão que estava sendo proposta, dentro das condições de contorno que a limitavam, a propositura de que

(5) O emprego do Geogebra facilitará a construção da perpendicular a uma reta passando por um ponto, estando esse ponto próximo a borda do papel,

resulta autêntica.

Admito que o problema que Silvio resolveu seria diferente daquele que onde só lhe fosse permitido o uso da régua e do compasso e que, assim, ele não teria aplicado os conteúdos desejáveis de Geometria. Não se pode negar, no entanto, que ele teve que se valer de fundamentos desenvolvidos neste curso, para chegar a tal ponto, fundamentos matematicamente válidos. Quanto às propriedades que não empregou, cabe ao professor gerar novas situações onde o estudante possa manifestar a assimilação do conhecimento específico.

Um tema recorrente, não apenas em ambientes virtuais, é que

(6) Os alunos apresentarão dificuldades para a compreensão das situações-problema.

No caso apreciado, isso ficou claro na solução de Fláudio, ao apresentar uma perpendicular que não passava pelo ponto indicado, e ainda quando Silvio insistia na solicitação dos dois pontos para construir a perpendicular. A hipótese fica então evidenciada, mas não posso me satisfazer com sua comprovação, cumprindo-me chamar a atenção de todos os professores para o fato de que nada é óbvio, que é necessário detalhar, *maturar* o entendimento de cada situação proposta.

Opinando sobre o terceiro encontro (Apêndice 2), os alunos, corroborando com minhas avaliações, me disseram:

- Cláudio – não teve problemas com o hardware mas ainda se ressente por não lembrar conceitos de geometria. Teve maior facilidade para operar com o software e que ele desperta o interesse pela geometria. Que o curso está sendo como uma revisão porque ele relembra os conteúdos de geometria.
- Fláudio – que está tendo um melhor entendimento e maior facilidade com os desenhos geométricos. Não teve dificuldades com os equipamentos e que está usando melhor as ferramentas.
- Silvio – Cada dia que passa mais aprende a usar o software, que já está se lembrando de regras e propriedades de geometria e que já está acostumado com o modo diferenciado de ensino.
- Gerardo – não tem dificuldades com o segmento computacional. Percebeu que mesmo com o aumento na complexidade das situações, houve melhoria no entendimento dos conceitos e uma maior desenvoltura dos sujeitos.

Quando Gerardo diz que houve maior desenvoltura, na realidade, se refere a interação e Silvio, ao afirmar que está acostumado com o ensino diferenciado, mostra as vantagens da utilização do TeleMeios. Estas declarações apoiam minha atitude de acatar as hipóteses levantadas na análise *a priori*.

5.1.3.4 Aula 4

Análise Preliminar

Nos três primeiros encontros introduzi, uma larga quantidade de fundamentos. A base de conhecimentos em Geometria dos sujeitos do experimento – já ficou evidenciado – não é muito consistente. Temo que o acúmulo de informações, em estreito intervalo de tempo, sem a devida sedimentação, leve ao embaraço dos conteúdos recém-incorporados por eles.

De todas as construções elementares, que para Wagner (1993), são paralelas, perpendiculares, a mediatriz, a bissetriz, o arco capaz, divisão de um segmento em partes iguais e traçado de tangentes a um círculo, só me falta concretizar a última. Então, é conveniente que nessa etapa me dedique à prática da teoria estudada.

É por meio da resolução de problemas que o aprendiz consolida os conceitos e desenvolve competências para a transposição didática, para a aplicação em situações diversas das propriedades que passou a dominar. É onde toda a aprendizagem de Matemática se materializa.

Tendo como base essas ponderações, a Aula 4 será de resolução de de exercícios, quando incentivarei o envolvimento de todos para que as soluções sejam construídas, através de sua interação, de maneira colaborativa.

No final da terceira aula, pedi que cada aluno resolvesse duas questões do livro texto para apresentação em nosso ambiente pedagógico. A aula, porém, não deve ficar apenas na dependência da iniciativa dos alunos; será uma desagradável surpresa se não trouxerem seus exercícios, e, como medida de precaução, já levarei uma relação de questões para serem propostas.

Análise *a priori*

Preparando uma atmosfera positiva para a aula (*tomada de posição)*, iniciarei restaurando os passos que já foram dados no curso até agora, e darei as justificativas para fazer uma aula de exercícios, esclarecendo o que espero de cada aluno.

Criada a ambiência favorável para os trabalhos, lançarei a primeira questão do dia:

Dividir um segmento dado em partes proporcionais a 2, 3 e 5.

Na aula anterior, foi aprendido a dividir um segmento dado em partes iguais, e acredito que os alunos tenham assimilado esse procedimento sendo capazes de reconstruí-lo. Acrescentamos, porém, um obstáculo que é a divisão do segmento em partes diferentes – proporcionais. O problema não é muito complexo e mediante um pequeno artifício recai no caso anterior. Para obter a solução, os alunos precisarão recordar dos fundamentos da teoria das proporções e da construção elementar feita na aula anterior.

Na segunda atividade pedirei aos sujeitos para:

Construir um triângulo isósceles, sendo dados a base "AB" e um ângulo da base,

Que, penso, ser um exercício fácil e que será resolvido em pouco espaço de tempo. Como prerrequisito para sua resolução, é necessário apenas conhecer propriedades básicas dos triângulos isósceles e os procedimentos para transportar um ângulo. Já realizei a transferência de ângulos no curso e o objetivo principal da proposta é sedimentar as etapas desse processo. No final, espero que seja apresentada a construção da Figura 33.

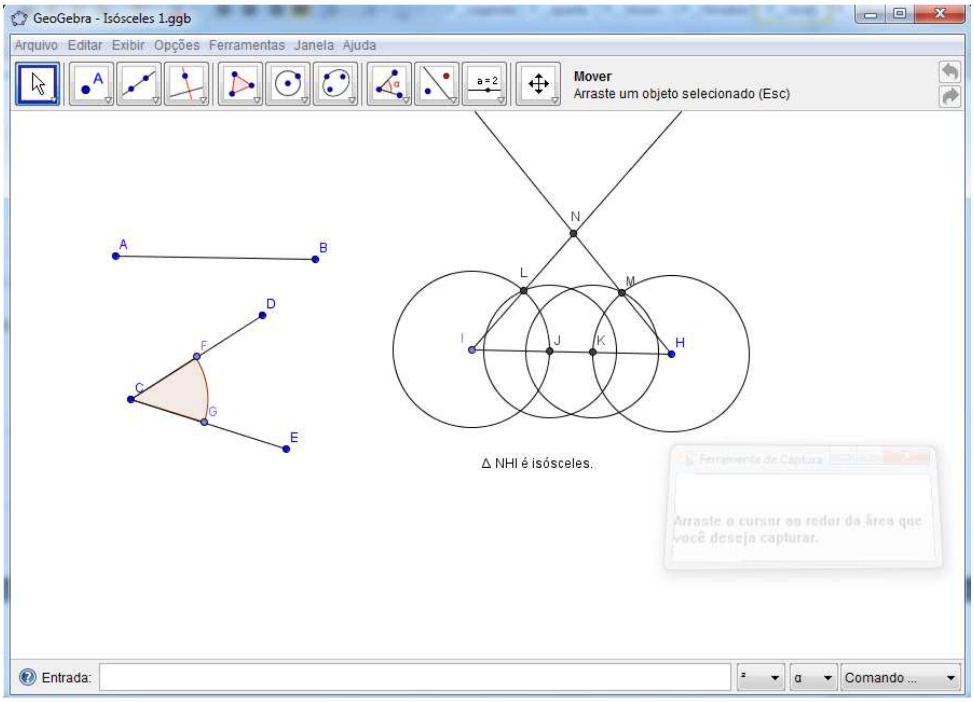


Figura 33: Construção de um triângulo isósceles, sendo dados a base e o ângulo da base.

Adiantando-me na lista de exercícios, pedirei para:

Construir um triângulo retângulo, sendo dados
um cateto e o ângulo agudo adjacente a ele.

Da mesma forma que na situação anterior, o aluno precisará transportar ângulos, construir perpendiculares e dominar propriedades dos triângulos, nesse caso, retângulos. Parte da fundamentação necessária foi praticada no exercício passado, o que me faz pensar que não terão dificuldades para resolver a questão.

O próximo problema será:

Determinar o centro de um círculo dado.

Acredito que será a situação na qual o grupo terá mais dificuldades, porque, para solucioná-la, terão que introduzir elementos como cordas ou arcos e, provavelmente, de início, tentarão soluções mecânicas sem rigor matemático.

Em minhas investigações, como nos encontros anteriores, permanecerei atento aos aspectos relacionados ao ambiente computacional e no âmbito do ensino e da aprendizagem, principalmente à interação e à mediação. Para isso considerarei as hipóteses anteriormente levantadas, e como novos pontos de observação, acrescento:

(1) Por se tratar de uma aula de exercícios, haverá uma intensa interação dos sujeitos.

(2) Os alunos dominam todos os prerrequisitos necessários para a resolução dos problemas.

(3) Os alunos não terão dificuldades para empregar as construções já elaboradas no curso.

(4) Os alunos proporão soluções mecânicas, sem rigor matemático.

(5) O tempo didático será suficiente para a discussão de todas as questões.

(6) O grupo construirá colaborativamente a resolução das atividades propostas.

Experimentação

Adelmir: Atenção para a chamada.

Adelmir: Cláudio?

Cláudio: Presente.

Adelmir: Tá compartilhando tudo, Cláudio?

Cláudio: Tá tudo ok, professor.

Adelmir: Fláudio?

Fláudio: Presente, professor, tudo ok aqui!

Adelmir: Gerardo?

Gerardo: Tudo ok aqui também!

Adelmir: Silvio?

Silvio: Presente. Tudo ok!

Adelmir: Pessoal, nós ontem tivemos que avançar um pouco mais com alguns fundamentos teóricos e a gente sentiu que no final da aula os conceitos matemáticos já ficaram um pouco mais pesados. Isso é natural, né? Geometria... matemática... ela apresenta algumas dificuldades às vezes, então a melhor ma-

neira pra que a gente possa superar essas dificuldades é praticando. Então eu selecionei algumas atividades, todas estão relacionadas com as construções que nós já fizemos, vamos lembrar, né? Nós já sabemos construir a perpendicular, a mediatriz, a paralela, o ponto médio, já sabemos dividir um segmento em partes iguais, e nós já sabemos construir uma bissetriz, já sabemos também transferir um ângulo. Só com essas ferramentas nós vamos propor algumas atividades hoje, e seria muito importante pra nós que todos vocês tentassem, e que vocês, no seu borrão... se você escrever qualquer coisa no seu rascunho, por favor, vocês gravem, porque eu gostaria de ver depois. Adelmir, mas se estiver errado? Não tem resposta errada em geometria. Tem professor chato, aqueles que botavam um X na gente. Não tem resposta errada, a gente quer discutir o que você fez. Vocês viram como foi legal que nós resolvemos um problema, mas não era isso que a gente tava procurando? Ah! É mesmo, não era isso que eu queria. Mais um motivo pra eu fazer outro.

É incontestável que existem soluções incorretas em Geometria, erradas mesmo. O matemático em que me transformei não negocia esta premissa, mas o professor que nasceu comigo e foi o motor da minha vida não resiste, e para trazer os alunos para o chão da prática, não tem nenhum pudor em enfrentar o cientista e verberar a incongruência: não existe questão errada em Geometria.

Agora vamos começar com uma situação, que é a seguinte: eu quero dividir o segmento que vocês tão vendo em três partes. Se fosse só dividir em três partes, a gente já sabia, não seria muito mais difícil do que a gente fez ontem, mas eu tenho um complicador eu quero que essas partes sejam proporcionais a 2, 3 , e 5. Só pra gente lembrar de números proporcionais, me diga aí dois números que sejam proporcionais a 2 e a 3. Borá lá, diga aí quaisquer dois número, números mesmo, que sejam proporcionais a 2 e 3.

Silvio: 2 e o quê?

Adelmir: E 3.

Adelmir: Quaisquer números.

Fláudio: 4 e 6 professor.

Adelmir: 4 e 6 são proporcionais a 2 e 3, o mesmo que 20 e 30. A gente tem números proporcionais quando a gente multiplica pela mesma quantidade. Então, *por exemplo, se disser 4, 6 e 10, esses números são proporcionais a 2, 3 e 5, tá? Então o nosso exercício é dividir esse segmento em partes que sejam proporcionais a 2, 3 e 5. Vamos aí. Me dê o mouse um pouquinho só pra eu organizar a minha janela. Me dê o mouse um minutinho. Usem o borrão, fiquem à vontade pra treinar, pensar e conversar entre vocês, vocês tão conversando muito pouco entre vocês. Outra coisa é quando você quiser conversar só com o outro pode, o software permite isso.*

Gerardo: Professor, eu não entendi essa questão de partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 5.

Adelmir: Você vai ter que dividir, cortar em pedaços, se fosse em três pedaços iguais a gente sabia, concorda?

Gerardo: Certo.

Adelmir: Com três pedaços iguais a gente ia usar aquela reta auxiliar que a gente fez. Eu tracei uma semi-reta auxiliar ontem, construí com ela vários pedaços que eu queria, e depois tracei as paralelas no final da aula. Três partes iguais seria muito simples, seria assim.

Fláudio: Professor, esse círculo... esse círculo, pode ter um raio qualquer?

Adelmir: Qualquer, meu amigo Fláudio, qualquer, viu?

Adelmir: Vejam que como eu queria dividir em três partes, eu fiz três pontos todos à mesma distância na semi-reta auxiliar e agora vou fazer as paralelas, então seria assim... O segmento tá dividido em três partes iguais. Mas agora eu não quero em partes iguais. Veja que as três partes vão ser diferentes, mas eu quero garantir que elas são proporcionais a 2, 3 e 5.

Adelmir: A ideia é esta. Sempre ligada ao que você vai usar. Por exemplo, 20 centímetros, 30 centímetros e 50 centímetros, se você tivesse 100 centímetros e desse pra fazer isso medindo na régua, você tinha feito. Você podia dizer também que era 40 centímetros, 60 centímetros e 150 centímetros, do mesmo jeito que você podia dizer 20 quilômetros, 30 quilômetros e 50 quilômetros, não tem nenhuma unidade pra fazer isso.

Fláudio: Professor, eu pensei pra princípio de saída da resolução da questão dividir o ponto "AB" em dez pontos, aí colocava dois raios no segundo ponto e cinco raios pro terceiro ponto.

Quando Fláudio diz ponto “AB”, todos sabíamos que queria dizer segmento “AB”, mas, para não quebrar sua linha de explicação, não o interrompi para corrigir. Usei esse procedimento praticamente em todo o curso. Em seguida usava a linguagem correta para que fosse sendo assimilada.

Adelmir: Fláudio, eu tô até sem condições de lhe responder, emocionado com a sua ideia, genial, brilhante. Mas veja bem: a sua ideia dos dez pontos foi maravilhosa, mas esse negócio de ir lá e dividir em partes iguais... eu não posso ir direto nela porque eu não sei a medida, então tem mais uma coisinha, a partida só não resolve.

Fláudio: Nem pesando nos pontos médios, professor?

Adelmir: Nela (a reta) mesma não. Pense como foi que nós dissemos antes. Você tá certíssimo quando disse que vai ter que dividir em dez pedaços ela lá... você vai ter que dividi-la em dez pedaços... eu quero ver como é que você vai fazer isso.

Silvio: Dez pedaços são proporcionais a 2 e 5. Se for 30 aí é proporcional a 2, 3 e 5, não é isso, professor?

Adelmir: Ó, Silvio, você tá certo. Se você usar trinta, trinta pedaços... Você estaria usando como os trinta pedaços? Como é que você está pensando em dividir os trinta pedaços?

Silvio: Não sei.

Adelmir: Porque, veja só, se eu botar vinte pedaços, vinte pedaços é a soma de 4 mais 6 mais 10, concorda? Que é 2 vezes 2, 2 vezes 3, 2 vezes 5, então com vinte pedaços eu posso fazer uma proporção, com trinta também eu posso, que é 3 vezes 2, 3 vezes 3 e 3 vezes 5, mas será que eu preciso de trinta? Eu já lhe mostrei que eu faço com 20. E não esqueça que 2, 3, e 5 é proporcional a 2, 3 e 5. Fláudio, você tá muito perto. Termine logo.

Adelmir: Um pode dar a dica pro outro.

Adelmir: Pode falar, Cláudio.

Cláudio: Tô tentando aqui, professor.

Adelmir: Gerardo, apareceu outro GeoGebra aí na minha tela ou não?

Gerardo: Apareceu, professor.

Adelmir: Esse Geogebra eu não queria compartilhar, mas ele tá compartilhando todos os aplicativos, beleza, mas eu não vou usá-lo não.

Adelmir: Pessoal, a solução foi apresentada no primeiro comentário do Fláudio, o Fláudio já deu a solução no primeiro comentário. É executar e é muito rápido.

Fláudio: Professor, meu principal problema é pensar na figura, não consigo pensar geometricamente na figura.

Adelmir: Você sabe dividir esse segmento que tá aí em 3 partes iguais?

Fláudio: Eu fui dividindo, consegui até oito partes, aí agora eu tô tentando por aquele método que o senhor conseguiu em três partes iguais, só que aí não vai dar certo porque são raio iguais.

Adelmir: Direto na reta você nunca consegue dividir nem em duas partes... em duas, até consegue porque faz uma circunferência, mas pra dividir num número maior você vai ter que usar aquele raciocínio que eu usei ontem. Ele é obrigatório, se você quer dividir em mais partes, é obrigado. Se você precisar diminuir ou aumentar a figura, isso é detalhe, mas o processo é o mesmo.

Fláudio: Embora tenha o mesmo raio?

Adelmir: O raio independe e o raio pode ser qualquer. Agora todos os raios têm que ser iguais.

Silvio: Professor, eu posso tentar?

Adelmir: Claro, Silvio, você não precisa mais perguntar, você é da casa.

Silvio: Eu peguei o tamanho da reta aí vou dividir por 10, aí dá 0, 656 aí vou fazer ... aí eu vou fazer a reta, com esse raio eu faço os dez segmentos.

Adelmir: Oi, Silvio.

Silvio: Alguém que tá mexendo no mouse, por que meu mouse tá parado, o bicho fica endoidando.

Adelmir: Oi, Silvio.

Adelmir: Oi, Silvio.

Silvio: Fale, professor.

Adelmir: Oi, Silvio.

Fláudio: Silvio, consegue ouvir a gente, Silvio?

Silvio: Mais ou menos.

Adelmir: Oi, Silvio. E você tá me ouvindo, Fláudio?

Fláudio: Perfeitamente, professor!

Adelmir: Silvio, dá uma paradinha aí só um minuto, só um minuto dê uma paradinha.

Adelmir: Silvio, vamos combinar um truque? Quando aparecer a palavra oi ou alô na tela, a gente para que alguém tá querendo falar pra pegar o mouse, tá? Apareceu "oi". Apareceu pra você naquela hora "oi", "oi" duas vezes?

Silvio: Apareceu, professor.

Deparamos todos uma situação crítica que ainda não havia se manifestado: todos os alunos queriam se pronunciar ao mesmo tempo. Como o TeleMeios coloca as pessoas atuando sobre o mesmo ambiente, como se fosse o mesmo papel ou a mesma lousa, todos manipulavam o mouse na mesma hora, e ninguém conseguia terminar sua figura. Quando clicava em um ponto outro arrastava o ponteiro para outra parte da figura. Esse é um complicador que precisa ser bem administrado pelo professor para que não se corra o risco de dispersão e perda de construções já elaboradas. No contrato didático, deve-se deixar clara a regra que norteará o uso do mouse; a não se trata de hierarquizar, mas de organizar para o bom andamento da aula.

Adelmir: Então, solte o mouse que é outro colega... passe a palavra pro colega. Olha só, meu amigo Silvio, o que o senhor tá fazendo tem dois problemas: o primeiro é que é muito mais simples do que o que você está fazendo, a sua solução tá correta, mas você tá colocando um complicador que não precisa. Veja só: você... foi preciso que você fizesse a divisão e tentasse a medida, mas você, você não é um homem do Ceará, você agora é um homem grego. Lembre-se que essas construções geométricas nós estamos fazendo como na Grécia, a régua lá, meu irmão, não tinha número, a régua não tinha número.

Silvio estava tentando fazer a divisão por meio da ferramenta medida de um segmento, como se vê na Figura 34, o que não poderia aceitar porque quebrava a regra anteriormente combinada, de que, como na Grécia Antiga, se usaria uma régua não graduada.

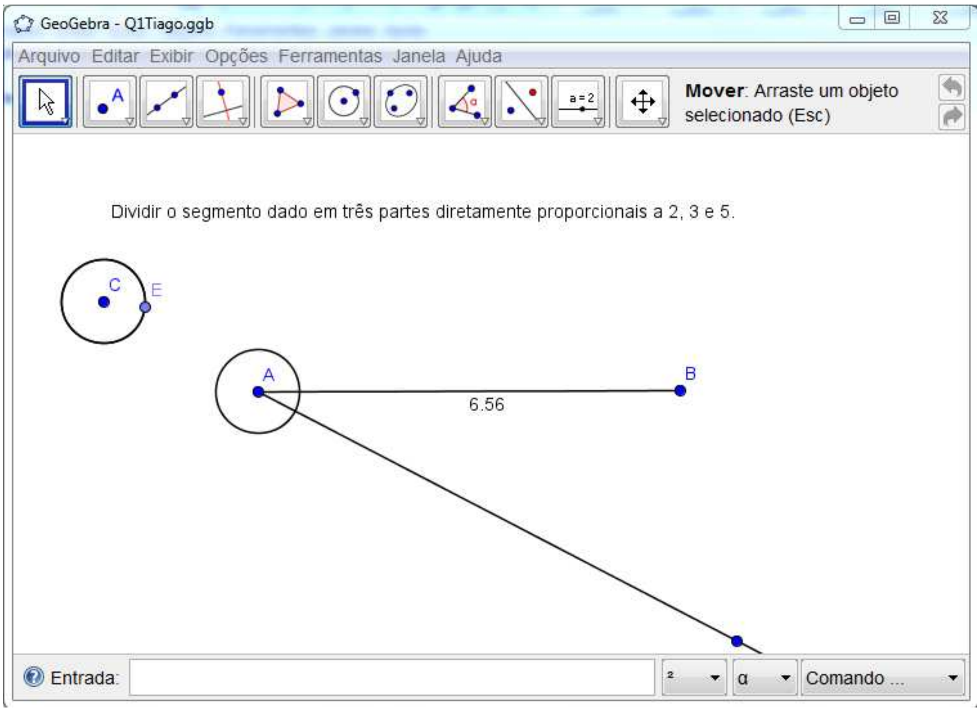


Figura 34: Divisão de um segmento em partes proporcionais a 2, 3 e 5.

Então qual o é nosso truque, Silvio? Foi o que o Fláudio me perguntou e agora eu quero que você faça, Silvio, pra o Fláudio acreditar, porque que ele ainda não acreditou em mim. Ele olha pra mim assim com uma cara, desconfiado. E pra que você faça a divisão, o raio, o procedimento que você usar tá corretíssimo. Agora o raio não precisa ser esse. O raio é qualquer, não precisa ter medida nenhuma, só precisa ser igual. Vamos voltar então?

Silvio: Sim.

Fláudio: Professor, já que o raio pode ser de qualquer tamanho, eu posso tentar agora também?

Adelmir: Fláudio, claro que pode. Como o Silvio tá fazendo aqui, você faz o seu e depois me dá o arquivo que eu quero acompanhar bem de perto a sua solução.

Fláudio: Ok, professor.

Adelmir: Vá lá, Silvio, mas o problema já está morto.

Fláudio: Vou tentar, agora professor.

Fláudio: Me perdi, agora professor, fiz um figura aqui no meio, mas me perdi.

Adelmir: Vamo...

Cláudio: Professor?

Adelmir: Você já sabe fazer, vou só te dar uma dica. Silvio, por favor, refaça.

Silvio: Que é que tem?

Adelmir: O senhor pegue aí o nosso segmento e faça a solução que você falou.

Estávamos todos vivendo um momento precioso, além de a interação estar se manifestando com intensidade que ainda não havíamos praticado, os efeitos da mediação ficaram à mostra de forma evidente. Mirando da perspectiva de Vygotsky posso garantir que os alunos não conseguiriam resolver, sozinhos, a questão (deduzi com base em suas próprias falas), mas com a ajuda do professor, que não apresentou a conclusão graciosamente, foram superando os obstáculos, caminhando no sentido de uma resposta satisfatória.

Cláudio: Professor, eu fiz uma solução aqui. Não sei se eu... se tá certo... se eu entendi bem a questão, mas eu cheguei a uma solução.

Adelmir: Mostra aí, Cláudio.

Cláudio: Primeiro eu dividi a reta em dez partes iguais.

Silvio: Agora eu entendi professor, quer dizer que independente do raio, a inclinação... o ângulo é quem...

Cláudio: Tá aí dividido em dez partes, dividi em proporção 2, 3 e 5.

Adelmir: Beleza, beleza, Cláudio! Você até agora dividiu apenas em dez partes. Você ainda vai ter que me dizer quais são os segmentos, né?

Cláudio: Eu vou concluir aqui o meu pensamento.

Adelmir: Tá.

Fláudio: Cláudio?

Cláudio: Diz.

Fláudio: Já que tá dividido em dez partes, se tu colocasse o segmento, vamos supor de dois raios ponto "AB" já seria o proporcional a 2... se tu pegasse três raios, já seria o ponto "BC", três proporcional.

Cláudio: É, eu não entendi. Professor eu, tinha pensado dessa forma.

Adelmir: Você escutou direito o que o Fláudio falou? Escute o que ele falou.

Cláudio: Repete aí Fláudio, por favor.

Fláudio: Cláudio, eu vi que tá dividido em dez partes iguais. Se tu denominar, vamos supor dois raios o ponto "AB", seria proporcional a dois, e, vamos supor, "BC" três raios, e já "CD" ficaria 5 raios. Não, alias, ficaria o dobro. Seria quatro pro dois, seis para o três.

Adelmir: Fláudio, deixa eu ver se eu tô entendendo. Quando ele terminou de dividir em dez partes, praticamente ele já fez a questão. Além disso, o Cláudio acrescentou essas três perpendiculares. Não tão erradas, mas a sugestão do

Fláudio, Cláudio, é só que você botasse nome do ponto, por exemplo, se nesse segundo ponto aí você botasse um "C", você poderia dizer que "AC" é proporcional a 2. Ai lá no outro você botava um "D" e dizia o "CD" era proporcional a 3 e que o "DB" era proporcional a 5. A questão já tava morta.

Adelmir: Entendeu?

Cláudio: Entendi.

Cláudio: Seria assim, professor?

Adelmir: Perfeito. Aí era só você dizer que esses pontos estavam divididos nas partes que você queria e não precisaria daquela perpendicular, né?

Cláudio: Certo.

Adelmir: A solução tá ótima e o mais importante é que todo mundo chegou. Todo mundo chegou assim, um tava com uma dificuldade aqui, outro acolá, mas foi é...

Cláudio: Ei, macho, é massa.

Fláudio: O que eu faço, professor? Eu preciso salvar? O senhor disse que queria dá uma olhada.

Adelmir: Fláudio, depois eu pego no meu pendrive, tá?

Todo o desenvolvimento da questão a todos levou a um estado de verdadeira euforia. Houve a participação global, um envolvimento total na aula. Não me preocupei com o tempo e sim com o nível de participação dos alunos. Cada um queria expor seu raciocínio, Fláudio, no final, ao perguntar – "o que eu faço, professor"? – expõe, nas entrelinhas, seu desejo de mostrar que também conseguiu. E nunca se havia imaginado que uma avaliação deste projeto pudesse ser feita com apenas uma frase descompromissada, mas eivada de empolgação, como a de Cláudio: *Ei, macho, é massa*.

Adelmir: Já temos uma segunda situação. Eu quero construir um triangulo isósceles... eu quero construir um triangulo isósceles, onde a base é "AB" e o ângulo da base é esse angulozinho que tá marcado aí. Agora eu quero exatamente essa base e quero exatamente esse ângulo. E com isso você vai fazer um triângulo isósceles. Você lembra o que é um triângulo isósceles, né? É aquele que tem dois lados iguais.

Adelmir: Como eu salvei só no meu pendrive, eu tô com dificuldade só de colocar no começo, mas é essa a situação: eu quero esta base "AB" e esse ângulo alfa.

Eu quero que você faça um triângulo isósceles que tenha exatamente essa base e que o ângulo da base seja alfa.

Isso é uma maneira que eu tenho, meu amigo Silvio, de me desculpar com você. Você que estava hoje com tanta raiva dos triângulos, hoje nós vamos fazer alguns, pronto!

Silvio: Professor, como fazer esse ângulo ai, esse alfa?

Adelmir: Como transferir o ângulo?

Adelmir: Ontem, ontem nós fizemos isso, mas vamos recapitular um pouquinho. Eu vou pegar outro exemplo aqui só pra você...

Fláudio: Professor, já comecei a pensar aqui numa solução.

Adelmir: Oi. eu não ouvi.

Fláudio: Professor, já comecei a pensar aqui numa solução.

Adelmir: Continue pensando, isso é um ótimo sinal.

Fláudio: Professor, posso começar a fazer um esboço?

Adelmir: Pode.

Fláudio: Professor, para o triângulo ser isósceles... para o triângulo ser isósceles eu pensei em replicar o ângulo tanto para cima quanto para baixo, nesse sentido aqui.

Adelmir: Se você está me dizendo que o ângulo é igual, pode. Agora eu queria... você ainda não me garantiu que esse ângulo é igual, não.

Adelmir: Eu acho que a grande questão que o Silvio já colocou é que nós vamos no final da aula ter que fazer um antidoping com o Fláudio, que hoje ele veio empolgado. Parece que ele dormiu a manhã todinha. Tá inspirado, ta muito bem. Agora a ideia já foi aquela do Silvio. Como é que a gente vai transferir esse ângulo. Todo mundo se lembra como é que transfere?

Silvio: Ei, professor, eu perguntei como é que faz o desenho desse..., do α.

Silvio não conseguia inserir a letra grega, o que se faz pela inserção de símbolo na ferramenta inserir texto.

Adelmir: Esse é um dos meus maiores segredos, Silvio, eu vou, vou falar só pra você aqui, viu? Será o seguinte, Silvio... Setor circular sendo dados dois pontos e o centro e depois renomear.

Fláudio: Libera aí, professor, pra eu tentar de novo.

Adelmir: Manda bala, Fláudio.

Adelmir: Silvio e Gerardo, continuem nos seus rascunhos que eu vou pegar o meu rascunho aqui e vou lembrar um pouquinho como é que a gente faz a transferência do ângulo, tá?

Fláudio: Eu já pensei aqui.

Cláudio: Tô escutando nada, fala aí.

Adelmir: Eu tenho este ângulo e quero que ele venha exatamente para cima dessa reta, exatamente. Então o procedimento é o seguinte... Com o mesmo raio que eu fiz lá eu faço um sobre a reta pra onde eu quero levar... o ponto que eu quero levar o ângulo. Agora eu faço assim...

Fláudio: Na nossa tela não apareceu não professor. Pelo menos na minha.

Adelmir: Não apareceu na tela de ninguém o meu borrão?

Fláudio: Não, agora apareceu.

Cláudio: Agora apareceu.

Fláudio: O raio em cima da reta não apareceu não.

Adelmir: Certo. Então tudo que eu...

Adelmir: Oi, Silvio. Você falou, Silvio?

Silvio: Não.

Adelmir: Então pra você fazer a transferência do ângulo... vamos pegar esse ângulo aqui.

Adelmir: Aumentei só o tamanho da marca pra você visualizar, não mexi no tamanho do ângulo. Pra você levar esse ângulo pra lá olhe só. Veja que esse arco... note que o arco que tá marcando o ângulo ele vai ser fundamental para nós. Ele é assim, olha.

Adelmir: Quer continuar?

Fláudio: Vai, Cláudio.

Adelmir: Tem dois arcos, tem dois raios diferentes aí, já notaram, né?

Fláudio: Cláudio, é partindo do ponto "A", Cláudio.

Cláudio: Como é?

Fláudio: Cláudio, como é..., sendo esse α *o... tu não fez um círculo de raio* α*? Quando que tu transferiu para a reta tem que partir do ponto "A", que é como se fosse esse ponto aqui do* α*.*

Fláudio continua apresentando problemas com a nomenclatura dos elementos matemáticos.

Cláudio: Eu acho que não é não. Faz aí isso que tu tá pensando pra eu ver.

Fláudio: Deixe eu dar uma olhadinha aqui, peraí.

Fláudio: Assim, Cláudio, agora continua.

Cláudio: Entendi.

Fláudio: Tem o mesmo ângulo agora.

Cláudio: Tem, professor?

Adelmir: Não ouvi Cláudio.

Cláudio: Tem o mesmo ângulo?

Adelmir: Se ele é isósceles os ângulos da base são iguais. Você já tem um. E não esqueçam, em qualquer triângulo... não precisa ser isósceles... em toda figura com lados iguais correspondem ângulos iguais. Quando ele tem dois lados iguais tem dois ângulos... tem três lados, tem três.

Fláudio: Cláudio, pra garantir que o ângulo é igual, tu tem que transferir, só que o inverso. O mesmo processo que tu fez aqui... tu tem que transferir pelo ponto "B". Aí sim, vai dar isósceles, só que o inverso.

Cláudio: Faz aí, macho.

Fláudio: Eu não consigo desenhar como você.

Cláudio: Eu não tô entendo. Repete aí. Apaga pelo menos essa parte que fiz errado.

Fláudio: Deixa eu dar um "Ctrl Z" aqui, peraí.

Cláudio: Tem que marcar a interseção.

Fláudio: Pois é, não tô conseguindo me recordar como é que transfere o menor. É o mesmo processo, só que o inverso.

Cláudio: Deixa eu ver aqui.

Fláudio: Pro outro lado, Silvio. Oh, Cláudio.

Cláudio: Porque eu não tô conseguindo marcar a intersecção...

Cláudio: Pronto.

Fláudio: Não, só que tu faz pro outro lado. Isso.

Cláudio: É isso mesmo?

Fláudio: É.

Fláudio: É assim. Agora tem que traçar a reta daquele jeito que eu fiz.

Fláudio: Agora tá certo.

Cláudio: Tá não!

Fláudio: Não, dos dois pontos.

Adelmir: Não tá não porque o Cláudio...

Silvio: Não, Cláudio. Tu criou um novo ponto. Não é pra criar um novo ponto não. É pra criar em cima da intersecção.

Cláudio: Pera aí que eu vou refazer.

Silvio: Os dois círculos.

Fláudio: Peraí, Silvio, peraí, Cláudio, deixa o Silvio complementar.

Cláudio: Arrocha aí, Silvio.

Silvio: Pronto, tinha que fazer a interseção dos dois raios pra ser igual, aí depois tem que fazer a interseção das duas retas.

Fláudio: É isósceles?

Cláudio: Peraí, que eu vou ver.

Cláudio: Como é que mede?

Cláudio: Quem é que tá?

Fláudio: Pronto, professor, só pedi pro Cláudio..., tu vai medir né?

Cláudio: É, não deu certo não.

Fláudio: Só fez medir o ponto "AR" e o ponto "BR".

Cláudio: Exatamente.

Adelmir: A solução é pra tá correta. Pode ter algum erro nessa mexida aí. Se a gente alterou o tamanho do ângulo, ou não, mas a solução é pra ser essa. Transfere o ângulo pra lá, transfere o angula pra cá e...

Adelmir: Olha o erro aí, Cláudio. Aquela medida lá que você usou, lembre-se que a aberturinha que você usou foi aqui. Então você tá usando esse arco, então, esta medida aqui... esta medida do arco... do raio do arco, tem que ser a mesma aqui. Eu medi. Ela tá três, zero, oito e a sua tá três, zero, nove.

Cláudio: Então era só pra ter pego como referência a de baixo, não é isso?

Adelmir: Eu não vou refazer porque nós vimos onde é que tá o erro, tá certo? O erro, Cláudio, foi exatamente esse. Mas Fláudio, rapaz... foi fantástica a tua participação e achei lindo vocês dois conversando. Agora você tem que desenhar também porque você tá com a lógica todinha dos problemas na cabeça. Por que você não...

Fláudio: É, professor, sempre tive dificuldade nessa parte do desenho.

Adelmir: Mas isso não é desenho artístico, não. Não tô pedindo pra você ser o Leonardo Da Vinci não, macho. Isso é computador, que tu é craque.

Apresento a situação problema seguinte.

Adelmir: Essa é a nova situação: Construir um triângulo retângulo, sendo dado um cateto e o ângulo adjacente.

Esse ângulo não é o reto, tá certo? O Ângulo que é adjacente ao cateto, ele não é o reto. Então é isso aí... é um cateto, você sabe: num triângulo retângulo existem dois catetos e uma hipotenusa, e esse aí é um dos ângulos agudos. Eu quero que você desenhe esse triângulo retângulo.

Cláudio: Vai, Fláudio, começa aí.

Adelmir: O triângulo é aquele que tem o ângulo reto.

Fláudio: Agora é que eu não consigo imaginar de jeito...

Cláudio: Professor, essa questão é o mesmo princípio da outra?

Adelmir: É o mesmo princípio da outra, lembrando que você vai trabalhar com o ângulo reto, né? Esse aí não é o reto. Vai ser o mesmo princípio. Agora explique logo aí pro Fláudio o que é ângulo reto, o que é triângulo retângulo.

Silvio: Um dos ângulos é 90 graus.

Adelmir: Ângulo reto é aquele de 90 graus, o ângulo da parede, o ângulo da quina da lousa.

Cláudio: Bora, Fláudio, fazer.

Cláudio: Peraí.

Silvio: Agora é só fazer uma perpendicular em relação ao ponto "B".

Cláudio: Cadê o professor?

Cláudio: O que você achou da solução Gerardo?

Fláudio: Gerardo?

Cláudio: Rapaz o Gerardo não fica aqui não viu.

Fláudio estava conversando com Cláudio, e, quando este diz que o Gerardo não fica aqui ele quer dizer que Gerardo está em outro laboratório, diferente do seu. Lembrando que estávamos fisicamente separados.

Cláudio: É.

Gerardo: Pode repetir, Cláudio?

Cláudio: O que você achou dessa solução aí; tu acha que tá certa?

Gerardo: Sim.

Silvio: Tem que ser no sentido horário.

Cláudio: Rapaz, mas esse Silvio é...

Cláudio: Tá errado ó! Tá errado, macho!

Fláudio: Volta tudo, Cláudio. Vai voltando dando "Crtl Z" até ficar só a figura, aí eu vou ver se eu consigo dar uma ideia aqui.

Cláudio: Vai lá, tenta aí, Fláudio!

Cláudio: Já consegui, professor!

Silvio: A resolução tava certa.

Cláudio: Como é, Silvio?

Silvio: A resolução tava certa.

Fláudio: Professor aqui deu problema no ângulo

Silvio: Tava meio errado, mas era essa a resolução.

Cláudio: Tu vai fazer de novo, Fláudio?

Fláudio: Vamos fazer nós dois aí.

Cláudio: Professor escreveu "oi", aí.

Cláudio: Alguém tá com o mouse na tela.

Fláudio: Não, o meu tá fora.

Adelmir: Tinha deixado o som preso. Foi erro meu. Quem já tem a solução.

Fláudio: Vou fazer tudo de novo, Cláudio.

Cláudio: Quer começar?

Fláudio: Eu vou começando aqui, aí tu vai me ajudando.

Cláudio: Peraí, fasta só essa reta daí pra ficar com mais espaço.

Fláudio: Não, Cláudio tava mais fácil. Era só traçar a perpendicular.

Cláudio: Mais aí pode traçar também.

Adelmir: E você não sabe se ali tava a perpendicular ou não. Tava professor, tava bem direitinho[22]*. Não. Você tem que garantir a construção, mas você não sabia ainda não.*

Cláudio: Vai, começa aí, Fláudio.

Cláudio: Confere logo se o ângulo tá certo. Sentido horário. Não tá certo, tu era pra ter pego o outro pra fazer o raio.

Fláudio: Sim. E naquela vez foi o que tu fez?

[22] Durante minha prática do magistério criei um aluno imaginário com quem conversava e sempre me fazia perguntas durante as aulas. Ele compareceu novamente e se fez presente no encontro virtual.

Cláudio: Tu tem que pegar o outro pra ser o raio. Deixa eu ver aqui. É... sei não.

Gerardo: Cláudio, deixa eu tentar agora.

Cláudio: Beleza, vá lá, Gerardo.

Cláudio: É mesmo, macho. Tinha esquecido disso.

Gerardo: Professor, nesse caso aí, como é que eu consigo marcar a intersecção?

Cláudio: Vixe!

No momento em que Gerardo concluía sua solução, Figura 35, nossa conexão caiu. Pedi que fizessem, em casa, a questão seguinte e encerrei então, a quarta aula combinando que na próxima se daria o encerramento do curso.

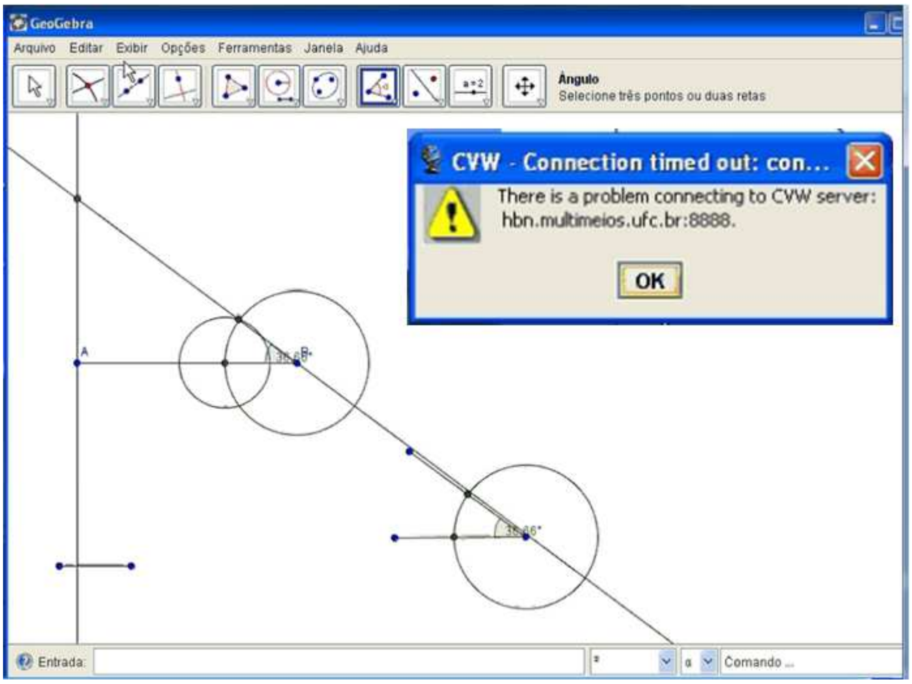


Figura 35: Construção de um triângulo retângulo, dados um cateto e um ângulo agudo.

Análise *a posteriori*

A aula teve duração de uma hora e 21 minutos. A distribuição dos alunos nos laboratórios e acionamento dos equipamentos aconteceu naturalmente por já ser um fato costumeiro para o grupo.

No ambiente tecnológico tive durante alguns momentos dificuldades para disciplinar a utilização do *mouse*. Como o TeleMeios proporciona trabalhar sobre o mesmo objeto, pela ansiedade de manifestar seu posicionamento, um dos sujeitos interrompia a atividade de outro. Comparando com uma sala de aula convencional imagina-se o cenário criado por vários alunos falando ao mesmo tempo. Para superar esta situação, combinei uma regra para ordenar as ações, o aluno deveria pedir, através da ferramenta de texto, licença ao colega para se pronunciar. Conversei com Daniel Borges, responsável pela arquitetura do ambiente sobre o ocorrido, e ele disse que esta é uma das questões do seu estudo e que já está experimentando opções para a ordenação de acesso a cada uma das ferramentas da plataforma.

Aposto o primeiro ponto, de imediato se iniciou o envolvimento dos alunos, que começaram a fazer sugestões, propostas e críticas aos projetos dos colegas.

A participação do grupo foi tão próxima, efetiva e afetiva que, para a realização das análises desta aula, foi preciso fazer um grande esforço para manter o indispensável isolamento emocional solicitado do pesquisador. Evitar que o experimentado professor relate efusivamente a sua euforia por participar de um evento onde se concretiza uma nova experiência de ensino e aprendizagem, de modo tão vigoroso, e o conhecimento adquirido se manifesta após tão poucas intervenções constituem o tributo que a ciência cobra aos estudiosos da Educação.

Quanto à interação dos alunos, nada há o que questionar pois, a transcrição da aula, na sua totalidade, assume a forma de um diálogo. É verdade que –

> (1) Por se tratar de uma aula de exercícios, haverá uma intensa interação dos sujeitos,

mas entendo pertinente dizer que, além da interação, ocorreu mediação entre os próprios sujeitos. Pode-se notar, em várias ocasiões, que é o auxílio do outro que favorece a consecução da atividade como se vê em:

Adelmir: Quer continuar?

Fláudio: Vai, Cláudio.

Adelmir: Tem dois arcos, tem dois raios diferentes aí, já notaram, né?

Fláudio: Cláudio, é partindo do ponto "A", Cláudio.

Cláudio: Como é?

Fláudio: Cláudio, como é..., sendo esse α *o... tu não fez um círculo de raio* α*? Quando que tu transferiu para a reta tem que partir do ponto "A", que é como se fosse esse ponto aqui do* α*.*

Fláudio continua apresentando problemas com a nomenclatura dos elementos matemáticos.

Cláudio: Eu acho que não é não. Faz aí isso que tu tá pensando pra eu ver.

Fláudio: Deixe eu dar uma olhadinha aqui, peraí.

Fláudio: Assim... Cláudio, agora continua.

Cláudio: Entendi.

Fláudio: Tem o mesmo ângulo agora.

Fláudio: Cláudio, pra garantir que o ângulo é igual, tu tem que transferir, só que o inverso. O mesmo processo que tu fez aqui... tu tem que transferir pelo ponto "B". Aí sim, vai dar isósceles, só que o inverso.

Cláudio: Faz aí, macho.

Fláudio: Eu não consigo desenhar como você.

Mesmo sabendo que os sujeitos não possuíam muitos conhecimentos de Matemática básica, surpreenderam-me as dificuldades manifestadas em relação aos fundamentos de proporções. Investi mais tempo e esforços do havia calculado, de modo que, na premissa:

> (2) Os alunos dominam todos os prerrequisitos necessários para a resolução dos problemas,

isto não é de todo comprovado, que a dominam, visto que tive que reiterar, até com exemplos bastante elementares, o que queria da questão. Esse fato teve implicações diretas sobre a hipótese (5).

Para a resolução de minha lista, o estudante deveria recorrer às Construções Geométricas discutidas nas aulas anteriores. Apesar de, individualmente, alguns deles mostrarem algum embaraço, em conjunto conseguiram reproduzir o que era esperado. A premissa

> (3) Os alunos não terão dificuldades para empregar as construções já elaboradas no curso.

não se confirmou na íntegra, e debito o fato ao pouco tempo que tiveram para a maturação. Isto mostra o acerto da programação da aula de exercícios, realmente necessários para a consolidação dos novos conhecimentos.

Tendo que enfrentar novas proposições e já conhecendo as funcionalidades do GeoGebra não era difícil imaginar que os

> (4) Os alunos proporão soluções mecânicas, sem rigor matemático.

Isso pode ser patenteado quando Silvio, para dividir o segmento em partes proporcionais, quis usar o comprimento do segmento e dividir por 10; ou quando Cláudio, na construção do triângulo retângulo, traça uma reta só "no olho" querendo garantir que é perpendicular. Esse é um problema cultural, comum àqueles que não habituados com a prática matemática, tentam fazer inferências com base no senso comum, isto é, tomar como verdadeiros fatos que não estão provados, admitir sem o rigor, a consistência, que a ciência exige. Sabe-se que só a prática continuada faz com que os aprendizes adotem as mesmas atitudes de um matemático. A conjectura

(5) O tempo didático será suficiente para a discussão de todas as questões,

foi totalmente negada. O tempo dedicado a cada questão foi bem maior do que eu supunha. Nem se começou a determinar o centro do círculo, que seria a última questão. O erro no plano pode ter sido ocasionado por dois motivos, o tempo que se levou discutindo alguns prerrequisitos e, mais importante, o fato de que o *engenheiro-professor* possuía experiência na elaboração de projetos para outro ambiente, agora, no TeleMeios, nas suas concepções, novas variáveis podem interferir e devem ser expressas para apreciação, uma das quais é a mediação ocorrente com maior ênfase do que em sala de aula. E, por se tratar de um contexto ainda nascente, o cuidado na elaboração de cada novo curso vai requerer novas pesquisas e detalhados estudos.

Para nenhum dos problemas propostos foi apresentada uma solução individual e soberana, todas foram elaboradas, mais ainda, construídas com a participação efetiva de todos os sujeitos. Assim, concluir como verdadeira a ideia de que

(6) O grupo construirá colaborativamente a resolução das atividades propostas.

foi um dos momentos mais gratificantes deste empreendimento.

Como fiz ao final de cada sessão, coletei as opiniões dos alunos sobre o encontro (Apêndice 2) que podem ser sintetizadas da seguinte forma:

- Cláudio – a única dificuldade na aula foi a queda do servidor. Disse que recordou mais conteúdos de Geometria e que ocorreu uma maior comunicação entre os alunos e houve a resolução coletiva dos problemas.
- Gerardo – Não encontrou obstáculos com a tecnologia, mas ainda tem problemas com o entendimento de algumas questões de Geometria. Positivamente, assinalou que houve maior interação dos alunos e que houve melhor aplicação dos conceitos, em conjunto com os outros membro do grupo, na resolução de problemas.
- Silvio – Ficou mais fácil usar o GeoGebra e o TeleMeios e que todo dia que passa se lembra mais de Geometria. Ele percebeu que toda a turma participou e como já estavam acostumados ficou mais fácil resolver as questões como equipe. Lamentou não escutar algumas falas e a queda do servidor.
- Fláudio – achou que o sistema esteve mais lento e que teve maior facilidade de entendimento em Geometria.

5.1.3.5 Aula 5

Análise preliminar

Chegando ao planejamento da última fase do projeto, quero, mais uma vez, refletir sobre a etapa das análises teóricas (análise preliminar e análise a *priori).* Empreendê-las, para cada sessão, pode parecer que se trata apenas de cumprir uma formalidade para atender aos ditames da metodologia e que se torna repetitiva e enfadonha. Não é esse o objetivo. Cumprir estes procedimentos garante que o professor terá uma visão geral e o controle de cada uma de suas aulas, por isso deve executá-los para todas.

Poderá se argumentar que é um trabalho muito grande e que demandará muito tempo e esforços dos professores. Isso é verdade, mas é a garantia de um exercício melhor das suas funções. Outro ponto importante é que, quando for preparada uma boa Engenharia Didática para uma aula, ela não terá que ser refeita na totalidade quando da necessidade de ser ministrada novamente, com pequenos ajustes, ocasionados pela adaptação ao perfil de cada turma, o professor estará em condições de executá-la.

Compreendo todas as dificuldades por que passam os professores no Brasil, que não dispõem de todas as condições para o seu bom desempenho e que a tarefa que lhes é proposta é muito complexa. A preparação das aulas é um dos pontos cruciais dentre suas atribuições. Sobre o tema, em entrevista concedida à revista Nova Escola nº 149, o educador colombiano Bernardo Toro (2002) se expressa da seguinte maneira:

> É preciso ter um leque muito grande de opções para atender às diversas necessidades de aprendizado. Para planejar uma boa aula são necessárias pelo menos 20 ou 30 horas de trabalho de uma equipe pedagógica. É quase impossível exigir isso do professor, hoje em dia. Ele precisa ter à disposição bons modelos de aulas, testados e avaliados em diversas comunidades.

Com arrimo nessa visão admito que não é uma questão simples, mas acredito que somente por intermédio do exercício competente da profissão é que o quadro poderá ser mudado, e o sucesso na prática do magistério começa com o projeto de uma boa aula.

Ao chegar ao encontro final do curso, praticamente todo o programa já está cumprido e o que se faz necessário é a consolidação do que foi produzido até o momento.

Assim, para o quinto encontro, proporei atividades que me permitam repassar os conteúdos já cobertos. As construções elaboradas foram todas feitas com régua e compasso, permaneci firme na condição essencial expressa no início da experiência. Agora, porém, quando os alunos já conhecem os porquês do novo campo que estudaram não se ficará atado ao antigo método grego, pois aplicarei diretamente as ferramentas do GeoGebra e as funcionalidades do TeleMeios.

Análise *a priori*

Para o último encontro e com o fito de aplicar as Construções Geométricas que os alunos aprenderam durante o curso, trabalharei em, toda a aula, amparado em novos problemas que serão propostos.

Iniciarei pedindo que quem tenha resolvido a tarefa de casa apresente a solução para a questão:

Determinar o centro de um círculo dado,

Dado que esta foi atividade para a qual tiveram bastante tempo para pensar, acredito que, de imediato, serão apresentadas soluções a discutir. Como acontece, também, nos cursos convencionais de construções, creio que tentarão usar muito a intuição e considerar como dados elementos que na realidade ainda precisam ser determinados.

Conhecendo o centro do círculo e aproveitando os argumentos que serão suscitados com base nos resultados da questão anterior, darei mais um passo adiante, pedindo a eles para:

Dividir uma circunferência dada em seis partes iguais.

Este é um exercício que não oferece muitas dificuldades, pois é suficiente que o aluno recorde de que o hexágono inscrito em uma circunferência tem, sempre, lado igual ao raio da circunferência. Como eles acabaram de aprender a determinar o centro, que seria o maior obstáculo, facilmente chegarão à divisão pedida.

Caminhando um pouco mais, solicito ao grupo para:

Dividir uma circunferência dada em três partes iguais.

E, concluirei, apresentando uma situação-problema clássica:

Dados dois pontos C e D de um mesmo lado de uma reta, determinar o ponto I sobre a reta de forma que CI + DI seja mínimo,

que requer um raciocínio mais elaborado para a sua solução, pois deverá ser usado o conceito de reflexão para que se chegue ao resultado. Mesmo não tendo sido abordada formalmente durante o curso, essa ideia pode ser aplicada com suporte naquilo que foi constituído nas etapas anteriores.

Com isso, chegarei ao final da última aula, concluindo o curso de Construções Geométricas. Penso que os objetivos terão sido atingidos e que os alunos apreenderam o conteúdo previsto. Tenho certeza, também, de que eles considerarão positiva a sua participação no projeto.

Considerando a experiência que já adquiri no curso, tendo em mente o perfil dos alunos e o funcionamento do ambiente pedagógico, avaliarei as seguintes hipóteses:

(1) Os alunos continuarão tentando soluções mecânicas, sem rigor matemático, para as questões.

(2) Os alunos conseguirão dividir uma circunferência em seis partes iguais.

(3) Os alunos conseguirão dividir uma circunferência em três partes iguais.

(4) O grupo terá muitas dificuldades para solucionar o problema: Dados dois pontos C e D de um mesmo lado de uma reta, determinar o ponto I sobre a reta de forma que CI + DI seja mínimo.

(5) O tempo didático será suficiente para a discussão de todas as questões.

(6) O grupo vai elaborar colaborativamente a resolução das atividades propostas.

As hipóteses suscitadas a respeito do conteúdo são fundamentais durante a elaboração do plano, porque incidem diretamente sobre a divisão do tempo didático. Se o professor estima que os estudantes terão dificuldades em uma situação, então ele já deverá reservar um tempo maior para dedicação a ela.

Experimentação

A aula iniciou-se regularmente às 16 horas, com a presença de todos. Cláudio que estava responsável pela gravação, só iniciou o *Audacity* alguns minutos após de começar. De imediato, Gerardo começou a expor sua solução para a questão que ficou para resolverem após a aula: determinar o centro de um círculo dado.

Gerardo: Desenhei um segmento da circunferência.

Adelmir: Como foi que você escolheu esses dois pontos para traçar a reta?

Gerardo: Professor?

Adelmir: Como foi que você escolheu os dois pontos para traçar a reta?

Gerardo: Na verdade, os dois pontos poderiam ser quaisquer, porque, como eles se encontram dentro do círculo, qualquer reta que passa por um desses dois pontos vai cortar o círculo no meio, indicando a circunferência, que, no caso, os dois pontos delimitam o diâmetro da circunferência.

Cláudio: Gerardo?

Adelmir: Gerardo, o seu ícone de som tá sendo o headphone?

Gerardo: Oi, professor?

Adelmir: Seu som tá com defeito. O ícone que tá aparecendo aí no seu som é o headphone ou é o alto-falante?

Gerardo: É o headphone.

Cláudio : Tô perguntando aqui, no GeoGebra.

Adelmir: Gerardo, eu continuo com uma dúvida: como foi que você escolheu esses dois pontos?

Gerardo: Acredito que os dois pontos poderiam ser aleatórios, professor, porque, como eles se encontram no círculo e por eles passa uma reta, a reta, ela seria no caso o diâmetro e o diâmetro sempre passa pelo centro da circunferência.

Adelmir: Nós estamos com problemas no seu som, Gerardo, mas fazemos o seguinte: vamos observar o círculo que você fez.

Adelmir: Eu vou revisar os passos da sua construção, porque eu não vi a escolha dos pontos.

Fláudio: Professor, isso aí não garante que seja ponto médio do círculo não, né? É o ponto médio só desse segmento né?

Fláudio quer dizer que não garante que é o centro, mas apenas ponto médio do segmento.

Adelmir: Gerardo, eu acho que você marcou ao acaso, nada lhe garantia...foi muita sorte. Gerardo, tente resolver outro.

Gerardo: Não entendi..., professor?

Adelmir: Faça esse outro, que eu quero acompanhar a sua solução.

Gerardo: Tá ok.

Cláudio: Lá vem o Cleiton ver o som do Gerardo.

Gerardo: Eu entendi agora o que o senhor queria dizer com a questão dos dois pontos.

Gerardo, com a ferramenta novo ponto, marcou dois pontos que “achava” serem extremidades de um diâmetro. Questionei, mostrei contraexemplos, pedi que fizesse outro até que se convencesse de que a sua solução intuitiva não era satisfatória, de que precisava de uma garantia matemática. Nessa passagem, mais uma vez, fica expressa a mediação do professor.

Cláudio: Parece que tá certo.

Adelmir: O software tá chamando. Quando você fica escolhendo a reta, ele fica chamando para assinalar..., mas você não tem garantia que você vai acertar toda vez não. Eu tentei descobrir se há alguma diferença na sua marcação, mas como existe uma grade que tá prendendo as figuras ele tá chamando pra isso, mas a construção não é correta. Nada pode lhe garantir que você botou aquele ponto no lugar certo, porque o milionésimo que você tivesse errado já dava grande diferença. Porque o que você tá querendo usar sobre o diâmetro é verdade, mas, na verdade, não se marca um ponto assim. Você tá querendo marcar o ponto no olho e não pode.

Gerardo: Tá certo, professor, porque se eu tivesse marcado o segundo ponto mais pra baixo eu teria uma corda e muito provavelmente ela não passaria pelo centro da circunferência.

À medida que o usuário aproxima a seta da ferramenta *apontador* no GeoGebra, a figura da qual ele aproxima fica ressaltada, suas linhas ficam mais largas. Estava habilitada (pode ser desativada) uma grade, invisível para o operador, que organiza os objetos, daí dizermos que o *software* estava chamando para que assinalasse a reta.

Adelmir: Perfeitamente. Então vamos pensar em outra solução.

Fláudio: Professor, posso tentar?

Adelmir: Claro, todos podem tentar. Esse é o nosso objetivo. Vamos nessa.

Fláudio: Professor, o senhor pode zerar a figura?

Cláudio: Professor, o senhor pode repetir o que é pra fazer nesse exemplo?

Fláudio: Cláudio, dado um círculo, o professor quer o seu ponto médio, o raio, quer dizer.

Cláudio: O raio do círculo?

Fláudio: É. O professor quer... dado o círculo ele quer o raio.

Adelmir: O centro do círculo, se tiver o raio resolve, mas o que eu quero é o centro.

Fláudio: Professor eu posso dizer que o ponto "H" é o centro do círculo?

Adelmir: Você viu que os raios são diferentes, então ele não é o centro do círculo.

Fláudio: Vai, Cláudio.

Silvio: Professor a nós usamos... nós estudamos a tangente?

Adelmir: Não, mas você pode usar porque tangente é só uma reta que tem uma propriedade especial. Você pode usar desde que você tenha condições para isso.

Silvio: E se eu usar o botão que tá a tangente?

Adelmir: Use pra gente ver onde você vai chegar.

Silvio: Botei um ponto qualquer... botei um ponto qualquer. Fiz a tangente, agora vou fazer a intersecção. E fazer a perpendicular dos dois pontos.

Cláudio: Ei, não pode perguntar assim não viu?

Cláudio: Eu acho que tá certo aqui.

Silvio: O centro do círculo.

Adelmir: Perfeito. Perfeito, Silvio. Nós só temos um problema é que pra traçar a tangente que você fez através do software, com régua e compasso a gente precisa do centro; essa construção o software fez automaticamente, mas a gente precisa do centro. Eu vou guardar sua solução. O que a gente precisa... eu achei excelente, agora eu quero uma sem usar a tangente, sem usar as tangentes. O Fláudio já andou, o começo do Fláudio pode ser uma boa pista.

Quando asseverei que acho excelente, ou quando exclamo perfeito, não me refiro à exatidão matemática, e os sujeitos sabiam disso. Tratava das novas possibilidades de discussão que a resolução estava oferecendo.

Fláudio: Professor, se eu palpitasse de novo no desenho do Silvio, posso?

Adelmir: Claro.

Fláudio: Silvio, se tu fizesse uma tangente ao contrário ia ter intersecção entre a tangente de baixo e a tangente de cima, tu ia achar dois triângulos e tu ia fazer tipo uma reta, ligando um triângulo ao outro. Faz aí, Silvio.

Adelmir: Faça você, Fláudio, pra gente entender melhor.

Fláudio: Vou tentar aqui.

Adelmir: Vamos ver o seguinte – você ia chegar também, Fláudio, mas ia dar uma volta muito grande; vamos voltar aqui pra solução do Silvio. A primeira coisa, Fláudio, é o mesmo problema da solução do Gerardo... é que você não sabe a posição da reta, mas tem uma saída bem simples que é assim, olha: eu fiz uma corda na circunferência, corda vocês sabem, é qualquer segmento que liga dois pontos de uma circunferência. Então eu fiz uma corda e ela pode ser qualquer, tá certo? Tenho que achar o ponto médio e fazer a mediatriz ou rapidamente usando o software... nós já sabemos fazer. Essa mediatriz necessariamente passa pelo centro, do centro pra circunferência é *a mesma distância, então, ela tem que passar nesses dois pontos. Tomei outra corda e pode ser qualquer, aonde eu quiser novamente. Tracei a mediatriz, a intersecção dessas duas mediatrizes, todas duas passam pelo centro; se elas estão se encontrando ali, pode ser aquele ponto. Ele é o centro, ok? Traçamos duas cordas quaisquer, é essa a atividade...*

Aproveitando a mesma circunferência, a tarefa que eu quero agora é: que vocês dividam essa circunferência em seis partes iguais, meia dúzia. Dividam a circunferência em seis partes iguais.

Fláudio, copie o seu desenho e cole na nossa tela pra nós visualizarmos sem problema nenhum.

Meu amigo Silvio, hoje parece que você tá meio triste, ainda não vi você dividir essa circunferência em seis partes iguais.

Silvio: Professor, é a mesma ideia do exercício anterior?

Adelmir: Sem dúvida, você vai precisar do centro, o começo de tudo é o centro, não tenha dúvidas. Depois que você tiver o centro, pense como você vai dividir em seis partes iguais. E a melhor maneira de encontrar o centro é aquela através de duas cordas quaisquer.

Cláudio: Tô tentando aqui.

Fláudio: Usando isso aí é muito fácil. Tem que ser com compasso ou régua, a base pelo menos. Assim é muito fácil.

Cláudio: Será que é isso?

Cláudio: Lembro, mas ontem era com reta, macho. Será que com círculo também dá certo? Tenta me explicar num desenho aí, Fláudio.

Fláudio: Cláudio, lembra da questão de ontem que o professor dava pontos "A" e "B" e eu até fiquei teimando com ele que se pegasse um raio qualquer daria certo? Aí o que você tem que fazer é o que ele fez agora: encontrar o centro, traçar do centro ao lado. Vê se tu consegue.

Considerei importante o efeito mediador da intervenção de Fláudio e, ainda, destaquei a segurança com que ele se posiciona, recordando o diálogo com o professor; essa não era sua atitude nas primeiras aulas; é perceptível o progresso que ele conseguiu.

Cláudio: Achei o centro, e agora? (Figura 36).

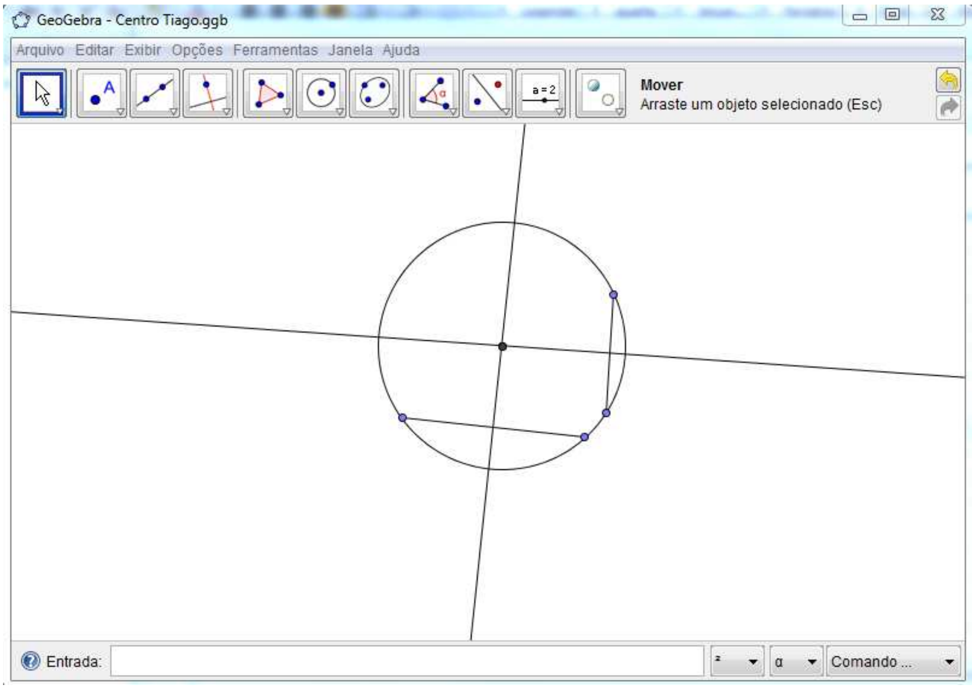


Figura 36: Determinação do centro de um círculo dado.

Fláudio: Deixa eu colocar os pontos aqui.

Adelmir: Observem que as duas cordas o Fláudio usou pra construir o centro... e ele tá fazendo isso muito rapidamente, de uma maneira muito legal. Se ele não vai mais precisar dessas cordas, só queria o centro, vocês sabem que nós temos aí a funcionalidade que é ocultar o objeto e ele poderia ficar sem o desenho tão cheio pra facilitar a vida dele.

Fláudio: Sabe, Cláudio, onde é?

Cláudio: Que foi, Fláudio?

Cláudio: Me explica aí como tu tava pensando.

Fláudio: Pronto. Na questão de ontem, o professor dava um raio qualquer e tinha que colocar dois pontos: um ponto ia ser o centro do círculo e outro no círculo. Aí dado um raio qualquer a gente ia dividir ele em três pontos e depois dividir em mais três pontos que seria outras paralelas.

Adelmir: Mas será que isso vale pra circunferência também? Aquilo valeu pra reta.

Cláudio: Eu acho que não.

Adelmir: Circunferência... será que vale?

Cláudio: Acho que não.

Fláudio: Eu não sei, só vai tentando, né?

Gerardo: ...

Adelmir: Eu não ouvi.

Gerardo: Posso fazer um teste?

Adelmir: À vontade, Gerardo.

Gerardo: A ideia, professor, pra dividir ela em seis partes iguais, seria fazer um hexágono dentro dela?

Adelmir: É uma excelente ideia, mas agora veja só, Gerardo, você, quando pegou esse segmento e começou a traçar pedaços iguais a ele, você não tem certeza que vai dar seis, porque você não sabe a medida desse segmento, ele foi feito no olho e é isso que nós não podemos, nós não podemos fazer nada no olho, nós temos que ter uma construção geométrica. Uma dica interessante, quando você falou no hexágono: se você tiver um hexágono inscrito, Gerardo, é que os lados dele são iguais ao raio. O primeiro segmento que você traçou ainda tá lhe atrapalhando.

Silvio: Professor, eu consegui.

Gerardo: Quem tava mexendo agora eu acho que era o Silvio, professor.

Adelmir: Mostra sua figura, Silvio... pra você mostrar a sua solução.Vejam: o que nós estamos fazendo aqui é apagar a lousa pra fazer de novo.

Silvio: Posso ir?

Adelmir: Vá nessa.

Silvio: Criei um ponto qualquer pra fazer o raio, aí eu vou fazer usando o compasso. Fiz os pontos, agora eu vou ver se eu consigo tirar o círculo.

Cláudio: Tá certo, tá certo.

Adelmir: Pode deixar assim, Silvio, pra gente lembrar a sua solução que tá perfeita, solução perfeita... eu vou até salvar, porque ficou muito boa, mas eu dei uma dica muito forte, né? Depois me arrependi de ter dado a dica do hexágono, porque o Gerardo ia chegar nela bem fácil... porque ele já tava sabendo lá do hexágono.

Ao visualizar a densidade do traçado utilizado por Silvio em sua construção pode-se ficar tentado a pensar em grande complexidade e muito investimento de tempo. Isso não é verdade, pelas funcionalidades que o GeoGebra garante, ele levou menos do que três minutos para apresentar toda a sua solução (Figura 37).

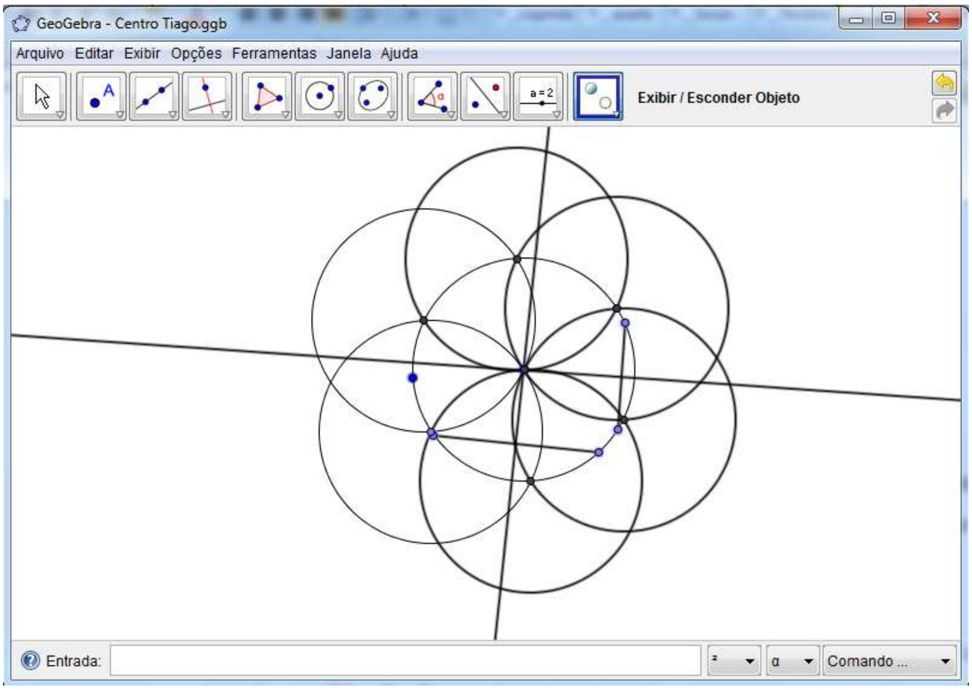


Figura 37: Divisão de uma circunferência em seis partes iguais.

Fláudio: Professor?

Cláudio: Pois pede pra ele explicar, macho

Fláudio: Professor?

Adelmir: Pois não.

Fláudio: Professor,eu não entendi a construção da figura não; foi um pouco rápido.

Adelmir: Então, Fláudio, volte lá no protocolo, veja em ferramentas o protocolo e repita a figura.

Adelmir: Por que não aparece nada? Quem quer me dizer por que não apareceu nada?

Cláudio: Acho que é porque o Silvio não apagou, ele pediu pra ocultar.

Adelmir: O Silvio pediu pra ocultar, os objetos estão ocultos, né? Mas a construção foi a seguinte; vamos voltar um pouquinho, Fláudio. A nossa situação era essa: eu tenho uma circunferência e conheço o raio dela, usando o compasso, eu encontro mais dois pontos sobre a circunferência, e o Silvio podia até ser mais rápido; olha se ele fez assim olha. Tinha que fazer assim. Já está dividido, porque os raios de todas as circunferências são iguais, isto é raio, raio desta, raio desta... então são iguais... raio desta, raio da outra, então já está dividida, ok?

Se vocês dividiram em seis, dividir em três que é a metade deve ser muito mais fácil, né? Pois peguem a mesma circunferência e dividam em três partes iguais.

Cláudio: Professor, eu vou tentar uma solução aqui.

Adelmir: O meu novo GeoGebra apareceu pra vocês?

Cláudio: Apareceu.

Adelmir: Cláudio, você quer tentar uma solução?

Cláudio: Isso.

Adelmir: Vamos lá.

Cláudio: Tá correta, professor, essa solução?

Adelmir: Excelente Silvio, excelente. Desculpe. Excelente, Cláudio. Agora vamos enxugar a solução. O Cláudio tinha já terminado antes, viu? Ele fez duas passagens que ele nem precisava mais. Deu pra vocês observarem isso? O que ele não precisava fazer?

Fláudio: O segundo círculo, né, Professor?

Adelmir: Na realidade o terceiro, né? O segundo que ele construiu... né isso? Por que já tinha um. O terceiro, perfeito... ele não precisava ter o terceiro.

Cláudio: É. Tem razão.

Adelmir: Só com a situação anterior ele já tinha feito, e ele poderia não ter usado a reta também (Figura 38)*; existe uma outra solução, mas a solução dele é perfeita, eu acho, creio até que é a melhor, a melhor é a dele, mas existem outras. Uma é assim, quando ele traçou o primeiro círculo e achou os dois pontos, ele poderia ter feito assim, eu não tô usando reta, não to usando nada, só o primeiro círculo dele, aí com o raio lá, terceiro ponto sobre a circunferência. É outra solução, as duas estão corretas.*

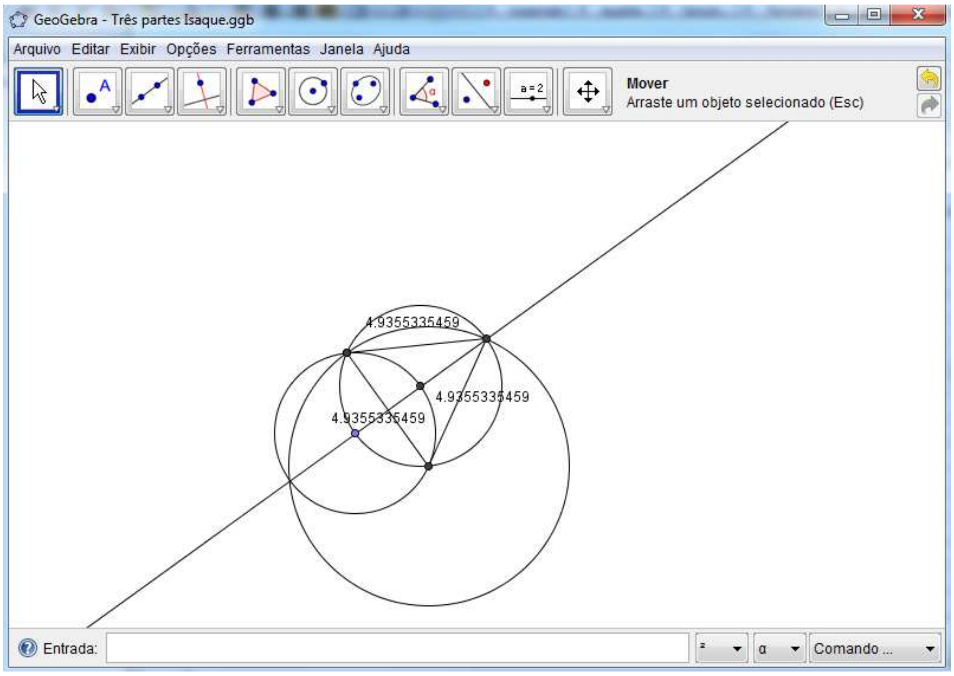


Figura 38: Divisão de uma circunferência em três partes iguais.

Era desnecessário, mas Cláudio fez questão de exibir as medidas dos lados como prova de que sua construção estava correta. Pude perceber uma ponta de vaidade, muito comum aos matemáticos quando conseguem um grande resultado, mas perdoo o seu pecado capital, compreendendo sua satisfação pelos avanços conseguidos.

Adelmir: A situação agora é a seguinte: eu tenho dois pontos "C" e "D" que estão do mesmo lado da reta, então... eu tenho uma reta e tenho dois pontos "C" e "D" que estão do mesmo lado da reta. O desafio agora é o seguinte, eu quero que vocês descubram um ponto "P" em cima da reta, tal que a distância de "C" pro "P", que é o ponto que você vai achar, mais a distância do ponto "P" para o "D" seja a menor possível.

Fláudio: Entendi o enunciado não, professor, pode repetir?

Adelmir: É assim, Fláudio: eu vou achar um ponto, como eu tô desenhando aqui, tá certo? Aí não tem essa distância que vai do "C" até esse ponto?

Fláudio: Certo.

Adelmir: Olhe, tem essa distância e depois essa distância.

Fláudio: Tá em um ponto qualquer?

Adelmir: Para cada ponto essa distância tem um valor, tem uma soma aí, tá certo? Existe um ponto em que essa distância é a menor possível. Eu quero saber onde é que fica esse ponto.

Silvio: Menor de qual ponto? Do "C" ou "D"?

Adelmir: É assim, Silvio: a distância do "C" para o "E", mais a distância "E" para o "D" tem que ser a menor possível. A soma dos dois comprimentos tem que ser a menor possível. Esse problema é um problema real, é um problema muito conhecido. Prestem atenção na historinha: aqui no ponto "C", é a casa do morador, a reta é o rio, e aqui no D é o estábulo. Todo dia ele anda de casa até o rio, pega água, enche o balde e leva lá para o cavalo que tá no estábulo. Todo dia ele faz isso. Existem vários caminhos de tamanhos diferentes, é lógico se ele souber qual é o menor, vai ser o caminho que ele vai escolher.

De outra maneira: o governador de um estado quer fazer uma fonte entre duas cidades, mas ele quer que as pessoas percorram o menor caminho. Então, existem inúmeros problemas em Engenharia e em agrimensura que usam essa situação. Essa é uma situação concreta. Eu quero descobrir qual é o ponto sobre essa reta, que é o meu rio, que vai dar a menor distância. Mais legal ainda, mais legal, eu quero fazer aqui um poço que eu vou alimentar de água duas casas ali. Você concorda que toda vez que eu for fazer esse poço eu não vou ter que gastar menos canos? Então todo engenheiro, o sonho dele é não gastar nada. Então na hora que ele vai decidir o lugar que ele vai fazer o poço pra abastecer essas duas casas, ele quer gastar o mínimo de cano, ele vai gastar o mínimo de cano no menor caminho. Eu quero que você me diga qual é, onde é que ele vai escolher ou será que em qualquer lugar é a mesma coisa? Se o ponto estiver nessa posição, a soma vai dar 8,8... das duas distâncias... aqui dá 9,9. Se a gente tiver falando de tubulação de cidades, se isso aí for um quilômetro de distância e for um cano reforçado, pense num prejuízo.

Silvio: Ei professor, a gente não é cearense não, a gente é grego, não tem números.

O gracejo de Silvio, muito espirituoso, além da vingança contra o professor, pelo que eu havia falado com ele em aula anterior, mostra que já estava totalmente adaptado à regra do jogo.

Adelmir: Muito bem Silvio, parabéns. Nós não temos problema d'água, né isso?

Fláudio: Professor, eu já ouvi dizer que a menor distância de dois pontos é a reta, no caso seria o "C" tocando essa reta e essa reta diretamente ao o ponto "D".

Adelmir: Fláudio, eu vou limpar a figura pra você mostrar o que você tá dizendo. Eu quero que você nos diga onde vai ficar o ponto em cima da reta. Vamos lá, Fláudio.

Silvio: Fláudio, é melhor tu fazer a perpendicular da reta ao ponto "D".

Cláudio: É mesmo.

Fláudio: Vai me ajudando aí Silvio, vai fazendo.

Silvio: Essa não é a perpendicular.

Cláudio: É isso aí, Fláudio, que tu tava dizendo?

Fláudio: Eu pensei nessa solução... e pensei em outra solução.

Adelmir: Será que a menor distância é sair de "C" e ir até esse ponto e depois ir pro "D"?

Cláudio: Eu acho que... Fláudio?

Fláudio: Diz, Cláudio.

Cláudio: Por que que essa reta partiu do "D" e não do "C" ?

Adelmir: Por que que essa reta o que, Cláudio?

Cláudio: Partiu do "D" e não do "C".

Adelmir: Por que que você fez a reta passando pelo D e não pelo C?

Fláudio: Diz aí, Silvio, não fui eu que fiz.

Cláudio: To medindo aqui, cara! Eu acho que é o contrário mesmo.

Fláudio: Pois tenta fazer o contrário agora pra gente ver a distância; senão, eu tenho uma terceira solução.

Adelmir: A distância aí é você lembrar, deu 12 e tanto, né? Se a outra der menor?

Fláudio: E aí, professor?

Adelmir: Ela já é menor do que aquela que você achou.

Fláudio: Posso tentar a terceira solução?

Adelmir: Tente a terceira, porque em nenhuma das duas... você não tem garantia em nenhuma das duas.

Fláudio: Cláudio, me ajuda aí, você que é bom no desenho.

Cláudio: Professor?

Adelmir: Diga lá.

Cláudio: Faz algum sentindo eu encontrar um ponto médio entre os dois pontos e traçar a perpendicular nele? Referente a outra reta?

Fláudio: No caso eu pensei num retângulo, ia ficar num retângulo, a média do retângulo no ponto, na reta, quer dizer.

Adelmir: Deixa o Cláudio tentar a solução dele. Volte lá, Cláudio.

Cláudio: Tá bom, eu vou tentar.

Adelmir: 8,72, vamos botar só com duas casas decimais, já é muito menor do que todas as outras que você achou, mas será que é a menor? E o que eu tô querendo, meu caro Cláudio, é o ponto, então as distâncias não me interessam. Eu só quero saber se a posição do ponto é aquela mesmo.

Fláudio: Cláudio?

Cláudio: Diz.

Fláudio: Vamos ver agora uma quarta figura?

Cláudio: Fláudio, fala um pouco mais alto que eu não consigo te escutar bem.

Fláudio: Vamos ver agora uma quarta figura?

Cláudio: Como assim?

Fláudio: Deixa eu ver se consigo demonstrar. Vou usar o Crtl Z.

Cláudio: Será que não é com a mediatriz, Fláudio?

Fláudio: É nisso aí que eu tô pensando.

Cláudio: Mas eu tava pensando na mediatriz entre o ponto "C" e "D". Não tô entendendo muito bem o que que tu quer fazer.

Adelmir: Isso que você fez é o que o Cláudio comentou. Bastava ter traçado a mediatriz. Você fez um caminho pra chegar na mediatriz, mas presta atenção a primeira frase que foi dita depois que eu propus a questão. A primeira expressão que foi dita era a solução do problema e quem disse foi você. Fláudio, vê se você tenta se lembrar o que foi a primeira coisa que você falou, enquanto eu apago.

Fláudio: A menor distância entre os dois pontos é uma reta.

Adelmir: Exatamente. A solução do problema é só isso.

Fláudio: Professor, esse ponto que toca na reta, ele teria que formar um ângulo de 90º?

Adelmir: Não necessariamente. O ponto forma um ângulo de 90º com o que? Com os outros ? Como é isso?

Fláudio: Isso. Como se fosse formando um triângulo retângulo.

Adelmir: Só um minuto, deixa eu traçar a minha reta de novo. Tá aí a situação. Olhe só: por "D" eu vou traçar uma perpendicular reta, vou usar o meu compasso e vou encontrar esse ponto de intersecção aqui embaixo. Vou ligar esses dois pontos, o ponto que eu estou procurando é exatamente o ponto "I". Sabendo que a menor distância entre dois pontos é uma reta, então o que eu fiz inicialmente: o ponto "D" que tava lá em cima, com o compasso eu joguei ele aqui pra baixo. O nome disso se chama reflexão. Eu fiz a reflexão do ponto D e encontrei o ponto H. Veja que eu posso traçar uma reta de C pra H, mas a distância do ponto "I", para o nosso ponto pra H, é a mesma que de I pra D, porque isso aí eu construí com a reflexão dele. Então, como essa distância é a mesma e a menor tá sobre uma reta, eu garanto então que esta vai ser a menor distância. Não deu nem 8. Ok? (Figura 39).

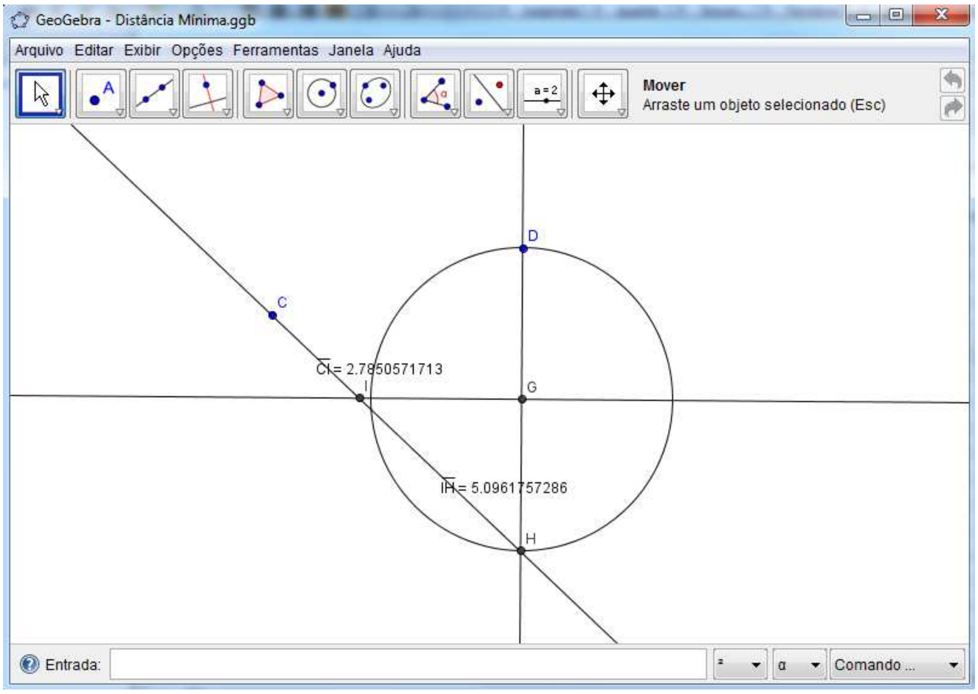


Figura 39: Ponto sobre uma reta que determina o menor caminho entre dois pontos que estão do mesmo lado da reta.

Adelmir: Está convencido, meu amigo Silvio?

Aí aquele aluno espírito de porco diz assim: e se nesse rio tiver piranha, como é que você vai marcar um ponto lá do outro lado? Aí isso não é um problema de Geometria, é de Trigonometria, que eu consigo marcar uma distância do outro lado do rio. E como é que pode? Nós já fizemos coisas muito mais difíceis, nós já medimos a distância das estrelas e, quando Pto-

lomeu mediu essas distâncias, ele não tinha nave espacial pra ir lá medir as distâncias. Ele fez isso com semelhanças de triângulos. Então a geometria nos permite isso e nós podemos calcular até distâncias não comensuráveis.
Pessoal nós vamos parar por aqui, acho que foi um excelente encontro o de hoje. O Gerardo e o Cláudio estão gravando, os senhores entrarão para a posteridade com suas demonstrações aí em geometria. Eu agradeço muito, muito mesmo a todos vocês e, quando eu fizer o resumo e as observações sobre o nosso curso eu mostrarei a vocês. A gente se encontra dentro de dez minutos na nossa sala lá, tá ok?
Muito obrigado a todos.

Análise a posteriori

Quando, na análise a *posteriori* local, aceitei ou refutei uma hipótese, não significa que ela não deva ser retomada para encontros futuros. Lembro que estou avaliando aspectos referentes a uma determinada aula, e as conclusões tiradas são subsídios para as aulas futuras dentro de uma mesma sequência ou para quando ela tiver que ser reaplicada em novos cursos. Desse modo, quando nego que o tempo didático foi bem distribuído, não significa a condenação total do projeto, mas que o professor-engenheiro deve estar atento para recompor o conteúdo no próximo encontro e que reflita melhor sobre essa questão quando for ministrar outros cursos.

O trabalho relativo à análise a *posteriori* deste encontro torna-se menos complexo pelo fato de que algumas das conjecturas são recorrentes, já foram tratadas em aulas anteriores, e sobre aquelas relacionadas aos conteúdos de Geometria, se pode chegar, rapidamente, a uma conclusão pela observação direta das ações dos sujeitos relatadas na transcrição da aula.

A quinta aula teve duração de uma hora e 24 minutos. Todos os alunos estavam presentes, o que me garantiu cem por cento de frequência em todo o curso, e ocuparam suas posições nos laboratórios com a mesma distribuição das sessões anteriores.

Mesmo percebendo uma evolução dos sujeitos quanto a posicionarem-se como matemáticos diante dos problemas propostos, sabe-se que atingir esse objetivo de forma completa requer muito tempo e treinamento. Logo é de se esperar que durante certo período continuem fazendo confusão entre o que é realmente dado em uma questão e o que é apenas uma impressão sua, de sorte que

(1) Os alunos continuarão tentando soluções mecânicas, sem rigor matemático, para as questões.

Tal fato ainda pode ser verificado em seus procedimentos, como posso apontar pela posição de Gerardo, quando marcou um diâmetro escolhendo dois pontos que “achava” serem suas extremidades. Pela mediação, ele próprio reconheceu que estava seguindo uma trilha falsa:

Gerardo: Eu entendi agora o que o senhor queria dizer com a questão dos dois pontos.

Gerardo: Tá certo, professor, porque se eu tivesse marcado o segundo ponto mais pra baixo eu teria uma corda e muito provavelmente ela não passaria pelo centro da circunferência.

Após a tentativa infrutífera de Gerardo para determinar o centro da circunferência, e, de a solução ter sido obtida com minha ajuda, ele sinalizou que conhecia a propriedade: para um hexágono inscrito, o lado é igual ao raio da circunferência que o circunscreve. Então, quando formalizada essa ideia, Silvio propôs rapidamente a construção, tornando verdadeira a minha suposição de que

(2) Os alunos conseguirão dividir uma circunferência em seis partes iguais.

Em ato contínuo, e num pequeno espaço de tempo, o que me surpreendeu, Cláudio apresentou a resposta para a terceira questão, validando a afirmação de que

(3) Os alunos conseguirão dividir uma circunferência em três partes iguais.

A quarta questão foi a mais difícil do dia como previra em

(4) O grupo terá muitas dificuldades para solucionar o problema: Dados dois pontos C e D de um mesmo lado de uma reta, determinar o ponto I sobre a reta de forma que CI + DI seja mínimo.

O grupo se embaraçou logo no entendimento da questão. Por isso dediquei bastante tempo à *maturação*, citando vários exemplos mediante os quais mostrei o aspecto prático do problema. Recorri à ferramenta medida de comprimento para mostrar que, de acordo com a escolha do ponto sobre a reta, a soma das medidas dos dois segmentos se alterava. Amparado na afirmação inicial de Fláudio, de que a menor distância entre dois pontos era uma reta, fizemos a apresentação da solução.

Na quarta aula, não consegui atingir a meta de resolver todas as questões. Por isso tive um cuidado maior para a distribuição das tarefas para o quinto encontro. Cumpri todas as atividades previstas sem sobressaltos, concretizando que

(5) O tempo didático será suficiente para a discussão de todas as questões.

A partir do terceiro encontro, quando o grupo já estava adaptado com as propriedades do ambiente em que o curso era ministrado, começou a revelar-se a característica do TeleMeios de estimular o trabalho coletivo. As possibilidades de comunicação e interação se tornam tão evidentes que os sujeitos são compelidos a intervir na tarefa que está se desenvolvendo. A participação do grupo nas aulas foi sempre crescente e penso que, se a duração do curso fosse maior, esse caráter se intensificaria ainda mais. Desse modo que é com muita segurança que validamos a ideia de que

(6) O grupo construirá colaborativamente a resolução das atividades propostas.

Nos questionários que respondiam no final das aulas, os alunos pouco acrescentaram ao que já haviam declarado anteriormente e o que afirmam corrobora minhas análises da *experimentação*. Creio que isso decorra dos fatos de já estarem completamente habituados com o ambiente, manipularem com destreza as ferramentas dos *softwares* e já terem sedimentado os elementos necessários para as Construções Geométricas elementares. Do que me disseram, extraio:

- Gerardo – Não teve dificuldades com a tecnologia. Houve maior troca de ideias e colaboração entre os participantes, e melhor aprendizado no uso e técnicas para resolução de problemas.
- Cláudio – Teve problemas para entender as questões o que não ocorreu em relação ao ambiente. Além de aprender vários conceitos notou uma maior interatividade do grupo.
- Fláudio – acredita que o sistema informático é lento, mas percebeu que evoluiu no entendimento e na construção dos desenhos.
- Silvio – Afirmou que experimentou um maior aprendizado do *software* e de geometria e destacou que todo mundo participou dos exercícios.

5.1.4 Análise a *Posteriori Global*

Cheguei à fase final de toda a Engenharia Didática constituída para o Curso de Construções Geométricas. É o momento definitivo no qual se apresentam as respostas para as minhas questões de pesquisa, norteadoras de toda arquitetura e execução do projeto.

A metodologia assegura a validação interna, isto é, não é necessário recorrer a outros elementos que não aqueles coletados dentro da própria Engenharia. Assim, amparado nas observações detalhadas que fiz, na confrontação das hipóteses que levantei nas *análises teóricas globais* com o que realmente foi verificado na *experimentação,* tive a oportunidade de nessa *análise a posteriori global* aceitar ou rejeitar questões de pesquisa. É o momento de fechamento total do projeto.

Minhas hipóteses locais (suscitadas para cada uma das aulas) estiveram sempre relacionadas com o aspecto global da pesquisa e cumpre-me agora pinçar as situações vividas durante o Curso de Construções Geométricas que me amparem na tomada de decisão sobre a validação das conjecturas.

Apesar de todos os sujeitos assistirem às aulas no mesmo *campus* da Faculdade 7 de Setembro, estavam distribuídos em salas diferentes, não ocuparam um só espaço. E, ainda, como o curso foi ministrado com os computadores conectados em rede, os pontos que definiam essa malha poderiam estar em qualquer local em que fosse possível se conectar à internet. Dessa forma a ideia de que

> (1) O ambiente TeleMeios permite superar as fronteiras físicas e espaciais durante um curso de geometria

foi plenamente comprovada e a plataforma abre novas e promissoras possibilidades para o campo da Educação a Distância, notadamente pelas suas características de permitir a comunicação síncrona e o compartilhamento de aplicativos quaisquer.

Ao criar as condições para uma comunicação em tempo real, por meio de imagem e som, e liberar o compartilhamento total dos programas, o TeleMeios situou todos os sujeitos trabalhando sobre a mesma questão. Era como se tivessem um só caderno e, em não raros momentos, a intervenção do outro é que propiciava a obtenção dos resultados, como pode ser verificado em muitas passagens das aulas e que exemplifico, mais uma vez, com:

> *Cláudio: Lembro, mas ontem era com reta, macho. Será que com círculo também dá certo? Tenta me explicar num desenho aí, Fláudio.*
>
> *Fláudio: Cláudio, lembra da questão de ontem que o professor dava pontos "A" e "B" e eu até fiquei teimando com ele que se pegasse um raio qualquer daria certo? Aí o que você tem que fazer é o que ele fez agora: encontrar o centro, traçar do centro ao lado. Vê se tu consegue.*

e

> *Silvio: Fláudio, é melhor tu fazer a perpendicular da reta ao ponto "D".*
>
> *Cláudio: É mesmo.*
>
> *Fláudio: Vai me ajudando aí Silvio, vai fazendo.*
>
> *Silvio: Essa não é a perpendicular.*
>
> *Cláudio: É isso aí, Fláudio, que tu tava dizendo?*
>
> *Fláudio: Eu pensei nessa solução... e pensei em outra solução.*

Minha experiência no magistério, já assinalei, é bastante larga, e, como opção estratégica, escolhi sempre incentivar que os alunos participassem das atividades em sala de aula, mas nunca consegui que trabalhassem tão próximos como se concretizou neste curso. Portanto, valido a segunda conjectura –

(2) A plataforma TeleMeios propicia maior interação dos sujeitos durante as aulas de Geometria.

Quando consigno que o TeleMeios possibilita estreita interação dos sujeitos, que fique claro que ela se estende ao professor. Minha intervenção junto a qualquer um deles não foi objeto de nenhuma limitação e continuamente opinava, sugeria, apresentava contraexemplos, sempre evitando apresentar as soluções imediatamente. Com essa atitude, estimulava a continuidade de seus esforços em busca de suas respostas. Assim, a premissa segundo a qual

(3) O ambiente TeleMeios possibilita ao professor desempenhar sua função de mediador modo pleno e categórico

comprovou-se integralmente. Poder-se-ia questionar a qualidade da mediação do professor, mas se essa componente deixou a desejar, o fato está relacionado à competência do mediador e não à potencialidade que o ambiente proporciona.

Um dos principais problemas que pode ser observado nos modelos de educação a distância que têm se praticado atualmente é a quase total inexistência de interação e mediação. Quando têm dúvidas ou questionamentos, os estudantes os apresentam através de correio eletrônico ou listas de discussões. Para o ensino de Matemática, esse é um fator crítico porque uma pequena dúvida não esclarecida pode impedir o progresso do aprendiz por um longo período. A falta da exata compreensão de um enunciado pode levar o aluno para caminhos diversos do objetivo pretendido; as explicações em Matemática não admitem procrastinação. Recordando do que me recomendou o saudoso professor Augusto Cesar Morgado:

> Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, deve ser tomada em primeiro lugar. (MORGADO et al, 2004, P.20).

Posso garantir que

(4) O compartilhamento em tempo real é indispensável para o bom aproveitamento dos alunos em um curso de Geometria em Ambientes Virtuais de Ensino – AVE.

Durante o curso enfrentei alguns contratempos ocasionados pelo aparato tecnológico. Queda de servidor, alunos que não escutavam em alguns momentos, sistema lento foram pontos observados, mas que de nenhuma maneira inviabilizaram a consecução do projeto. Na descrição dos equipamentos, em capítulo anterior, mostrei que seriam empregados equipamentos de configuração limitada, considerando os atuais padrões disponíveis de *hardware*. A estrutura computacional utilizada foi suficiente para um bom desenvolvimento do curso. Logo,

> (5) Não é necessária uma infraestrutura computacional sofisticada para a aplicação de um Curso de *Construções Geométricas* empregando a plataforma TeleMeios,

o que é um fato auspicioso, porque possibilita que escolas com limitados recursos possam usufruir das contribuições que o ambiente traz para o cenário educativo. Porque, por tudo o que já foi demonstrado, destacadamente no que se refere à interação e à mediação, sem dúvidas,

> (6) O TeleMeios é um ambiente computacional que favorece o ensino e a aprendizagem de Geometria.

O *software* ainda apresenta pontos que requerem melhorias e precisam ser mais bem trabalhados, principalmente o disciplinamento do mouse. Quanto às quedas e lentidão do servidor, creio que a mudança da arquitetura cliente-servidor para a *peer to peer* que vem sendo desenvolvida por Daniel Capelo Borges superará as dificuldades oriundas do modelo. Mesmo com a estrutura atual, no entanto, o ambiente teve um desempenho que permitiu todas as iniciativas transcritas fielmente neste relatório de pesquisa.

Fora do âmbito desta pesquisa, mas encorajado pela minha prática educativa, posso, sem temer os riscos que as generalizações abrigam, fazer uma extrapolação e sugerir que o TeleMeios favorece o ensino em diversos campos e não só o de Geometria.

O TeleMeios, ao possibilitar o compartilhamento dos aplicativos, bem como proporcionar a comunicação, em tempo real, entre os sujeitos, criou um ambiente altamente positivo para a interação dos membros do grupo. Dessa forma, cada tema pode ser debatido amplamente por todos os participantes do experimento. As discussões que aconteceram em todas as aulas, e cuja intensidade descreveu uma trajetória ascendente, podem ser comprovadas pela transcrição dos vigorosos diálogos que reproduzi em títulos anteriores deste trabalho.

Pela facilidade de compartilhamento, acompanhava cada ideia, cada construção dos alunos, no mesmo instante em que era executada, e, mais, podia-se atuar sobre ela. Isso não seria possível se usássemos a lousa e o caderno de desenho convencional. Em uma sala de aula, mesmo com um número reduzido de alunos, não se teria condições de elaborar as soluções de maneira colaborativa como se verificou neste curso. E o estímulo à prática da colaboração é uma das contribuições mais relevantes que o ambiente traz para a atuação pedagógica. Isso assevera que,

> (7) Atualmente, é mais produtivo do ponto de vista pedagógico aplicar um curso de Construções Geométricas através do ambiente TeleMeios do que usando régua e compasso.

O primeiro passo dado por engenheiros e arquitetos para a concepção de um projeto é fazer um *briefing* com os destinatários do empreendimento, com base no qual tentarão conhecer suas características pessoais e culturais, suas necessidades e os seus desejos, para, só então, se debruçarem sobre os aspectos técnicos a fim de satisfazer as expectativas daqueles para quem trabalharão. Um projeto visa a atender às necessidades de quem se destina.

Olhando para o comportamento atual dos estudantes, percebo que a tecnologia se faz presente na maioria de suas atividades e eles mantêm um estreito e natural relacionamento com esse novo mundo cibernético, impensável até pouco tempo. A manipulação de instrumentos e aplicativos se faz de maneira intuitiva sem necessidade de treinamentos nem uso de manuais. Os jovens foram impelidos para esse universo, que se expande com velocidade meteórica, de forma tão evidente que, em curto espaço de tempo, seu vocabulário foi alterado e palavras como *notebook, ipod, iphone, pendrive, Facebook, Twitter* ou *Orkut* passaram a ser coloquiais.

Da mesma forma que em Engenharia, ou, mais ainda, a elaboração de um projeto educativo por um professor-engenheiro deve preocupar-se inicialmente com as características dos sujeitos a quem é dirigido. Desse modo, chega-se a uma época em que a incorporação das tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem não é apenas desejável, tornou-se indispensável. As mais recentes correntes pedagógicas aconselham que o ensino deva ser contextualizado, que o professor deve partir de onde o aluno está e que valorize a experiência do estudante considerando os saberes que já possui. Parece-me que a tecnologia é o caminho mais curto para o acatamento dessas recomendações.

Considerando a opinião de meus alunos, destinatários deste projeto, a fala de Cláudio:

> FÁCIL COMUNICAÇÃO, ALTA INTERATIVIDADE E COMODIDADE POR ESTÁ TENDO AULA EM UM COMPUTADOR, ONDE PODE ME SENTIR MUITO AVONTADE PARA PERGUNTAR E PARA APRENDER E RELEMBRAR COISAS DA GEOMETRIA.

fortalece minha convicção na tese:

(8) O uso de tecnologias é elemento motivador e amplia o interesse dos sujeitos pelo estudo de Geometria.

Quando esbocei um pequeno histórico da ciência geométrica nos Capitulos 2 e 3 deste trabalho, ressalto o fato de que, nas suas origens, o estudo decorria de finalidades práticas para resolução de problemas do cotidiano das pessoas. Em seguida, mostrei sua conexão com outras ciências, notadamente as relacionadas com a Física e a Engenharia. Ela foi elemento essencial nos progressos alcançados pela humanidade desde as invenções advindas com a Revolução Industrial, quando o desenho era indispensável para o projeto das máquinas e das edificações. Durante toda a sua trajetória até meados do século passado, os equipamentos básicos empregados em todas as aplicações geométricas sempre foram régua, compasso, esquadros e transferidores.

Hoje, porém, as aplicações da Geometria, em quase sua totalidade, não se realizam mais por meio das *antigas* ferramentas régua e compasso. Existem aplicativos específicos para cada área, que simplificam sobremaneira o trabalho dos profissionais, permitindo a experimentação e a simulação dos mais variados cenários com os quais vão se deparar na produção concreta dos seus trabalhos.

No caso da Engenharia, para os que não viveram de perto o contexto, é difícil imaginar o volume do trabalho que se empreendia para chegar à produção final de um projeto tendo que fazer todos os cálculos, dimensionamentos e desenhos manualmente. Hoje, os projetos são totalmente elaborados nos computadores, enviados para os clientes via *e-mail*, as alterações são feitas instantaneamente e a impressão das plantas, que antes era um momento crítico, é feita em uma gráfica digital, muitas vezes localizada a quilômetros de distância, via internet. O papel da tecnologia computacional na formação profissional é tão relevante que a qualidade dos laboratórios de informática passou a ser um dos principais critérios de avaliação dos cursos superiores.

Por outro lado, nas escolas da Educação Básica, é cada vez menor o emprego do material de desenho. Dos sujeitos de meu grupo nenhum tinha prática com essas ferramentas.

Se, nos segmentos mais diversos, a informática se revela como elemento facilitador e acelerador de processos mecânicos, isso também já se verifica no exercício da Matemática e não são poucas as aplicações que servem de apoio a matemáticos profissionais e a professores. Assim me parece absolutamente natural que um curso de Construções Geométricas seja ofertado utilizando um *software* para substituir o equipamento de desenho. Traindo a formalidade que um documento dessa espécie exige, confesso que mantenho ainda guardados e muito bem cuidados os equipamentos na primeira gaveta do birô e de vez em quando traço algumas curvas.

Em minha primeira aula, os sujeitos já esboçaram as primeiras construções, procedendo de maneira colaborativa. Se se imaginar outro cenário: o primeiro dia de aula de um curso de Construções Geométricas com régua e compasso em que os alunos não possuíssem habilidade com os equipamentos. Quanto tempo decorria para que realmente começassem a interagir? Será que demonstrariam a mesma desinibição para apresentar suas produções? Quando cometessem erros, como procederiam com o caderno de desenho? Apagariam tudo? Rasgariam a folha para começar em outra? O professor poderia acompanhar as soluções de cada um? Acredito que a resposta é não para todas as questões e justifico essa posição pelas situações que já vivenciei quando ministrei o mesmo curso, mais de uma vez, seguindo o modelo anterior. No novo ambiente, com dois cliques, superam-se as dificuldades ora levantadas.

Nas análises a *posteriori* da Aula 2 já constituí uma relação de motivos que mostraram a superioridade do GeoGebra sobre a régua e o compasso em um curso para sujeitos com o perfil daqueles que participaram do meu projeto, que não possuíam nenhuma prática com material de desenho, que teriam que despender muito tempo desenvolvendo a habilidade para manuseio dos equipamentos convencionais. Concluo, então, que são procedentes as conjecturas, que se complementam:

> (9) O *software* GeoGebra substitui, sem prejuízos, a régua e o compasso em um curso de *Construções Geométricas.*
>
> (10) Os sujeitos têm mais facilidade de operar com o *software* do que com régua é compasso.

Nossa inferência, então, é amplamente corroborada por todos os alunos do curso, como se pode concluir das palavras de Cláudio:

OBSERVÉI É QUE AO SER ATRAVEZ DE UM COMPUTADOR, ME DEU MAIS UM ESTIMULO PARA APRENDER, O SOFTWARE GEOGEBRA É MUITO LEGAL DE SE TRABALHAR COM ELE.

ou de Gerardo, mesmo sem entender o que ele chamou de curva de aprendizado:

O Geogebra ferramenta geometrica, utilizada ao longo do curso é muito boa, com excelentes recursos, seu único ponto négativo seria a curva de aprendizado mas nada que dificulte o seu uso...

Finalmente, aporto ao momento de avaliar a hipótese na qual se resumem todas as expectativas da missão educativa do curso:

> (11) Os alunos aprenderão os conteúdos de construções geométricas ministrados durante o curso.

Para minha tomada de decisão, posso considerar a opinião dos estudantes sobre o evento.

Gerardo:

O curso de construções geométricas é perfeitamente possível dadas as ferramentas utilizadas e o conteúdo exposto, bem como a empolgação gerada pelo processo de aprendizado.

Cláudio:

QUERO DESTACAR ALGUNS PONTOS POSITIVOS. POR SEREM AULAS A "DISTANCIA" LHE TRAZ A COMODIDADE DE FICAR MAIS AVONTADE, TEM RECURSOS COMO A INTERNET BEM MAIS PROXIMO DO QUE EM UMA AULA COVENCIONAL. NA PARTE GRAFICA É BASTANTE APROPRIADA PARA O APRENDIZADO, NA MINHA OPNIÃO É MELHOR QUE UM QUADRO DE AULA CONVENCIONAL E ISSO AJUDA MUITO PARA ENTENDER OS CONCEITOS GEOMETRICOS.

Silvio:

Ponto Positivo: Relembrar os conceitos de matemática.
O software é de fácil entendimento.
Todo mundo participa, para resolver o problema.
Fácil aprendizado.

Fláudio:

SIM, EXISTE A POSSIBILIDADE DE APRENDIZADO EAD DE GEOMETRIA VIA SOFTW
O MELHOR SERIA PARA OS ALUNOS UMA APOSTILA EM PDF ALGUMAS VIDEO-AULAS
A METODOLOGIA FOI A MELHOR POSSÍVEL.

Prefiro, porém, retirar de minhas vivências argumentos mais sólidos, como quando Silvio, na Aula 3, se mostra bastante seguro ao explicar a construção do quadrado:

> *Silvio: Eu fiz um ponto médio entre "A" e "B", fiz o círculo, o raio até "A", e fiz uma perpendicular e agora vou marcar a interseção, agora vou fazer os pontos. Agora vou fazer outro raio de "ED", agora vou pegar o ponto "D" e fazer*

uma perpendicular, aí vou marcar a interseção das retas com o raio do círculo maior. Agora é só ligar os pontos. Fiz o quadrado;

ou quando Gerardo, na Aula 2, constrói o ponto médio:

Gerardo: Nós temos aqui um triângulo isósceles, ou seja, com dois lados iguais, e segundo já foi explicado anteriormente, no caso do triângulo isósceles a altura do triangulo que o segmento que vai de "C" até "M", ela divide o lado oposto, no caso, o segmento "AB" ao meio, garantindo um ponto médio do segmento;

Ou, ainda no diálogo entre Cláudio e Fláudio

Fláudio: Deixa eu ver se consigo demonstrar. Vou usar o Crtl Z.

Cláudio: Será que não é com a mediatriz, Fláudio?

Fláudio: É nisso aí que eu tô pensando.

Cláudio: Mas eu tava pensando na mediatriz entre o ponto "C" e "D". Não tô entendendo muito bem o que que tu quer fazer.

As expressões que usaram, a firmeza em defender os argumentos e a determinação ao apontar os elementos são sinais que indicam realmente para o aprendizado. Paralelamente a observação detalhada de cada uma de suas construções que realizei me leva a concluir que os alunos aprenderam os conteúdos básicos relativos às Construções Geométricas Elementares.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao chegar ao final do relato deste projeto, defronto uma insólita situação: pelas suas características inovadoras e por se inserir em um campo ainda embrionário, o seu fechamento nada mais é do que a abertura para novas possibilidades e estudos nas áreas da Educação a Distância e do emprego das tecnologias em Educação.

Nessas considerações não me aterei à descrição detalhada das conclusões obtidas. Os procedimentos metodológicos que segui, rigorosamente, centrado na Sequência Fedathi e na Engenharia Didática, me garantiram que a pormenorização dos resultados fosse concluída no capítulo anterior na análise *a posteriori* global.

Ainda na concepção de meu plano inicial, percebi dificuldades e as dimensões do desafio que iría enfrentar. A proposta, em sua essência, era dar aulas de Matemática, o que já não é uma fácil tarefa, mais ainda, aulas de Geometria e no tópico pouco difundido de Construções Geométricas. Além dos obstáculos com os quais, ordinariamente, um professor se depara para ministrar um curso nesta área, minha ousadia se evidenciava ao pretender fazê-lo a distância.

Os modelos de Educação a Distância mais praticados atualmente, no entanto, apresentam muitas deficiências em minha avaliação. Geralmente se apoiam em vídeo conferências ou em tutoriais que são verdadeiras apostilas eletrônicas. Impossibilitam ou, no mínimo, limitam drasticamente as oportunidades de interação e mediação, duas variáveis fundamentais nos processos de ensino e de aprendizagem. As comunicações entre os sujeitos se fazem, na maioria das vezes, de forma assíncrona por meio de correio eletrônico, o que não é satisfatório, principalmente no ensino de Matemática, porque as dúvidas e questionamentos precisam ter respostas imediatas e é grande a perda quando são adiadas por tempo indeterminado.

Precisava criar um ambiente que me permitisse romper não só os limites espaciais, mas também os temporais. Era necessário ter contato imediato com os alunos e a alternativa de poder intervir em qualquer momento da execução das atividades.

Com suporte nas recomendações do meu orientador, Prof. Dr. Hermínio Borges Neto, comecei a estudar a plataforma TeleMeios desenvolvida no projeto de doutoramento de Daniel Capelo Borges. Percebi então que o *software* poderia responder afirmativamente às minhas demandas.

O TeleMeios, por potencializar a comunicação em tempo real através de texto, voz e imagem, e o compartilhamento total dos aplicativos, me permitiu avançar vigorosamente nos campos da mediação e da interação, minhas maiores preocupações no desenvolvimento de uma aula. O suporte oferecido pela plataforma possibilitou ministrar todo o Curso de Construções Geométricas por meio de situações-problema propostas aos alunos que foram exploradas e resolvidas sempre através de construções colaborativas com a participação de todos os sujeitos. O grupo compartilhava exatamente o mesmo material de desenho e, a qualquer hora, era possível a intervenção de cada sujeito. As interações, por serem síncronas, instantâneas, tão próximas e intensas me deixavam em dúvida se realmente estava praticando Educação a Distância. Que distância? – Perguntava-me. Se estava vendo o outro, discutindo e trabalhando em colaboração com ele, como falar em distância?

Mesmo em fase de desenvolvimento, etapa final de aperfeiçoamentos, demonstrei, com a execução do projeto, que o Telemeios abre um campo totalmente novo para experiências educacionais ao romper com os moldes habituais de Educação a Distância. Devo assinalar que ainda tive algumas dificuldades para disciplinar o uso do mouse, que ficava livre para a intervenção de todos os sujeitos, e problemas ocasionados pela queda do servidor. Daniel Borges, o desenvolvedor, está dedicado no enfrentamento desses problemas e já aponta soluções por intermédio da mudança de arquitetura do sistema.

Encontrando a solução para o ambiente, a nova questão a ser resolvida foi: Como trabalhar as construções geométricas em computador? A alternativa imediata, por minhas experiências, inclusive no curso de mestrado, era enveredar pelos caminhos da Geometria Dinâmica, campo recente na história da Geometria, mas já consolidado pelas inúmeras aplicações em todo o mundo. Mesmo compreendendo que, em raros momentos essa concepção de Geometria se afasta da de Euclides, comprovei sua eficácia para o ensino da disciplina.

E o *software?* Foi minha próxima questão. A opção pelo GeoGebra, dentre outros como o Cabri Géomètre, se deu por ser de fácil usabilidade, bastante intuitivo e ser um *software* livre, gratuito. Os sujeitos não apresentaram dificuldades para sua manipulação e considerei perfeita sua aplicação no projeto, mostrando que na maioria das situações ele substituiu com ganhos o uso da régua e do compasso tradicionais.

A composição do aparato tecnológico se completou com a utilização de computadores de configurações não sofisticadas e aplicativos de gravação de áudio (*Audacity*) e vídeo (*CamStudio*).

Se já havia o ambiente que permitia superar as barreiras iniciais do meu plano, me centrei na preparação do curso de Geometria dito. Não podia, pelas condições estruturais de que dispunha, me prender ao modelo tradicional de aula de Geometria no qual são apresentadas as receitas das construções e os estudantes são levados a decorá-las e reproduzi-las. Era essencial uma estratégia diferente, uma aula em que os alunos fossem ativos conquistadores de seu conhecimento, que a interação e a mediação estivessem sempre presentes e que o a-prendizado se concretizasse de forma colaborativa com a efetiva participação de todo o grupo.

A Sequencia Fedathi, que foi a referência metodológica para a aplicação do Curso de Construções Geométricas, é um conjunto de recomendações que, por meio das suas quatro etapas (tomada de posição, maturação, solução e prova), estabelece um itinerário seguro para que o professor elabore e desenvolva suas aulas, valorizando o aspecto colaborativo, incentivando a simulação e a experimentação, levando os aprendizes a se aproximarem das mesmas atitudes de um matemático ao desenvolver seu trabalho. Segui, meticulosamente, todos os passos recomendados, como está destacado na descrição do experimento, e o resultado do empreendimento está vinculado diretamente a sua aplicação.

Arquitetei, detalhadamente, cada sessão didática, apoiado na metodologia da didática francesa, a Engenharia Didática. A grande vantagem desse caminho é que a validação da investigação se dá de maneira interna, sem necessidade de recorrer a elementos externos à pesquisa. Defrontando as conjecturas levantadas na fase das análises teóricas com o realmente observado na fase de experimentação, na análise *a posteriori* validei as hipóteses investigadas na pesquisa.

Finalmente aplicamos o nosso curso.

Ensinei Construções Geométricas a distância por meio de computadores com mediação e interação em tempo real. Os sujeitos participaram ativamente e cumprimos todo o programa previsto na arquitetura do projeto. Delineei, no capítulo anterior, toda a trajetória percorrida. Compreendi que os meus alunos aprenderam o conteúdo pre-estabelecido e, portanto, que a experiência foi revestida de êxito.

Reconheço as limitações impostas a uma pesquisa acadêmica e que estas conclusões devem ser restritas às condições em que foram elaboradas. Trabalhei com um número pequeno de sujeitos que possuíam conhecimentos em informática e alguns fundamentos de Geometria. Contei com razoável infraestrutura tecnológica e dispunha de competente apoio técnico quando necessário.

Acredito, também, que outras possibilidades de investigação, a partir deste trabalho, ficam abertas. O ambiente TeleMeios, por todas as funcionalidades que traz para âmbito da Educação a Distância deve ser avaliado não só no ensino de outras disciplinas como em outros níveis de escolaridade. A Sequência Fedathi, pelo fato de representar uma nova proposta de ensino, é um permanente tema para pesquisa. Em relação à Geometria, apesar de ser uma ciência em discussão há mais de 23 séculos, seu ensino a distância com emprego de tecnologias é uma temática pouco explorada.

Inspirado em Machado de Assis, em seu monumento *Dom Casmurro*, resta-me uma pergunta:

Bem, e o resto?

O resto é saber que o cansaço, sintomático do final de obra, abate o experimentado professor-engenheiro apenas momentaneamente e, dentro em breve, retomarei a régua e o compasso guardados no coração para, traçando curvas e desenhando caminhos, projetar novos sonhos de aula para serem concretizadas em ambiente qualquer, mas sem nunca me afastar de uma trajetória retilínea.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES. **Metafísica**: ensaio introdutório, texto grego com tradução e comentário de Giovanni Reale. Tradução para o português de Marcelo Perine. São Paulo: Loyola, 2001. v.1.

ÁVILA, Geraldo S. de S. **Várias faces da Matemática:** tópicos para licenciatura e leitura geral. São Paulo: Blucher, 2007.

AYRES, Ian. **Super Crunchers.** Rio de Janeiro: Ediouro, 2008.

BALDINI, Loreni A. F. **Construção do conceito de área e perímetro:** uma seqüência didática com auxílio de *software* de Geometria Dinâmica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná. 2004. Disponível em: <http://200.189.113.123/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/dissertacao_loreni.pdf>. Acesso em 30 mar. 2011.

BARBIER, René. **A pesquisa-ação**. Brasília: Liber Livro Editora, 2007.

BARGUIL, Paulo Meireles; BORGES NETO, Hermínio. Laboratório de Educação Matemática e a Formação do Pedagogo. In: **2º SIPEMAT** – Simpósio Internacional de Educação Matemática. Recife: UFRPE, 2008.

BATISTA, J.B; YOUNG, R. S.; BORGES NETO, H. Discussão temática no fórum: uma experiência no ensino virtual. **Debates em Educação,** Fortaleza, vol. 1, n. 1 Jan./Jun. 2009.

BELLONI, Maria Luiza. **Educação a distância**. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2001.

BELLONI, Maria Luiza. A integração das tecnologias de informação e comunicação aos processos educacionais. In: BARRETO, Raquel G. (Org.) **Tecnologias educacionais e educação a distância**: avaliando políticas e práticas. Rio de Janeiro: Quartet, p. 54-73, 2003.

BICUDO, J. C. **O ensino secundário no Brasil e sua legislação** (de 1931 a 1941 inclusive). São Paulo: Associação dos Inspetores Federais do Ensino Secundário do Estado de São Paulo, 1942.

BORGES NETO, Hermínio. Uma classificação sobre a utilização do computador pela escola. **Educação em Debate**, Fortaleza, ano 21, v. 1, n. 27, p. 135-138, 1999.

BORGES NETO, Hermínio; CAPELO BORGES, Suzana Maria. “As tecnologias digitais no desenvolvimento do raciocínio lógico”. **Linhas Críticas (UnB)**, Brasília, v. 13, p. 77-88, 2007.

BORGES NETO, Hermínio; SANTANA, José Rogério. **Fundamentos epistemológicos da Teoria de Fedathi no ensino de Matemática.** Disponível em: < http://www.multimeiosww.multimeios.ufc.br/producao_cientifica/pdf/fedathi/fedathi-fundamentos-epstemologico-> Acesso em: 19 out. 2003.

BOYER, Carl. **Historia da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

BRASIL Colônia. Carta de Lei de 04 de dezembro de 1810. **Cria uma Academia Real Militar na Corte e cidade do Rio de Janeiro**. Disponível em: <http://www.camara.gov.br/Internet/InfDoc/conteudo/Colecoes/Legislacao/Legimp-B1_62.pdf> Acesso em: 24 mar. 2011.

BRASIL. PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA. Decreto nº 19890, de 18 de abril de 1931. **Dispõe sobre a organização do ensino secundário**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/1930-1949/D19890.htm>. Acesso em: 10 Jun. 2010.

______. Decreto-Lei nº 4244, de 9 de abril de 1942. **Lei orgânica do ensino secundário**. Disponível em: <http://www2.camara.gov.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 12 Jun. 2010.

______. Decreto nº 5692, de 11 de agosto de 1971. **Fixa diretrizes de bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências**. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5692.htm>. Acesso em: 07 Jun. 2010.

______. Decreto nº 5622, de 19 de dezembro de 2005. **Regulamenta o art. 80 da Lei nº 9394 de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/dec_5622>.Acesso em: 05 Abr. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio – bases legais. Brasília: Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 1999a. v. 1.

______. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio – ciências da natureza, matemática, e suas tecnologias. Brasília: Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 1999b. v. 3.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. 2 ed. Rio de Janeiro DP &A, 2000. v. 1.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (3º e 4º ciclos)**: matemática. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 2001.

CAJORI, Florian. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CAMBI, Franco. **História da Pedagogia**. São Paulo: UNESP, 1999.

CAMINHA, Antonio. Por que estudar Geometria plana? In: ______ **Sobre o ensino de geometria euclidiana.** Fortaleza: 2007, [s.n.]. Cap. 1. p. 6. Notas de aula. Digitado.

CAMPOS, Edison de Faria. **Ingeniería Didática.** Cuadernos de investigación y formación en educación matemática**.** Costa Rica, n. 2, dez. 2006. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/fpb/cuaderno2/> Acesso em: 18 abr. 2011.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COLAÇO, Veriana de Fátima Rodrigues. Processos interacionais e a construção de conhecimento e subjetividade de crianças. **Psicologia:** Reflexões Críticas, Porto Alegre, v. 17, n. 3, p. 333-340, 2004 .

DANTAS, Dina Mara P. **SEM²:** uma proposta metodológica para o uso dos softwares na educação**.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

DAVIS, Philip; HERSH, Reuben. **A experiência matemática:** a história de uma ciência em tudo e por tudo fascinante. 4. ed**.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FERREIRA, Antonio G. A; VECHIA, Ariclê. Um Olhar Sobre Instituições de Ensino Secundário no Século XIX: o Liceu de Coimbra e o Imperial Collegio de Pedro II. **Cadernos de História da Educação**. Uberlândia, MG, v. 3, jan/dez. 2004. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/che/issue/view/53> Acesso em: 20 mar. 2011.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

HARDY, G. H. **Em defesa de um matemático.** São Paulo: Martins Fontes, 2000.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática:** influências e função da matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Globo, 1970.

JUCÁ, Ana Cleide. **Interações discursivas envolvendo crianças com síndrome de Down**: diálogos com mães e professoras. Dissertação (Mestrado em Psicologia). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

KLINE, Moris. **O fracasso da Matemática moderna.** São Paulo: Ibrasa, 1976.

LEVI, Beppo. **Lendo Euclides:** a Matemática e a Geometria sob um olhar renovador. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

LIVIO, Mário. **Deus é matemático?** Rio de Janeiro: Record, 2010.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade.** 4. ed**.** São Paulo: Cortez, 1997.

______. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1999.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia didática. In: ______. (org). **Educação Matemática:** Uma introdução. São Paulo: Educa, 1999. p. 197-208.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado:** como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

MORAN, J. M. Contribuições para uma pedagogia da educação *online*. In: SILVA, M. (org). **Educação online**: teorias, práticas, legislação, formação corporativa. São Paulo: Loyola, 2003. p.39-73.

MORGADO, Augusto C. de O, CARVALHO, João B. P.; CARVALHO, Paulo C. P.; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

NASCIMENTO, Maria Isabel Moura. O império e as primeiras tentativas de organização da educação nacional (1822 – 1889). **HISTEDBR**, São Paulo. Disponível em: <http://www.histedbr.fae.unicamp.br/navegando/periodo_imperial_intro.html#_ftn1>. Acesso em: 29 mar. 2011.

NASCIMENTO, Roberto A. **O ensino do Desenho na educação brasileira**: apogeu e decadência de uma disciplina escolar. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília. 1994.

NASSER, Lilian; SANT´ANNA, Neide P.(Coord.). **Geometria segundo a teoria de Van Hiele.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, IM-UFRJ, 1997.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PEREIRA, V. O. **Bate-papo na Internet:** algumas perspectivas educativas. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2004.

PIAGET, Jean. **Epistemologia Genética.** São Paulo: Martins Fontes, 1990.

PLATÃO. **A República**. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, Juan Inácio (org). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

PUTNOKI, José Carlos. Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, n. 13, p. 13-17, jul/dez, 1988.

ROCHA, Elizabeth Matos. **Tecnologias digitais e ensino de matemática**: compreender para utilizar. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2008.

ROCHA, Elizabeth Matos; SILVA, Cassandra Ribeiro de Oliveira e. Educação a distância via *web*: por uma tecnopedagogia? In: ALMEIDA, Marcus Garcia de Almeida e FREITAS, Maria do Carmo Duarte. (Orgs). **A Escola no Século XXI**: Atores Responsáveis Pela Educação. Rio de Janeiro: Brasport, 2011. v.2.

RUSSEL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

SALLES, João Moreira. Deus não faz matemática vagabunda: uma convocação para decifrar a máquina do mundo, **Piaui,** Rio de Janeiro, jan. 2011, Seção esquina. Disponível em: < http://revistapiaui.estadao.com.br/edicao-52/esquina/deus-nao-faz-matematica-vagabunda>. Acesso em: 10 nov. 2011.

SALSBURG, David. **Uma senhora toma chá...**como a Estatística revolucionou a ciência no século XX. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

SANTOS, Javilane A. dos. **TeleMeios:** ferramentas interativas para o ensino a distância. Monografia (Graduação em Pedagogia) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2010.

SANZ, Antonio Perez. **Historia de la Enseñanza de las Matemáticas**. Disponível em: < http ://platea.pntic.mec.es/aperez4/donosti/historia_%20ensenanza.htm>. Acesso em 22 mar. 2011.

SAVIANI, Dermeval. **Escola e Democracia.** 36. ed. Campinas: Autores Associados, 2003. (Coleção Polêmicas do nosso tempo, 5).

SILVA, Clóvis P. da. **A Matemática no Brasil:** uma história de seu desenvolvimento. 2. ed. [S. l.]: Publicad, 2007. Disponível em: <www.accefyn.org.co/PubliAcad/Clovis/Clovispdf/2.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2011.

SILVA, Antônio Benedito da. Contrato didático. In: MACHADO, Silvia D. A. (org). **Educação Matemática:** uma introdução**.** São Paulo: Educa, 1999.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: UNESP, 2007.

SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat.** Rio de Janeiro: Record, 1999.

SIRGADO, Angel Pino. O social e o cultural na obra de Vygotsky. **Educacão Social**, Campinas, v. 21, n. 71, p. 45-78, jul. 2000 .

SMOLKA; Ana Luiza B.; GÓES, Maria Cecília R. (Orgs.) **A Linguagem e o outro no espaço escolar***:* Vygotsky e a construção do conhecimento. Campinas: Papirus, 1993.

TEIXEIRA, Francisco Gomes. **História das matemáticas em Portugal**. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, 1934. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/livrogt/livrogt.html>. Acesso em: 05 abr. 2011.

TORO, Bernardo. Precisamos de cidadãos do mundo. **Nova Escola**, São Paulo, n. 149, fev. 2002. Entrevista. Disponível em: <http://novaescola.abril.com.br/ed/149_fev02/html/fala_mestre.htm>. Acesso em: 11 jan. 2004.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da Matemática escolar no Brasil**. São Paulo: Annablume: Fapesp, 1999.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas.** Rio de Janeiro: Graftex Comunicação Visual, 1993.

WERTSCH, J. La mente en acción. Madrid: Aique, 1998.

ZUIN, Elenice de S. L. **Parâmetros curriculares nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações.** Caxambu: Anped 25 GT 19,. 2002.

______. **O ensino de desenho em quatro modalidades na reforma do ensino em 1931 no Brasil**. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, IV, 2001, Natal. **Anais...** Natal: SBHMAT, 2001a. p. 289.

______. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2001b.

ANEXO

LEI — DE 15 DE OUTUBRO DE 1827.

Manda crear escolas de primeiras letras em todas as cidades, villas e logares mais populosos do Imperio.

D. Pedro I, por Graça de Deus e unanime acclamação dos povos, Imperador Constitucional e Defensor Perpetuo do Brazil : Fazemos saber a todos os nossos subditos que a Assembléa Geral decretou, e nós queremos a lei seguinte :

Art. 1.º Em todas as cidades, villas e logares mais populosos, haverão as escolas de primeiras letras que forem necessarias.

Art. 2.º Os Presidentes das provincias, em Conselho e com audiencia das respectivas Camaras, emquanto não tiverem exercicio os Conselhos Geraes, marcarão o numero e localidades das escolas, podendo extinguir as que existem em logares pouco populosos e remover os Professores dellas para as que se crearem, onde mais aproveitem, dando conta á Assembléa Geral para final resolução.

Art. 3.º Os Presidentes, em Conselho, taxarão interinamente os ordenados dos Professores, regulando-os de 200$000 a 500$000 annuaes : com attenção ás circumstancias da população e carestia dos logares, e o farão presente á Assembléa Geral para a approvação.

Art. 4.º As escolas serão de ensino mutuo nas capitaes das provincias ; e o serão tambem nas cidades, villas e logares populosos dellas, em que fôr possivel estabelecerem-se.

Art. 5.º Para as escolas do ensino mutuo se applicarão os edificios, que houverem com sufficiencia nos logares dellas, arranjando-se com os utensilios necessarios á custa da Fazenda Publica e os Professores ; que não tiverem a necessaria instrucção deste ensino, irão instruir-se em curto prazo e á custa dos seus ordenados nas escolas das capitaes.

Art. 6.º Os Professores ensinarão a ler, escrever, as quatro operações de arithmetica, pratica de quebrados, decimaes e proporções, as noções mais geraes de geometria pratica, a grammatica da lingua nacional, e os principios de moral christã e da doutrina da religião catholica e apostolica romana, proporcionados á comprehensão dos meninos ; preferindo para as leituras a Constituição do Imperio e a Historia do Brazil.

Art. 7.º Os que pretenderem ser providos nas cadeiras serão examinados publicamente perante os Presidentes, em Conselho ; e estes proverão o que fôr julgado mais digno e darão parte ao Governo para sua legal nomeação.

Art. 8.º Só serão admittidos á opposição e examinados os cidadãos brazileiros que estiverem no gozo de seus direitos civis e politicos, sem nota na regularidade de sua conducta.

Art. 9.º Os Professores actuaes não serão providos

Art. 10. Os Presidentes, em Conselho, ficam autorizados a conceder uma gratificação annual, que não exceda á terça parte do ordenado, áquelles Professores, que por mais de doze annos de exercicio não interrompido se tiverem distinguido por sua prudencia, desvelos, grande numero e aproveitamento de discipulos.

Art. 11. Haverão escolas de meninas nas cidades e villas mais populosas, em que os Presidentes em Conselho, julgarem necessario este estabelecimento.

Art. 12. As Mestras, além do declarado no art. 6.°, com exclusão das noções de geometria e limitando a instrucção da arithmetica só ás suas quatro operações, ensinarão tambem as prendas que servem á economia domestica; e serão nomeadas pelos Presidentes em Conselho, aquellas mulheres, que sendo brazileiras e de reconhecida honestidade, se mostrarem com mais conhecimentos nos exames feitos na fórma do art. 7.°

Art. 13. As Mestras vencerão os mesmos ordenados e gratificações concedidas aos Mestres.

Art. 14. Os provimentos dos Professores e Mestras serão vitalicios; mas os Presidentes em Conselho, a quem pertence a fiscalisação das escolas, os poderão suspender, e só por sentenças serão demittidos, provendo interinamente quem substitua.

Art. 15. Estas escolas serão regidas pelos estatutos actuaes no que se não oppozerem á presente lei; os castigos serão os praticados pelo methodo de Lencastre.

Art. 16. Na provincia, onde estiver a Côrte, pertence ao Ministro do Imperio, o que nas outras se incumbe aos Presidentes.

Art. 17. Ficam revogadas todas as leis, alvarás, regimentos, decretos e mais resoluções em contrario.

Mandamos portanto a todas as autoridades, a quem o conhecimento e execução da referida lei pertencer, que a cumpram e façam cumprir, e guardar tão inteiramente como nella se contém. O Secretario de Estado dos Negocios do Imperio a faça imprimir, publicar e correr. Dada do Palacio do Rio de Janeiro aos 15 dias do mez de Outubro de 1872, 6.° da Independencia e do Imperio.

IMPERADOR com rubrica e guarda.

(L. S.)

Visconde de S. Leopoldo.

Carta de lei, pela qual Vossa Magestade Imperial manda executar o decreto da Assembléa Geral Legislativa, que Houve por bem sanccionar, sobre a creação de escolas de primeiras letras em todas as cidades, villas e logares mais populosos do Imperio, na fórma acima declarada.

Para Vossa Magestade Imperial ver.

Joaquim José Lopes a fez.

Registrada a fl. 180 do livro 4.° de registro de cartas, leis e alvarás.—Secretaria de Estado dos Negocios do Imperio em 29 de Outubro de 1827.—*Albino dos Santos Pereira.*

Monsenhor Miranda.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

AULA-TESTE

Adelmir: Ok então, por um momento vocês... um rápido momento vocês vão ficar sem a possibilidade de comunicarem comigo porque eu estarei com o som ativado, só para percorrer as cortinas do TeleMeios

Raimilson: Só um parêntese, tô gravando o áudio. Pode falar a vontade.

Adelmir: Observe: na primeira cortina do menu do GeoGebra nós temos essa seta. Clicando na seta inferior, a setinha vermelha que tá no lado direito inferior, nos temos a opção mover, girar em torno de um ponto e gravar para uma planilha de cálculos.

Nesse momento, estava apresentando o *software* GeoGebra ao grupo e no monitor de todas as máquinas era reproduzida a seguinte ação

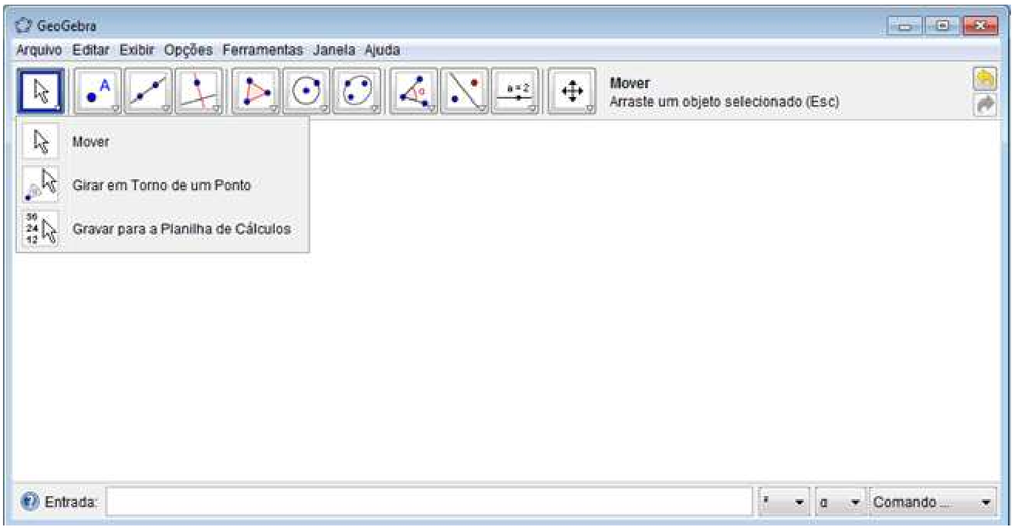


Figura 40: Interface do *software GeoGebra*, exibindo a primeira cortina.

Minha fala prosseguiu percorrendo todas as cortinas e explicando as possibilidades de cada instrumento que o *software* oferece. Nesse instante, tive o momento mais próximo aos métodos tradicionais de exposição, pois tratava-se de apresentação do aplicativos e, como tive que explicar a função de cada botão, fui forçado a seguir os passos de um tutorial.

Na segunda cortina tem novo ponto, interseção de dois objetos, ponto médio ou centro. Se você quiser criar qualquer ponto, é só clicar nesse objeto e ele vai fazer vários pontos, aonde você quiser. Observe que, se você clicar com o botão direito do mouse sobre um ponto, ele gera outras opções. Uma delas importante é essa exibir rótulo, porque ele vai nomeando os pontos. Então toda vez que você quiser nomear um objeto, você vai com o botão direito *do mouse sobre esse objeto e clica exibir rótulo. Quando você vai em exibir rótulo, ele dá o nome daquele elemento. Pode ser um ponto, uma reta ou um segmento. Ele aparece interseção de dois objetos e um ponto médio ou centro entre dois objetos quaisquer.Se eu clicar, por exemplo, no ponto médio e clicar nos pontos "C" e posteriormente no "B", veja que ele vai criar um ponto no meio. Esse ponto ele criou automaticamente é o ponto médio, tá! Além disso, quando eu tenho dois objetos e eu quero o ponto de interseção entre eles, é só clicar nesse menu que tem as duas curvas se interceptando.*

Em seguida você pode fazer uma reta definida por dois pontos. Se eu tenho, por exemplo, o ponto "C" e ponto "D" e cliquei no menu pra reta de dois, pontos ele faz uma reta. Se, ao invés de uma reta, eu quero um segmento ele não vai fazer a reta que tem extremidades infinitas, no infinito. Veja que, no segmento, ele limita as duas extremidades. Do mesmo modo, se eu quiser uma semi-reta, a diferença no GeoGebra de uma semi-reta para o segmento é que só uma das extremidades tende para o infinito. A outra coincide com um ponto, então veja que eu fiz agora uma semi-reta.

No menu seguinte, nós temos reta perpendicular, reta paralela, mediatriz, e mediatriz é uma reta que divide um segmento ao meio perpendicularmente, e depois tem bissetriz, bissetriz é uma reta que divide o ângulo ao meio, as tangentes, uma reta diametral e os lugares geométricos que nós vamos aprofundar depois.

No menu seguinte, polígonos e polígonos regulares. Polígono é quando eu vou fazer aquela figura fechada, né? Olha, por exemplo, agora eu fiz um polígono que tem 5 lados, eu fiz um pentágono. Se eu quisesse que esse polígono fosse regular... basta que eu clique na ferramenta regular. Ele me pergunta com quantos pontos eu quero esse polígono, eu vou colocar 6, o polígono que tem 6 lados é o hexágono. Veja que ele criou o hexágono.

Como a nossa lousa está muito cheia de elementos, eu vou limpá-la vou pegar o meu apagador para isso eu aciono ctrl A, seleciono tudo e eu vou limpar nossa lousa com o delete.

No menu seguinte, eu tenho vários tipos de círculos e arcos, elipse, hipérboles e parábolas que são curvas mais sofisticadas no item seguinte, ângulo e aí tem uma coisa interessante que é distância, comprimento ou perímetro, *área e inclinação. Isso o software, na realidade, dá a medida. Olha como é legal: eu vou traçar um segmento, fiz um segmento e se eu for lá naquele menu e clicar em distância ou comprimento e clicar agora no segmento, ele me dá exatamente o comprimento desse segmento: 6,1. Se ao invés desse segmento, ele te desse um ângulo... ele também mede... ele me dá a medida desse ângulo. Olhe só, e a unidade é a que nós definimos... basta que eu clique nos três pontos que estão determinado o ângulo e ele vai me dar a medida desse ângulo. Veja que o ângulo ficou definido pelos três pontos eu não precisei nem do segmento que estava lá. E aí olhe, são todas as ferramentas. Neste botão nós temos uma ferramenta importante que é a relação entre dois objetos. Ela me diz se o objeto tá sobre uma reta ou não, se as retas são paralelas, são perpendiculares, nós temos tudo isso.*

E finalmente, nós temos aqui copiar, exibir, esconder rótulo, apagar objeto, então ferramenta de funcionalidades para simplificar o nosso trabalho. Então, em rápidas palavras, esses são os menus, são os menus do GeoGebra, e seria importante que a gente fizesse alguma manipulação agora. Então eu queria, começando pelo Gerardo, que ele desenhasse um triângulo.

As transcrições geralmente passam a impressão de que cada fala teve uma duração maior do que aquela que realmente se verificou. Nessa exposição, aparentemente longa, empreguei seis minutos e 29 segundos para percorrer todas a janelas do GeoGebra.

Gerardo: Ok, professor.

Raimilson: Eu lembro que eu tô gravando o áudio e o áudio tá muito bom.

Gerardo: Triângulo desenhado.

Adelmir: Perfeito, Gerardo. Eu queria que o Cláudio, agora, por favor, desenhasse um círculo. Cláudio?

Raimilson: O Cláudio tá com uma pessoa. Tá atendendo um aluno aqui. Eu posso ir fazendo?

Como foi um evento de teste, não passou por toda a programação que pode ser verificada quando da realização do curso. Assim, algumas vezes fomos interrompidos e as pessoas que estavam colaborando comigo e com Raimilson em outras oportunidades se ausentavam.

Adelmir: Pode, Raimilson.

Raimilson: Círculo criado.

Adelmir: Perfeito, Raimilson. Agora nós vamos começar então, conhecer alguns elementos que são chamados de construções básicas pra tudo que vem depois. São algumas construções que em todos os problemas que vão ser resolvidos daqui pra frente, elas vão estar envolvidas, é o que nós chamamos de construções elementares ou construções básicas. Então, eu queria que vocês prestassem atenção a essa parte inicial e nós vamos construir juntos esses elemento,s ok?

É muito importante que vocês saibam que precisa de muito poucos prerrequisitos para este nosso curso, e dentro de pouquíssimo tempo vocês estarão trabalhando com essa Geometria. Então, inicialmente, eu vou criar um segmento de reta, eu vou criar um segmento. Pra fazer segmento, eu vou utilizar dois pontos. Criei um ponto e, para não perder tempo, sobre ele já estou clicando com o botão direito, pra exibir o rótulo... foi criado o ponto "A". Vou criar agora o ponto "B", que vai definir o segmento, então eu venho até aqui, vou repetir todo o processo, tá? Então olhe só: criei um ponto e nomeei, criei o ponto "A", agora vou criar o ponto "B", que vai ser o ponto que vai dá outra extremidade do meu segmento. Cliquei e nomeei, exibi o rótulo.

E agora eu vou criar um novo ponto. Pra criar um ponto eu volto lá no segundo menu. Vou criar um ponto "P", nesta posição, vou nomeá-lo. Observe que eu queria "P" saiu "C", geometricamente isso não tem nenhum problema, é só nomenclatura, mas eu posso, como eu afirmei a você que ia clicar no ponto "P", eu posso renomear também clicando com o botão direito, então criei o ponto "P".

O nosso desafio agora é o seguinte: eu posso deslocar... quando eu clico no primeiro botão, que é mover, eu posso deslocar o ponto "P". Basta que eu clique nele e ele pode se mover à vontade. Eu posso aumentar o comprimento do segmento deslocando o ponto "A", posso deslocar o ponto "B", todas essas manipulações são feitas com o botão mover.

Mas o desafio que eu tenho pra vocês e o seguinte: eu gostaria que vocês pensassem em como, por esse ponto "P", eu posso traçar uma reta perpendicular à reta, ao segmento AB, então esse é o desafio: pelo ponto "P", traçar uma reta perpendicular ao segmento "AB". Vamos tentar?

Raimilson: Quem se habilita, qualquer pessoa?

Adelmir: Se você tem certeza de uma solução e quiser apresentar, tudo bem. Tente fazer a mesma situação em uma outra versão do GeoGebra. Você abre, seria seu rascunho. Quando você tiver com segurança ou quando tiver a dúvida, você traz para o debate aqui na nossa página.

Essa ideia de trabalhar com duas telas abertas do software que nos surgiu durante o teste foi empregada em todas as aulas do curso. Quando o aluno queria fazer suas experimentações individuais trabalhava na versão que chamamos de rascunho ou borrão.

Raimilson: Bom, eu posso fazer, acho que se eu traçar um segmento de reta do ponto "P" até esse segmento "AB", criar um segmento, eu teria uma reta perpendicular, não?

Adelmir: Tente.

Raimilson: É, não saiu muito perpendicular não!

Adelmir: Aí têm duas coisas, Raimilson, duas coisas muito importantes: primeiro, que o matemático, ele precisa ter um argumento sólido pra garantir que aquela construção chega ao objetivo, ele precisa provar que esse resultado é verdadeiro. E a outra coisa que a gente, que todos nós temos que estar atentos, é que nós precisamos de um argumento matemático, que o software só não vai resolver.

Então veja aí, Gerardo, e veja Cláudio. O Raimilson tentou, com toda sua força... usou seus óculos da melhor maneira, não tremeu, e aparentemente era perpendicular, mas o software foi cruel. Quando ele mediu a distância... faltou um pouquinho. E isso não me satisfaz, eu quero que vocês pensem e me apresentem outra solução.

Este foi o primeiro momento em que os sujeitos tentaram resolver a situações propostas usando apenas métodos mecânicos do GeoGebra. Esse comportamento se reproduziria por causa todo o curso, mas foi sempre rejeitado por não estar de acordo com as regras do jogo estabelecido para a régua e o compasso.

Raimilson: A gente pode traçar um quadrado e sobrepô-lo e deixar lá, em cima desse segmento.

Adelmir: Acho melhor apagar o que você fez.

Adelmir: Voltamos à nossa situação inicial. Eu quero traçar uma perpendicular por esse ponto.

Raimilson: Eu vou testar aqui no meu GeoGebra. Atenção, pessoal! Eu instalei o GeoGebra localmente na maquina de vocês. Vocês podem executá-lo localmente, efetuar alguns testes e depois efetuar a construção que vocês querem... traçar a reta perpendicular na máquina do professor Adelmir.

Raimilson deu-me todo o apoio na montagem do aparato tecnológico, me socorreu nos momentos de pane e orientou os sujeitos sobre os aplicativos disponibilizados para eles nas máquinas.

Gerardo: Professor, posso tentar?

Adelmir: Fique à vontade, Gerardo!

Gerardo: Acredito que seja isso aí.

Adelmir: Será que essas duas retas são perpendiculares, Gerardo? Como é que a gente verifica?

Raimilson: Basta que o ângulo entre elas seja reto, seja 90°, não?

Adelmir: E essa verificação, quem quer verificar?

Raimilson: Gerardo, tu podes ir lá naquela opção que tem um ângulozinho e tentar medir ângulo. Perfeito. Aí garoto. O de cima mesmo eu acho, não?

Gerardo: Acho que não era bem esse procedimento não.

Cláudio: Professor Adelmir?

Adelmir: Pois não, Cláudio.

Cláudio: Professor!

Raimilson: Não... pode falar, Cláudio!

Adelmir: Tô lhe ouvindo, Cláudio, pode falar querido!

Cláudio: Por que eu tinha um compromisso agora, vou ter que tá saindo, não tava sabendo que hoje ia ter esse teste.

Adelmir: Sem problema nenhum, fique à vontade. Eu te agradeço muito, viu?

Cláudio: Tá bom. Então vou falar com o professor aqui, pra gente ver outro dia que vocês forem fazer o teste, tá bom?

Adelmir: Tá bom! Acho que você vai gostar, é um negócio bem interessante

Cláudio: É bem interessante mesmo, eu gostei, mas é porque já tinha marcado...

Adelmir: Isso inclusive pode fazer parte de um projeto de pesquisa seu e até da sua monografia de conclusão de curso.

Cláudio: Tá bom. Tchau, professor, até mais.

Adelmir: Até logo.

Adelmir: Gerardo, tente novamente medir o ângulo.

Raimilson: Oi, quarta feira, eu acho. Amanhã tu pode vir à tarde, tu pode vir umas duas horas, pois vem amanhã duas horas, não... eu tinha falado com o Gerardo, só que aí eu marquei bobeira, a gente teve que começar mais tarde, mas aí eu saí instalando os programas, eu cheguei aqui seis e meia pra instalar, só que fui instalar os programas e tal... beleza, amanhã vem duas horas que a gente faz, tá?

Raimilson atendeu ao telefone celular e ficou conversando próximo ao computador e sua conversa foi toda gravada. Funcionou no teste para mostrar-nos o alcance dos microfones que estávamos usando, e que todas as intervenções paralelas de telefone e via internet seriam documentadas.

Adelmir: E aí, que você diz?

Raimilson: Tá perfeito! Porque falta os 90 graus.

Gerardo: Tá.

Adelmir: Perfeito. Isso é uma característica do programa. Vocês estão certíssimos, se contando esse ângulo dele tá dando 270° pra completar o círculo falta 90° e as duas retas são perpendiculares. Eu queria só explicar a vocês, que. dependendo do sentido que você marca os objetos, ele muda a posição do ângulo. Observe que, se você tivesse clicado primeiro na reta, no segmento "AB", e depois na reta que contém o ponto "P", ele daria os 90°. Isso vai permear todo o nosso trabalho, sempre vai depender do sentido e você então vai escolher o sentido que lhe interessar.

Eu achei muito interessante a saída do Gerardo, mas nós vamos... e vocês hão de me perdoar, não é o que eu queria.

Porque é assim, olha: o Gerardo, na realidade não fez nada, ele está se aproveitando de um software. Eu quero construir como os gregos construíram, e eu estou diante de uma turma de sábios que viviam em Atenas, com toda aquela influência de Platão. Nós vamos ter que fazer uma construção totalmente geométrica, nós não vamos usar o software, vamos usar as ferramentas, mas que eu não vou aceitar as ferramentas diretamente. Vou voltar ao ponto inicial.

Raimilson: Professor Adelmir, acho que o Gerardo tem que sair.

Adelmir: Tá ok, eu quero, se você me der um minuto, eu queria fazer essa construção, porque amanhã quando nós recebermos a visita... e eu quero que vocês saibam pelo menos ela. Um minuto exatamente.

Raimilson: Perfeito.

Adelmir: Construir a perpendicular usando régua e compasso, a gente poderia fazer assim: pelo ponto em "P" com o centro "P", eu vou traçar um círculo que intercepte o segmento "AB", então eu tracei esse círculo. Veja que o círculo de centro "P" intercepta o segmento "AB" em dois pontos. Se eu quero ressaltar esses pontos, eu vou aqui no nosso menu em interseção; se eu peço a interseção desses dois objetos, olha como ele vai marcar os pontos . Surgiram esses dois pontos que eu posso nomear... surgiu o ponto "D" e ponto "E", agora por esses dois pontos... eu vou mostrar a vocês uma ferramenta importantíssima para nós, que é a ferramenta compasso. A ferramenta compasso funciona assim, olha: eu faço um segmento... o compasso é pra transferir a distância. A primeira coisa é criar um segmento. Eu fui lá na ferramenta segmento, o compasso faz círculos, e esse segmento pra ferramenta compasso vai ser sempre o raio. Então eu vou na ferramenta compasso, olhe só: quando eu clico nesse segmento, ele está criando um círculo pra mim, que tem exatamente o raio... a distância do centro até a circunferência. É exatamente esta medida, olha, do segmento. Então, nos dois pontos que eu criei sobre o segmento, eu vou com o compasso fazer esse círculo e no outro ponto, veja que nós criamos dois pontos, fiz outro círculo.

Os dois círculos criados a partir das intersecções com centro nas duas interseções, mais precisamente nos pontos "D" e "E", com centro neles e o segmento que gerou o compasso eu tracei os dois círculos. Vou mostrar a você que esses dois círculos têm duas intersecções, olha: as duas intersecções entre os círculos que nós podemos nomear, eu tenho a interseção "H" e a interseção "I". Se eu traço agora um reta que passe por "H" e "I", esta reta é perpendicular ao segmento "AB" passando pelo ponto "P".

É claro que nós temos demonstrações matemáticas pra isso, mas só, cara, que se eu pedir a relação entre esses dois objetos, entre o segmento e a reta, olha o que ele me diz: o segmento "A" e reta "F" são perpendiculares. De outra maneira, se eu pedir para medir o ângulo, ele vai me dar que o ângulo *entre as duas é 90 graus, e porque que não deu 90? Pelo sentido que eu escolhi, se eu tivesse escolhido outro sentido ele teria me dado os 90, ok? Então essa reta é perpendicular.*

Nós vamos parar agora porque o Gerardo tem um compromisso inadiável, mas essa construção vocês deverão treinar amanhã durante todo o dia, pelo menos 15 vezes, pra na hora que o professor vier nos visitar, vocês saibam fazer.

O comentário final teve origem no fato de que seria recebida na aula seguinte a visita do professor doutor Hermínio, meu orientador, para avaliar o andamento do trabalho. Ele tinha me avisado que poderia trazer convidados, o que, adicionado ao rigor do seu critério de avaliação, deixou o grupo muito ansioso.

Raimilson: Perfeito.

Adelmir: Combinado?

Raimilson: Combinado.

Raimilson: Tchau, tchau, gente!

Raimilson: Podemos sair?

APÊNDICE 2

QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS PELOS ALUNOS