UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

LILIANE MARIA TEIXEIRA LIMA DE CARVALHO

O PAPEL DOS ARTEFATOS NA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL II

FORTALEZA

2008

““Lecturis salutem”
Ficha Catalográfica elaborada por
Telma Regina Abreu Camboim – Bibliotecária – CRB-3/593
tregina@ufc.br
Biblioteca de Ciências Humanas – UFC

C325p Carvalho, Liliane Maria Teixeira Lima de.
O papel dos artefatos na construção de significados matemáticos por estudantes do ensino fundamental II / por Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho. – 2008.
239 f. : il. ; 31 cm.
Cópia de computador (printout(s)).
Tese(Doutorado) – Universidade Federal do Ceará,Faculdade de Educação,Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza(CE),XX/12/2008.
Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.
Inclui bibliografia.

1- MATEMÁTICA – TABELAS.2- MATEMÁTICA – MÉTODOS GRÁFICOS. 3- MATEMÁTICA – ENSINO AUXILIADO POR COMPUTADOR. 4- RACIOCÍNIO EM CRIANÇAS – PERNAMBUCO. 5- RACIOCÍNIO EM CRIANÇAS – OXFORD(INGLATERRA). 6- MATEMÁTICA – ESTUDO E ENSINO – PERNAMBUCO.7- MATEMÁTICA – ESTUDO E ENSINO – OXFORD(INGLATERRA).
8- MATEMÁTICA – PROBLEMAS,QUESTÕES,EXERCÍCIOS.I- Borges Neto, Hermínio,orientador.
II.Universidade Federal do Ceará. Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira. III-Título.

CDD(22ª ed.) 372.7044098134
46/08

LILIANE MARIA TEIXEIRA LIMA DE CARVALHO

O PAPEL DOS ARTEFATOS NA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

FORTALEZA

2008

LILIANE MARIA TEIXEIRA LIMA DE CARVALHO

O PAPEL DOS ARTEFATOS NA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação.

Aprovada em 01/ 12/ 2008

BANCA EXAMINADORA

PROF. DR. HERMÍNIO BORGES NETO (ORIENTADOR)
Universidade Federal do Ceará – UFC

PROFA DRA. TANIA MARIA DE MEDONÇA CAMPOS (CO-ORIENTADORA)
Universidade Bandeirante de São Paulo – (UNIBAN)

PROFA. DRA. ROSÉLIA COSTA DE CASTRO MACHADO
Universidade Federal do Ceará – UFC

PROF. DR. PAULO MEIRELES BARGUIL
Universidade Federal do Ceará – UFC

PROF. DR. AIRTON FONTENELE SAMPAIO
Universidade Estadual do Ceará - UECE

DEDICATÓRIA

A Otton, companheiro de todos os momentos, e aos nossos filhos Laís e Igor, com todo o meu amor.

AGRADECIMENTOS

Um trabalho científico dessa natureza é fruto de uma atividade colaborativa, em que várias pessoas direta ou indiretamente, contribuem para que as etapas sejam vencidas e as metas, finalmente, alcançadas. É neste sentido que expresso os meus agradecimentos e presto uma homenagem simbólica de reconhecimento aos que partilharam dessa jornada comigo.

A Deus e aos meus pais Doralice Lima e Antonio Teixeira Lima que encontram-se no princípio de tudo.

Ao Governo brasileiro pelo suporte financeiro concedido através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal (CAPES) e da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) sem o apoio dos quais esse trabalho não seria viável.

À Universidade Federal do Ceará (UFC) que aceitou a minha transferência da Oxford Brookes University, acreditando no meu potencial em concluir a organização e escrita da tese, com um padrão de qualidade, no período de um ano. Sem o apoio da UFC, a finalização desse trabalho não seria possível.

Aos colegas do Departamento de Administração Escolar e Planejamento Educacional (DAEPE) da UFPE pelo suporte durante a minha ausência.

Aos colegas Luciano Meira e Marcelo Câmara pelas contribuições e força na fase de preparação do projeto e a colega Rute Borba pelas informações relevantes e mediações para o início dos estudos no exterior.

À professora e amiga Sidney Pratt pelo suporte inicial na aquisição de competências na língua inglesa e pela confiança depositada na minha trajetória acadêmica.

À Professora Terezinha Nunes que me orientou no período de estudos na Inglaterra e que me acolheu na sua casa nos primeiros dias quando da minha chegada a Oxford. Com a professora Terezinha eu tive a oportunidade de travar experiências significativas que me ajudaram a desenvolver um olhar crítico sobre as etapas do processo da pesquisa científica. É certo que a sua seriedade e nível de exigência no trato ao conhecimento científico foram determinantes na concretização desse trabalho.

À Professora Tania Campos, representante adjunta da área de Ensino de Ciências e Matemática da CAPES por ocasião da finalização da minha bolsa, pelo apoio e orientações que tornaram possível a concretização desse trabalho pela Universidade Federal do Ceará . O seu suporte, carinho e orientação foram decisivos para tranformar essa em mais uma etapa importante no meu trabalho da pesquisa.

Ao Professor Hermínio Borges Neto pela disponibilidade em me orientar na UFC; pela confiança, suporte e encaminhamentos decisivos rumo a finalização do trabalho. A sua objetividade, clareza e tranquilidade nas ocasiões de orientação foram fundamentais no desenvolvimento do trabalho.

À Professora Rosélia Machado da UFC, por ter acompanhado de perto o desenvolvimento fnal deste trabalho, contribuindo de forma decisiva com suas opiniões valiosas nas discussões sobre o tema e analisando criticamente a escrita final. O carinho, a seriedade e a firmeza de Rosélia no trato com o conhecimento possibilitaram alguns direcionamentos essenciais para o aprimoramento e concretização do meu trabalho.

Aos Professores Júlio Wilson e Ivoneide Pinheiro pelas importantes discussões, orientações e carinho dispensados durante a minha jornada na UFC.

Ao amigo e bibliotecário Janildo Lopes, pela disponibilidade, confiança e orientações decisivas no uso das referências bibliográficas. O seu suporte e ajuda incondicional foram decisivos para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas brasileiros que se encontravam estudando no exterior durante o meu período de estudos: Carlos Monteiro, Laura Azevedo e Márcia Barbosa, pelo apoio.

Aos colegas da Oxford Brookes University: AkikoWatanabe, Ema Mamede, Danny Bell, Debora Evans, João Rosas e Selly Gardner, pelas contribuições ao trabalho de pesquisa.

Ao corpo docente e administrativo da Oxford Brookes University, em particular a Dawn Dumbar, Jill Organ e Wakefield Carter.

Ao grupo do Laboratório Multimeios da UFC, coordenado pelo Professor Hermínio Borges, pela acolhida e apoio.

A Edson Soares e Adriano Vítor Lopes pelas importantes discussões sobre a análise estatística.

A Geísa Sydrião e Adalgisa Feitosa da Coordenação da Pós-Graduação em Educação da UFC pela atenção dispensada.

Ao meu esposo, Otton e aos nossos filhos Laís e Igor pela confiança e carinho nesse meu caminhar e pela compreensão nas minhas ausências.

Aos meus irmãos Zeza, Lena, Rose e Toinho pelo suporte e confiança durante essa jornada. Um agradecimento particular a Lena, que esteve ao meu lado durante a defesa da tese. O seu carinho e suporte foram fundamentais na consolidação do trabalho.

Agradeço enfim, aos estudantes, professores de matemática e coordenadores das escolas inglesas e brasileiras que participaram dos experimentos.

RESUMO

A pesquisa investiga se diferentes formas de conceber o papel dos artefatos e apresentação da informação influenciam a construção de significados matemáticos por estudantes de 11 a 14 anos. A cognição humana é concebida como processo mediado pela tradição cultural e histórica das representações enquanto artefatos, inserindo-se essa análise no âmbito do raciocínio matemático. Utilizou-se o método experimental aliado a uma pesquisa-ação envolvendo o *design* intencional de tarefas. Explorou-se o papel *mediacional* das tarefas, desde a sua confecção e introdução na sala de aula de matemática, até o seu uso pelos estudantes. Essa abordagem se concretizou por meio de seis experimentos, dos quais participaram 922 estudantes: 598 oriundos do *key Stage Three* (corresponde em idade ao 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II no Brasil) de quatro escolas inglesas, e 324 oriundos do 7º, 8º e 9º anos de duas escolas brasileiras. O Experimento 1 investiga se gráficos, tabelas ou casos isolados influenciam o raciocínio dos estudantes sobre variáveis discretas. O Experimento 2 verifica se diferentes informações sobre variáveis contínuas influenciam a interpretação gráfica dos estudantes. O Experimento 3 analisa se interações de aspectos visuais e conceituais da informação sobre variáveis contínuas influenciam a interpretação gráfica dos estudantes. O Experimento 4 investiga se gráficos, tabelas ou a combinação de ambas as representações influencia interações de aspectos visuais e conceituais da informação. Esses quatro experimentos foram realizados nas escolas inglesas. As tarefas usadas no primeiro e quarto experimentos foram aplicadas nas escolas brasileiras, sendo designados Experimentos 5 e 6, respectivamente. As tarefas foram potencialmente facilitadoras ao uso de conteúdos matemáticos. Os Experimentos 1 e 5 oferecem evidências de que estudantes já familiarizados com representações em tabelas e gráficos para representar variáveis discretas não se beneficiam em atividades em que eles precisam organizar os dados por eles mesmos. Estudantes ingleses tiram proveito igualmente de tabelas e gráficos. Estudantes brasileiros não se beneficiam do uso de tabelas. Os Experimentos 2 e 3 confirmam resultados de estudos prévios de que informações gráficas sobre variáveis contínuas possuem diferentes níveis de complexidade. Ler pontos é significativamente mais fácil do que interpretar problemas globais. Os Experimentos 2 e 3 também confirmam a hipótese de que os problemas de inferência inversa explicam as dificuldades com informações globais. Essa dificuldade é acentuada em gráficos com inclinação negativa. O Experimento 4 mostra que a forma de apresentação da informação não afeta o desempenho dos estudantes na resolução de problemas sobre variáveis contínuas. O raciocínio dos estudantes sobre variáveis contínuas, no entanto, é influenciado pela forma de apresentação da informação. A pesquisa sugere a necessidade de uma discriminação da informação não apenas quanto ao tipo de variável, discreta ou contínua, ou tipo de relação proporcional, direta ou inversa, mas também quanto ao tipo de inferências requeridas dos estudantes.

Palavras – chave: Artefatos. Relações entre variáveis. Pensamento matemático.

ABSTRACT

.

The study investigates whether different ways of conceiving the role of artifacts and displaying information influences the way 11-14 year old students construct mathematical meanings. Human cognition is regarded as a process that is mediated by a cultural and historical tradition of artifacts such as representations, and the analysis of the representations lies within the sphere of mathematical reasoning. An experimental method, combined with an action research project involving the planned design of tasks, was employed. The mediating role of the tasks was examined from their preparation and introduction into the maths classroom, to the time when they were carried out by the students. This approach was put into practice by means of six experiments, in which 922 students took part - 598 from Key Stage Three (corresponding to grades 7, 8 and 9 of elementary school in Brazil) in four English schools and 324 from grades 7, 8 and 9 in two Brazilian schools. Experiment 1 investigates whether graphs, tables or isolated cases influence the thinking of students with regard to discrete variables. Experiment 2 verifies whether different information on continuous variables influences the way students interpret graphs. Experiment 3 examines whether interactions of visual and conceptual aspects of information on continuous variables influence students' interpreting of graphs. Experiment 4 investigated whether graphs, tables, or a combination of both representations, influences the interactions that students make between the visual and conceptual aspects of the information. These four experiments were conducted in English schools. The tasks used in the first and fourth experiments were carried out in Brazilian schools, being designated Experiments 5 and 6, respectively. The tasks had the potential to allow mathematical content to be used. Experiments 1 and 5 provided evidence that student already familiar with representations in tables and graphs to represent discrete variables do not benefit from activities where they have to organize the data by themselves. The English students took advantage of the opportunity to use tables or graphs but the Brazilian students did not benefit from using tables. Experiments 2 and 3 confirm the results of previous studies that graphical information showing continuous variables has different levels of complexity. Reading points is significantly easier than interpreting global problems. Experiments 2 and 3 also confirm the hypothesis that the problems of inverse inference can explain the difficulties encountered with global information. These difficulties are heightened in graphs with a negative slope. Experiment 4 shows that the way information is displayed does not affect the performance of students when they are attempting to solve problems involving continuous variables. However, the reasoning of the students with regard to continuous variables is influenced by the way the information is displayed. The research suggests that there is a need to distinguish between different kinds of information such as the type of variable (whether it is discrete or continuous), and the type of proportional relationship (direct or inverse), as well as, the type of inference required of the students (whether it is direct or inverse).

Key – words: Artifacts. Relationships between variables. Mathematical thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

ANEXOS

1 INTRODUÇÃO

Existem diferentes formas de se conceber o papel dos artefatos no pensamento dos estudantes sobre construção e interpretação de significados de dados matemáticos. Por um lado, é possível conceber que estudantes achem mais fáceis refletir sobre dados e fazerem inferências se a informação já se encontra organizada na forma de gráficos ou tabelas. Por outro lado, é possível que exista um valor epistêmico em se construir os aspectos apresentados em tabelas e gráficos a partir de casos isolados (ou peças da informação).

Dados "são informações, usualmente de natureza numérica ou categórica" (UPTON; COOK, 2006, p. 117). Do ponto de vista psicológico, quando as pessoas estão de posse de um conjunto de dados, uma questão que naturalmente emerge é "como elas transformam esses dados em informação matemática significativa?" (AINLEY; PRATT, 2001, p. 2). Um processo essencial é expresso na construção de significados matemáticos com base em dados: como a forma de apresentação dos dados influencia a formulação de significados matemáticos pelas pessoas, como é o caso do conceito de variáveis e de suas relações?

A noção de variável e de relações entre variáveis requer o uso de ferramentas auxiliares para facilitar as devidas coordenações pelos estudantes. Cada forma de apresentação da informação potencializa diferentes coordenações da informação (*affordances*)[1], possuindo diferentes características como ferramentas de apresentação da informação. Torna-se relevante, portanto, analisar como as pessoas estabelecem as devidas conexões entre a forma de apresentação dos dados e os aspectos matemáticos da mesma informação.

A apresentação dos dados com o suporte de casos isolados é observada na organização de algumas pesquisas em Psicologia Cognitiva, que buscam compreender como estudantes constroem o conceito de variável e analisam as suas relações. Inhelder e Piaget (1958) usam casos isolados apresentados em cartões manipulativos com desenhos de cada unidade da informação, para ajudar os estudantes a formularem a idéia de correlação. Watson e Moritz (2001) usam casos isolados apresentados em cartões manipulativos com desenhos de cada elemento da informação, para ajudar os estudantes a elaborarem e interpretarem pictográficos. Selva, Falcão e Nunes (2005) usam blocos como os representados por Lego para retratar os

---

[1] O termo *affordance* foi introduzido por Gibson (1979) no desenvolvimento de sua teoria da percepção baseada na ecologia da informação. Segundo a perspectiva ecológica, a relação entre o organismo e o seu meio é interdependente e nenhum termo dessa relação pode ser definido indepedentemente da relação entre eles. A coordenação entre organismo-meio, portanto, constitui-se na unidade básica de análise da Psicologia.

casos isolados. Estes funcionam como “ferramenta manipulativa auxiliar para a compreensão de gráficos”. (SELVA; FALCÃO; NUNES, 2005, p. 161). A organização dessas pesquisas envolve a idéia de que as noções matemáticas de variáveis e de relações entre variáveis requerem o uso de ferramentas auxiliares para facilitar a sua coordenação. Quando crianças estão resolvendo problemas com os casos isolados, elas precisam construir as combinações numéricas, isto é, as variáveis do problema, para poderem analisar a relação entre elas. Os casos isolados apresentados às crianças já classificados, num arranjo similar a uma tabela de dupla entrada, conferem mais ênfase às possíveis combinações numéricas e parecem facilitar as formulações das crianças sobre a idéia de correlação (Inhelder e Piaget, 1958). O uso de *tabelas e gráficos combinados* é sugerido como forma apropriada de se estudar a idéia de função linear, conforme a organização do conhecimento matemático proposto por Vergnaud (1991).

A idéia de variável é fundamental para uma *compreensão funcional de gráficos* (LEINHARDT; ZASLAVSKY; STEIN, 1990) e os casos isolados, quando classificados nas combinações possíveis, podem ser pensados como as variáveis dos problemas. Na atividade matemática realizada na escola, o uso de casos isolados é mais comum no trabalho com crianças pequenas com o intuito de ajudarem-nas a construir a idéia de variável. As tabelas e gráficos por sua vez são mais utilizados no contexto do tratamento da informação ou da Álgebra.

Em tabelas, a organização da informação em fileiras e colunas parece facilitar a apresentação dos problemas multiplicativos (VERGNAUD, 1983). Estes são problemas em que o estudante se depara com situações que envolvem duas variáveis (isomorfismo de medidas) ou situações de três ou mais variáveis (produto de medidas). Os problemas multiplicativos são também distinguidos como aqueles que possuem relação fixa entre duas variáveis (NUNES; BRYANT, 1997), podendo ser esta relação direta ou inversa. O fator fixo, nesse caso, é o que diferencia os problemas multiplicativos dos aditivos. Esses últimos envolvem relações parte-todo entre as quantidades. Os estudantes parecem se beneficiar mais na resolução de problemas multiplicativos quando as tabelas são usadas como elos intermediários entre a sua apresentação verbal e a sua solução aritmética (SELLKE; BEHR; VOELKER, 1991). Pesquisas evidenciam que crianças pequenas elaboram espontaneamente tabelas que diferem das tabelas convencionais mostradas em sala de aula pelos professores (BRIZUELA; LARA-ROTH, 2002).

Nos gráficos, a informação é organizada por meio de um sistema de coordenadas onde os eixos *x e y* representam as duas variáveis. A idéia de usar duas linhas perpendiculares para encontrar um ponto no sistema de coordenada é parte da história cultural dos seres humanos. Karlson (1961) documenta o seu uso no Egito antigo para a demarcação de terras a serem cultivadas. No contexto da Matemática acadêmica, o sistema de coordenadas é comumente denominado de *Sistema Cartesiano,* em referência a René Descartes, que introduziu esse método para representar, geometricamente, a idéia de relações funcionais entre variáveis.

Na Matemática, encontra-se uma definição de gráficos voltada para o fato de que estes são "diagramas que mostram a relação entre duas variáveis" (NELSON, 2003, p. 189). A equação $y = ax$ pode ser representada graficamente a partir de um método em que as unidades da variável dependente (o valor da função) são marcadas no *eixo y*, situado verticalmente, e as unidades da variável independente (os possíveis valores da variável) são marcadas no *eixo x*, situado horizontalmente. O gráfico da função consistirá de todos os pontos para os quais as coordenadas, *x e y,* satisfaçam a equação dada. Funções dessa natureza são denominadas de lineares e se constituem num caso específico de função, em que o valor funcional que conecta as duas variáveis não muda à medida que o valor das variáveis muda.

O tipo de relação que existe entre as variáveis é um aspecto importante na interpretação de gráficos de funções lineares. A relação entre as variáveis nesses gráficos pode ser inferida visualmente com base na inclinação das linhas (*slope*) no sistema de coordenadas. Essa inclinação pode ser calculada pelo "ângulo que a linha forma com o eixo *x*" (horizontal) ou ainda pelo "gradiente em determinado ponto da linha" (NELSON, 2003, p. 392). Nos gráficos com inclinação positiva, quando uma variável aumenta a outra também aumenta na mesma proporção; como resultado, quanto mais alta a linha, maior a taxa de crescimento da variável. Nos gráficos com inclinação negativa, quanto uma variável aumenta a outra diminui na mesma proporção, conseqüentemente, quanto menos inclinada a linha, maior a taxa de decrescimento das variáveis.

Alguns pesquisadores defendem a existência de regras que as pessoas acessam com base nos fatores visuais das representações externas (STAVY; TIROSH, 2000) ou por associações entre fatores visuais e lingüísticos (GATTIS, 2002). Essas regras não estão ligadas a nenhum conceito em particular, consistindo em um tipo de lógica intuitiva que as pessoas usam quando se deparam com representações externas. As lógicas intuitivas são parte do conhecimento prévio que as crianças trazem para a escola e consistem na base para a realização de inferências matemáticas. A esse respeito citamos Vergnaud (1997, 1998) que usa a expressão *Teoremas-em-ação* para designar noções intuitivas que emergem da prática, fundamentados no conhecimento prévio dos estudantes, mas que não se encontram ainda formalizados do ponto de vista da Matemática acadêmica.

O processo de formalização matemática requer a construção de significados matemáticos e não apenas o uso de visualizações diretas sobre as representações externas. Os significados matemáticos, vistos dessa forma, não constituem característica inerente às representações externas, como se elas fossem *transparentes* (MEIRA, 1998). A noção de transparência deve ser pensada como um meio de acesso ao conhecimento e atividades realizadas na escola e não como um fim último das representações externas. Os significados, portanto, são dependentes dos conhecimentos prévios dos estudantes e das interações e situações organizadas em sala de aula. Pode-se conjecturar que, ao considerarem a relação *quanto mais alta a linha, maior a taxa de crescimento*, estudantes podem estar usando regras intuitivas ao invés de realmente estabelecerem interações entre aspectos visuais e conceituais apresentados graficamente. Para um usuário experiente, gráficos gerados por meio de computadores, como é o caso dos gráficos usados nessa pesquisa, não apenas descrevem variáveis, mas também relações entre as variáveis. Nesse sentido, faz-se necessário o desenvolvimento de pesquisas voltadas para acessar o conhecimento matemático dos estudantes com base no uso de gráficos e também de outras ferramentas matemáticas.

Numa revisão da literatura dos aspectos-chave do trabalho com diferentes formas de apresentação, Friel, Curcio e Bright (2001) chamam a atenção para a ausência do trabalho com tabelas como forma de apresentar e organizar dados. Esse aspecto, segundo os autores, não se encontra ainda devidamente investigado na literatura. Outros dois fatores que precisam ser mais bem investigados são a falta de aprofundamento sobre o conhecimento matemático necessário no entendimento da informação (conhecimento aditivo vs. multiplicativo) e a complexidade dos tipos de informação (informações sobre variáveis discretas vs. variáveis contínuas). Neste trabalho, os aspectos cobertos são: 1) a classificação das representações e as suas propriedades matemáticas (NUNES, 1997, 2004); 2) a classificação dos problemas multiplicativos (VERGNAUD, 1983, 1991, 1997, 1998); 3) a extensão dos problemas multiplicativos às classes dos problemas de proporção direta ou inversa (NUNES; DESLI; BELL, 2003). Esse arcabouço conceitual é oferecido como base para classificação da informação e debate acerca do entendimento matemático dos alunos.

A compreensão dos alunos é composta ou orientada pelos aspectos materiais – representação externa que é visualizada, percebida – e pelos aspectos ideais, representação mental elaborada sobre os conceitos. Esses dois aspectos, quando integrados, constituem o que Cole denomina de *artefatos* (COLE, 2003). “Artefatos consistem de objetos elaborados a partir de necessidades e intenções humanas” (WARTOFSKY, 1973, p. 204, apud COLE, 2003, p.121). A concepção de artefatos oferecida por Wartofsky inclui o uso de tecnologias e as formas de apresentação de dados.

Os artefatos possuem diferentes níveis de organização – primário, secundário ou terciário – conforme classificação proposta por Wartofsky (1979) e adotada neste trabalho. Logo, uma análise baseada apenas nos pólos material e ideal dos artefatos não seria suficiente para explicar os processos simbólicos na formulação do pensamento matemático sobre dados. Os aspectos contextuais dos problemas e que remetem para atividades intencionais, são igualmente relevantes para a formulação do pensamento matemático.

Uma pesquisa exploratória realizada na interpretação de gráficos por *designers* e professores de matemática (LIMA, 1998) revelou que os sujeitos empreendem leituras visuais, experienciais ou matemáticas aos gráficos. Uma questão mais geral, como "o que esse gráfico lhe sugere?", suscitava uma freqüência menor no uso de leituras matemáticas, ao contrário de questões específicas, que levavam os participantes a usar o raciocínio matemático com maior freqüência. Observou-se uma tensão entre os aspectos visuais e conceituais quando a informação era apresentada por meio de gráficos de linhas com inclinação negativa. O resultado encontrado foi que o tipo de questão, a prática social e os aspectos visuais da apresentação da informação influíram nas leituras e interpretações dos gráficos pelos sujeitos.

Algumas perguntas foram pensadas para o presente trabalho: 1ª) será que estudantes tiram proveito para pensar sobre dados quando estes são apresentados já organizados numericamente nas formas tabular ou gráfica? 2ª) Será que estudantes que precisam coordenar a combinação dos dados por eles mesmos mostram eventualmente melhor compreensão dos dados? 3ª) Será que as tendências verificadas no desempenho e raciocínio de estudantes poderiam ser explicadas quanto ao uso dessas ferramentas de representação em diferentes práticas escolares?

Com estas questões elaboradas e com base na idéia de ferramentas matemáticas como artefato objetivou-se, no presente trabalho, investigar como diferentes caminhos de conceber o papel dos artefatos podem influenciar o pensamento matemático de estudantes de 11 a 14 anos para raciocinar sobre dados.

A realização dos experimentos envolveu um *design* voltado à caracterização intencional dos artefatos. A idéia que emergia no momento de elaboração do *design* era encontrar contextos de uso de variáveis que fossem familiares aos alunos. Se o conteúdo não constituísse problema, então, as inferências dos estudantes estariam sujeitas às formas de apresentação da informação e às suas coordenações sobre as relações entre as variáveis. Logo, fazia-se necessário elaborar um *design* que levasse em consideração o papel das formas de apresentação da informação como mediadoras do conhecimento matemático. Os aspectos materiais dos artefatos requereram a elaboração de tarefas que tenham o potencial de mobilizar o raciocínio matemático.

O trabalho encontra-se apresentado em oito capítulos, inclusive esta introdução e as considerações finais. O Capítulo 2 discute os conceitos de variável e de relações entre variáveis. Estes são fundamentais para uma diferenciação das ferramentas de representação, que constituem o foco desta investigação. Uma atenção especial é dada à representação das variáveis em termos da sua aplicação nos casos isolados, em tabelas ou gráficos. As variáveis podem também ser representadas por meio de fórmulas, mas essa discussão encontra-se fora do escopo do trabalho. A perspectiva do capítulo é oferecer uma análise dessas representações como ferramentas matemáticas. Uma apreciação dos princípios matemáticos estruturais e o modo como eles podem potencializar ou limitar as ações dos estudantes na consideração das relações entre variáveis são teorizados. Notadamente a partir da década de 1970, as pesquisas sobre a representação das variáveis vêm sendo realizadas com clara ênfase para o uso de gráficos. Como resultado, neste capítulo, a maior parte das reflexões teóricas é realizada com o suporte da análise sobre os gráficos.

O Capítulo 3 apresenta uma discussão teórica em torno do conceito de ferramentas de representação no domínio da Matemática e como artefatos. A teorização da importância das ferramentas matemáticas é analisada, e a perspectiva de formação simbólica dos conceitos proposta por Vergnaud é discutida, assim como a classificação elaborada por Nunes. Em seguida, a noção de artefatos é apresentada na concepção da Psicologia Social que foi estabelecida fundamentando-se no constructo de ferramenta proposto por Vygotsky e Lúria. Uma análise desse constructo como uma subcategoria da noção de artefatos é discutida na seqüência. As idéias de Cole sobre os artefatos e a classificação proposta por Wartofsky para organizar os artefatos em diferentes dimensões da vida diária são adotadas. Na seqüência, é feita uma análise dos artefatos no domínio da cognição matemática na perspectiva cultural, isto é, considera como legítimas as diferentes práticas da Matemática de que as pessoas participam dentro ou fora da escola. Por último, algum efeito da prática da Matemática no raciocínio sobre diferentes ferramentas de representação é analisado.

O Capítulo 4 apresenta a metodologia utilizada com um enfoque voltado para a perspectiva teórica adotada e para o design dos experimentos.

O Capítulo 5 descreve e analisa os quatro experimentos realizados nas escolas inglesas. O primeiro deles analisou se havia diferenças de desempenho e raciocínio quando os estudantes estavam trabalhando com gráficos, tabelas ou informações representadas por casos isolados. O *design* experimental foi intragrupos[2] e a variável manipulada foi a forma de apresentação da informação. O segundo experimento foi exploratório e buscou replicar diferenças previamente discutidas na literatura sobre dificuldades de interpretação de gráficos por estudantes de 11 a 14 anos, em função do tipo de questões. O experimento oferece análise conceitual das dificuldades dos estudantes com base na classificação dos problemas multiplicativos propostos por Vergnaud. Explora-se também uma nova hipótese relacionada com as inferências diretas ou inversas que os estudantes precisam fazer para comparar gráficos com inclinação positiva. O *design* experimental foi intergrupos[3], onde os mesmos participantes resolveram diferentes problemas com a informação apresentada graficamente. A variável manipulada no experimento foi o tipo de informação tratada. O terceiro experimento investigou se a dificuldade dos estudantes em formular inferências inversas baseada em gráficos de linhas decorreria de interações dos aspectos visuais e conceituais da informação. O quarto experimento investigou se o tipo de ferramenta de representação influenciava o desempenho e raciocínio dos estudantes para eles formularem inferências sobre variáveis contínuas. O *design* experimental do terceiro e quarto experimentos consistiram de uma combinação intra e intergrupos. As variáveis manipuladas no terceiro experimento foram os tipos de inferências (direta ou inversa) e os tipos de inclinações da linha (positiva ou negativa). No quarto experimento, além dos problemas incluírem essas manipulações, as informações foram apresentadas por meio de gráficos, tabelas ou ambas as representações.

O Capítulo 6 exibe os Experimentos 5 e 6, realizados no Brasil. No quinto experimento, faz-se uma replicação do primeiro, realizado na Inglaterra. No sexto experimento, procede-se uma replicação do quarto experimento realizado na Inglaterra. Nesses ensaios realizados no Brasil, foram empregadas as mesmas tarefas dos experimentos realizados na Inglaterra, procedendo-se apenas à tradução do Inglês para o Português, das informações. Na tradução, recorreu-se ao método de tradução simultânea (*translation and back translation*) em que as informações transferidas do Inglês para o Português eram novamente traduzidas para o Inglês por um tradutor independente e com habilidade nas Línguas Inglesa e Portuguesa. O objetivo dessas replicações foi oferecer um diagnóstico do uso das tarefas dos Experimentos 1 e 4 numa realidade diferente.

---

[2] O *design* intragrupos caracteriza uma forma de experimento na qual diferentes grupos de estudantes de uma mesma amostra trabalham com diferentes níveis da variável independente, que, no caso desse experimento, consiste nas formas de apresentação da informação.

[3] O *design* intergrupos caracteriza uma forma de experimento em que o mesmo grupo de participantes trabalha com diferentes níveis da variável dependente.

O Capítulo 7 oferece as conclusões do trabalho. Encontram-se também, nesse capítulo, as contribuições e limitações deste trabalho e as possibilidades para futuras pesquisas.

2 VARIÁVEIS, RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS E SUAS APLICAÇÕES

Neste segmento, delineiam-se noções conceituais sobre variáveis e relações entre variáveis e ainda as suas aplicações em estudos que usam os casos isolados, tabelas e gráficos como ferramentas de coleta de dados, buscando analisar os fatores que influenciam na compreensão dos alunos e que possam ser controlados ou manipulados na elaboração dos experimentos desta pesquisa.

2.1 O conceito de variável

Na literatura em Educação Matemática, o conceito de variável aparece explicitamente no contexto da Álgebra. Nesse contexto, Kieran, Boileau e Garaçon (1996, p. 257) definem a idéia de variável como associada a uma letra, que pode assumir uma gama de valores. Na expressão $3x + 5$, o x pode ser interpretado como variável porque ele pode assumir diferentes valores.

Embora essa representação da idéia de variável possa parecer muito simples, pois uma letra é usada exatamente para não se definir um valor, existem estudos mostrando que, do ponto de vista dos estudantes, a representação literal não remete necessariamente à concepção de inúmeros valores indefinidos possíveis. Booth (1984) argumenta que os alunos freqüentemente atribuem significados específicos às letras, podendo pensar em *a* e *b* como representando *apples* (maçãs) e *bananas*. Dessa forma, *4a + 5b* seriam interpretados como 4 *maçãs* + 5 *bananas*.

Usando uma análise semelhante, Janvier (1996, p. 231) argumenta que a introdução de letras para denotar variável pode entrar em conflito com o seu uso para denotar uma unidade de medida ou um caso. O autor sugere que o termo *magnitude* seja usado para denotar medidas, uma vez que uma magnitude pode ser imaginada como um número acompanhado por uma unidade de medida, por exemplo, *10m* é uma magnitude, *10* é o número e *m* é a unidade de medida de espaço.

Embora a definição de variável seja apresentada aos alunos somente no contexto da Álgebra, no trabalho com Aritmética, os estudantes também se confrontam com a idéia de variável, de modo especial no campo dos problemas multiplicativos. Num problema em que se apresentem três valores e se peça ao aluno que encontre o quarto valor, já envolve a representação de um valor ausente nesse campo de medidas, abrangendo, portanto, a noção de variável. Problemas dessa natureza são definidos como situações de isomorfismo de medidas na terminologia de Vergnaud (1983; 1998) e constituem problemas em que duas medidas mantêm uma relação de correspondência biunívoca.

Na Psicologia o conceito de variável corresponde ao de medida usado por Vergnaud e de magnitude na definição de Janvier. Uma variável em um estudo poderia ser a idade dos alunos, a qual poderia ser correlacionada com o número de respostas certas num teste. Uma variável, ao contrário de uma medida, não é algo observável: é um constructo que liga uma série de valores da mesma natureza, ou seja, uma série de medidas. Podemos dizer que um aluno mede 1,60m e outro mede 1,58m e definir essas duas medidas como valores na variável *altura dos alunos*. Nesse caso, a variável é contínua, pois os valores podem ser organizados ao longo de uma linha que representa a sua seqüência. Outras variáveis são discretas ou classificatórias. Podemos classificar os alunos entre os que têm olhos azuis ou pretos. Esses valores representam a variável *cor dos olhos*, a qual não é representada num contínuo, mas tratada como categorias discretas. A definição de variável adotada nesta tese será usada com esse sentido mais amplo, abrangendo tanto o seu uso na relação entre objetos como entre magnitudes.

Um aspecto importante nas ações dos estudantes em problemas sobre variáveis consiste na quantidade de variáveis que eles precisam lidar. Vergnaud (1983) distingue a estrutura dos problemas matemáticos em aditivos e multiplicativos. Os aditivos são problemas de apenas uma variável e que podem ser resolvidos por combinação. Os problemas multiplicativos, por sua vez, envolvem duas, três ou mais variáveis. Os problemas de duas variáveis, ou isomorfismo de medidas, consistem de uma proporção direta simples entre as variáveis. Esses problemas são modelados de forma apropriada por funções lineares e possuem uma estrutura que pode ser representada numa tabela simples de correspondência. A classe de problemas de isomorfismo de medidas inclui muitas situações do dia-a-dia, como é o caso das relações entre mercadorias compradas e o seu custo. Os problemas de três ou mais variáveis, ou produtos de medidas, consistem "da composição Cartesiana de dois espaços de medidas, M1 e M2, em um terceiro, M3". (VERGNAUD, 1983, p. 134). Esses problemas, segundo Vergnaud, são mais complexos do que o isomorfismo de medidas e possuem uma estrutura que envolve a proporção dupla. Um produto de medidas típico, conforme exemplo oferecido por Vergnaud (1983, p. 135), pode envolver uma situação na qual quatro garotas e três rapazes estão numa festa e cada garota quer dançar com cada rapaz e cada rapaz com cada garota. Quantos diferentes casais rapaz-garota podem ser formados? Os casais constituem a terceira variável do problema, e só podem ser explicados com o suporte da combinação das duas variáveis do problema, isto é, o número de rapazes e de garotas. As tarefas elaboradas nessa tese são constituídas por problemas de produto de medidas; nesses problemas, duas variáveis são dadas e os estudantes precisam inferir a terceira variável.

Os problemas de produto de medidas podem ser idealmente representados em tabelas ou gráficos; nesse último caso, as duas variáveis (número de rapazes e número de garotas) seriam representadas em dois eixos distintos, enquanto o número de casais seria representado por pontos num plano. Vergnaud enfatiza a importância do desenvolvimento do pensamento multiplicativo fundamentado na identificação das variáveis dos problemas, das relações entre as variáveis e das diferentes operações. Esse autor sugere ainda que o uso de representações simbólicas possa ser um caminho a ser adotado nas escolas para clarificar a distinção entre isomorfismo de medidas e produto de medidas, ajudando os estudantes na discriminação das dimensões multiplicativas dos problemas.

Os problemas propostos e analisados nessa tese seguem os fundamentos da teoria de Vergnaud. A seção seguinte aprofunda os aspectos concernentes às relações entre variáveis, ponto este que não foi muito explorado por esse autor.

2.2 Relações entre variáveis e o raciocínio proporcional

De acordo com Inhelder e Piaget (1958), no desenvolvimento e maturação do raciocínio lógico-matemático, o estabelecimento de relações entre variáveis é uma aquisição tardia, adquirida somente entre 14 e 16 anos. O “pensamento formal” (INHELDER; PIAGET, 1958) que caracteriza o raciocínio adolescente torna possível para os sujeitos isolar as variáveis do problema e deduzir uma relação em potencial entre elas, a qual pode mais tarde ser verificada por meio de experimentos.

Segundo Singer, Kohn e Resnick (1997), estudos iniciais sobre o raciocínio lógico-matemático não oferecem uma distinção clara entre o raciocínio direto ou o raciocínio proporcional. Os autores fazem essa distinção utilizando os conceitos de quantidades extensivas e quantidades intensivas.

> Quantidades extensivas se comportam aditivamente, pois, elas podem ser combinadas e seccionadas de uma forma que se iguale a combinação e seccionamento das quantidades de objetos materiais no mundo. A combinação de duas quantidades extensivas resulta numa quantidade extensiva maior. O seccionamento de duas quantidades extensivas resulta numa quantidade extensiva menor. Quantidades intensivas são relacionais e descrevem como duas quantidades extensivas são relacionada uma com as outras, por exemplo, *40 quilômetros por hora* ou 5 bananas por caixa. As quantidades intensivas não se comportam aditivamente, pois a adição de 30 quilômetros por hora e 10 quilômetros por hora não resulta em 40 quilômetros por hora. Para compreender uma razão a criança deve ter condições de compreender não os seus valores absolutos, mas as relações entre dois valores. Para compreender proporções, uma criança deve compreender como duas razões se relacionam uma com a outra; uma proporção é matematicamente definida como a equivalência entre duas razões (SINGER; KOHN; RESNICK, 1997, p. 117, tradução nossa).

O sentido dado por Singer et al. (1997) aos termos quantidades extensivas, se aproxima da abordagem de Vergnaud para os problemas aditivos, pois envolve a idéia de uma magnitude que é susceptível de ser compreendida pela lógica da adição. Os problemas multiplicativos, por sua vez, estariam mais relacionados com a lógica das quantidades intensivas, por não incluir a adição, mas relações entre quantidades. Os exemplos da Figura 1, segundo Singer, Kohn e Resnick (1997) expressam relações proporcionais.

(1) 5 maçãs (apples) : 3 dólares (dolars) :: 10 maçãs (apples) : 6 dólares (dollars)

ou (or)

(2) 5 maçãs (apples) : 3 crianças (children) :: 10 maçãs (apples) : 6 crianças (children)

ou (or)

(3) 5:3 :: 10:6

ou (or)

(4) 5/3 :: 10/6

Figura 1 – Representações de relações proporcionais.
Fonte: Singer; Kohn; Resnick (1997), p. 117, tradução nossa.

Segundo Singer et al. (1997, p. 123), o problema da maioria dos estudos sobre o raciocínio proporcional se concentra no "*design*", principalmente os que envolvem variáveis físicas, como é o caso da velocidade, pois eles permitem apenas uma apreensão direta, não existindo um esforço para mostrar a base para os sujeitos estabelecerem relações entre quantidades.

Os estudos elaborados nesta pesquisa envolvem uma preocupação com o *design* das tarefas. As tarefas do primeiro experimento, realizadas e aplicadas na Inglaterra e depois replicadas no Brasil, incluíram um controle sobre os valores das variáveis e sobre a sua representação. Esse controle permitiu se diversificar o nível de dificuldade dos problemas. Alguns problemas puderam ser resolvidos por meio de um raciocínio direto, outros por intermédio de um raciocínio proporcional. No problema apresentado na Figura 2, solicita-se aos estudantes que eles julguem se existe maior possibilidade de encontrar pessoas com cabelos pretos entre casos de pessoas com olhos azuis ou pretos. O problema envolve quatro casos de pessoas de olhos azuis e cabelos pretos, três casos de pessoas de olhos azuis e cabelo louro, cinco casos de pessoas de olhos pretos e cabelo preto e dois casos de pessoas de olhos pretos e cabelo louro. Nesse problema, como a variável *cor dos olhos* e a variável *cor de cabelos* possuíam a mesma freqüência (igual a 7), os alunos precisavam apenas discriminar num raciocínio direto onde a cor de *cabelo preto* se encontrava com maior freqüência. Esse mesmo contexto do problema, apresentado com diferentes valores das variáveis, requereu um raciocínio proporcional: quatro casos de pessoas de olhos azuis e cabelos pretos, seis casos de pessoas de olhos azuis e cabelo louro, quatro casos de pessoas de olhos pretos e cabelo preto e três casos de pessoas de olhos pretos e cabelo louro. Nesse problema, apenas os casos de cabelos pretos foram iguais (igual a 4). Os estudantes precisam realizar um julgamento, relacionando a variável cor *de olhos* em função da variável cor de cabelos *pretos*. Os estudantes foram solicitados a julgar essas relações hipotéticas por meio de formas diferentes de apresentação da informação: imagem de cada caso isolado desenhado em cartões que os estudantes precisariam manipular; tabela de dupla entrada com a freqüência das pessoas que têm olhos azuis ou não *versus* aquelas que são louras ou morenas; e gráfico de barras empilhadas, realçando-se a proporção e o número de pessoas em cada caso.

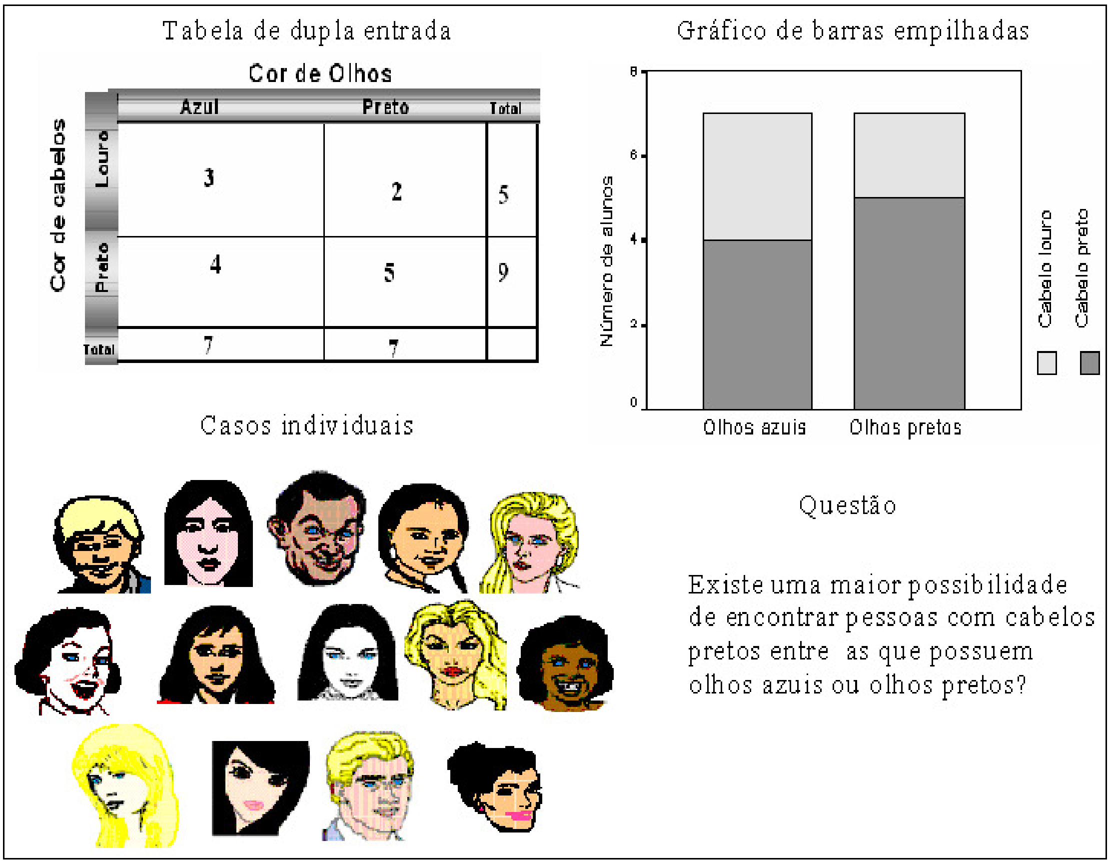


Figura 2 – Exemplo de tarefa usada na pesquisa.

Constatam-se na Figura 2 que os dados requeridos para os estudantes considerarem as diferentes combinações de cor de olhos e de cabelos são os mesmos nas diferentes formas de apresentação. Embora os dados sejam iguais, a informação que o estudante recebe é diferente: os que olham as imagens de cada caso têm que elaborar a sua própria organização dos dados para poderem resolver os problemas. Os estudantes que olham as tabelas recebem informações numéricas que já se encontram organizadas na melhor forma possível, para que eles estabeleçam a coordenação entre os dados; e os estudantes que olham os gráficos podem fazer comparações visuais do tipo de relações entre os dados ou calcular as relações com porcentagens ou frações. No problema da Figura 1, os estudantes que trabalharam com gráficos tiveram melhor desempenho do que os que trabalharam com as outras formas de apresentação. Uma descrição completa desse experimento encontra-se apresentada no Capítulo 5.

2.2.1 Relações diretas e inversas

Estudos que investigam o desenvolvimento conceitual focalizam a dificuldade dos estudantes na resolução de problemas de três variáveis em que a terceira variável está numa relação inversa com as outras duas. Um aspecto central nesses estudos é que o reconhecimento dos estudantes sobre como as variáveis estão relacionadas não é apenas um passo qualitativo na resolução dos problemas, mas uma parte essencial na sua compreensão (PIAGET, 1970, ACREODOLO; ADAMS; SCHMID, 1984, SQUIRE; BRYANT, 2003, NUNES; DESLI; BELL, 2003).

Examinando os conceitos de movimento e velocidade, Piaget (1970) distinguiu entre direções diretas ou localizações e direções inversas ou deslocamentos como formadores da origem da compreensão qualitativa desses conceitos. Essas relações são denominadas por Piaget como relações de primeira ordem, pois requer dos estudantes um raciocínio centrado na ordenação das quantidades. Embora as relações de primeira ordem permitam que as crianças analisem a menor ou a maior velocidade numa perspectiva relativa, elas não são suficientes para que comparações proporcionais sejam realizadas. Apenas a integração da idéia de direção (positiva ou negativa) com a idéia de movimento em sucessão, a qual envolve a variável tempo, pode preparar o caminho para o desenvolvimento da idéia de movimentos em sucessão e que incluem o raciocínio proporcional. Estas relações são consideradas por Piaget como relações de segunda ordem, pois os estudantes precisam estabelecer relações entre as três variáveis do problema: movimento, velocidade e duração.

Investigando como 90 estudantes de seis a 13 anos de idade compreendiam a relação entre velocidade, duração e distância, Acreodolo, Adams e Schmid (1984) oferecem evidências de que as crianças desenvolvem o entendimento da relação direta entre duração e distância antes da relação inversa. A relação direta significa que um valor percebido como maior em uma dimensão se correlata com um valor também percebido como maior na outra dimensão.

Acreodollo et al. (1984) contavam às crianças uma história sobre um fazendeiro que deixou um cachorro próximo ao seu jardim para prevenir que coelhos e gambás comessem os seus repolhos. Os animais ficavam na rua esperando que o cachorro dormisse e então comiam os repolhos. A história era contada com a ajuda de desenhos ilustrando a situação. Foi também explicado às crianças que algumas vezes os coelhos e gambás corriam com a mesma velocidade, enquanto em outras um animal podia correr mais rápido do que o outro. As crianças também foram informadas de que os dois animais podiam correr durante o mesmo período ou não.

As crianças deveriam deduzir a relação de uma variável (ex. qual animal corre por mais tempo) somente na base da informação sobre as relações das outras duas variáveis. As crianças erraram mais quando os problemas requeriam que elas usassem o conhecimento da relação inversa entre velocidade e duração, e entre duração e distância. Uma análise do tipo de erros revelou que as crianças assumiam a idéia de que existia uma relação direta entre as variáveis em vez de uma relação inversa.

Nunes, Desli e Bell (2003), oferecem evidências de que as dificuldades que crianças pequenas apresentam para entender quantidades intensivas encontram-se relacionadas com o seu entendimento de relações inversas. Neste estudo, crianças de seis a oito anos resolveram problemas sobre *paladar*, *velocidade* e *custo*, entre outros. Os problemas não requeriam que as crianças realizassem uma computação; além disso, eram apresentados por meio de desenho para facilitar a comunicação.

As relações diretas e inversas foram acessadas por meio de questões diretas ou inversas aplicadas ao mesmo tipo de problema. Por exemplo, no problema sobre o paladar, dois copos de suco de limão com a mesma quantidade de suco e diferentes quantidades de açúcar eram apresentados às crianças. Elas deviam então responder uma questão direta na qual a quantidade total de suco era mantida constante e a quantidade de açúcar variava: um suco está mais doce do que o outro ou eles têm o mesmo sabor? Elas deviam também responder a uma questão inversa na qual a quantidade de açúcar era mantida constante e a quantidade total de suco variava: um suco tem um sabor mais forte do que o outro ou eles têm o mesmo sabor? Os resultados indicaram que as crianças de todas as idades tiveram mais dificuldades em resolver as questões inversas do que as diretas.

O tipo de informação possibilita a combinação de tipos diferentes de relações entre as variáveis com base no uso de questões específicas. Este ponto não tem sido investigado de forma sistemática nos estudos sobre gráficos. Entende-se que o tipo de relação, direta ou inversa, se encontra associada com a lógica da informação e pode influenciar na construção dos significados pelos estudantes. Esse aspecto encontra-se investigado nos Experimentos 3, 4 e 6, elaborados nessa tese e descritos em capítulos posteriores.

Os economistas, em particular, estão freqüentemente examinando como uma variável afeta outra: como a compra de carros é afetada pelos preços dos carros; como os gastos dos consumidores são afetados pelas taxas que eles pagam; e como o custo na produção de máquinas de lavar é afetado pelo preço da matéria-prima. Algumas dessas situações representam funções lineares simples e podem ser apresentadas por meio de um gráfico de linhas. O gráfico da Figura 3 apresenta uma situação comum nos livros de Economia.

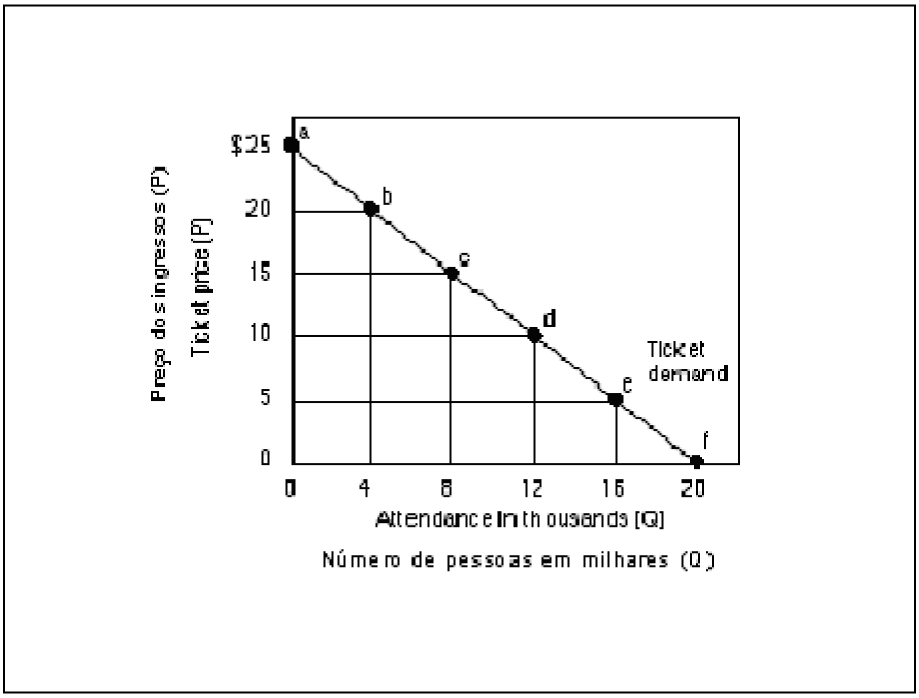


Figura 3 – Gráfico de linhas com inclinação negativa.
Fonte: McConnell e Brue (1996), p. 15.

O gráfico mostra uma relação entre os preços dos ingressos (*tickets prices*) e o número de pessoas que comparecem aos jogos (*attendance in thousands*); isto é, que compraram os ingressos. Nessa situação, quando o número de pessoas presentes aos jogos aumenta, é porque os preços dos ingressos diminuíram, sendo esse aspecto representado pela inclinação negativa do gráfico. Quando o preço do ingresso é $20, o número de pessoas presentes aos jogos é 4.000, e quando os ingressos são de graça, 20.000 pessoas vão aos jogos. É possível que a relação entre o preço dos ingressos e o número de pessoas que assistem aos jogos seja facilmente interpretada nesses gráficos, pois, para cada valor no preço do ingresso, tem-se uma quantidade correspondente de pessoas que os compraram efetivamente e compareceram aos jogos.

Embora o problema apresentado no gráfico da Figura 3 envolva duas variáveis, para a resolução dele, os estudantes devem estabelecer *correspondência* entre as variáveis. Dentre os problemas multiplicativos, esses são considerados os mais fáceis de resolver (NUNES; BRYANT, 1996).

O gráfico da Figura 4 apresenta uma informação diferente daquela focalizada no gráfico da Figura 3. A Figura 4 exibe uma relação entre distância e tempo: quanto maior a distância, maior é o tempo; no entanto, a velocidade é o elemento importante nesse gráfico. É a terceira variável não diretamente inferida, mas pode ser obtida com base na relação entre a distância e o tempo considerados simultaneamente. Relações dessa natureza são representadas graficamente e o seu significado requer a representação mental do conceito de velocidade pelo leitor.

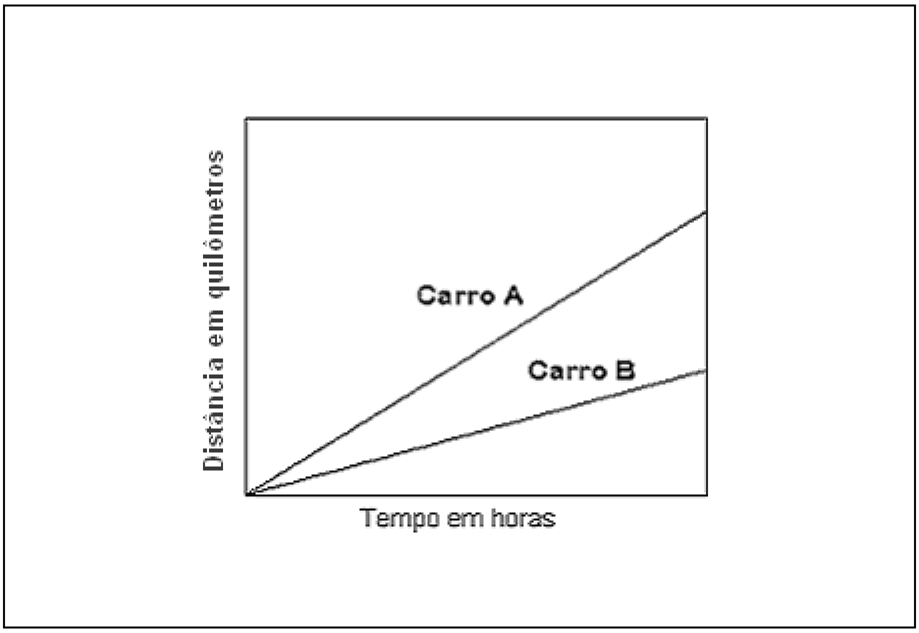


Figura 4 – Gráfico de linhas com inclinação positiva.

Qual carro vai mais rápido, o carro A ou o carro B? Essa questão associada a esse gráfico requer um raciocínio inferencial sobre a velocidade, que só pode ser deduzida firmada na relação entre as variáveis apresentadas graficamente.

Problemas envolvendo a *terceira variável* são mais complexos do que problemas que compreendem apenas duas variáveis porque, nesses últimos, os estudantes precisam apenas estabelecer ações de correspondência entre as variáveis, enquanto nos primeiros os estudantes precisam realizar o produto de medidas (VERGNAUD, 1983; NUNES; BRYANT, 1996; NUNES, 2004), o que requer o estabelecimento de relações entre variáveis. A compreensão de gráficos apresentando três variáveis, como é caso do gráfico da Figura 4, requer o raciocínio inferencial sobre a terceira variável e não apenas a análise das duas variáveis.

Problemas dessa natureza são classificados por Nunes e Bryant (1996) como problemas que requerem relações entre variáveis, pois incluem um terceiro fator ou quantidade intensiva.

Na prática da matemática escolar, o uso freqüente de gráficos com inclinação positiva pode contribuir para os estudantes realizarem inferências diretas, sendo baseadas somente nos aspectos visuais. No gráfico da Figura 4, por exemplo, os estudantes poderiam responder que o Carro A é o mais veloz porque ele está representado pela linha mais alta. Nessa perspectiva, o seu raciocínio não necessita estar focado no conceito de velocidade (relação entre espaço e tempo), mas na associação visual da linha mais alta com aquela que tem a maior quantidade dos valores da variável. Nesse caso, em vez de estabelecer uma integração entre os aspectos conceituais e visuais, o aluno procede somente pelo processo visual.

A Figura 5 mostra o mesmo tema do gráfico da Figura 4, entretanto, desta feita, os eixos são invertidos. No gráfico da Figura 5, há troca nos rótulos dos eixos: no eixo x é Distância em quilômetros e no eixo y Tempo em horas. Esta inversão resulta numa mudança do significado das linhas. Nesse caso, a linha mais inclinada representa o carro que está indo mais devagar.

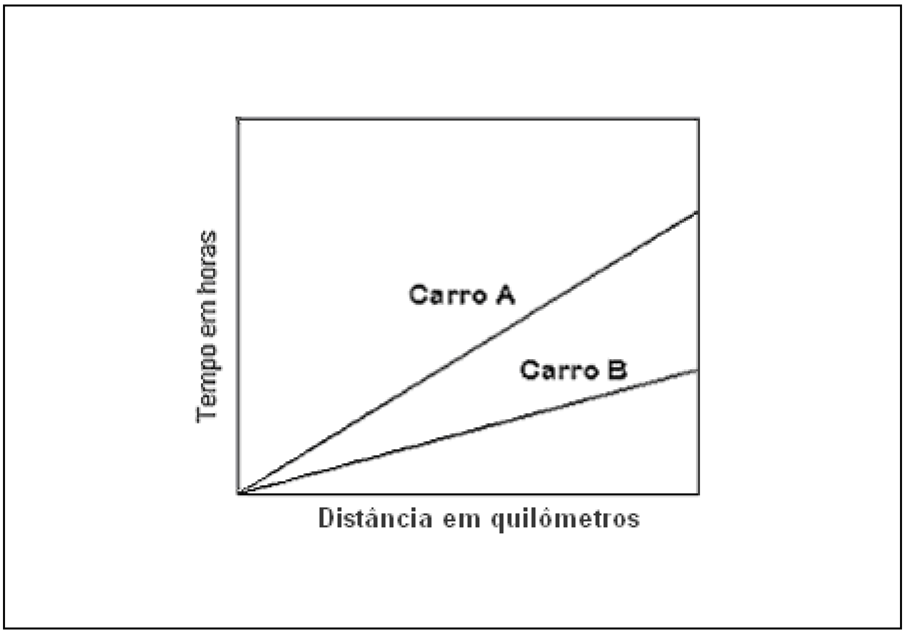


Figura 5 – Gráfico de linhas com inclinação positiva e eixos invertidos.

A pergunta associada a velocidade requer uma análise dos alunos: qual carro vai mais rápido, o carro A ou o carro B? A questão associada a esse gráfico requer dos estudantes uma inferência inversa sobre a velocidade. Neste caso, quanto maior o tempo em horas para percorrer uma mesma distância, menos veloz é o carro. Para proceder a uma inferência inversa, os estudantes precisam ler e formular uma compreensão sobre a terceira variável e não apenas proceder à interpretação dos aspectos visuais da informação.

A utilização de gráficos com os eixos invertidos não é usual na literatura sobre gráficos. Pode-se mencionar apenas um gráfico utilizado por Kerslake (1981), no qual os alunos eram solicitados a descrever a aparência de uma pessoa cujas medidas da altura e cintura encontrava-se traçadas. Em vez de altura e cintura serem traçadas no eixo vertical (eixo y) e horizontal (eixo x), respectivamente, como seria esperado convencionalmente, os eixos foram invertidos. Os alunos apresentaram muita dificuldade em compreender como ficaria a aparência de uma pessoa cuja altura foi apresentada horizontalmente, fato esse aqui analisado apenas superficialmente.

Nas tarefas elaboradas para o Experimento 3, os aspectos diretos ou inversos dos gráficos com a inclinação positiva foram controlados com base na aparência dos gráficos, obtendo-se: um gráfico com as variáveis convencionalmente representadas nos eixos x e y e outro gráfico com as variáveis apresentadas na forma invertida. Em ambos os casos, era aplicada a mesma questão. Nos gráficos de inclinação negativa, os aspectos diretos ou inversos foram controlados com o suporte de questões diretas ou inversas. Todo esse controle foi realizado com base num mesmo conteúdo. Como resultado, para o mesmo conteúdo, foi obtido quatro gráficos: dois com inclinação positiva, um com questão direta e outro com aparência inversa; e dois com inclinação negativa, um com uma questão direta e outro com questão inversa.

A representação de informações sobre variáveis, seja em tabelas ou gráficos, toma forma distinta, dependendo da natureza das variáveis (contínuas ou discretas), do número de variáveis (duas, três ou mais) e do tipo de relação entre elas (correspondência ou relações entre variáveis). Na seção seguinte, serão apresentados alguns estudos que ilustram a relação entre o tipo de variável e a sua apresentação em casos isolados, tabelas e gráficos.

2.3 A apresentação das variáveis em casos isolados

Num estudo pioneiro sobre a compreensão de estudantes a respeito da idéia de combinação, Inhelder e Piaget (1958) estavam interessados em descobrir como os estudantes elaboram essa idéia com base no julgamento de uma relação proporcional hipotética entre as variáveis. Os problemas foram apresentados para 15 estudantes de 12 a 15 anos. Os autores usaram um aparato para analisar como os estudantes construíam a idéia de correlação entre *cor de olhos e de cabelos*. Este consistiu de um conjunto de cartões, cada um com uma face desenhada de acordo com essas quatro associações: olhos azuis e cabelo louro, olhos azuis e cabelo castanho, olhos castanhos e cabelo louro e olhos castanhos e cabelo castanho. Os estudantes precisavam elaborar essas quatro associações para estimar as relações entre os casos que confirmavam e os que não confirmavam a hipotética relação.

A idéia era que os estudantes organizassem uma tabela de dupla entrada com o auxílio dos cartões, conforme destacado na Figura 6.

	Olhos azuis	Olhos castanhos
Cabelo louro	**a**	**c**
Cabelo castanho	**b**	**d**

Figura 6 – Tabela de dupla-entrada ou *coeficientes de associação*.
Fonte: Baseada em Inhelder e Piaget (1958), p. 231.

Os casos *a* e *d* confirmam a hipótese de que existe uma relação entre olhos azuis e cabelo louro e olhos castanhos e cabelo castanho, enquanto os casos *b* e *c* representam os casos que não confirmam. Com base nessas quatro possibilidades, de acordo com Piaget, os sujeitos podem tentar estabelecer estratégias visuais entre as variáveis, usando relação "maior que" ou "menor que"; ou eles podem ir mais adiante e estimar a relação em termos numéricos, comparando os dois conjuntos de dados que confirmam e não confirmam a hipótese de que existe uma associação entre as variáveis (INHELDER; PIAGET, 1958, p. 232).

A organização e a compreensão dessas classes ou *links* não são fáceis, e os sujeitos freqüentemente iniciam procedendo a uma leitura vertical ou horizontal da tabela de dupla-entrada, sem considerar a associação diagonal dos casos que confirmam e não confirmam a hipotética relação. Segundo Piaget, se os sujeitos determinam numericamente a diferença *(a +*

d) - (b + c) e sua relação com o todo *(a + d) + (b + c)*, em vez de ficarem satisfeitos com as comparações baseadas nas estratégias visuais, então eles estão explicitamente usando a idéia de correspondência. Apenas os estudantes com idades entre 14 e 16 anos eram capazes de apresentar um raciocínio numérico.

Piaget trabalhou com a apresentação das variáveis do problema sob a forma de cartões, representando os casos isolados. Estes foram entregues aos sujeitos, misturados ou já classificados acompanhando a classificação dada em tabelas. Piaget observou que a segunda forma de apresentação parecia facilitar as formulações das "relações numéricas" pelos estudantes (INHELDER; PIAGET, 1958, p. 240).

Piaget faz importante distinção entre *relações não-numéricas* e *relações numéricas* na compreensão dos estudantes sobre uma hipotética relação entre variáveis. Embora ele tenha sinalizado a importância da forma tabular de apresentação da informação para o aluno passar de uma relação visual para uma relação numérica, ele não aprofundou esse ponto, pois o seu interesse estava voltado apenas para investigar os aspectos lógico-matemáticos da informação. Uma análise sobre gráficos encontra-se ausente dos experimentos de Piaget, em parte decorrente da pouca ênfase no período das suas pesquisas para os aspectos visuais da informação na construção de significados matemáticos. Considerando que os gráficos realçam tanto relações visuais como numéricas entre as variáveis, é importante verificar se os casos isolados poderiam facilitar a compreensão de gráficos pelos estudantes.

Watson e Moritz (2001) entrevistaram 90 estudantes com idades variando entre oito e 18 anos. O objetivo dos autores era examinar como casos isolados facilitariam os processos de representação, interpretação e predição das informações, com os estudantes trabalhando com elementos pictográficos. Watson e Moritz definem a idéia de pictográficos a partir das ações exibidas pelos estudantes durante o trabalho de resolução de problemas por meio da manipulação dos cartões, isto é, casos isolados. O problema envolvia informação sobre o número de livros que alguns estudantes fictícios haviam lido e era introduzida para os estudantes por meio de cartões que representavam os casos isolados (os estudantes e os livros). Os estudantes eram solicitados a responder a três questões sobre: representação (você pode usar os cartões para apresentar a informação?) interpretação (se alguém entrar nessa sala, o que essa pessoa poderia dizer olhando para a figura que você elaborou com os cartões?) e predições (suponha que Paulo acabou de chegar e não sabemos quantos livros ele leu. Olhando a figura elaborada, qual poderia ser a melhor estimativa ou predição de quantos livros ele poderia já ter lido?). No segundo momento da pesquisa, buscando estimular o conflito cognitivo, respostas de outros estudantes a essas questões eram apresentadas.

Os resultados evidenciaram que os estudantes ofereciam diferentes níveis de respostas às questões propostas. Os autores puderam caracterizar essas respostas em quatro estágios de desenvolvimento tomando como base as ações dos estudantes para representar, interpretar ou predizer informações por meio de elementos pictográficos: 1. Empilhamento das informações onde cartões de uma mesma informação eram arranjados em pilhas (nível icônico ou IK); 2. Dispersão das informações em que os cartões eram espalhados em direção única (nível uni-estrutural ou U); 3. Organização dos dados em uma única coluna ou em uma única linha (nível multi-estrutural ou M) ou 4. Criavam um pictográfico (nível relacional ou R).

No estudo de Watson e Moritz (2001), as elaborações dos estudantes com os casos isolados se configuram no ponto de partida para o desenvolvimento de raciocínios mais complexos como a análise de relações entre variáveis. Os casos isolados, como unidade básica da informação, contribuíram para diferentes tipos de raciocínios pelos estudantes, desde os mais concretos até raciocínios mais abstratos.

Cabe, no entanto, uma consideração sobre esses resultados: os estudantes desenvolveram realmente uma representação mental da idéia de relações entre variáveis ou eles apenas apresentaram noções sob a forma de *Teoremas-em-ação* (VERGNAUD, 1998)? Teoremas-em-ação são noções intuitivas que emergem da prática, fundamentados no conhecimento prévio dos estudantes, mas que não se encontram ainda formalizados do ponto de vista da Matemática acadêmica. É importante analisar em que medida os casos isolados contribuem realmente para o desenvolvimento de formalizações matemáticas mais abstratas que pertencem ao campo das estruturas conceituais do pensamento.

Selva, Falcão e Nunes (2005) testaram a importância didática da combinação de casos isolados e gráficos de barras em 39 crianças com idades entre seis e oito anos sobre a compreensão de conceitos aditivos. Os casos isolados foram representados por material manipulativo, como é o caso do Lego e cartões com figuras. As crianças foram distribuídas em três grupos: Experimental 1 (intervenções didáticas usando casos isolados e gráficos de barras); Experimental 2 (intervenções didáticas com gráficos) e Experimental 3, representado pelo grupo de controle (intervenções didáticas com algoritmos).

As crianças dos três grupos resolveram os mesmos testes imediatamente antes e depois das intervenções; o mesmo teste também foi realizado pelas crianças oito semanas depois das intervenções didáticas. Em todas as intervenções didáticas, as crianças trabalharam em pares.

As crianças dos dois grupos experimentais apresentaram um desempenho significativamente melhor do que aquelas do grupo-controle. Os grupos experimentais 1 e 2, no entanto, não diferiram quando a desempenho das crianças foi comparada no pós-teste. No teste realizado oito semanas depois das intervenções, uma diferença significativa foi encontrada entre o grupo experimental 1 e o grupo-controle. As crianças que receberam a intervenção didática com o suporte da combinação dos casos isolados e gráficos apresentaram melhor desempenho do que os outros dois grupos.

Os autores concluem que os casos isolados podem constituir em precursores na compreensão de gráficos de barras. Além disso, quando combinados com esses gráficos, configuram importante meio auxiliar na aprendizagem de conceitos aditivos por crianças na faixa etária de seis e oito anos. Os autores deixam ainda em aberto qual a contribuição dos casos isolados para a construção do conhecimento matemático pelos estudantes.

O uso de casos isolados enfatiza conexões diretas entre os signos e as unidades às quais eles se referem, configurando-se estas, portanto, em representações análogas da informação (NUNES, 2004). Os gráficos e tabelas pertencem à classe das representações simbólicas por fazerem referências às relações entre variáveis (NUNES, 2004). Nunes utiliza as unidades matemáticas da informação como critério de classificação das ferramentas de representação matemática em análogas ou simbólicas. Essa forma de classificação é adotada nesta tese para organizar os aspectos matemáticos das informações e suas representações. Essa classificação encontra-se descrita em detalhes no Capítulo 3.

2.4 A apresentação das variáveis por meio de tabelas

Vergnaud (1997) baseava-se nas suposições de Piaget por considerar que a compreensão conceitual na Matemática encontra-se firmemente vinculada às estruturas lógicas do pensamento, ou invariantes, as quais se expressam nas ações das pessoas. Ele estende essas idéias na medida em que considera que o tipo de situação, que dá significado aos problemas, e o tipo de representação usada para apresentar as informações do problema, também precisam ser considerados nas ações que as pessoas empreendem para compreender os conceitos matemáticos. Essas diferentes dimensões da aquisição conceitual – invariantes situações e representações – podem ser analisadas com base nas ações que as pessoas estabelecem na resolução de problemas matemáticos.

Vergnaud (1983) estende a idéia de organização tabular sugerida por Piaget para apresentar as particularidades das situações que caracterizam os problemas multiplicativos. O uso de tabelas para representar dados e solucionar problemas é recomendado pelo autor por ser essa uma forma de representação na qual as diferentes dimensões numéricas dos problemas podem ser identificadas por meio de linhas e colunas.

O autor reporta-se brevemente a uma experiência didática vivenciada com alunos de nono ano, na qual eles eram solicitados, dentre outras questões, a elaborar uma tabela a partir de uma situação apresentada por escrito. Uma situação típica usada no experimento foi a *da fazenda*:

> Uma fazenda tem uma área de 254.5 hectares. Metade da área é destinada ao cultivo de trigo. A produção média da fazenda é de 6800 kg de trigo por hectare. Uma pessoa precisa de 1.2 kg de grãos para fazer 1 kg de farinha; 1.5 kg de farinha são necessários para fazer 4 pães. Um pão é o consumo médio de duas pessoas por dia. (VERGNAUD, 1983, p. 138, tradução nossa).

Este problema era apresentado aos alunos e eles eram solicitados a resolver diferentes tarefas, tais como *formule e discuta uma variedade de questões a partir da situação proposta* e *faça uma tabela para representar os dados e as questões relevantes, organizando-os espacialmente*. Era esperado que os estudantes formulassem questões do tipo: Qual é a produção da fazenda? Qual a quantidade de trigo necessária para produzir um pão? Quantas pessoas podem se alimentar durante um dia com a produção da fazenda? Quanto trigo é necessário para alimentar 100.000 pessoas durante uma semana? Era também esperado que os estudantes produzissem uma tabela simples de correspondência e uma tabela de dupla proporção.

Os resultados indicaram que os estudantes formularam muitas questões incompletas e, ainda, a equivalência de duas diferentes formulações não era facilmente percebida. No concernente à produção das tabelas, o uso de linhas e colunas diferentes para representar as diversas dimensões do problema não consistiu em descoberta fácil para os estudantes. Uma vez em uso, no entanto, a organização espacial dos dados ajudou a clarificar relações relevantes entre as diferentes dimensões do problema. A proporção simples e a proporção múltipla também foram mais discriminadas mediante o uso de tabelas.

Usando a classificação proposta por Vergnaud para os problemas do tipo multiplicativo, Sellke, Behr e Voelker (1991) realizaram uma intervenção didática com duplo objetivo: testar uma estratégia usando tabelas de correspondência simples como representação para problemas multiplicativos apresentados por escrito, e analisar em que medida a estratégia tabular suplantaria a influência de modelos intuitivos e as restrições numéricas associadas a eles.

A subtração repetida usada na divisão é considerada pelos autores como um modelo intuitivo limitado para a solução de problemas multiplicativos, uma vez que este só pode ser usado para problemas em que o divisor é menor do que o dividendo. Os autores suscitam a hipótese de que, ao representar os dados de problemas multiplicativos num formato de tabelas, as crianças poderiam perceber mais facilmente as relações multiplicativas entre as quantidades, usando-as para determinar e escrever a sentença correta ou a equação.

Estudantes do oitavo ano participaram do estudo. Um total de 107 estudantes foi distribuído em dois grupos, um experimental, com 65 estudantes, e o outro controle, com 42 estudantes. O grupo experimental foi ensinado a representar os dados dos problemas apresentados verbalmente por meio de uma tabela e a usar o raciocínio funcional para solucioná-los.

A estratégia tabular destinada ao grupo experimental foi estruturada para prover uma forma intermediária da representação verbal de um problema multiplicativo e sua representação simbólica como sentença aritmética. Foi hipotetizado que a representação tabular dos dados poderia facilitar a prontidão dos estudantes para perceberem as relações multiplicativas entre as quantidades do problema, e o uso dessas relações para determinar e escrever corretamente a sentença ou a equação aritmética correspondente.

O grupo-controle, por sua vez, foi ensinado a usar uma estratégia de substituição, comumente utilizada na escola, na qual os estudantes aprendem primeiro a reconhecer a estrutura sintática e semântica do problema que melhor se harmonize aos modelos intuitivos que eles trazem para a aprendizagem dos conceitos multiplicativos. Na estratégia de substituição, primeiro, os estudantes inventavam e resolviam problemas com números simples e que se adequassem ao seu modelo intuitivo; em seguida, eles aprendiam a substituir esses números inteiros simples para números mais complexos, escrever e resolver a sentença aritmética correspondente, substituir novamente os números originais na sentença e resolver a sentença.

Um teste padronizado para medir a habilidade dos estudantes sobre conceitos matemáticos e as suas aplicações foi administrado no início do estudo; os resultados não evidenciaram diferenças significativas entre os grupos.

Um teste intermediário consistindo de 12 problemas escritos envolvendo os contextos de custo, velocidade, consumo, produção e mistura, foi administrado aos dois grupos. Todos os problemas tinham a forma: *a* para b, quantos para c? (*a per b, how many per c?*). Por exemplo, Uma fábrica de alimentos infantis produz 0.36 toneladas de sucos de maças em uma hora. Quanto suco a fábrica pode produzir em 42 horas?, Robson comprou 1.3 pés de fio elétrico por $1.00. Quanto fio ele poderia comprar com $0.65?.

Metade dos problemas (seis) do teste intermediário apresentava números que não violavam o modelo intuitivo que os alunos traziam para a escola; é o caso do problema da fábrica de alimentos infantis. A outra metade dos problemas violava as restrições dos modelos intuitivos. É o caso do problema da compra do fio elétrico. O pós-teste consistiu de 18 problemas escritos, nove de cada tipo.

O grupo experimental teve desempenho significantemente melhor nos dois testes e também nos dois tipos de problemas utilizados. A representação esquemática das quantidades em tabelas ajudou os estudantes do grupo experimental a considerarem as relações matemáticas entre as duas quantidades. Os autores concluem que a apresentação dos problemas em forma de tabelas, constitui-se em representações naturais para os problemas multiplicativos estudados.

O estudo citado focaliza o uso de tabelas para guiar os estudantes na compreensão de funções matemáticas, sendo, portanto, um meio auxiliar para o ensino e a aprendizagem desse conceito. Embora as concepções intuitivas tenham se configurado em obstáculos à compreensão matemática, o uso de tabelas nesse estudo ajudou os estudantes a contornarem as limitações na resolução de problemas que normalmente resultam dessas concepções intuitivas. Um problema apresentado pelos autores é que eles consideram as tabelas como um meio natural de representação dos problemas multiplicativos. Tabelas, no entanto, são convenções usadas para apresentar dados e requerem um processo de aprendizado sobre essas convenções.

Brizuela e Lara-Roth (2002) também analisaram a possibilidade de se usar tabelas para auxiliar os alunos na resolução de problemas. Como parte de um experimento de ensino conduzido em escolas dos EUA, Brizuela e Lara-Roth exploraram a elaboração espontânea de tabelas por 39 crianças da segunda série. As autoras tinham duplo objetivo: conhecer o que as crianças consideravam relevante no arranjo de uma tabela e compreender o que as crianças conheciam sobre adição com base nos aspectos refletidos nas tabelas elaboradas. As crianças foram entrevistadas em pares e durante as entrevistas elas eram apresentadas a uma situação por escrito a qual fazia referência a uma relação aditiva. A situação descrevia a acumulação de dinheiro por três crianças (casos) em três dias distintos: no primeiro dia, elas tinham R$7, R$4 e nenhum dinheiro, respectivamente; no segundo dia cada uma recebeu R$2 da avó e no terceiro dia R$4. As crianças eram solicitadas a mostrar por meio de uma tabela o que havia acontecido do primeiro até o terceiro dia.

As respostas das crianças variaram desde representações muito peculiares (uma tabela desenhada com quatro pernas) até tabelas mais convencionais (com colunas e fileiras e com os nomes das variáveis). Metade da amostra das crianças entrevistadas acompanhou a seqüência temporal do problema nos seus desenhos das tabelas; a organização observada foi o uso de fileiras para representar cada criança e de colunas para a passagem do tempo. Os desenhos elaborados pelas crianças revelaram uma tendência de elas não prestarem muita atenção para os nomes das variáveis apresentadas no problema.

No que concerne às relações aditivas, as autoras observaram que a maioria das crianças concentrou as suas ações na quantidade total de dinheiro. Nesse sentido, quase todas as crianças entrevistadas apresentaram em suas tabelas a quantidade de dinheiro acumulado por dia em vez da quantidade de dinheiro recebido por dia.

Do ponto de vista das habilidades cognitivas básicas, portanto, crianças pequenas apresentam dificuldades em organizar espontaneamente as informações dadas em um problema em fileiras e em colunas, aproximando essas representações da forma tabular. Ao que parece, o uso de tabelas para representar os dados em vez de ser natural, como concluído por Sellke et al. (1991), é antes mediado pelo processo de ensino que ocorre em sala de aula.

2.5 A apresentação das variáveis por meio de gráficos

Nos gráficos, as variáveis estão nos dois eixos e a relação entre as variáveis está representada pela curva projetada. Como o gráfico é composto por um sistema de coordenadas, na leitura do gráfico, as pessoas precisam entender que um ponto ou uma linha compreendida nesse sistema é o resultado da projeção das duas linhas perpendiculares (eixos), as quais significam as duas variáveis do problema. Essa idéia de projeção é necessária para a leitura de pontos em gráficos e constitui noção básica para a pessoa entender a informação representada graficamente. É, pois, importante saber a partir de que idade as crianças são capazes de fazer essa projeção espacial.

Bryant e Somerville (1986) realizaram um estudo experimental com 60 crianças de seis a sete anos de idade para investigar se elas seriam capazes de fazer os julgamentos espaciais necessários para relacionar as duas linhas perpendiculares (eixos) em gráficos de linhas. Os gráficos eram apresentados às crianças em três condições experimentais: eixo-para-eixo, em que uma posição era dada num eixo (horizontal ou vertical) e as crianças eram solicitadas a encontrar a posição correspondente no outro eixo, extrapolando a linha da função; dado um valor nos eixos horizontal ou vertical, a criança precisava estimar ou extrapolar um ponto na linha da função; dado um valor na linha da função, a criança tinha que marcar com um lápis a posição correspondente nos eixos horizontal ou vertical.

Em geral, as crianças mostraram razoável acuidade na realização das tarefas envolvendo as três condições experimentais. Os autores não encontraram evidências suficientes que dessem suporte à idéia de que a condição eixo-para-eixo causasse qualquer dificuldade para as crianças; elas foram particularmente hábeis neste tipo de condição. As análises também mostraram que não é mais difícil para crianças pequenas realizarem extrapolações da linha para o eixo (*line-to-axis extrapolation*) do que do eixo para as linhas (*axis-to-line extrapolation*). Os autores concluíram que crianças nessa faixa etária já possuem as habilidades espaciais necessárias para estabelecer os julgamentos requeridos na leitura de gráficos.

Outros estudos, porém, focalizam a existência de uma grande lacuna entre as habilidades espaciais necessárias para estudantes da faixa etária de 11 a 14 anos procederem à leitura de pontos no gráfico e as habilidades requeridas para eles interpretarem as relações entre as variáveis.

2.5.1 Dificuldades dos estudantes na interpretação de gráficos

Janvier (1978) foi um dos pioneiros na análise das dificuldades que estudantes da faixa etária de 11 a 14 anos apresentam quando solicitados a interpretar gráficos. Janvier realizou uma intervenção didática usando a entrevista qualitativa como método. Foram analisadas as produções verbais de 20 estudantes sobre os fenômenos representados graficamente. Os estudantes eram solicitados a responder questões locais, que se referiam às interpretações pontuais das informações retratadas ou questões globais, que se referiam a uma análise das relações entre as variáveis em termos conceituais, como é o caso da análise de tendências.

Os estudantes apresentaram melhor desempenho na interpretação dos fatores locais dos gráficos do que dos fatores globais. A idéia de crescimento (*growth*) e variação (*change*), necessários na análise de tendências, não se apresentava bem desenvolvida nas respostas dos estudantes. Eles revelavam dificuldades não apenas relacionadas com os aspectos sintáticos do gráfico, mas também com os aspectos semânticos das situações representadas. Por exemplo, os estudantes mostravam-se confusos quando eles tinham que fazer comparações entre as variáveis. Janvier faz alusão aos significados matemáticos que os estudantes precisam formular quando solicitados a interpretar gráficos. A interpretação simbólica de gráficos requer uma análise conceitual focada no tipo de relações estabelecidas entre as variáveis.

Kerslake (1981) realizou um estudo clássico sobre a interpretação de gráficos, analisando a habilidade de estudantes de 13 a 15 anos para o trabalho com gráficos. O estudo foi parte de um projeto mais amplo que acessou a compreensão de conceitos matemáticos e científicos pelos estudantes (Concepts in Secondary Mathematics e Science - CSMS) e contou com a participação de 1.798 escolares. As questões gráficas incluíram idéias sobre coordenadas, eixos e escala coeficiente de proporcionalidade, gradiente, continuidade e o uso de álgebra e equações.

O desempenho dos estudantes foi verificado em três níveis de habilidades requeridas para solucionar os problemas. O primeiro requereu que os estudantes traçassem um ponto no gráfico, interpretassem gráficos de blocos e diagramas (*scatter gram*) e reconhecessem que uma linha reta representava um coeficiente constante de proporcionalidade. O segundo nível incluiu a simples interpolação, o reconhecimento da conexão entre o coeficiente de crescimento e de gradientes, o uso de escalas e a interpretação de gráficos de jornadas. Finalmente, o terceiro nível incluiu itens que requeriam dos estudantes que eles interpretassem globalmente a informação, relacionando as variáveis do problema e compreendendo a relação entre um gráfico e a sua representação algébrica.

Os estudantes tiveram muita facilidade nos itens do primeiro nível, acertando entre 78,5 a 97,6% das questões, enquanto que a facilidade no segundo nível situou-se entre 58,2 a 70,9%. Apenas 12,8 a 26,5% dos estudantes acertaram as questões envolvendo o terceiro nível. Os estudantes possuíam habilidades para responder corretamente os itens que requeriam um baixo nível de complexidade (ex. marcar um ponto no gráfico). Os resultados, no entanto, também revelaram grande lacuna entre a simples leitura de informações gráficas e a compreensão de relações entre variáveis.

Os resultados desses estudos sugerem que as dificuldades dos estudantes para desenvolverem o raciocínio matemático requerido para a interpretação de gráficos talvez se encontre na dependência do processo de ensino, sendo esse aspecto focalizado em seguida.

2.5.2 O papel do ensino no desenvolvimento do raciocínio requerido para a interpretação de gráficos

Bell, Brekke e Swan (1987) realizaram estudo de intervenção que envolveu pré e pós-testes, como parte do projeto *A Linguagem de Funções e Gráficos* desenvolvido pelo Shell Centre. O experimento avaliava a eficácia do material e dos métodos desenvolvidos no projeto como suporte para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem de funções e gráficos. Nessa intervenção, os autores estavam interessados, dentre outros aspectos, em analisar em que medida o suporte material poderia ajudar os estudantes a superarem as suas concepções erradas (*misconceptions*) no processo de interpretação de gráficos.

Os estudantes eram solicitados a dizer o que era um gráfico, a identificar coordenada em gráficos de linhas, a interpretar diagramas (*scatter graph*), gráficos de velocidade e pontos nos gráficos, além de esboçar gráficos (*sketching*). Um total de 48 estudantes de escolas inglesas participou do experimento. As questões mais difíceis foram aquelas em que os estudantes eram solicitados a dizer o que era um gráfico e a interpretar o significado de gráficos de linhas.

Bell et al. (1987) observaram que as questões consideradas mais difíceis não foram exploradas pelos professores durante as intervenções didáticas e esse fator poderia explicar o nível de dificuldade dos estudantes. Questões que requeriam maior acuidade para serem interpretadas e uma atenção para os valores eram mais suscetíveis de serem transferidas por meio do ensino. Esses autores estabelecem, portanto, uma relação bem próxima e recíproca entre os processos de ensino e as concepções específicas dos estudantes na interpretação de gráficos.

Curcio (1987) identifica um aspecto desenvolvimental na compreensão de gráficos por estudantes. O autor examinou esse aspecto com base nas dificuldades que estudantes apresentam para compreender relações matemáticas do tipo *maior que*, *duas vezes maior que* e tendências apresentadas graficamente.

Dois tipos de medidas foram utilizados no estudo de Curcio: teste gráfico e questões de múltipla escolha. As questões de múltipla escolha requeriam dos estudantes uma leitura pontual do gráfico, uma comparação entre os dados e uma leitura além dos dados (extrapolação). Os participantes foram estudantes de quatro escolas inglesas, 204 estudantes do quinto ano e 185 do oitavo ano. Os do oitavo ano apresentaram melhor desempenho do que os do quinto ano. As questões pontuais foram mais facilmente resolvidas do que as de comparação e de extrapolação, confirmando os resultados dos estudos prévios na área.

Examinando a desempenho de estudantes de 11 a 13 anos de idade no tocante às suas habilidades para lidar com variáveis representadas por gráficos, Swatton e Taylor (1994) oferecem uma descrição dos aspectos "desenvolvimentais" associando-os especificamente com os fatores concretos e abstratos que podem ser incorporados num gráfico. Swatton e Taylor utilizaram gráficos de linhas e de barras, e questões que incluíam diferentes demandas (ex. número, pontos, variação, interpolação, extrapolação e descrição de gradientes e relações entre variáveis).

Com base no desempenho dos estudantes, Swatton e Taylor classificaram essas demandas como concretas (ex. leitura de um número ou localizar um ponto), semiconcretas (ex. localizar variações e tendências) e abstratas (ex. extrapolar e descrever as relações entre as variáveis). As questões concretas foram mais facilmente interpretadas do que as questões abstratas. Os autores concluem que é bastante difícil para os estudantes darem uma resposta verbal para uma simples questão que requeira que eles relacionem as variáveis apresentadas graficamente.

Kieran, Boileau e Garaçon (1996) descrevem um programa de ensino que foi conduzido com estudantes de 12 a 15 anos de idade com o objetivo de testar como eles adotavam uma abordagem funcional, isto é, uma abordagem baseada na relação entre as variáveis. Os autores usaram a planilha eletrônica (*spreadsheet*) como ferramenta didática por esta incluir o uso de múltiplas representações, tais como problemas escritos, tabelas, gráficos e equações, constituindo-se numa forma dinâmica de trabalhar a idéia de relações entre variáveis. No programa, os estudantes sempre iniciavam as atividades resolvendo um problema escrito, como é o caso do problema apresentado em seguida:

> Quando termina as atividades na escola, Karen trabalha vendendo assinaturas de revistas. Ela recebe $20 de salário base por semana e mais $4 por cada assinatura vendida. Quanto ela ganha numa semana? Quantas assinaturas ela tem que vender para ganhar no mínimo $50? (KIERAN; BOILEAU; GARAÇON, 1996, p. 258, tradução nossa).

Os autores descrevem a atividade de uma turma do sétimo ano. Depois de resolverem numericamente o problema descrito, os estudantes foram encorajados a organizar os dados em uma tabela de duas colunas e solicitados a nomear as variáveis. Enquanto trabalhavam, os estudantes aumentavam ou diminuíam o valor atribuído ao problema e verificavam o resultado. Os autores analisam essas estratégias dos estudantes como estratégias não contextuais, pois eram baseadas apenas em relações de ordem e nos padrões numéricos.

Os autores descrevem também a atividade de quatro estudantes de 15 anos que trabalharam em pares fixos durante quatro sessões na resolução do seguinte problema: *escreva um programa que calcule a área de um quadrado, baseado apenas no comprimento de um lado*. Os estudantes trabalharam com tabelas e gráficos. O trabalho com gráficos requereu que eles decidissem se o problema tinha mais do que uma solução. As entradas de dados no computador e os resultados obtidos (*input-outputs*) eram representados na janela aberta dos gráficos (*graphing window*) e também inscritos numa tabela de valores que podiam ser acessadas a qualquer instante pelos alunos. Quando usavam o gráfico, os estudantes não encontravam dificuldades para mudar o tamanho das escalas ou para decidir qual o valor apropriado para usar. A busca por múltiplas soluções para o problema foi uma estratégia mais eficiente quando os estudantes usavam os gráficos do que quando eles recorriam às tabelas de valores.

Nemirovsky (1996) distingue entre uma abordagem pontual e uma variacional na análise de relações entre variáveis. Uma abordagem pontual envolve a concepção de relações entre variáveis como um par de pontos ou a entrada e saída de dados do computador (*input-output*), enquanto que uma abordagem variacional descreve como uma quantidade varia, envolvendo uma concepção dinâmica da relação funcional entre as variáveis. Tomando como base essa distinção Nemirovsky argüi a noção que o programa de ensino proposto por Kieran et al. (1996) é determinado por uma abordagem pontual. Um indício é o fato de os estudantes abordarem pistas contextuais assim que eles iniciam os trabalhos com tabelas. Outro aspecto é o fato dos problemas permitirem apenas o uso de pontos discretos na representação gráfica em contraste com gráficos que apresentam continuidade. O uso de gráficos contínuos pode levar os estudantes a concepções erradas e ilusões perceptuais e, segundo Nemirovsky, esse aspecto pode ter motivado Kieran et al. a evitá-los no seu programa de pesquisa.

Um aspecto importante nos estudos reportados nesta seção é de que existe uma lacuna no tocante à compreensão dos fatores apresentados graficamente. Os fatores pontuais dos gráficos são mais facilmente interpretados e ainda mais fáceis de transmitir num processo de ensino. Os fatores globais e que requerem do estudante o estabelecimento de relações entre variáveis são mais difíceis de interpretar e de ensinar.

Nesses estudos o papel da aparência dos gráficos é enfatizado como fator básico nas interpretações que os estudantes precisam empreender. Uma análise mais detalhada da influência da aparência dos gráficos na interpretação dos estudantes é oferecida em seguida.

2.5.3 O efeito da aparência do gráfico

O uso freqüente de gráficos para apresentar informações é baseado no pressuposto de que eles podem cobrir uma gama de informação, *valendo por mil palavras* no dizer cotidiano. De acordo com Larkin e Simon (1987), os gráficos constituem meio eficiente de apresentar a informação porque eles tornam explícita a informação deixada implícita em textos escritos. Nessa perspectiva, esta preferência por gráficos no lugar de textos ocorre porque os aspectos visuais dos gráficos constituem representações figurativas das situações do mundo real que representam. As variáveis e as relações entre as variáveis do problema são retratadas visualmente pela projeção dos eixos e da forma gráfica, a qual indica, visualmente, o tipo de relação retratada.

As relações lineares proporcionais retratadas visualmente por meio de gráficos que apresentam variáveis contínuas, e que constitui em parte dos problemas desta tese, são consideradas em alguns estudos como isomórficas às relações ocorrentes no mundo real. Esta analogia configura o gráfico em um tipo de ajuda mnemônica para as pessoas estabelecerem o raciocínio relacional. A expressão *gráfico isomórfico* é utilizada na literatura para definir gráficos que fazem uso do sistema de coordenadas e retratam funções lineares proporcionais, sendo, ainda, gráficos que apresentam a mesma aparência. É, pois, importante analisar como o raciocínio matemático das pessoas é afetado pelos gráficos isomórficos.

Mevarech e Stern (1997) realizaram uma série de experimentos com crianças com uma média de idade de 12 anos e com estudantes universitários, visando a investigar como eles interpretavam gráficos isomórficos de linhas, usados para retratar duas inclinações positivas (*slopes*) com um ponto de intersecção entre elas. Os gráficos foram apresentados aos participantes em duas condições: contexto real (os eixos eram nomeados com as variáveis do problema) e contexto esparso (no lugar de serem nomeadas, as variáveis eram indicadas pelas letras x e y). Os resultados obtidos em dois experimentos realizados com cada grupo de participantes mostraram que as tarefas apresentadas em contexto esparso eram mais facilmente resolvidas e ativavam com maior freqüência o uso do conhecimento matemático pelos participantes do que as tarefas imbuídas do contexto real. Os experimentos evidenciaram que pequenas mudanças na aparência dos gráficos, como é o caso da nomeação ou não das variáveis, podem causar considerável diferença na forma como as pessoas raciocinam sobre os problemas. Os autores enfatizam a importância dos códigos na Matemática e concluem que o uso de situações em contextos da vida real pode obscurecer a construção de significados matemáticos, particularmente quando os estudantes são solicitados a interpretar funções lineares retratadas em gráficos isomórficos.

A aparência do gráfico, portanto, constitui fator importante na compreensão matemática das pessoas, no entanto, os gráficos não são usados apenas para representar externamente as propriedades isomórficas das funções lineares, mas também para apresentar a relação entre variáveis. O que acontece quando uma leitura análoga é levada para uma representação simbólica, como é o caso dos gráficos?

Esse fenômeno foi identificado por Janvier (1981), que realizou um estudo com 20 estudantes de 11 a 15 anos. Os estudantes eram solicitados a interpretar gráficos representando diferentes situações, como a *corrida de carros*. A situação foi representada por meio de um gráfico de linhas e os estudantes eram solicitados a dizer quantas curvas havia no circuito em que o carro viajava.

Janvier observou que os estudantes encontraram algumas dificuldades para estabelecer uma resposta simbólica para o problema. Embora o circuito apresentasse três curvas, 40% dos estudantes falharam ao dar as suas respostas; alguns responderam que o circuito tinha nove curvas, enquanto outros referiram que tinham seis ou oito. De acordo com Janvier, os estudantes confundiram o gráfico com o próprio circuito. No lugar de considerarem a informação global apresentada graficamente em termos simbólicos, isto é, as curvas retratadas em um formato triangular, os estudantes basearam as suas respostas em partes da informação.

É possível identificar na análise dada por Janvier elementos mostrando que os alunos realizaram uma leitura análoga do gráfico em vez de uma leitura simbólica. As variáveis do problema são velocidade e distância e cada curva no circuito significava uma desaceleração e uma aceleração do carro, acompanhada por uma variação no tempo. A aceleração, portanto, constitui a terceira variável do problema. O conceito de aceleração, no entanto, encontra-se implícito no gráfico; logo, os estudantes precisariam reconstruí-lo mediante inferências no momento de analisar as curvas. Os alunos que falharam contaram literalmente cada variação como uma curva no circuito.

2.5.4 Convenções e ambigüidades no uso de gráficos

Convencionalmente, o eixo vertical e o eixo horizontal dos gráficos representam respectivamente as variáveis dependentes e independentes do problema. Não existe, no entanto, uma razão para que essa convenção seja seguida, e nem é sempre que esse rigor é adotado quando os gráficos são usados para apresentar as variáveis de um problema.

Kerslake (1981), por exemplo, no teste que administrou para averiguar a habilidade de estudantes da faixa etária de 12 a 15 anos na interpretação de gráficos, usou um gráfico com os eixos representando as variáveis num caminho não convergente com a convenção mencionada. A Figura 7 apresenta os gráficos usados por Kerslake. A autora notou que os estudantes facilmente interpretavam o gráfico que convergia às convenções da apresentação das variáveis (Gráfico A), mas falhavam ao interpretar o gráfico que não convergia com essas convenções (Gráfico B).

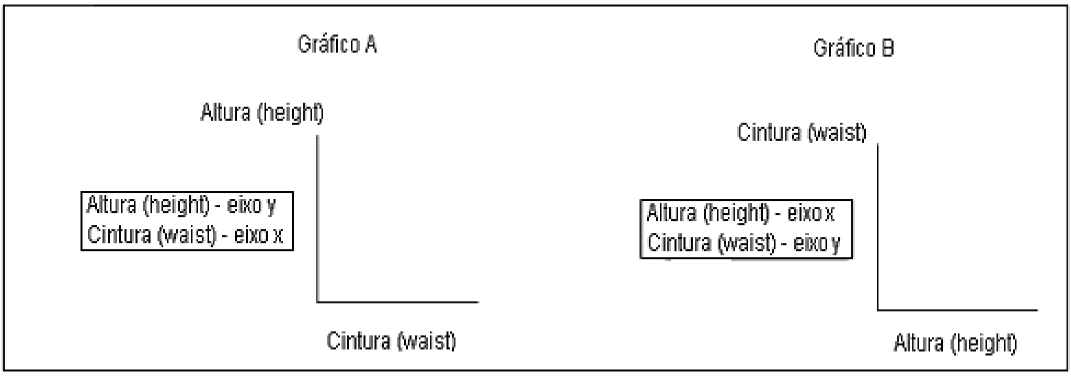


Figura 7 – Gráficos convergentes e não convergentes com as convenções matemáticas.
Fonte: Kerslake (1981), p. 127.

Kerslake sugere que os estudantes foram iludidos pela aparência do gráfico porque, em muitas representações gráficas convencionais, a altura (*height*) geralmente é medida no sentido vertical, se deslocando *para cima*, isto é, verticalmente. A essa hipótese somam-se outras que reforçam um ou outro aspecto do problema, as quais são apresentadas aqui.

Uma dessas hipóteses é proposta por Gattis (2002), que considera as dificuldades dos estudantes em compreender correspondências entre relações espaciais e abstratas por meio de gráficos, como resultantes de suas dificuldades em mapear relações de segunda-ordem representadas graficamente. Uma relação de primeira-ordem é estabelecida quando existe uma correspondência entre a estrutura espacial encontrada graficamente e o seu significado: alinhamento entre altura e quantidade (ex. mais – para cima); velocidade e quantidade (ex. mais rápido – mais inclinado). (Uma relação de segunda-ordem, em contraste, envolve uma correspondência entre a altura e o gradiente da linha).

Outra hipótese é sugerida por Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990), para quem a causa da dificuldade dos estudantes na interpretação de gráficos decorre do fato de eles darem mais importância para os aspectos relativos à escala gráfica do que realmente é requerido; como conseqüência, eles falham no propósito de compreender o significado das inclinações das linhas de um gráfico como a representação de uma medida entre proporções, passando a ver o gráfico como uma fotografia da realidade.

A última hipótese é oferecida por Stavy e Tiroshi (2000). Para esses autores, quando estudantes são solicitados a comparar duas quantidades representadas externamente, os seus julgamentos podem se basear no uso de regras intuitivas. Essas regras consistem de esquemas lógicos intuitivos que os estudantes já trazem para as situações de aprendizagem. Regras intuitivas são ativadas quando a pessoa precisa comparar dois sistemas iguais em relação a uma quantidade A, mas diferentes com relação a uma quantidade B. Nessas situações, é comum os estudantes argumentarem que *a mesma quantidade de A implica a mesma quantidade de B*. Os autores também notam que quando A1 = A2 e B1 ≠ B2 os estudantes freqüentemente argúem que B1 = B2. Este argumento dos estudantes constitui-se em instâncias específicas de outra regra intuitiva *a mesma quantidade de A implica a mesma quantidade de B*.

O uso de lógicas intuitivas, segundo Stavy e Tiroshi, não emerge envolvida em nenhum domínio específico do conhecimento; elas, ao contrário, podem ser ativadas por fatores externos da tarefa que os estudantes usam como âncora para o raciocínio. A sua ocorrência pode ser observada em diferentes situações e independe do conteúdo do problema; elas dependem do tipo de representação externa usada para apresentar a informação. Estes autores identificam a ocorrência do uso de regras intuitivas pelos estudantes em diferentes estudos que analisam na literatura, como o estudo sobre a relação entre comprimento e distância realizada por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960 apud STAVY; TIROSHI, 2000).

Piaget et al. (1960, apud STAVY; TIROSHI, 2000) solicitaram que crianças de quatro a cinco anos comparassem o comprimento de uma linha reta com uma linha ondulada. As linhas tinham diferentes comprimentos, mas iniciavam e terminavam em pontos paralelos da página. Piaget et al. observaram que 84% das crianças respondiam incorretamente que as linhas tinham o mesmo comprimento. Os autores interpretaram as falhas das crianças como uma dificuldade conceitual, referindo que as crianças ainda não haviam desenvolvido o conceito de comprimento porque nesta idade o comprimento de uma linha é estimado apenas em função dos pontos finais analisados visualmente sem uma consideração para a retilinearidade da situação. Stavy e Tirosh, no entanto, interpretam as respostas das crianças como um possível caso da ocorrência de regras intuitivas, pois, *para o mesmo A* (distância versus pontos finais), *mesmo B* (comprimento das linhas).

Uma explanação alternativa que considera o gráfico como um artefato, envolvendo tanto os seus aspectos representacionais como os conceituais, é considerada neste trabalho. Nessa explanação alternativa, é possível argüir a idéia de que os estudantes falharam ao interpretar o gráfico B da Figura 7 porque eles realizaram uma leitura análoga para uma representação simbólica. As variáveis altura e cintura (*height e waist*) são apresentadas no gráfico, no entanto, a questão proposta introduz a terceira variável, que é a *aparência* das pessoas. Para os estudantes compreenderem o sentido dessa variável no Gráfico B, eles precisariam realizar inferências inversas: para determinada altura, quanto mais larga a cintura, menos esbelta a pessoa, enquanto que, no Gráfico A, para determinada medida da cintura, quanto mais alta a pessoa, mais esbelta ela poderia ser. Sugere-se que as dificuldades dos estudantes em interpretar o Gráfico B podem ter origem nas dificuldades que eles têm em realizar inferências inversas sobre a terceira variável e a figura do gráfico.

Hipotetiza-se nessa tese que dificuldades similares podem ser encontradas quando os estudantes forem requeridos a fazer inferências na interpretação de gráficos de linhas. Stavy e Tiroshi sugerem que os estudantes tendem a pensar que *quanto maior A-maior B* consiste numa regra geral que pode ser aplicada em qualquer situação. Espera-se nesta pesquisa que os estudantes apliquem essas regras não apenas para estabelecer relações entre as variáveis, mas também para construir um significado para as linhas, estendendo esta regra para *quanto mais alta a linha no gráfico, maior a quantidade que ela representa*. No Experimento 2 que se descreverá no Capítulo 5, o uso dessa regra consistiu em fonte de erros nas inferências dos estudantes sobre a terceira variável. Quando solicitados a julgar a variação no tempo do peso argentino e do dólar australiano em relação ao valor da libra esterlina, alguns estudantes consideram, conforme destacado mais adiante no Capítulo 5, que o peso argentino tem mais valor porque *como a linha é mais longa ela provavelmente vale mais*.

Tendo em mente a proposição de *regras intuitivas* sugerida por Stavy e Tiroshi (2000), é possível predizer que problemas em que os estudantes são solicitados a interpretar gráficos de linhas cujos significados não conflitem com as suas regras intuitivas serão mais fáceis do que os problemas onde essas regras sejam violadas. Os problemas não conflitivos podem ser lidos e interpretados por meio de julgamentos visuais diretos, enquanto os problemas que conflitam com a regras intuitivas podem requerer uma interação dos aspectos visuais e conceituais. O *conhecimento procedural* (HIEBERT; LEVEBRE, 1986) requerido para a leitura de gráficos é importante para os estudantes compreenderem o uso das convenções, no entanto é justamente a interação de conhecimento conceitual com o raciocínio indexado pela inclinação das linhas que é requerido para uma competente compreensão de gráficos de linhas.

Nos experimentos propostos neste trabalho, os estudantes precisam relacionar as variáveis e formular um conceito que não está dado explicitamente no gráfico. A noção de *valor monetário* só pode ser devidamente compreendida se o estudante estabelece uma relação entre o valor de compra e de venda de uma moeda em relação a uma moeda de referência. Essa análise distingue interpretação de compreensão e revela a importância dos fatores conceituais do problema na construção de inferências. O tipo de informação possibilita a combinação de tipos diferentes de relações entre as variáveis com base no uso de questões específicas. Este ponto não tem sido investigado de forma sistemática nos estudos sobre gráficos.

Entende-se que o tipo de relação, direta ou inversa, se encontra associada com a lógica da informação e pode influenciar na construção dos significados pelos estudantes. Se a lógica da informação tem influência na compreensão de gráficos, então a familiaridade com o conteúdo talvez facilite a atividade interpretativa do aluno. Esse aspecto tem levado alguns autores a considerar a transparência do material externo a partir da familiaridade das pessoas com o conteúdo do problema representado.

2.6 Familiaridade com o conteúdo e transparência do material

Roth (2003) sugere que o nível de familiaridade com o fenômeno representado pode explicar as dificuldades na interpretação de gráficos. A não-distinção entre os signos e os significados dos signos (os referentes) é observada apenas quando pessoas experientes (*experts*) interpretam gráficos familiares para eles. Trabalhadores experientes no uso de gráficos, como é o caso de cientistas, interpretam os gráficos observando-os diretamente. Pode ser analisada em suas interpretações uma fusão entre os aspectos gráficos e os fenômenos representados. Logo, quanto mais familiar for o fenômeno representado, mais o gráfico será compreendido por meio de correspondência um-para-um; isto é, os aspectos gráficos são diretamente análogos às situações do mundo natural (ROTH, 2003, p.1).

Roth testou a sua hipótese num estudo em que cientistas eram solicitados, por meio de entrevistas qualitativas, a interpretar gráficos que lhes eram familiares. Neste estudo, assume-se que não existe nada nos gráficos que as pessoas possam inferir pois, os gráficos emergem, são parte e referem-se a situações práticas particulares. Desta forma, os gráficos tornam-se transparentes para quem os interpreta na medida em que a pessoa tem familiaridade com o conteúdo retratado.

Noss, Pozzi e Hoyles (1999) conduziram um estudo para investigar como o conhecimento estatístico (conceito de média e variação) é usado na prática da enfermagem e como a análise desse processo pode explicar a construção de significados matemáticos. Como parte de um projeto amplo de pesquisa, envolvendo observações etnográficas e uso de questionários e entrevistas, Noss et al. (1999) analisaram as interpretações de 28 enfermeiras com base num gráfico que apresentava as medidas da pressão sangüínea de um paciente durante um dia. O conteúdo do gráfico revelava uma atividade de rotina usada pelas enfermeiras no seu dia-a-dia e os pesquisadores esperavam que as enfermeiras trouxessem para a atividade interpretativa as suas experiências prévias com o conteúdo retratado graficamente. As enfermeiras não tiveram dificuldade em entender o significado de média quando estavam interpretando o gráfico. Elas usavam estratégias visuais, como é o caso de média significando um ponto médio, ou estratégias numéricas, como no caso em que isolavam os valores mais freqüentes. Essas estratégias eram peculiares às situações de uso desta informação na enfermaria quando as enfermeiras precisavam repassá-la para outra enfermeira ou para o médico.

A situação apresentada no gráfico era familiar às enfermeiras. Neste sentido, a interpretação de média no gráfico foi realizada de forma não ambígua. Do ponto de vista matemático, a média constitui medida de tendência central, no entanto, o significado de média para as enfermeiras era uma medida da estabilidade e normalidade com relação a um particular sinal vital.

As enfermeiras mostravam também uma tendência a usar uma narrativa pessoal para dizer o que o paciente deveria estar fazendo para gerar aquela pressão sanguínea e essa narrativa se sobrepunha ao que era apresentado no gráfico. Os autores analisam esses aspectos como evidências de que, para as enfermeiras, um gráfico da pressão sangüínea não é simplesmente um valor numérico, mas tem uma ligação com a história do paciente.

Noss et al. (1999) solicitaram que as enfermeiras interpretassem um gráfico apresentando um conjunto de dados relativos a uma pesquisa realizada entre 1984 e 1985 pelo British Health and Life Style Survey. Nessa pesquisa, os dados vitais de cerca de 7000 adultos foram medidos e registrados. Os autores esperavam que as enfermeiras considerassem explicitamente a relação entre idade e pressão sangüínea, que eram as duas variáveis do problema, no entanto, os julgamentos das enfermeiras foram influenciados apenas pela variação na pressão sangüínea, o que obscureceu a identificação das tendências. As enfermeiras, segundo Noss et al., parecem ter se guiado mais pelo que conheciam da informação sobre pressão sangüínea do que sobre os aspectos matemáticos da situação. Os autores indagam, portanto, até que ponto os gráficos estariam realmente sendo lidos ou usados como mediadores da informação pelas enfermeiras.

Em Noss, Bakker, Hoyles e Kent (2007) os autores estendem a análise do estudo realizado com as enfermeiras, e analisam o constructo de transparência sugerido em Roth (2003). Para tanto, Noss et al. (2007) analisam a prática de trabalho de uma pessoa com pouca escolarização e que trabalha na produção de folhas de plásticos. Dentre as atividades de rotina destes trabalhadores, consta, por exemplo, o trabalho de interpretação de gráficos visualmente complexos.

O objetivo dos trabalhadores ao olharem os gráficos é analisar o comportamento das máquinas no processo de produção. Os trabalhadores precisam estabelecer uma relação entre o conhecimento prévio sobre o funcionamento das máquinas e como esse aspecto pode ser visualizado graficamente; por exemplo, eles dizem que uma máquina está funcionando normalmente ou não com o suporte do comportamento exibido pelos gráficos.

Segundo Noss et al. (2007), a relação entre o conhecimento do conteúdo do gráfico e a leitura do gráfico não pode ser analisada do ponto de vista da transparência, pois a pessoa está indo além da informação dada graficamente e conferindo um significado para os aspectos gráficos com base no seu conhecimento sobre a informação tratada.

Embora as pessoas estabeleçam inferências firmadas nas suas práticas do cotidiano, estas inferências parecem não incluir uma análise dos gráficos como mediadores matemáticos da informação. Desta forma, o constructo de transparência adotado em Roth, segundo Noss et al., precisa ser mais bem analisado no que concerne ao papel do gráfico como ferramenta de representação matemática.

Uma análise das ferramentas de representação como importantes mediadoras do conhecimento matemático, estendendo a sua formulação à categoria de artefatos, é apresentada no Capítulo 3 que segue.

3 FERRAMENTAS DE REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA COMO ARTEFATOS

A investigação do efeito das diferentes ferramentas de representação no raciocínio dos estudantes remete para a análise de ações mediadas por artefatos. Tal constructo teórico é discutido no presente capítulo em três seções. A primeira apresenta uma discussão sobre a importância das representações para a Matemática. A segunda seção discute a noção de artefatos com base na análise das perspectivas de Vygotsky e Cole e da classificação proposta por Wartofsky. Em seguida, na terceira seção, tem-se uma análise da construção de significados nas práticas da Matemática, sendo focalizada uma reflexão sobre relações entre cognição matemática e práticas culturais. A quarta e última seção tece considerações sobre alguns efeitos da prática da Matemática no raciocínio sobre diferentes ferramentas de representação.

3.1. A importância das ferramentas de representação para o raciocínio matemático

Alguns estudiosos destacam a importância que assumem os sistemas de representação para a Matemática (DUVAL, 1992; 2006; VERGNAUD, 1983; 1987; 1991; 1997; 1998), divergindo os seus enfoques para a importância que esses sistemas possuem para a estruturação do conhecimento matemático.

Duval (1992) reconhece ser indispensável à atividade matemática o uso de representações; no entanto, adverte para a necessidade de se distinguir o objeto matemático dos seus diversos tipos de representações. Esse aspecto constitui ponto estratégico para a compreensão matemática, e, na concepção do autor, é o objeto matemático que importa e não as suas diferentes representações. Para Duval, um gráfico e uma fórmula algébrica são sistemas semióticos diferentes utilizados na Matemática para representar o mesmo objeto matemático, quais sejam funções matemáticas.

Para Duval, diferentes sistemas simbólicos evidenciam as mesmas propriedades matemáticas, a diferença entre eles são os registros de representação semióticas a serem visualizados. O recurso didático oferecido por esse estudioso para que os alunos identifiquem o mesmo conteúdo matemático nas diferentes representações é o processo de *conversão*.

Vergnaud (1997) defende uma idéia que contrasta com a perspectiva de Duval. Na sua perspectiva teórica, Vergnaud explica que a definição psicológica de um conceito em qualquer domínio do conhecimento não pode ser reduzida à sua definição científica; essa definição precisa englobar três aspectos fundamentais:

1 A diversidade de situações (*S*), em que os conceitos podem ser expressos, tanto aquelas situações que envolvem o conhecimento apropriado por um perito (*expert*) como aquelas apropriadas por uma criança ou adulto que possuem apenas uma competência do senso comum sobre aquele conhecimento;
2 Os invariantes (*I*), que são os objetos, propriedades e relações que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar diferentes situações-problemas; e
3 As representações (*R*), que constituem o conjunto de símbolos que podem ser usados para realçar aspectos do invariante e expressar formas de ação para lidar com eles.

Esses três aspectos constituem os esquemas para os significados matemáticos que devem ser atribuídos aos conceitos e juntos eles constituem o cerne da *Teoria dos Campos Conceituais*, de Vergnaud.

Do ponto de vista simbólico, Vergnaud (1987) exprime que os significados matemáticos produzidos pelas pessoas estão relacionados com as situações da realidade ou referentes (S) e com os objetos matemáticos e suas representações (*I* R). As ferramentas de representação na atividade simbólica estão inseridas na categoria de significantes, enquanto os aspectos matemáticos são os significados que as pessoas precisam construir.

Os significantes, segundo Vergnaud (1991), se constituem em relação aos significados produzidos pelas pessoas na elaboração do conhecimento matemático. Os significantes constituem apenas numa parte diretamente visível do *iceberg conceitual* (VERGNAUD, 1991), haja vista a sua sintaxe não poder ser considerada de forma isolada da semântica que a produziu.

As situações, para Vergnaud (1991), referem-se às tarefas cognitivas propostas para investigar um determinado campo conceitual, constituindo-se em referência para um dado conceito matemático. Esse autor, no entanto, destaca que o sentido de um conceito não se encerra nas situações em si e nem tampouco nas formas de representação utilizada. O sentido de um conceito envolve uma análise de *Teoremas-em-ação* e que tem relação com as situações e o conjunto de sistemas simbólicos diferentes utilizados para representá-lo.

A noção de *Teoremas-em-ação* constitui importante aspecto da estrutura conceitual de Vergnaud. Essa noção pode ser deduzida com base nas idéias de conceitos matemáticos como *ferramentas* e *objetos* que o autor discute no seu artigo publicado em 1997. Essa noção pode também ser deduzida com base na sua análise dos teoremas vinculados às inferências necessárias na construção do conhecimento matemático, conforme publicação posterior realizada em 1998.

A noção de conceitos como ferramenta ou objeto foi originalmente introduzida na literatura em Educação Matemática por Douady (1991, apud VERGNAUD, 1997). Vergnaud (1997) discute essa noção e a utiliza para destacar a idéia de que na Matemática os conceitos ordinariamente emergem como ferramentas.

> As primeiras propriedades conceituais que os estudantes elaboram são as mais simples. Repetido uso dessas ferramentas, familiaridade e consciência de sua importância para o raciocínio, transforma essas ferramentas em objetos, mesmo que eles possam ser abstratos. Por exemplo, os conceitos de função e variável são inicialmente usados como ferramentas em tarefas de proporção, e concebidos como objetos matemáticos na álgebra. (VERGNAUD, 1997, p. 27, tradução nossa).

Explorando as idéias de *Teoremas-em-ação* e *Conceitos-em-ação*, Vergnaud (1998) analisa com maior profundidade as primeiras propriedades conceituais que os estudantes elaboram sobre as situações matemáticas.

> Crianças pequenas têm um conhecimento intuitivo confiável sobre espaço, quantidades, relações de ordem e características. Este conhecimento é a raiz da iniciação para a formalização matemática. Mas intuição deve ser analisada. Essa análise deve ser feita em termos matemáticos, uma vez que não existe caminho para se reduzir o conhecimento matemático para qualquer outro arcabouço conceitual. (VERGNAUD, 1998, p. 167, tradução nossa).

Um Teorema-em-ação é uma proposição que pode ser considerada certa ou errada, enquanto um Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria que deve ser mantida pela sua relevância. (VERGNAUD, 1998, p. 168). Vergnaud ilustra essa distinção fundamentada nas estratégias de dois estudantes (A e B) na resolução de um problema sobre a velocidade de um trem, conforme apresentado na Figura 8.

Um trem está se deslocando (running) rapidamente com uma velocidade constante. Ele leva 16 minutos para ir de Axis para Berlof. A distância entre Axis e Berlof é 40 km. De Berlof para Cadillac, ele leva 36 minutos. Qual é a distância entre Berlof e Cadillac?	
Estudante A	Estudante B
40 * 2 = 80 80 + 10 = 90	40 : 16 = 2,5 36 * 2,5 = 90
Decompõe 36 minutos em 2 vezes 16 minutos mais 4 minutos, e 4 minutos é considerado como ¼ de 16 minutos. Como resultado, a distância é 2 vezes 40 km mais ¼ de 40 km.	Calcula o coeficiente constante entre as duas variáveis: distância e tempo seguido da multiplicação da outra duração pelo coeficiente.

Figura 8 – Ilustrações do uso de *Teoremas-em-ação* e *Conceitos-em-ação*.
Fonte: Vergnaud (1998), p. 168, tradução nossa.

O Estudante A realiza ações e operações sobre os números, enquanto o Estudante B realiza ações e operações sobre as relações entre as variáveis. O Estudante A formula inferências sobre a propriedade dos números. As inferências nesse caso são partes fundamentais na construção de proposições que os estudantes possuem como certas sobre os aspectos matemáticos dos problemas. Essas inferências fazem parte de uma lógica que o sujeito traz para a atividade de resolução de problemas e podem ser pensadas como *Teoremas-em-ação*.

> Teoremas-em-ação podem ser verdadeiros ou falsos. Essa é uma propriedade importante, uma vez que ela oferece a única possibilidade para tornar mais concreta a idéia de computação e representações passíveis de computação. Para uma teoria de representação ser útil, ela deve conter a idéia de que representações oferecem possibilidades para algumas inferências serem realizadas. (VERGNAUD, 1998, p. 173, tradução nossa).

Vergnaud destaca que "substanciação e simbolização têm um importante papel na transformação de ferramentas em objetos". (1997, p. 27).

Nunes (1997), analisando a importância dos sistemas de signos para a compreensão das relações matemáticas, classifica-os em duas categorias: representações extensivas (*extended representations*) ou representações compressadas (*compressed representations*), cujas classificações relevantes da informação matemática encontram-se implícitas. Essa abordagem de Nunes é baseada nas idéias de Luria e Vygotsky sobre a natureza mediada da mente humana. A principal característica dessa mediação é relacionada ao uso dos sistemas de signos como ferramentas para a resolução de problemas.

Representações extensivas apresentam cada elemento de um dado conjunto, mas as classificações encontram-se implícitas. Representações compressadas expressam as relações, mas apresentam apenas implicitamente as idéias básicas do problema. Numa análise posterior, Nunes (2004) substitui os termos representações extensivas pela expressão representações análogas e representações compressadas pela expressão representações simbólicas. Essa última nomeação é adotada nessa tese.

3.1.1 Representações análogas

Representações análogas podem ser figurativas, numéricas ou ainda se configurar por meio de palavras. Nunes (2004, p.92) descreve um experimento no qual solicita que crianças pequenas elaborem composições aditivas tomando como base as expressões “pague vinte-e-três reais” (*pay twenty-three pence*) e “pague sete reais” (*pay seven*). Essas expressões verbais propiciam diferentes oportunidades para a criança pensar a respeito da composição aditiva. A primeira expressão dá uma pista verbal para a escolha de *20 reais + 1 real + 1 real + 1 real* como agrupamento aditivo, enquanto não existe tal pista lingüística na segunda expressão; nesta expressão, a criança precisa estabelecer o agrupamento aditivo e considerar, por exemplo, *5 reais + 1 real +1 real*. Embora as duas expressões requeiram que os estudantes usem a composição aditiva, a forma de representação do problema por meio de palavras tem um efeito no raciocínio das crianças.

Nunes e colaboradores testaram estas expressões lingüísticas num estudo experimental e observaram que as crianças apresentavam melhor desempenho quando os itens dos problemas eram expressos com pistas. A razão para este melhor desempenho, de acordo com os autores, consiste na transparência da linguagem com respeito às partes envolvidas no problema. Na primeira expressão, as partes são dadas explicitamente, enquanto na segunda a criança precisa ter uma compreensão prévia das relações requeridas para estabelecer a composição aditiva dos números.

A primeira expressão envolve uma forma análoga de representação porque para cada representação escrita existe um valor numérico correspondente, o qual pode ser associado visualmente. Neste sentido, o signo e o significado do signo estão vinculados diretamente, sendo, portanto, análogos. Na segunda expressão, o signo e o significado estão relacionados apenas simbolicamente e a criança precisa compreender a composição aditiva dos números para poder encontrar a solução.

Visto dessa forma, na compreensão de composições aditivas, representações análogas são mais fáceis do que representações simbólicas e podem ser introduzidas como uma ajuda na compreensão de problemas aditivos por crianças pequenas.

3.1.2 Representações simbólicas

Nunes (1997) discute o papel das representações em matemática com base no conceito de ações mediadas. O conceito de ações mediadas consiste no diferenciador entre as funções psicológicas elementares e superiores. O pensamento matemático formulado com base em processos mediados tem como cerne a presença de representações. Nesse processo, conforme Nunes (1997, p. 3), "o pensamento de natureza mediada é concebido através de representações e não diretamente através de ações sobre os objetos ou situações". O conceito de ações mediadas envolve o uso de ferramentas culturais e um usuário que possa fazer sentido da ferramenta, utilizando-a na resolução de problemas.

Um aspecto básico nas representações simbólicas é que elas condensam as informações matemáticas básicas, tornando-as implícitas no problema. Além disso, as representações simbólicas requerem um aprendizado dos procedimentos básicos de leitura para que os aspectos simbólicos da informação sejam compreendidos de forma global. É o caso de gráficos e tabelas, que diferentemente dos casos individuais, são classificados por Nunes (2004) como representações simbólicas da informação. Estes constituem formas convencionais de representação que condensam as informações matemáticas básicas e tornam explícitas as representações das variáveis dos problemas, bem como do tipo de relação entre elas.

Nunes (2004) levanta a hipótese de que os aspectos simbólicos da informação representados por meio de gráficos ou tabelas configuram essas ferramentas de representação importantes recurso didáticos para ajudar na aprendizagem de conceitos multiplicativos. Esta sua hipótese encontra-se ainda em aberto, constituindo-se, portanto, em importante área para o desenvolvimento de pesquisas científicas. Este trabalho oferece uma contribuição à literatura nessa área, trazendo à tona os aspectos implícitos que podem configurar essas representações em ferramentas de mediação quando os estudantes precisam considerar problemas multiplicativos.

3.1.3 Influência dos aspectos explícitos, implícitos e conceituais

Em seu estudo pioneiro sobre gráficos, Janvier (1978) define a interpretação de gráficos como uma tradução para a forma verbal dos fatores representados graficamente. Num estudo posterior, Janvier (1987) oferece um modelo para compreensão e ensino dos sistemas de signos matemáticos baseando-se na idéia de processos de *tradução*. Por tradução, Janvier designa os "processos psicológicos envolvidos nas mudanças de uma representação para outra, por exemplo, de um gráfico para uma equação" (1987, p. 27). Para que um processo de tradução ocorra, faz-se necessária a existência de no mínimo duas formas de representação.

Perez-Echeverria, Pecharroman e Postigo (2005) realizaram um estudo para verificar, entre outros objetivos, como estudantes de Psicologia formulavam inferências sobre funções com duas variáveis. Ao todo 174 estudantes participaram do experimento. As tarefas envolveram três tipos de problemas: funções lineares congruentes e não congruentes e função inversa. Os problemas foram apresentados em texto escrito, gráficos ou fórmulas e os estudantes foram randomicamente distribuídos para trabalhar em cada tipo de problema e em cada tipo de representação, o que totalizou nove grupos experimentais.

Os estudantes foram solicitados a fazer traduções da forma de representação que eles haviam recebido para as outras duas; por exemplo, se eles fossem alocados para resolver problemas sobre funções lineares congruentes apresentadas graficamente, eles deveriam transformar a informação dada graficamente por meio de fórmulas e do texto escrito. Os estudantes também eram requeridos a responder seis questões envolvendo três tipos de inferências: duas questões sobre inferências explícitas (interpretar um ponto), duas questões sobre inferências implícitas (interpretar o tipo de relação entre as variáveis) e duas questões conceituais (interpretar o conteúdo da função dada).

Os resultados indicaram que as traduções das outras formas de representação para a forma gráfica foram as mais fáceis, enquanto aquelas envolvendo as fórmulas algébricas foram as mais difíceis. Quanto ao tipo de função, as funções lineares foram mais facilmente resolvidas do que as funções inversas. Considerando-se os tipos de inferências, aquelas baseadas nas informações explícitas foram significativamente mais fáceis do que as baseadas nas informações implícitas, e estas, por sua vez, foram mais fáceis do que as baseadas nas informações conceituais. As inferências explícitas e implícitas eram mais fáceis nos problemas sobre funções lineares do que naquelas acerca de funções inversas.

Os autores observaram que a qualidade das inferências era afetada pela quantidade de traduções que os estudantes realizavam. As inferências explícitas, implícitas ou conceituais foram melhores naqueles participantes que haviam feito as duas traduções. Eles concluem que existe relação entre o conhecimento conceitual medido por número e qualidade das respostas e o número de traduções que o estudante precisa realizar.

O estudo descrito remete para a existência de um nível de complexidade na compreensão das formas de representação e que está relacionada com o fato de a informação estar implícita ou explícita e com o número de traduções entre representações que precisam ser realizadas. O estudo não explora, porém, como as diferentes representações analisadas podem ser mais efetivas como veículos de mediação para entendimento conceitual da informação.

Nos gráficos, os aspectos conceituais da informação, quais sejam, as relações entre as variáveis, estão apresentados visualmente, enquanto nas tabelas, esses aspectos se encontram condensados sob a forma numérica. Em que medida os aspectos visuais do gráfico permite que as pessoas realizem inferências sobre fatores conceituais com maior facilidade do que os aspectos numéricos das tabelas?

Chua, Yates e Shah (2006) realizaram um estudo para investigar se a natureza especial dos gráficos, distinta de dados numéricos, poderia facilitar o entendimento de uma situação de risco em tarefas envolvendo a necessidade de a pessoa evitar o risco. As autoras solicitaram que 293 estudantes de Psicologia julgassem o preço de um produto considerado seguro (ex. um produto que diminuía o risco de uma pessoa contrair uma doença), depois que lhes era fornecido o preço de um produto-padrão. A informação foi apresentada em gráficos e tabelas e os estudantes foram alocados para resolver o problema por meio de uma forma ou de outra.

Os autores mostraram que os estudantes julgaram os preços dos produtos em função da sua importância para evitar o risco de a pessoa contrair a doença e também em função do preço do produto-padrão. Os participantes que trabalharam com os gráficos ficaram mais motivados a recomendar o produto seguro do que o produto-padrão, quando comparados aos participantes que trabalharam com os números. Os aspectos visuais do gráfico ampliaram o sentido de risco pelos participantes e eles observaram que opções envolvendo riscos são consideravelmente danosas, devendo, portanto, ser rejeitadas em favor de escolhas mais seguras.

Hardy, Schneider, Jonen, Stern e Moller (2005) conduziram um experimento em sala de aula para testar se o raciocínio com gráficos de linhas por estudantes de terceiras séries podia ser realçado por atividades com representações no currículo, com base na flutuação ou não dos objetos. Os autores hipotetizaram que representando a massa e o volume de objetos em braços opostos de uma balança de trave permitiria a consideração simultânea de ambas às dimensões para uma representação do conceito de densidade, e esta representação por sua vez seria muito útil para os estudantes formularem inferências com base na inclinação das linhas em gráficos de linhas. Um estudo de intervenção com o uso de entrevistas foi conduzido junto a 98 estudantes. Metade da turma na sala de aula investigada trabalhou com uma balança e a outra metade com representações espontâneas (*self-constructed representations*).

Depois de cinco meses, os estudantes eram solicitados a interpretar gráficos de linhas representando informação a respeito de dois contextos proporcionais – densidade e velocidade. Em ambos, a relação proporcional entre as variáveis mostrada nos eixos tinha que ser considerada. Quanto ao contexto de densidade, os estudantes que trabalharam com a balança apresentaram melhor desempenho do que aqueles que trabalharam com representações espontâneas na interpretação dos gráficos de linhas. Quanto ao conceito de velocidade, no entanto, os grupos não diferiram em suas habilidades para interpretar os gráficos de linhas.

Os autores concluíram que a leitura de gráficos de linhas ancorada na determinação das coordenadas é importante, mas é especialmente a integração de conhecimento conceitual com o raciocínio envolvido na comparação das inclinações das linhas (*slopes*) que é particularmente requerida na competente interpretação de gráficos.

No caso específico do conceito da velocidade, há um caso de produto de medidas, onde a terceira variável precisa ser inferida pelos estudantes, como discutido exaustivamente neste trabalho; no entanto, essa interação simbólica talvez seja mais efetiva quando os estudantes estiverem trabalhando com essas ferramentas sob determinadas condições, como em situações em que eles sejam encorajados a estabelecer interações entre aspectos visuais e conceituais, a exemplo das tarefas elaboradas nessa tese.

3.2 Ferramentas de representação como artefatos

Vygotsky e Luria (1994) distinguiram os processos psicológicos superiores dos processos psicológicos primitivos. Os processos psicológicos primitivos mobilizam a capacidade natural dos seres humanos, enquanto os processos psicológicos superiores vão além dos limites da capacidade humana natural, "adicionando à estrutura psicológica elementos da cultura que passam a ser usados como agentes ativos". (VIGOTSKY; LURIA, 1994, p. 143). O que caracteriza os processos psicológicos superiores é a integração de ferramentas no pensamento; a atividade humana, vista dessa forma, no lugar de ser direta, passa a ser mediada por ferramentas externas.

O grupo cultural fornece ao indivíduo um ambiente com elementos carregados de significados. Esses significados, no entanto, não se encontram disponíveis para uma apreensão direta, apresentam-se antes para cada indivíduo como um problema a resolver, requerendo a produção de atividades cognitivas (no sentido intelectual e prático) de sua parte e na participação em atividades significativas (LAVE; WENGER, 1991). Para que esse processo de produção se concretize e o indivíduo se constitua como sujeito (humano), é indispensável que haja uma apropriação das aquisições acumuladas historicamente. Marx (1978 apud LEONTIEV, 1981, p. 167, tradução nossa), a esse respeito escreveu:

> Só através da riqueza objetivamente desenvolvida pelo ser humano é que em parte se cultua e em parte se cria a riqueza da sensibilidade subjetiva do ser humano (que um ouvido se torna musical, que um olho percebe a beleza da forma) em suma, que os sentidos se tornam sentido e se afirmam como faculdades essenciais ao homem.

As ações dos indivíduos sobre o mundo, portanto, ocorrem com o suporte de elementos mediadores, tendo Vygotsky distinguido dentre eles os instrumentos e os signos. Os instrumentos possibilitam a ampliação da transformação da natureza pelo homem, sendo utilizados a partir de objetivos específicos, carregando consigo os fins sociais para os quais foram criados e o modo de utilização desenvolvido ao longo da história do trabalho coletivo. Os signos, por sua vez, são concebidos na perspectiva de Vygotsky (1993), como ferramentas para solucionar problemas situados ao nível psicológico como lembrar ou comparar. São instrumentos orientados para o próprio sujeito dirigindo-se para o controle das suas ações psicológicas.

Ao longo do desenvolvimento do indivíduo e por meio das práticas, os signos vão sendo apropriados e se transformam em sistemas simbólicos organizados. Nesse nível, o individuo passa a ser capaz de operar mentalmente sobre o mundo, supondo-se, portanto, a existência de uma representação mental. Nesse processo de apropriação, os objetos dispostos no mundo físico não são representados mentalmente como se encontram naquele plano, mas como conceitos, idéias ou imagens.

Os sistemas simbólicos, dessa maneira, passam a ser compartilhados pelos membros de uma sociedade, possibilitando a comunicação e a melhoria das interações sociais estabelecidas, constituindo-se a linguagem no sistema simbólico comum aos grupos culturais humanos.

A necessidade de comunicação impulsiona o desenvolvimento da linguagem e Vygotsky (1993) destaca que esta possui *dupla função*: a linguagem serve como instrumento de intercâmbio social, com vistas à comunicação e tem também a função de *ordenar o real*, agrupando todas as ocorrências de uma mesma classe de objetos, eventos ou situações sob uma mesma categoria conceitual, com vistas à *função de representação mental*.

O significado, na perspectiva de Vygotsky (1993), constitui componente essencial da palavra ao mesmo tempo em que se configura enquanto *ato de pensamento*. É no significado que as duas funções da linguagem se encontram, podendo-se dizer que o significado é um ato de pensamento.

Seguindo essa abordagem, Vygotsky (1994) argumenta que todas as ferramentas desenvolvidas pela humanidade constituem elementos da cultura e encontram-se direcionadas, no primeiro momento histórico do seu uso, para solucionar problemas emergentes das atividades dos indivíduos e grupos sociais. Em seguida, num processo histórico de mudança, essas ferramentas são internalizadas, passando a controlar o próprio processo mental do indivíduo, funcionando dessa forma como *mediadores das funções mentais superiores* (VYGOTSKY, 1994). Os signos, seguindo essa abordagem, configuram-se como *símbolos com significados não aleatórios* (VYGOTSKY, 1994), que se encontram envolvidos na história de uma cultura específica.

Usando a distinção de processos naturais e mediados conforme proposto por Vygotsky, Cole (2003) denomina os elementos constituintes de uma cultura como *artefatos* e considera que eles podem explicar a organização da atividade humana em diferentes cenários da vida diária. As atividades humanas vistas dessa forma constituem atividades mediadas por artefatos.

Um artefato "é um aspecto do mundo material que tem sido modificado desde a sua incorporação original nos objetivos dirigidos pela ação humana, e é ao mesmo tempo ideal (conceitual) e material". (COLE, 2003, p. 117). A forma ideal dos artefatos é constituída pelos participantes das diferentes práticas sociais, e a forma material faz referência aos símbolos externos que podem permitir diferentes co-ordenações de ações.

A idéia de artefato como algo simultaneamente ideal e material consiste na referência básica de Cole para explicar o *funcionamento da mente humana*. Os artefatos são ideais na medida em que eles são formatados nas interações das quais eles foram previamente uma parte e as quais eles medeiam no presente. Vistos dessa maneira, as propriedades e usos dos artefatos, aplicadas com igual intensidade se alguém os considera como linguagem ou como tabelas, é o que constitui a cultura material da humanidade. Neste sentido, o que diferencia a palavra *tabela* de uma tabela propriamente dita é a proeminência dos seus aspectos ideais e materiais e dos tipos de coordenações que as tabelas promovem para o raciocínio.

A idéia de Cole de artefatos expande a idéia de ferramentas proposta por Vygotsky e Luria (1994). Esses autores adotaram o uso de ferramentas referindo-se basicamente à linguagem, no entanto, o conceito de uma ferramenta é considerado por Cole como subcategoria da noção de artefatos. O sentido atribuído por Cole à idéia de artefatos envolve uma perspectiva antropológica, a qual considera o fenômeno da mediação como o ponto de partida para a compreensão dos aspectos culturais no funcionamento da mente humana (COLE, 2003); este sentido dado por Cole é adotado nesta tese. Em vez de situar a categoria de ferramentas como o ponto de partida para explicar os aspectos culturais da Psicologia, Cole a considera como subcategoria.

Os artefatos e as ações mediadas por artefatos são os pontos de partida para o desenvolvimento da necessidade de ferramentas conceituais. Estes dois pólos da atividade humana, artefatos e ações mediadas, não constituem categorias isoladas, mas inter-relacionadas mutuamente e com o mundo social dos seres humanos que eles medeiam, formando teias de sentido e de práticas de uso.

Faz-se necessária uma análise mais detalhada para examinar como a noção de artefatos, que comporta ao mesmo tempo os aspectos ideais e materiais, também comporta as ações humanas e os contextos culturais e históricos onde essas ações se concretizam. A classificação proposta por Wartofsky (1979) pode ser útil para esse propósito.

Wartofsky caracteriza a cognição humana como um processo mediado pela tradição cultural e histórica das representações. “A característica fundamental da cognição humana é a capacidade para fazer representações” (WARTOFSKY, 1979, p. xiii). Wartofsky elabora essa idéia, baseando-se na sua classificação dos artefatos em três dimensões: primária, secundária e terciária. Os artefatos primários são os materiais usados diretamente na produção, enquanto os artefatos secundários consistem nos modos de ação ou nas regras sociais utilizadas.

Artefatos secundários são centrais na preservação e transmissão de modos de ação quando as pessoas estão lidando com os artefatos primários. Objetos produzidos pelo homem (ex. computadores, mapas, gráficos) podem ser concebidos como artefatos primários enquanto a coordenação de ações que eles possibilitam constitui a segunda dimensão ou artefatos secundários (ex. digitar um texto ou ler um mapa ou gráfico). Artefatos terciários não são diretamente relacionados com a prática produtiva, mas eles medeiam mudanças nos modos de ações quando as pessoas estão agindo sobre os artefatos primários. Estes artefatos consistem do mundo imaginado que pode ser transferido além do imediato contexto de seu uso; isto é, a dimensão terciária dos artefatos representa os eventos como encontrados no mundo.

Os artefatos terciários podem ser vistos como mediadores ligando os processos individuais e culturais. As experiências prévias que as pessoas adquirem durante a prática escolar, assim como a sua memória e percepção de eventos, podem ser incluídas na idéia de artefatos terciários.

Visto dessa forma, pode-se conceber a compreensão de gráficos ou tabelas como algo ao mesmo tempo histórico, social e individual. As regras de ação requeridas para os estudantes compreenderem esses artefatos são parte da tradição histórica do currículo da Matemática, no entanto, o contexto escolar onde as atividades matemáticas se desenvolvem constitui mediador para a forma como os estudantes utilizarão esses artefatos (nível social) e também a atividade cognitiva do aluno (nível individual).

De acordo com Cole (2003), as fronteiras entre as tarefas que os estudantes realizam em sala de aula e os contextos onde as atividades se desenvolvem não são estáticas e diretas, mas ambíguas e dinâmicas. Entendido como *movimento conjunto*, a idéia de contexto não pode ser reduzida apenas como *aquilo que cerca*, mas como uma qualitativa relação entre (no mínimo) duas entidades: o sujeito e o objeto.

> Um ato em contexto, entendido a partir da metáfora de movimento conjunto requer uma interpretação relacional da mente. Neste sentido, objetos e contextos estruturam-se juntos como parte de um processo de desenvolvimento bio-sócio-cultural singular. (COLE, 2003, p. 137, tradução nossa).

Do ponto de vista psicológico, a conceituação dos casos individuais, tabelas ou gráficos como artefatos, adotados nesta tese, considera que essas ferramentas de representação, além de se caracterizarem como ferramentas matemáticas (análogas ou simbólicas), também se organizam em termos mais amplos, nas dimensões primária, secundária e terciária, conforme a classificação de Wartofsky.

A concepção de artefato adotada nesta tese, portanto, amplia a idéia de signo. A noção de signo fundamenta-se numa perspectiva estruturalista do conhecimento que situa o seu significado como algo estável e preexistente. Na perspectiva adotada aqui, o artefato e o seu significado são cultural e socialmente produzidos.

Silva (1999, p. 123), analisando a noção do significado numa perspectiva cultural, expressa que "um determinado significado é o que é não porque ele corresponde a um *objeto* que exista fora do campo da significação, mas porque ele foi socialmente assim definido".

Numa perspectiva cultural, todo tipo de conhecimento é concebido como objeto cultural. Nesse sentido, o conhecimento matemático produzido na escola pode ser observado no conhecimento transmitido em outras práticas onde a Matemática se faz presente. Este aspecto encontra-se explorado na seção que segue.

3.2.1 A construção de significados nas práticas da Matemática

Numa perspectiva cultural, todo tipo de conhecimento é concebido como produto de uma estruturação social, constituindo-se, portanto, objeto da cultura. É nesse sentido que o conhecimento matemático é concebido aqui. A expressão *práticas da Matemática*, no plural, é inscrita para destacar que o conhecimento matemático não é fruto de exercício puramente acadêmico, inscrita em regras formais; existem outras formas de uso da Matemática que devem ser reconhecidas.

Mesmo na prática da Matemática escolar, quando se encontram resolvendo problemas, os estudantes apresentam ações não apenas conceituais, no sentido da definição acadêmica ou científica dos conceitos, mas envolvem também esquemas intuitivos ou *Teoremas em ação* (VERGNAUD, 1998) sobre quantidades e formas.

Os aspectos matemáticos veiculados na escola podem ser reconhecidos em um gráfico de linhas apresentado em uma revista ou jornal para ilustrar uma matéria. Embora os invariantes sejam os mesmos, os significados produzidos na interpretação desses gráficos por leitores dessas revistas podem não ser os mesmos reforçados na escola. Os contextos de uso podem afetar os significados que serão elaborados pelas pessoas.

Num estudo prévio, Lima (1998) observou que é difícil formular significados com base em gráficos de linhas apresentados no contexto dos media impressos, mesmo por experientes *designers*. Nesse estudo, Lima utilizou o gráfico apresentado na Figura 9, o qual, do ponto de vista matemático, apresenta relação inversa. O gráfico foi selecionado de uma revista brasileira de grande tiragem e circulação nacional, onde era usado como parte de uma reportagem intitulada *o segredo do cigarro turbinado*. O texto da matéria discute sobre os componentes químicos adicionados ao cigarro e que vêm causando maior dependência entre os fumantes. O gráfico apresenta uma relação inversa entre o tempo e a porcentagem de pessoas que persistem na abstinência quanto ao uso do álcool, cigarro ou heroína, podendo-se inferir que se cerca de 34% das pessoas decidiram parar de beber por um período de 12 meses, 66% voltaram a usar o álcool.

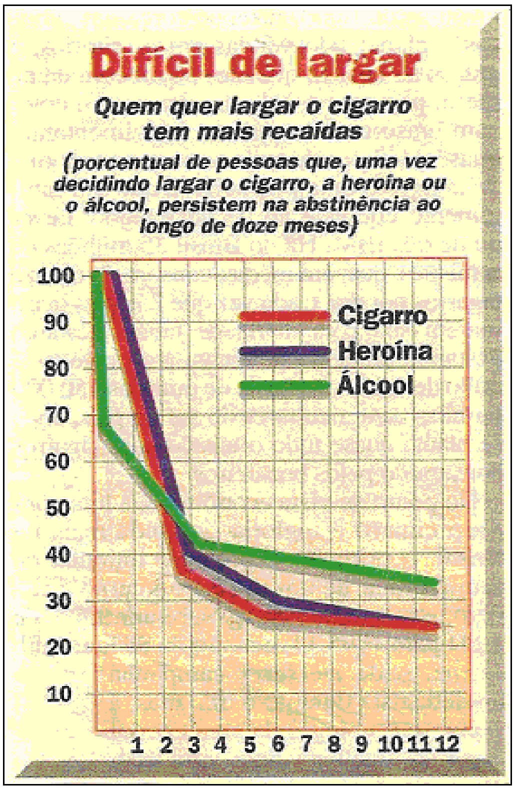


Figura 9 – Gráfico de linhas usado no contexto dos media impressos.
Fonte: VEJA (29/5/1996).

Os dados apresentados no gráfico da Figura 9 resultam de uma pesquisa conduzida pelo Instituto Nacional do Câncer, órgão vinculado ao Governo brasileiro. A interpretação desse gráfico ensejou algumas dificuldades entre os participantes. A maior dificuldade consistiu na formulação de significados para a inclinação das linhas que neste caso representam uma inclinação negativa. Embora as linhas tenham sido coloridas e nomeadas para salientar os dados que representam – cigarro (linha vermelha), heroína (linha azul) e álcool (linha verde) – o seu significado é ambíguo.

Na abordagem inicial a esse gráfico, um *designer* experiente fez alguns comentários sobre as dificuldades de leitura, chegando inclusive a propor um novo desenho no qual transformava a inclinação negativa em positiva. Abordagens dessa natureza foram acompanhadas de um elevado nível de engajamento dos participantes, incluindo ações de transformações da relação inversa para uma direta, conforme pode ser visto no episódio destacado na Figura 10 apresentada em seguida.

Pesquisadora - Bom você coloca da dificuldade de leitura desse gráfico. Nesse sentido, de que outra forma esses dados poderiam ser apresentados graficamente para poderem ficar mais claros?
Designer - Olhe, eu gosto muito... eu prefiro, eu acho que tem uma forma que você trabalha assim com gráfico para essa situação [representação no papel] Bom, vamos ver se eu consigo chegar a alguma coisa ... se a gente fizesse essa escala diferente aqui ficaria os 100 ... Eu acho que assim tá muito melhor a leitura. No primeiro mês 80% né, até quase 70% vai ... Eu acho que assim tá muito mais compreensível você ter uma informação desse tipo porque você tá muito mais habituado a conviver, porque tem aquela coisa da percepção e aí você vai fazer um enquadre, um modelo. Eu acho esse gráfico problemático e um pouquinho pobre também por falta de informação.

[Representação no papel]

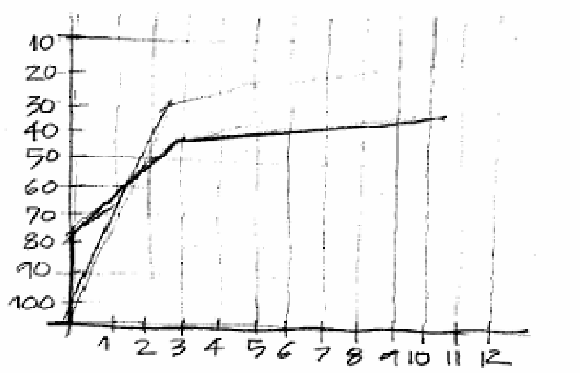


Figura 10 – Ilustração da dificuldade de leitura do gráfico de linhas usado no contexto dos media impressos.
Fonte: Lima (1998), p. 95.

O fato de o gráfico apresentar uma relação inversa provoca reação no *designer*, pois rompe com o sentido de leitura direta que lhe é mais familiar. A representação no papel não consistiu de mera aplicação de conhecimentos formais, não se adequando inclusive às convenções matemáticas quanto ao uso da escala e coordenadas. Convencionalmente, a escala do eixo vertical (*eixo y*) nos gráficos é ascendente. A representação realizada pelo *designer* esteve voltada para explicitar o conflito que ele vivenciou na elaboração de significados para esse gráfico.

Esse episódio revela que a construção de significados não é um processo de apreensão direta da informação. As circunstâncias de uso dos gráficos podem torná-los artefatos mais ou menos transparentes para o leitor. Como exposto por Silva:

> Ao ver todo conhecimento como um objeto cultural, uma concepção de currículo inspirado nos Estudos Culturais equipararia, de certa forma, o conhecimento propriamente escolar com, por exemplo, o conhecimento explícita ou implicitamente transmitido através de anúncio publicitário. Do ponto de vista dos Estudos Culturais, ambos expressam significado social e culturalmente construído, ambos buscam influenciar e modificar as pessoas, estão ambos envolvidos em complexas relações de poder. Em outras palavras, ambos os tipos de conhecimento estão envolvidos numa economia do afeto que busca produzir certo tipo de subjetividade e identidade social. (SILVA, 1999, p. 136).

Vários estudiosos mostraram que a situação social em que o sujeito age influencia o seu raciocínio matemático, sendo esse aspecto explorado em seguida.

3.2.2 Cognição matemática e práticas culturais

O estudo das interações de cognição e práticas culturais, numa perspectiva da aquisição e desenvolvimento do conhecimento matemático, configura-se numa preocupação que permeia o cenário das investigações no campo da Psicologia e da Educação matemática.

Um ponto central e destacado nesses estudos consiste na investigação do uso de conteúdos matemáticos em contextos particulares, como em situações que diferem do cotidiano escolar, em práticas culturais específicas. A esse respeito, podem ser citados Carraher, Carraher e Schlieman (1989), que investigaram a realização de operações aritméticas por sujeitos em situações de compra e venda numa feira; Lave (1988) estudou o uso de operações aritméticas por sujeitos engajados em práticas culturais diversificadas (supermercados, vigilantes do peso); Saxe (1991) desenvolveu estudos sobre aspectos da cognição matemática envolvidos na prática da venda de bombons por crianças do centro de Recife; e Acioly (1995) estudou o funcionamento cognitivo de sujeitos adultos ou pouco escolarizado no domínio da medida, mais particularmente na resolução de problemas do cálculo de área.

Esses estudos convergem na medida em que consideram e demonstram que a situação social em que o sujeito age influencia os seus objetivos, repercutindo tal ação na organização das suas ações.

Nos estudos realizados sobre a prática de venda de bombons por crianças de rua do Recife, Saxe (1991) argumenta que os objetivos matemáticos emergem na prática contextualizada e consistem na tentativa dos vendedores direcionarem suas ações para a sobrevivência econômica, considerando as constantes alterações da moeda e o aumento dos preços das mercadorias. Quando os objetivos emergem, tomam várias formas, e se encontram freqüentemente relacionados com os motivos econômicos dos próprios vendedores, com os processos socioculturais e a compreensão matemática que eles trazem para a prática.

Nessa perspectiva, Lave (1988, p. 1, tradução nossa) é mais enfática, propondo a formulação de uma psicologia da aprendizagem situada. Esta consiste no engajamento autêntico de indivíduos em práticas comuns. Segundo a autora,

> A atividade matemática assume diferentes aspectos em diferentes situações. A especificidade da prática da aritmética numa situação e a descontinuidade entre situações constituem uma base provisória para uma explanação da cognição como um nexus de relações entre a mente em atividade e o cenário no qual a atividade se desenvolve.

Saljo e Wyndhamn (1993) fazem referência a rotinas e tradições de comunicação que diferentes situações da vida diária provêem. Tomando como unidade de análise os *sistemas de atividades*, como propostos por Leontiev (1981), os pesquisadores desenvolveram um estudo para ilustrar como a escola provê condições concretas para a resolução de problemas, buscando também contribuir com evidências para a compreensão da natureza social da cognição humana.

Saljo e Wyndhamn (1993) realizaram estudo empírico no qual estudantes suecos deveriam estabelecer o custo de envio de uma carta usando para tanto uma tabela oficial de postagem do correio. A tarefa dos estudantes consistia em resolver o seguinte problema: quanto deverá ser pago para o envio de uma carta que pesa 120 gramas? Os estudantes foram solicitados a resolver os problemas sob duas condições: de ensino e aprendizagem de Matemática e de ensino e aprendizagem de Estudos Sociais.

Os estudantes estimaram o preço da postagem com base em duas estratégias: leitura livre e cálculo. Essas duas estratégias diferiram quando analisadas em função das situações de pesquisa. No contexto de ensino e aprendizagem da Matemática, 57,4% dos estudantes interpretaram a tarefa como uma típica tarefa matemática e engajaram-se em algum tipo de cálculo. Quando lidaram com o mesmo problema no contexto do ensino e aprendizagem de Estudos Sociais, apenas 29,3% fizeram uso de operações matemáticas para encontrar a resposta. A diferença no uso dessas estratégias foi estatísticamente significativa.

De acordo com Saljo e Wyndhamn, esse resultado indica que o contexto social em que os participantes se encontram engajados foi determinante para o direcionamento dos significados construídos para a resolução da tarefa.

Carraher, Carraher e Schlieman (1989), Lave (1988), Saxe (1991), Acioly (1995) e Saljo e Wyndhamn (1993) evidenciam a construção e uso do conhecimento matemático em práticas cotidianas, isto é, desenvolvidas no dia-a-dia, reavendo-as como forma de conhecimento legítimo. Nesse sentido, considera-se a existência de um raciocínio matemático relacionado com as experiências que as pessoas desenvolvem no cotidiano. Tal forma de formulação considera a escola como prática cultural, espaço onde se desenvolve uma forma específica de cognição matemática e que faz parte das atividades diárias das pessoas.

Voigt (1993), discutindo sobre a atribuição de significados matemáticos para os fenômenos empíricos, destaca que a Matemática desenvolvida em sala de aula configura uma prática cultural específica, constituída pela negociação de significados entre professor e estudantes. Fundamentado num interacionismo simbólico, os participantes do processo monitoram suas ações de acordo com intenções e expectativas mútuas. Os símbolos matemáticos, segundo Voigt, em vez de possuírem um significado definitivo, são continuamente transformados nas negociações, emergindo como processos plurissemânticos e que envolvem ambigüidades.

Na análise de interpretações de crianças sobre figuras extraídas de livros-textos de matemática, Voigt observou que as crianças formulavam diferentes respostas que julgavam ser as que o autor do livro esperaria que fossem ditas. Tomando como base evidências dessa natureza, envolvendo conceitos matemáticos diversificados, Voigt argumenta que, embora os princípios das figuras dos livros-texto possam ter múltiplos significados, muitos autores desses livros e professores de Matemática parecem assumir a idéia de que esses objetos não apresentam significados ambíguos e que existem respostas definitivas para o tipo de informações quantitativas que essas figuram potencializam.

Entende-se que abordagens que consideram o uso do conhecimento matemático em práticas cotidianas rompem com posições dicotomizadas que destacam as relações do tipo formal-informal, dentro-fora da escola, na medida em que consideram também a escola como uma prática cultural específica, realizada com regularidade pelas pessoas no seu cotidiano.

A esse respeito, Meira (1993) argumenta sobre o papel da escola como prática cotidiana geradora de atividades matemáticas significativas.

> O processo de comunicação e argumentação na sala de aula torna explícita a idéia da prática da matemática escolar como uma atividade cotidiana, na medida em que a sua linguagem e procedimentos se tornam familiares aos alunos. (MEIRA, 1993, p. 27).

Estendendo essa análise de Meira sob a óptica das perspectivas teóricas de Cole e da classificação de Wartofsky, entende-se que os processos simbólicos desenvolvidos com o suporte do uso dos artefatos matemáticos contribuem para influir na forma como as pessoas raciocinam matematicamente. Como esses processos simbólicos envolvem conteúdos relacionados aos domínios específicos da Matemática, uma análise mais específica sobre a importância que as ferramentas de representação assumem para a construção do raciocínio matemático é requerida.

3.3 A prática da Matemática e o raciocínio sobre diferentes ferramentas de representação

A análise dos efeitos da prática da Matemática para explicar a interação das representações com o contexto dos problemas na formulação de inferências não é facilmente encontrada nos estudos em Educação Matemática. Podem ser citados a esse respeito apenas os estudos de Molyneau-Hodgson, Rojano, Sutherland e Ursini (1999), que examinaram como a diferença na cultura escolar influenciava o trabalho dos estudantes com planilhas eletrônicas, que incluem o trabalho com representações múltiplas num ambiente computacional. Este ambiente permite a flexibilidade do raciocínio a partir de variadas representações (gráficos, tabelas, texto escrito de fórmulas). Os participantes eram estudantes mexicanos e ingleses com idades variando entre 16 e 18 anos e se encontravam fazendo cursos pré-universitários em seus respectivos países. Molyneau-Hodgson et al. (1999) analisaram um problema envolvendo *movimento de carros*, o qual foi introduzido para os estudantes por meio de uma sentença escrita, um gráfico, uma tabela e uma equação, usando como recurso o ambiente computacional proporcionado pela planilha eletrônica.

Os estudantes que participaram do estudo de Molineau-Hodgson et al. (1999) eram solicitados a analisar a posição de três carros (A, B e C) em diferentes momentos, tomando como base a informação apresentada numa tabela para o Carro A, num gráfico para o carro B e numa equação para o carro C. Os autores encontraram ampla diferença nas abordagens dos estudantes para questões que requeriam predições com base em uma determinada posição dada (qual a posição do carro depois de 2 segundos?) ou com base em tempo especificado (quais são as posições de cada carro no tempo de 2,5 segundos?). A maioria dos estudantes mexicanos respondeu à primeira pergunta com precisão, enquanto os estudantes ingleses apenas estimavam a posição dos carros. Com relação à segunda questão, os estudantes ingleses deram uma resposta aproximada que era sensível para o problema, enquanto os mexicanos ofereceram uma resposta inadequada, principalmente para analisar a posição do Carro B, na apresentação gráfica.

Numa entrevista individual, os estudantes mexicanos explicitaram que suas respostas não eram precisas quando eles estavam usando gráficos e que eles não se sentiam confortáveis em ter que dar respostas aproximadas para os problemas. Molyneau-Hodgson et al.(1999) mostraram que algumas estratégias usadas pelos estudantes mexicanos, o traçado sobre o gráfico de linhas verticais e horizontais para encontrar os pares coordenados, era uma tentativa de obter acuidade no processo de resolução do problema usando o gráfico. Os estudantes ingleses sentiam-se confortáveis em dar respostas aproximadas; muitos deles apenas davam uma olhada nos gráficos para obter uma resposta sobre o problema. A linguagem usada pelos estudantes ingleses como, por exemplo, *eu vi que…* (I looked at…) foi referida pelos autores como clara evidência de estratégias de estimativas, as quais contrastam com as estratégias dos estudantes mexicanos, mais voltadas para conseguir maior nível de acuidade nas respostas. Os estudantes mexicanos, por sua vez, usaram com maior freqüência a regra de três como recurso para resolver os problemas usando os gráficos ou as tabelas.

Na análise de Molyneau-Hodgson et al. (1999), a prática da Matemática em diferentes culturas afeta a forma como os estudantes raciocinam no uso de tabelas ou gráficos. Partindo dessa perspectiva, os autores exploram as aparentes tendências no raciocínio dos estudantes quando eles trabalham com diferentes representações. Neste estudo, todavia, o foco de análise dos autores foi a influência da ferramenta computacional como um meio de facilitar a flexibilidade para os estudantes construírem relações entre as variáveis. O uso de múltiplas representações esteve voltado para explicar a flexibilidade no desenvolvimento conceitual e não como mediadores que poderiam potencializar ou não determinado raciocínio.

Em abordagens computacionais, o papel de variadas representações no raciocínio das pessoas não se encontra bem desenvolvido (SOMEREN; REIMANN; BOSHUIZEN; DE JONG, 1998, p. 3). A introdução de novas tecnologias nas aulas de Matemática oferece aos estudantes uma imensa quantidade de informação. Como relatado por Someren et al. (1998), no entanto, essa estratégia não é boa por si mesma porque um tipo de representação pode ser justamente mais potencializadora do que outra e a combinação de múltiplas representações pode criar mais problemas para o aprendiz.

Fundamentados na revisão da literatura apresentada neste capítulo, entende-se que o tipo de artefato influencia de forma diferente a coordenação de ações e que a análise da sua influência no raciocinio matemático dos estudantes requer pesquisas mais controladas e que considerem as diferentes variáveis do problema. Nesse sentido, a estratégia metodológica utilizada para analisar os efeitos das dimensões secundárias e terciárias dos artefatos constitui aspecto-chave.

No estudo de Molyneau-Hodgson et al. (1999), além do foco estar voltado à análise do uso de ferramentas computacionais, a estratégia metodológica dos autores requereu que os mesmos estudantes resolvessem os mesmos problemas nas diferentes condições do tratamento da informação. Nesse caso, a influência do tipo de artefato no raciocínio dos estudantes pode ser interpretada como o resultado das diferenças individuais.

Na análise da influência dos artefatos no desempenho e raciocínio matemático dos estudantes, podem ser adotadas diferentes estratégias, nas quais apenas o tipo de ferramenta de representação ou o tipo de informação seja manipulado e as demais variáveis do problema sejam controladas; ou ainda, estratégias mistas em que, paralelamente a esses controles, os estudantes resolvam os problemas sempre nas mesmas condições. Os aspectos metodológicos apresentados no Capítulo 4, descrito em seguida, adotam uma ou a outra estratégia.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Utiliza-se nesta pesquisa o método experimental aliado à pesquisa-ação e discute-se o seu significado no contexto de uma categoria mais ampla de artefatos. O *design* de tarefas para uso em sala de aula de Matemática determinou e foi determinada pela trajetória de pesquisa. A análise quantitativa do desempenho dos estudantes e a análise qualitativa das suas justificativas configuraram-se como parte importante da pesquisa. Alguns testes estatísticos foram aplicados para analisar se as tendências verificadas eram significativas ou não. Esses aspectos da metodologia encontram-se descritos neste capítulo.

4.1 Tipo de pesquisa

De acordo com Gamboa (1998, p. 64, tradução nossa),

> As técnicas de pesquisa científica, sejam quantitativas ou qualitativas, não podem ser entendidas em si mesmas, sua compreensão está no método. Técnicas e métodos não estão separados. É o processo de pesquisa que qualifica as técnicas e os instrumentos necessários para a elaboração do conhecimento. As opções técnicas dependem dos caminhos a serem percorridos e dos procedimentos a serem desenvolvidos. Por isso, a necessidade de remeter a questão da pesquisa ao problema dos métodos. Por sua vez, o problema do método tem sido uma questão tradicionalmente abordada pela filosofia, como um capítulo da lógica denominado metodologia.

Os métodos constituem-se na expressão de uma "teoria científica em ação" (GAMBOA, 2000, p. 88), cuja opção epistemológica de investigação mais ampla deve ser usada para explicar o uso das técnicas. Gamboa (2000) analisa a opção metodológica usada numa pesquisa em termos do uso de técnicas de registro, coleta e tratamento de dados numa perspectiva mais ampla, pois relaciona método-ciência e sujeito-objeto. Como consequência, a sua forma de análise é voltada para discussões entre os pólos "quantidade-qualidade" na metodologia em pesquisa educacional (GAMBOA, 2000).

Diferentes modelos são propostos para explicar a relação sujeito-objeto, tendo cada um implicações nas opções em aspectos quantitativos ou qualitativos na metodologia em pesquisa educacional. Um primeiro modelo coloca ênfase no objeto; como resultado observa-se pesquisas mais voltadas para explicar os fatos medidos e analisados pela metodologia quantitativa. Nessa análise metodológica, os fatos possuem significados fixos e são predeterminados. Os aspectos pessoais em relação aos fatos são considerados irrelevantes ou fontes de erros num processo de resolução de problemas. Um segundo modelo ressalta o sujeito, desembocado em práticas de pesquisa mais voltadas para explicar as representações mentais dos sujeitos. As representações, entretanto, são tratadas como produções independentes dos aspectos materiais do objeto. Nesse segundo modelo, observam-se, na maioria das vezes, práticas metodológicas voltadas para explicar o fenômeno educacional apenas qualitativamente. Um terceiro modelo consiste na junção dos modelos 1 e 2. Esse modelo constitui-se na perspectiva do modelo ideal, ao considerar a possibilidade de abordar o fenômeno educacional nos aspectos qualitativos e quantitativos.

Embora levando em conta a relevância do terceiro Modelo para a evolução da ótica sobre o fenômeno em pesquisas educacionais, entende-se que este sozinho não é suficiente para explicar a participação dos sujeitos em diferentes práticas cotidianas. Algumas perguntas devem ser explicitadas, principalmente em função do objeto de estudo investigado e dos seus desdobramentos para o grupo de sujeitos e situações a que se destinam: qual é o papel do pesquisador no processo de pesquisa? Qual é a relação do pesquisador com o objeto pesquisado? A opção metodológica do pesquisador não pode ser explicada apenas de uma perspectiva epistemológica mais geral; ela precisa ser pensada, principalmente, em função do objeto de estudo investigado e dos seus desdobramentos para o grupo de sujeitos e situações a que se destina. Essa forma de abordagem explica o modelo metodológico adotado como um artefato elaborado pelo pesquisador com objetivos e intenções definidas e situado no âmbito da temática que está sendo investigada.

> Ao construir um projeto, fabricamos também uma ferramenta, um artefato, cuja materialidade não se apresenta somente no número de páginas escritas ou num arquivo de um editor de textos, mas que se concretizará na realização do trabalho investigativo. Artefato porque tanto é fruto da mão-de-obra humana, intencionalmente criado, quanto no sentido de ser resultado do uso de métodos particulares em pesquisa. (FGV, 1987 apud DESLANDES, 1994).

A abordagem metodológica que considera não somente se as técnicas usadas são qualitativas ou quantitativas, mas situa também a prática do pesquisador e a sua tomada de decisões dentro de um campo do conhecimento, requer a integração de um componente pessoal ao trabalho de pesquisa. Neste trabalho, esse processo pode ser verificado por meio das ações direcionadas para o *design* de experimentos para uso em sala de aula de Matemática.

O *design* de experimentos foi uma opção metodológica encontrada para suprir a falta de estudos que investiguem o papel dos diferentes artefatos (gráficos, tabelas e casos isolados) na construção e interpretação de significados matemáticos por estudantes de 11 a 14 anos, controlando-se algumas variáveis.

Optou-se por essa perspectiva metodológica com base em alguns fatos da própria experiência prévia na interpretação de gráficos. A pesquisa de Lima (1998) observou que a interpretação de gráficos nos media impressos por professores de Matemática e *designers* era um processo complexo e influenciado pelos diferentes tipos de leitura (visual, matemática e experiencial) que emergia dos processos interpretativos e pelo uso que os sujeitos faziam desses gráficos nas suas práticas cotidianas. Em pesquisas institucionais realizadas por essa autora e colaboradores, analisam-se as práticas escolares no uso de gráficos nas séries do ensino fundamental (SILVA; LIMA, 2001) e de jovens e adultos (SOUZA; LIMA, 2002). Nessas pesquisas, a metodologia foi pautada em abordagens qualitativas e quantitativas, no entanto, sem uma preocupação maior com um controle das variáveis nas interpretações analisadas. O resultado dessa abordagem metodológica aponta para a influência de variáveis diferentes na interpretação de gráficos, mas sem que os seus efeitos pudessem ter sido isolados.

Na perspectiva de artefatos, o uso encontra-se no ponto de intersecção do sujeito, objeto e procedimentos de pesquisa. Esta pesquisa trata os artefatos nas leituras, interpretações e construções dos estudantes com o suporte das tarefas que se elaborou intencionalmente. Se os estudantes usarem o seu conhecimento matemático na resolução das tarefas, então essas tarefas criadas experimentalmente podem ser consideradas como potencializadoras desse domínio específico do conhecimento. Portanto, ao desencadear decisões mais efetivas na organização do *design* experimental, como é o caso do controle das variáveis do problema, a metodologia adotada poderia contribuir para tornar o material didático utilizado na pesquisa como possível potencializador do raciocínio matemático.

Conforme os aspectos metodológicos discutidos até o momento, o método experimental aliado à uma pesquisa-em-ação norteou o trabalho de pesquisa.

4.2 Etapas da pesquisa

A consecução do objetivo da pesquisa ocorreu em três etapas. Na primeira, foram realizados dois experimentos para verificar a influência do tipo de representação ou do tipo de informação no raciocínio matemático dos estudantes. Esses dois experimentos – Experimento 1 e Experimento 2 – consistiram no projeto de pesquisa para o registro na Oxford Brookes University, Inglaterra, entidade onde o trabalho foi iniciado. O projeto foi aprovado em março de 2004 (ver no Anexo A a carta de aprovação do projeto pelo Comitê de Pesquisa da Universidade). Na segunda etapa, mais dois experimentos – Experimento 3 e Experimento 4 – foram realizados. O terceiro experimento foi realizado tendo em vista verificar as interações dos aspectos visuais e conceituais das informações. O quarto experimento analisou se algumas interações do Experimento 3 poderiam ser beneficiadas pelo tipo de representação. Esses dois experimentos foram incluídos na proposta de qualificação para o doutoramento na Oxford Brookes University, sendo aprovado em dezembro de 2006. Esses quatro experimentos iniciais foram realizados em escolas inglesas, localizadas no Distrito de Oxfordshire. Na terceira etapa do trabalho, as tarefas aplicadas nos Experimentos 1 e 4 foram traduzidas para o português e aplicadas nas escolas brasileiras. Esta estapa da investigação ocorreu em 2007. A inclusão dos resultados dos experimentos realizados no Brasil aos demais realizados na Inglaterra, precedida de uma teorização dos conceitos desenvolvidos na investigação e seguida da análise conclusiva, constitui o presente documento que será entregue à Universidade Federal do Ceará, entidade onde se realiza a fase conclusiva deste trabalho.

Os aspectos lógico-matemáticos da informação, o tipo de situação e de representação, que constituem o eixo da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1983, 1997, 1998), consistiram nos aspectos dos conceitos passíveis de manipulação ou de controle nos experimentos, conforme discussão sobre o *design* das tarefas relativas aos experimentos apresentadas na seção 4.5.

4.3 Escolas investigadas

Participaram da pesquisa quatro escolas inglesas, localizadas no Distrito de Oxfordshire e duas escolas brasileiras, situadas na cidade do Recife.

As escolas inglesas são públicas, sendo duas delas localizadas na cidade de Oxford, nos bairros de Cowley e Headington e as outras situadas em Holton e Kidlington. As escolas de Holton e Kidlington ficam a aproximadamente 30 e 20 minutos, respectivamente, do centro de Oxford. A escola localizada em Headington situa-se nas imediações do *campus* universitário da Oxford Brookes University, onde funcionam as áreas de Ciências Sociais, Ciências Biológicas e Artes. A escola de Cowley localiza-se num bairro mais habitado por pessoas da classe trabalhadora. Nas duas escolas situadas em Oxford, as classes são multiculturais, sendo compostas por estudantes ingleses e de várias nacionalidades. A escola situada em Holton fica nas imediações de uma extensão do *campus* da Oxford Brookes University, onde funcionam as áreas de Ciências Exatas e Tecnologia. Nessa escola, predominam estudantes de origem inglesa. A escola de Kidlington é situada numa área onde predominam pessoas trabalhadoras. Embora a escola seja multicultural e atenda a estudantes de origem cultural diversa, existe uma predominância de estudantes de procedência inglesa. Os estudantes são alocados nas escolas de acordo com a proximidade física da escola com a sua residência.

Independentemente da localização, as escolas inglesas são organizadas em torno de um Currículo Nacional, o qual estabelece clara estrutura curricular para o ensino e avaliação dos estudantes ao longo da sua carreira escolar. Os estudantes são alocados por faixa etária em diferentes estágios de formação escolar ou *Key Stages*: *Key Stage* 1 (5-7 anos), *Key Stage* 2 (7-11 anos), *Key Stage* 3 (11-14 anos) e *Key Stage* 4 (14-16 anos). Cada faixa etária corresponde a um programa específico de ensino e aprendizagem, ou níveis. No *Key Stage* 1 espera-se que os estudantes atinjam o nível 2, isto é, que eles progridam nas suas aprendizagens e desenvolvimento até atingir o esperado para um estudante de sete anos. No *Key Stage* 2, espera-se que os estudantes atinjam o nível 4, o que corresponde às aprendizagens esperadas para um aluno de 11 anos. No *Key Satage* 3, espera-se que os estudantes atinjam o nível 6, que consiste nas aprendizagens para um aluno de 14 anos. Finalmente, no *Key Stage* 4 espera-se que eles alcançem o nível 8, que corresponde às aprendizagens de um aluno de 16 anos. Inglês, Matemática e Ciências constituem os conteúdos básicos do Currículo Nacional das escolas inglesas, devendo estes ser aplicados ao longo dos quatro estágios de formação escolar. Existe também uma gama de conteúdos considerados não básicos, como é o caso dos conteúdos de História e Geografia, por exemplo. Para cada conteúdo e estágio escolar, os programas de estudo estabelecem aquilo que os estudantes devem aprender e quais são as formas de avaliar o seu desempenho. Embora as escolas sejam livres para escolher como organizar os seus currículos escolares, elas devem incluir os requerimenos gerais dos programas de estudo por meio desses estágios.

Uma escola brasileira é particular e situa-se no bairro da Torre, composto de pessoas de classe média. Essa escola oferece educação infantil, ensino fundamental e médio. É comum os alunos permanecerem nessa escola durante toda a sua carreira escolar. A escola caracteriza-se ainda por oferecer uma educação inclusiva, onde estudantes com diferentes necessidades especiais (auditiva, visual, cognitiva) são integrados em turmas regulares de ensino. O corpo docente dessa escola é especializado, com alguns professores envolvidos em pesquisas. A outra escola brasileira é pública e localiza-se no bairro da Cidade Universitária, dentro do Campus universitário da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). A escola situa-se nas imediações do Centro de Educação da UFPE e oferece o ensino fundamental, do sexto ao nono ano, e o ensino médio. O seu corpo docente é composto por professores pós-graduados, com especialização, mestrado e doutorado. Essa escola se caracteriza como campo de experimentação de métodos e técnicas pedagógicas, sendo este um trabalho compartilhado com o Centro de Educação. A escola é visualisada como modelo para as demais escolas públicas da região. Os alunos ingressam nessa escola no sexto ano por meio de um processo seletivo concorrido.

Embora as escolas brasileiras campo de pesquisa sejam pertencentes a diferentes redes de ensino, particular e pública, elas são organizadas com base em um mesmo Currículo Nacional, qual seja, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998). Os PCN oferecem recomendações para a estrutura e organização do ensino e avaliação dos estudantes da escola básica até o nível médio. As recomendações dos PCN não são obrigatórias, mas um guia para orientar as escolas no desenvolvimento da sua estrutura curricular.

A escolha das escolas como campo de experimentação, no Brasil ou na Inglaterra, ocorreu em função da disponibilidade destas em participar da pesquisa.

.

4.4 Sujeitos da pesquisa

Participaram da pesquisa 922 estudantes, dos quais 598 ou 65% foram oriundos do *key Stage Three* (equivalente em termos de idade ao 7º, 8º e 9º ano no Brasil) de quatro escolas inglesas localizadas no Distrito de Oxfordshire, e 324 estudantes ou 35%, oriundos do 7º, 8º e 9º ano de duas escolas brasileiras localizadas no Recife.

A escolha dos estudantes dessa faixa etária como sujeitos dessa pesquisa baseou-se na revisão da literatura onde vários estudos documentaram as dificuldades desses estudantes em interpretar as informações apresentadas por meio de gráficos.

4.5 *Design* das tarefas

O *design* das tarefas foi constituído por três fases: exploração, confecção e teste-piloto. A fase de exploração caracteriza os passos iniciais, quando foram pesquisadas situações já discutidas na literatura e criadas outras com base em situações apresentadas em livros didáticos, de variados conteúdos, destinados a alunos de 11 a 14 anos. A fase de confecção das tarefas foi acompanhada de várias tomadas de decisões: escolha dos valores das variáveis, elaboração das questões e aspectos estéticos das formas de apresentação da informação. O uso de computador como ferramenta foi fundamental na confecção das tarefas. Os gráficos, tabelas ou casos isolados foram produzidos com o auxílio dos *softwares* PowerPoint e Printbrush e alguns recursos de ilustração foram usados, como é o caso do desenho dos atributos das variáveis numa substituição ao uso de legendas (ex. o desenho de um carro azul e de um carro vermelho acompanhado de linhas coloridas). Depois de confeccionadas, as tarefas eram apresentadas para alguns estudantes com o objetivo testar preliminarmente a clareza do conteúdo, possíveis ambigüidades na forma de apresentação da informação e o entendimento das perguntas. Uma vez terminados os ajustes necessários à melhoria das tarefas, elas eram inseridas no âmbito dos experimentos.

Um aspecto importante na análise oferecida das tarefas é que não se encontra uma especificação sobre o conteúdo dos gráficos, mas sobre a representação desses conteúdos e a interpretação e construção de significados pelos alunos. Nesse sentido, não existe uma preocupação com o conceito de velocidade do ponto de vista da Física ou com o conceito dos aspectos econômicos que influem na flutuação dos preços como ocorrem na Economia. Contudo, como o foco do trabalho incide sobre as inferências que os estudantes precisam realizar com base nas informações disponibilizadas nos gráficos, tabelas ou casos isolados, esses conceitos e noções podem emergir. As inferências são analisadas, no entanto, fundamentando-se no papel das formas de apresentação da informação como mediadores matemáticos da informação.

A elaboração de tarefas passíveis de acessar o conhecimento matemático levou em consideração a natureza das variáveis (discreta ou contínua), o número de variáveis (uma, duas ou três) e a forma de apresentação usada para representar as variáveis.

O trabalho de Inhelder e Piaget (1958) e a classificação dos sistemas de representação matemática oferecida por Nunes (1997, 2004) constituíram ponto de partida para o desenvolvimento das tarefas do Experimento 1. O objetivo do experimento foi investigar a influência das formas de apresentação da informação no desempenho e raciocínio dos estudantes sobre variáveis discretas. Os mesmos problemas foram representados por meio de gráficos de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada e cartões manipulativos.

Os itens do teste sobre gráficos utilizados pelo programa Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) (BROWN; HART; KUCHEMANN, 1985), a classificação proposta por Vergnaud para os problemas mulitiplicativos e os estudos de Nunes et al. (2003) sobre níveis de dificuldades para problemas de inferências diretas ou inversas constituíram ponto de partida para o desenvolvimento das tarefas do segundo experimento. O objetivo do experimento foi investigar a influência do tipo de informação apresentada graficamente no desempenho e raciocínio dos estudantes sobre variáveis contínuas. Esse experimento encontra-se descrito em detalhes no Capítulo 5.

Como elemento adicional para a realização do Experimento 3, surgiu o interesse de investigar interações dos aspectos visuais com a lógida da informação, como dimensão conceitual, em problemas apresentados por meio de gráfico de linhas com inclinação positiva ou negativa. Os resultados do Experimento 2, o gráfico com inclinação negativa usado por Lima (1998) e a leitura de livros didáticos de Economia, Física e Matemática consistiram na base de elaboração das tarefas no Experimento 3. O objetivo do experimento foi investigar mais especificamente as dificuldades dos estudantes com proporcionalidade direta ou inversa apresentada por meio de gráficos de linhas com inclinação positiva ou negativa.

A análise de tabelas para a apresentação de variáveis contínuas e a combinação gráfico-tabela consistiu nos fatores motivadores para a elaboração das tarefas do Experimento 4. As tarefas usadas no Experimento 3 e os trabalhos de Kieran, Boilean e Garancon (1996), Nemrovsky (1996) e Molyneau-Hodgson, Rojano, Sutherland e Ursini (1999) contribuíram para a elaboração das tarefas do Experimento 4. O objetivo do experimento foi investigar a influência das formas de apresentação da informação no desempenho e raciocínio dos estudantes.

As tarefas do Experimento 4 envolveram os mesmos conteúdos do Experimento 3, consistindo de situações de inclinação positiva ou negativa e com o controle dos aspectos diretos ou inversos. A apresentação explícita da quantificação e o uso de formas diferentes de apresentação da informação por meio de tabelas, gráficos ou da combinação de tabelas e gráficos, consistiram aspectos diferenciadores no Experimento 4.

Nos Experimentos 5 e 6 realizados no Brasil, aplicou-se o mesmo *design* utilizado nos Experimentos 1 e 4 realizados na Inglaterra. As tarefas e as instruções foram traduzidas do inglês para o português e em seguida retraduzidas para o inglês (*translation and back-translation*) por um tradutor bilingüe. Objetivou-se com esse método detectar incoerências e ambigüidades advindas dos significados da língua.

As tarefas e as análises dos Experimentos 1, 2, 3 e 4 realizados na Inglaterra encontram-se descritas em detalhes no Capítulo 5. A aplicação, no Brasil, das tarefas dos Experimentos 5 e 6 (originalmente 1 e 4, respectivamente) e as suas respectivas análises encontram-se descritas no Capítulo 6. A Tabela 1 apresenta as principais características do *design* dos experimentos realizados nessa pesquisa.

Tabela 1 – Principais características no *design* dos experimentos

Experimentos	**Descrição das suas principais características**
Experimento 1	*Design*: Mesmos problemas, diferentes tipos de representação (gráficos de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada e casos isolados); *Apresentação das tarefas*: impressas em cadernos de respostas. Nos casos isolados os estudantes manipularam cartões que lhes foram entregues misturados; *Variáveis*: discretas, com os valores controlados para possibilitar situações multiplicativas envolvendo problemas de proporção simples e dupla; *Sujeitos*: 127 estudantes do *Year* 8 (corresponde em idade ao 8º ano no Brasil) oriundos da escola inglesa situada em Cowley; *Experimento intergrupos*: os estudantes foram distribuídos aleatoriamente para trabalhar com cada tipo de representação; *Ordem de apresentação dos problemas*: mesma ordem para todos os sujeitos; *Forma de atividade*: os estudantes realizaram individualmente as tarefas; *Tempo máximo do experimento*: 50 minutos; *Uso do tempo*: cada aluno administrou o tempo de acordo com as suas necessidades.
Experimento 2	*Design*: diferentes tipos de problemas, mesmas representações (gráficos de pontos e de linhas); *Apresentação das tarefas*: os gráficos eram projetados, um após outro, numa tela com o auxílio do computador portátil acoplado a um projetor, e concomitante a esse processo, o uso de cadernos de respostas impressos; *Variáveis*: contínuas, cujas relações foram controladas para possibilitar relações com proporcionalidade direta e inversa; *Sujeitos*: 84 estudantes dos *Years* 7, 8 e 9 (corresponde em idades ao 7º, 8º e 9º ano no Brasil) oriundos da escola inglesa situada em Headington; *Experimento intragrupos*: os mesmos estudantes realizaram as mesmas tarefas; *Ordem de apresentação dos problemas*: mesma ordem para todos os sujeitos; *Forma de atividade*: os estudantes realizaram individualmente as tarefas; *Tempo máximo do experimento*: 50 minutos; *Uso do tempo*: cada aluno administrou o tempo de acordo com as necessidades do grupo-classe.
Experimento 3	*Design*: diferentes tipos de problemas, mesmas representações (gráficos de linhas) e diferentes inclinações (positiva ou negativa); *Apresentação das tarefas*: gráficos apresentados impressos em cadernos de respostas; *Variáveis*: contínuas, cujas relações foram controlados para possibilitar relações de proporcionalidade direta e inversas; *Sujeitos*: 186 estudantes dos *Years* 7 e 9 (correspondem em idade ao 7º e 9º ano no Brasil) oriundos das escolas inglesas situadas em Cowley, Holton e Kidlington; *Experimento inter e intragrupos*: os estudantes foram distribuídos aleatoriamente para trabalhar com cada tipo de inclinações (positiva ou negativa), mas todos resolveram os mesmos problemas de proporcionalidade direta ou inversa; *Ordem de apresentação dos problemas*: controle na ordem de apresentação dos problemas; *Forma de atividade*: os estudantes realizaram individualmente as tarefas; *Tempo máximo do experimento*: 50 minutos; *Uso do tempo*: cada aluno administrou o tempo de acordo com as suas necessidades

Experimentos	Descrição das suas principais características
Experimento 4	*Design*: diferentes tipos de problemas, mesmas representações (gráficos de linhas) e diferentes inclinações (positiva ou negativa); *Apresentação das tarefas*: gráficos apresentados impressos em cadernos de respostas; *Variáveis*: contínuas, cujas relações foram controlados para possibilitar relações de proporcionalidade direta e inversas; *Sujeitos*: 201 estudantes dos *Years* 7 e 9 (correspondem em idades aos 7º e 9º ano no Brasil) oriundos das escolas inglesas situadas em Holton e Kidlington; *Experimento inter e intragrupos*: os estudantes foram distribuídos aleatoriamente para trabalhar com cada tipo de inclinação (positiva ou negativa), mas todos resolveram os mesmos problemas de proporcionalidade direta ou inversa; *Ordem de apresentação dos problemas*: controle na ordem de apresentação dos problemas; *Forma de atividade*: os estudantes realizaram individualmente as tarefas; *Tempo máximo do experimento*: 50 minutos; *Uso do tempo*: cada aluno administrou o tempo de acordo com as suas necessidades
Experimento 5	*Design*: Mesmos problemas, diferentes tipos de representação (gráficos de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada e casos isolados); *Apresentação das tarefas*: impressas em cadernos de respostas. Nos casos isolados os estudantes manipularam cartões que lhes foram entregues misturados; *Variáveis*: discretas, com os valores controlados para possibilitar situações multiplicativas envolvendo problemas de proporção simples e dupla; *Sujeitos*: 99 estudantes do 8º ano (corresponde em idade ao *Year* 8 na Inglaterra) oriundos das duas escolas brasileiras localizadas em Recife; *Experimento intergrupos*: os estudantes foram distribuídos aleatoriamente para trabalhar com cada tipo de representação; *Ordem de apresentação dos problemas*: mesma ordem para todos os sujeitos; *Forma de atividade*: os estudantes realizaram individualmente as tarefas; *Tempo máximo do experimento*: 50 minutos; *Uso do tempo*: cada aluno administrou o tempo de acordo com as suas necessidades.
Experimento 6	*Design*: diferentes tipos de problemas, mesmas representações (gráficos de linhas) e diferentes inclinações (positiva ou negativa); *Apresentação das tarefas*: gráficos apresentados impressos em cadernos de respostas; *Variáveis*: contínuas, cujas relações foram controlados para possibilitar relações de proporcionalidade direta e inversas; *Sujeitos*: 225 estudantes do 7º e 9º ano (correspondem em idade aos *Years* 7 e 9 na Inglaterra) oriundos das duas escolas brasileiras localizadas em Recife; *Experimento inter e intragrupos*: os estudantes foram distribuídos aleatoriamente para trabalhar com cada tipo de inclinação (positiva ou negativa), mas todos resolveram os mesmos problemas de proporcionalidade direta ou inversa; *Ordem de apresentação dos problemas*: controle na ordem de apresentação dos problemas; *Forma de atividade*: os estudantes realizaram individualmente as tarefas; *Tempo máximo do experimento*: 50 minutos; *Uso do tempo*: cada aluno administrou o tempo de acordo com as suas necessidades.

4.6 Análise dos dados

A análise dos dados avaliou o desempenho dos estudantes na compreensão das tarefas propostas e as suas justificações. Em cada experimento, realizou-se a contagem de acertos em todas as perguntas, o que ensejou o escore total de acertos. Nas situações em que o experimento possuía alguma diferenciação, como é o caso daqueles em que umas perguntas eram de natureza inversa e outras diretas, realizou-se a contagem de acertos em cada situação. Isso ensejou os escores de acertos para os problemas de inferência direta ou inversa. Esses escores, portanto, foram analisados como o tipo de desempenho dos estudantes nas tarefas.

As justificativas dos Experimentos 1 e 4, aplicados na Inglaterra, e dos Experimentos 5 e 6, realizados no Brasil, são analisadas para identificar os fundamentos que os estudantes davam para as suas respostas aos problemas. De acordo com Nicholls (1978 apud SQUIRE; BRYANT, 2003), a análise das justificações podem constituir importante recurso para se compreender o uso que crianças fazem de compensações inversas. Estende-se essa abordagem para estudantes de 11 a 14 anos.

Para fins de comparação e melhoria na interpretação, transformou-se o somatório de acertos em percentual de acertos. Dessa forma, se o aluno obteve um somatório de dez acertos de um total de dez problemas, ele conseguiu um percentual de 100% de acertos. Em cada experimento são apresentadas as médias e o desvio-padrão do percentual de acertos nas diversas situações, procedendo-se, em seguida, à realização de testes de comparações de médias para a identificação das diferenças estatisticamente significativas.

Para melhor visualização das comparações de médias entre os grupos, apresentam-se estas informações em gráficos de barras e de linhas.

Para identificar diferenças estatisticamente significativas entre as médias de acertos dos alunos nas diversas situações, procedeu-se na seqüência: (1) identificou-se a natureza dos grupos, verificando-se se estes eram independentes ou relacionados (dependentes, pareados) e (2) identificou-se a quantidade de médias a serem comparadas. Quando os grupos eram independentes, usou-se o Teste t independente para duas médias e a análise de variância (ANOVA) para três ou mais médias. Quando os grupos eram dependentes, usou-se o Teste t dependente para duas médias e a ANOVA de medidas repetidas para três ou mais médias. Nas comparações, determinou-se o valor de $p \leq 0,05$ para a determinação das diferenças estatisticamente significativas. Nas situações em que, num mesmo experimento, a comparação de médias também deveria ser realizada por segunda variável, realizou-se uma análise estratificada. Com base no teste de Homogeneidade de variâncias de Levene, foram aplicados os testes de Sheffé, Bonferroni ou Tamhane, com o objetivo de comparar pares de grupos. Os testes de Sheffé e Bonferroni foram aplicados em situações de ocorrência de homogeneidade de variância ($p > 0,05$) e o teste de Tamhane em situações da não ocorrência da homogeneidade de variância ($p < 0,05$).

A organização e a análise estatística dos dados basearam-se no *software SPSS for Windows* na versão 15.0.

4.7 Procedimentos metodológicos

Os procedimentos de pesquisa nas escolas inglesas foram conduzidos de acordo com as normas sobre ética em pesquisa estabelecidas pela Oxford Brookes University. Após a aprovação dos procedimentos de pesquisa pelo Comitê de Ética da Universidade (ver no Anexo B a carta do Comitê de Ética, aprovando os procedimentos da pesquisa), a pesquisadora enviou por *email* uma carta aos professores coordenadores do Ensino Fundamental de várias escolas, explicando os objetivos da pesquisa e solicitando o consentimento para a realização da coleta de dados. As escolas interessadas retornaram o *email* e agendaram um contato inicial entre pesquisadora e professores de Matemática. Nesse primeiro contato, eram explicados mais detalhadamente os objetivos da pesquisa e os critérios necessários para a coleta de dados, como faixa etária dos alunos, procedimentos e tempo requerido. Os professores se colocaram como colaboradores no processo de pesquisa, agendando os momentos de coleta de dados.

Os procedimentos de pesquisa nas escolas brasileiras seguiram os mesmo procedimentos descritos para as escolas inglesas. A única diferença foi quanto à solicitação inicial para conduzir a pesquisa nas escolas. O contato inicial com os coordenadores pedagógicos das escolas brasileiras ocorreu pessoalmente, quando se entregou a carta explicando os objetivos da pesquisa. Foi realizada uma reunião inicial com os professores de Matemática, quando foram discutidos os objetivos da pesquisa, e os passos requeridos para a coleta de dados.

A coleta dos dados realizados na Inglaterra e no Brasil aconteceu em 35 salas de aula de Matemática e administradas durante estas aulas, ou seja, 50 minutos. A quantidade de salas de aula acessadas em cada experimento não foi uniforme. No Experimento 1, as tarefas foram administradas em seis salas de aula num espaço de uma semana, enquanto no Experimento 2 foram acessadas três diferentes salas de aula no período de dois dias. No Experimento 3, as tarefas foram administradas em seis salas de aula, e no Experimento 4, em oito salas de aula. Já no Experimento 5 foram acessadas quatro salas de aula no período de três dias. No Experimento 6, as tarefas foram administradas em quatro salas de aula (duas do 7º ano e duas do 9º ano) em cada escola, totalizando oito.

Os professores introduziam a pesquisadora na sala de aula por ocasião das coletas e permaneciam na sala de aula durante a realização das atividades, embora sem interferir.

Após os professores apresentarem a pesquisadora ao grupo-classe, esta estabelecia um *rapport* com os alunos a fim de proporcionar breve descontração e introduzir os propósitos da sua pesquisa e das tarefas que os estudantes iriam realizar em seguida. Esse *rapport* tinha a duração máxima de cinco minutos e era realizado em duas etapas. 1ª) Após a sua identificação, a pesquisadora introduzia a pergunta *vocês sabem o que significa uma pesquisa?* Após ouvir as respostas de alguns alunos, as realçava no âmbito de uma pesquisa e completava, mencionando que uma pesquisa é realizada quando se pretende aprofundar o estudo de algum tema de interesse do pesquisador, buscando responder a uma pergunta original. Nesse momento, a pesquisadora introduzia a sua pesquisa, situando o seu trabalho no âmbito da educação matemática e destacando os propósitos da pesquisa, da coleta de dados e da importância da participação dos estudantes no processo. 2ª) Em seguida, a pesquisadora realçava a distinção entre a resolução de problemas num teste e numa pesquisa: no teste, os estudantes são identificados, pois vão receber uma nota, enquanto na pesquisa eles não são identificados, pois o importante é analisar o seu raciocínio e estratégias de resolução dos problemas. Nesse momento, a pesquisadora deixava claro para os alunos que a sua identificação seria preservada em qualquer forma de apresentação dos resultados da pesquisa.

Para cada experimento realizado, os estudantes recebiam um caderno de respostas impresso, onde eles eram solicitados a escrever as respostas e justificativas. Estes continham na primeira página um espaço para os estudantes preencherem, com informações sobre o seu ano na escola, nome da escola, idade, data de nascimento e gênero. Após o contato inicial com o grupo-classe, a pesquisadora distribuía os cadernos de respostas e solicitava que os estudantes preenchessem as informações. Em seguida, os estudantes passavam à realização da atividade, trabalhando individualmente e em seus próprios lugares na sala de aula. A pesquisadora solicitava ainda que, durante a realização da atividade, se algum aluno tivesse algum problema, poderia levantar a mão e então seria atendido.

5 EXPERIMENTOS REALIZADOS NAS ESCOLAS INGLESAS

5.1 Introdução

Dois estudos, Estudos 1 e 2, foram realizados nas escolas inglesas e encontram-se descritos neste capítulo. Cada estudo envolveu dois experimentos, o que resultou num total de quatro experimentos. Estes são descritos nesse capítulo como Experimentos 1, 2, 3 e 4. O Estudo 1 teve como objetivo analisar a influência do tipo de representação e do tipo de informação no raciocínio matemático dos estudantes. Estudantes do *Year* 7 (corresponde em idade ao 7º ano no Brasil) da escola localizada no bairro de Cowley, Oxford, participaram do primeiro experimento. Estudantes do *Year* 7, 8 e 9 (corresponde em idade ao 7º, 8º e 9º ano no Brasil) da escola inglesa localizada no bairro de Headington, Oxford, participaram do segundo experimento. O Estudo 2 teve como objetivo analisar a influência dos tipos de inferências e dos tipos de representação no raciocínio matemático dos estudantes. Estudantes do *Year* 7 e *Year* 9 (corresponde em idade ao 7º e 9º ano no Brasil) das escolas localizadas em Cowley, Holton e Kidlington participaram dos experimentos.

A amostra de estudantes participantes dos Estudos descritos neste capítulo foi proveniente do *Key Stage* 3 (corresponde em idade ao 7º, 8º e 9º ano no Brasil) e uma análise mais detalhada do currículo de Matemática para este estágio de formação escolar será provido. O *Key Stage* 3 é caracterizado por incluir estudantes do *Year* 7 (corresponde em idade no Brasil ao 7º ano), *Year* 8º (corresponde em idade ao 8º ano no Brasil) e *Year* 9 (corresponde em idade ao 9º ano no Brasil). De acordo com as orientações oferecidas pelo *Department for Education and Employment* (Departamento de Educação e Emprego) (DFEE, 2001), é esperado que os estudantes alcancem as aprendizagens dos conteúdos previstos para o Key Satge 3 até a idade de 14 anos. O progresso dos alunos é avaliado por meio de testes realizados pelos professores e de testes nacionais padronizados. O progresso dos estudantes sob a óptica dos professores é publicado em relatórios de avaliação emitidos pela escola e discutidos regularmente com os familiares ou responsáveis. Esses relatórios cobrem o progresso dos alunos em todas as áreas do conhecimento trabalhadas durante o currículo escolar, além do interesse e motivação do estudante, quanto ao trabalho com os colegas e na realização das tarefas de casa. Nos testes nacionais padronizados, apenas o progresso dos alunos nos conteúdos de Inglês, Matemática e Ciências é avaliado.

No tocante ao conteúdo de Matemática, o programa de estudos do *Key Stage* 3 (11-14 anos) encontra-se organizado em torno de três seções: *número e álgebra*, *formas*, *espaço e medidas*, e *tratamento de dados*. Nesse estágio, os estudantes são freqüentemente solicitados a usar tabelas e gráficos no ensino de Álgebra e no Tratamento de Dados.

Na seção sobre Álgebra, espera-se que eles aprendam a gerar pares de valores, traçar pontos num sistema de coordenadas, interpretar e construir gráficos de funções lineares com base em problemas da vida real e que completem tabelas de valores. Os estudantes são também requeridos a usar, ler, escrever e falar corretamente o vocabulário pertinente à linguagem de gráficos e funções (ex. par coordenado, ponto, eixos, eixo-*x*, eixo-*y*, variável, inclinação em gráficos de linhas e origem). Tomando como base a análise do livro didático adotado por uma das escolas e de uma observação informal de uma atividade em sala de aula, descrita mais adiante, observou-se uma ênfase nas escolas inglesas em situações que expressam inclinação positiva, e com as variáveis relacionadas numa proporção direta.

A interpretação de gráficos apresentando informações sobre funções lineares é uma atividade comumente endereçada aos estudantes do 7º ano; estes são encorajados a ler pontos, a estimar a importância prática de pontos intermediários, e a descrever como as variáveis estão relacionadas. Os estudantes do 8º ano são encorajados a traçar gráficos simples, apresentando uma relação entre distância e tempo, enquanto se espera que, ao término do 9º ano, os estudantes sejam também capazes de resolver problemas diretos envolvendo o cálculo da velocidade.

Na seção sobre o Tratamento de Dados, espera-se que os estudantes do *Key Stage* 3 (11-14 anos) sejam capazes de: ler um problema apresentado por meio de métodos estatísticos; identificar questões que possam ser exploradas no problema; identificar as possíveis fontes de dados, planejando como coletá-los e organizá-los; processar e representar dados usando tabelas, gráficos e diagramas, interpretando essas ferramentas e formulando inferências. Dentro desse tópico, espera-se que ao final do 7º ano os estudantes sejam capazes de elaborar tabelas de freqüências para apresentar dados provenientes de tipos diferentes de pesquisa. Com base nesse mesmo tópico, espera-se que os estudantes do 8º e 9º anos possam não apenas planejar todo o trabalho inicial de uma pesquisa estatística, mas também elaborar, ler e comparar as células numa tabela de contingência usada para informar diferentes tipos de dados.

O Currículo Nacional recomenda que, durante o *Key Stage* 3, os estudantes sejam ensinados com o suporte de tarefas que os encoraje a usar recursos tecnológicos apropriados para informar e comunicar dados, como é o caso das planilhas eletrônicas (*spreadesheets*), bases de dados e pacotes pedagógicos envolvendo Geometria e gráficos. Esse processo é viabilizado com o uso apropriado dos recursos disponibilizados pelo *Information and Communications Technology* (ICT), que, além de disponibilizar equipamentos (computadores, impressoras, projetores) e materiais pedagógicos (pacotes gráficos), propiciam o treinamento dos professores no uso do material.

Concomitante ao ICT, diferentes livros de Matemática são oferecidos como recurso de ensino e aprendizagem. O livro e o guia de revisão editado por Parsons (2003a, 2003b) constituem recursos didáticos usados nas escolas inglesas onde foram realizadas as coletas de dados. O guia de revisão, no conteúdo sobre a conversão de medidas, oferece um método direto para os estudantes efetuarem as atividades. A resolução da questão *quantos quilômetros tem 50 milhas?* Pode ser obtida com a manipulação direta entre os valores nos eixos e a sua projeção espacial no gráfico da função (linha da função) representada no sistema de coordenadas. Para tanto, os estudantes são solicitados a desenhar uma linha reta que parta verticalmente do valor *50* do eixo das *milhas*; quando essa linha atingir a linha do gráfico da função, o estudante deverá mudar a sua trajetória indo para o eixo dos quilômetros; em seguida, ele encontra o valor *80* que consiste na resposta do problema. Esse método é sumariado nos seguintes passos:

> 1. Trace uma linha que parta do valor de um eixo; 2. Mantenha o traçado até que a linha alcance o gráfico da função; 3. Nesse momento, mude a direção do traçado e vá para o eixo contrário; 4. Leia o novo valor obtido nesse eixo. Esta é a resposta do problema. (PARSONS, 2003a, p. 43, tradução nossa).

Estes procedimentos são oferecidos como método geral, podendo ser usados para fazer conversões de qualquer tipo de medidas apresentadas graficamente, como é o caso das medidas sobre valores monetários (ex. de libras para dólares), sobre distâncias (ex. de milhas para quilômetros) ou sobre volumes (ex. de galões para litros).

Uma observação não participante foi realizada numa sala do nono ano da escola de Kidlington por ocasião da coleta de dados do Experimento 4, descrito mais adiante neste capítulo. Como a aula, imediatamente após a coleta de dados, era também de Matemática, a professora solicitou que a pesquisadora permanecesse na sala para não dispersar os alunos. Em seguida, ela pediu que os estudantes resolvessem um problema sobre funções lineares com inclinação positiva que se encontrava impresso numa ficha de atividades. Inicialmente, a professora desenhou uma tabela simples com alguns valores de *x* já dados e outros não e também um sistema de coordenadas para o desenho posterior do gráfico da função. A professora solicitou que os estudantes fossem calculando os valores de y e, na medida em que eles forneciam esses valores, ela ia completando a tabela. Em seguida, a professora solicitou que os estudantes verbalizassem como ficaria o gráfico da função e pediu um voluntário para elaborá-lo no quadro. Os alunos apreciaram a atividade e aparentemente não apresentaram nenhuma dificuldade em realizá-la.

As escolas que participaram da pesquisa são bem equipadas e as salas de aula possuem computadores, projetores, quadro branco e muitos livros. As paredes possuem ilustrações sobre alguns aspectos dos conteúdos matemáticos trabalhados e também quadros mostrando algumas produções dos alunos em tarefas de casa ou realizadas em sala de aula. As salas são fixas para cada área do conhecimento (Ciências Exatas, Linguagem, Ciências Humanas) e os alunos se deslocam para as diferentes aulas. A jornada escolar tem início às 9 da manhã e término às 15h10min.

Nas escolas inglesas os alunos são alocados em diferentes classes de Matemática, de acordo com o nível de habilidade. Nos experimentos realizados, participaram estudantes de todos os níveis de habilidades.

Compõem as escolas inglesas estudantes de várias partes do mundo. O ambiente escolar conta com um contexto multicultural de aprendizagem. Para lidar com essa diversidade cultural, o Currículo Nacional para os *Key Stage* 3 e 4 determina que,

> Nos seus planejamentos, os professores devem esperar que os estudantes apresentem um elevado nível de resultados; para tanto, eles devem promover oportunidades para que todos consigam alcançar esses resultados, incluindo a questão do gênero, inclusão dos estudantes que possuem a necessidade de educação especial, alunos com deficiências, alunos com todo o tipo de *background* social e cultural, alunos de grupos étnicos diferentes incluindo, viajantes, refugiados e os exilados, e aqueles com diferente *background* lingüístico. (DFEE/QCA, 2007, tradução nossa).

5.2 Estudo 1 – A influência da representação e da informação

5.2.1 Introdução

Neste estudo, a perspectiva teórica de Vergnaud (1983; 1997) e a classificação proposta por Nunes (1997; 2004) para os sistemas de signos na Matemática são analisados de forma sistemática. Considera-se a hipótese de que variações no tipo de representação ou no tipo de informação terão influência no raciocínio matemático dos estudantes.

Duas questões de pesquisas foram respondidas nesse nível de pesquisa: Como diferentes ferramentas de representação usadas para apresentar os mesmos dados numéricos afetam o raciocínio matemático dos estudantes? Como diferentes informações apresentadas pela mesma ferramenta de representação afetam o raciocínio matemático dos estudantes? As respostas para essas questões foram verificadas por meio de dois Experimentos, 1 e 2, os quais se encontram descritos em seguida.

5.2.2 Experimento 1: O efeito de gráficos, tabelas e casos isolados na apresentação de variáveis discretas

5.2.2.1 Objetivo e justificativa

O objetivo deste experimento foi investigar se a forma de apresentação da informação afetava a interpretação que estudantes fazem de variáveis discretas. Variáveis discretas podem ser apresentadas aos estudantes sob diferentes formas. Uma delas consiste em entregar os dados brutos aos estudantes, sem qualquer organização prévia, e permitir que eles organizem a informação com base em suas próprias idéias. A segunda forma consiste em apresentar aos estudantes os dados já organizados, por exemplo, em tabelas ou gráficos.

Considera-se a idéia de que diferentes signos matemáticos evidenciam diferentes propriedades do fenômeno conceitual (VERGNAUD, 1983; 1997; NUNES, 1997; 2004). Entende-se que cada forma de apresentação dos dados possui diferentes características, permitindo variadas coordenações da informação pelos estudantes. Se gráficos e tabelas definem *a priori* a organização da informação, em termos das variáveis e das classificações relevantes do problema, essas características poderão facilitar as devidas formulações para os estudantes estabelecerem relações entre as variáveis.

5.2.2.2 Participantes

Estudantes do Year 8 (corresponde em idade ao 8º ano no Brasil) da escola pública inglesa localizada em Oxford, no bairro de Cowley, participaram do experimento. Ao todo, foram 127 estudantes, 65 garotos (51,2%) e 62 garotas (48,8%), com idades entre 12,7 a 13,8 anos e com uma média de idade de 13,4 anos e 0,30 de desvio-padrão.

5.2.2.3 As tarefas

Na descrição do *design* das tarefas, utilizou-se a estrutura oferecida por Vergnaud (1997) para analisar os aspectos conceituais da informação. Essa estrutura é baseada nos construtos de invariante, situações e representações.

- Invariantes

Os invariantes estão relacionados com a idéia de relações entre variáveis que podem ser elaboradas cm base nos tipos diferentes de problemas, como é o caso de problemas envolvendo probabilidade. A quantificação de probabilidades é um processo que requer a análise e combinação de relações entre casos favoráveis e possíveis de um mesmo conjunto de dados (INHELDER; PIAGET, 1958). Nesse processo, a pessoa deve compreender que a chance de um evento ocorrer é relativa à ordem do tamanho do conjunto de todos os casos (favoráveis e não favoráveis) em relação ao conjunto de casos possíveis e que essa relação não tem um valor absoluto, mas relativo. A natureza do conceito de probabilidade envolve, portanto, a pessoa pensar em termos multiplicativos (relações entre variáveis) em vez de termos aditivos (relações parte-todo).

Inhelder e Piaget (1958) destacam a existência de duas condições para o desenvolvimento de noções sobre probabilidade: a capacidade de a criança formular as combinações que envolvem a classificação da informação; e a habilidade gradual para estabelecer relações entre as variáveis, representadas neste caso pelos casos favoráveis, não favoráveis e os casos possíveis. Essa habilidade para estabelecer relações entre variáveis requer operações lógicas e aritméticas, sendo, portanto, quantitativa.

- Situações

As situações envolveram o trabalho com proporções simples (isomorfismo de medidas) ou proporções duplas (produto de medidas). Nas proporções simples, embora se tenham os quatro casos que podem ser representados numa tabela de dupla entrada, isto é, que representam uma proporção dupla, os valores das variáveis foram controlados de modo que, mesmo com a estrutura das quatro possibilidades, o problema pode requerer o uso de proporção simples. No caso das proporções duplas, a característica dos valores numéricos pode prescindir da influência do tipo de raciocínio dos estudantes. No caso da referência à metade, esta parece facilitar o entendimento (BRYANT; SPINILLO, 1991).

Considerando-se essa estrutura, os estudantes foram solicitados a resolver seis problemas sobre variáveis discretas inseridas nos seguintes contextos: dois problemas sobre *cor de olhos (azul ou preto) e de cabelos (louro ou preto);* dois problemas sobre *produto comprado (CD1 ou CD2) e satisfação com a compra (satisfeito ou insatisfeito)* e dois problemas sobre *formas de renda de um clube (venda de ingressos ou patrocínio) em dois períodos de tempo (janeiro ou fevereiro).*

Os valores das variáveis foram manipulados de modo que apenas os dois problemas que se referiram ao contexto *compra de produtos e o nível de satisfação* apresentaram proporção dupla. A Tabela 2 apresenta o contexto matemático dos problemas utilizados no Experimento 1.

Tabela 2 – Contexto matemático dos problemas utilizados no Experimento 1

Problemas	**Valor das variáveis**	**Situação**
1. Existe uma maior possibilidade de encontrar alunos com cabelos pretos entre os alunos de olhos azuis ou de olhos pretos?	Olhos azuis= 7 casos 3 casos de cabelo louro / 4 casos de cabelo preto Olhos pretos= 7 casos 2 casos de cabelo louro / 5 casos de cabelo preto *Freqüência total é a mesma (7)*	Proporção simples (Controle na quantidade total)
2. Existe uma maior possibilidade de encontrar alunos com cabelos pretos entre os alunos de olhos azuis ou de olhos pretos?	Olhos azuis= 10 casos 6 casos de cabelo louro / 4 casos de cabelo preto Olhos pretos= 7 casos 3 casos de cabelo louro / 4 casos de cabelo preto *Freqüência de cabelo preto é a mesma (4)*	Proporção simples (Controle num tipo de combinação possível)
3. Existe uma maior possibilidade de encontrar alunos contentes com o CD azul ou com o CD prata?	Compraram o CD 1= 12 casos 6 casos apresentam satisfação / 6 casos apresentam insatisfação Compraram o CD 2= 6 casos 3 casos apresentam satisfação / 3 casos apresentam insatisfação *Variação nos valores totais e nas partes das variáveis, com uso de números com referência para metades*	Proporção dupla (Variação dupla no todo e nas partes. Controle na característica dos números)
4. Existe uma maior possibilidade de encontrar alunos contentes com a calculadora azul ou com a calculadora prata?	2 casos apresentam satisfação / 1 caso apresenta insatisfação Compraram a calculadora 2= 6 casos 4 casos apresentam satisfação / 2 casos apresentam insatisfação Compraram a calculadora 1= 3 casos *Variação na freqüência total e nas partes, com uso de números sem referência para metade.*	Proporção dupla (Variação dupla no todo e nas partes. Controle na caracterísitca dos números)
5. Em qual mês a venda dos bilhetes deu, relativamente, mais dinheiro ao clube, em janeiro ou em fevereiro? 6. Em qual mês o patrocínio deu, relativamente, mais dinheiro ao clube, em janeiro ou em fevereiro?	Total de dinheiro em Janeiro= R$10000 R$5.000 casos de venda de ingressos / R$5.000 casos de patrocínio Total de dinheiro em fevereirio=R$6000 R$4.000 casos de venda de ingressos / R$2.000 casos de patrocínio *Controle em parte da freqüência de uma mesma variável.*	Proporção simples

Os problemas foram apresentados aos estudantes na mesma ordem em que aparecem na Tabela 2.

- Representações

Os mesmos problemas foram representados sob a forma de casos isolados, gráficos de barras empilhadas e tabelas de dupla entrada (ver nos Apêndices A, B, C, D e E a representação dos problemas nas três formas de apresentação). Os estudantes foram distribuídos randomicamente para trabalhar com uma dessas três condições. Como os casos isolados requereram a confecção de um aparato mais complexo para ser manipulado pelos estudantes, uma análise mais detalhada desse aparato é provida em seguida.

Para o trabalho com os casos isolados, os estudantes receberam um caderno de respostas e um envelope de cores diferentes com os cartões misturados dentro deles. Eles foram instruídos a resolver os problemas, manipulando os cartões que apresentavam as informações. Os cartões foram produzidos para realçar os atributos das variáveis (por exemplo, a cor dos olhos e dos cabelos), podendo ser quantificados pela freqüência com a qual apareciam na distribuição.

5.2.2.4 Materiais

Cadernos de respostas específicos para cada tipo de condição foram entregues aos estudantes. Os estudantes que trabalharam com gráficos ou tabelas resolveram os problemas com base na leitura das informações impressas nos cadernos de respostas. Os estudantes que trabalharam com os casos isolados manipularam os cartões representando os casos isolados para cada problema; estes lhes eram entregues misturados dentro de envelopes.

5.2.2.5 Resultados

Os resultados serão apresentados em duas seções. A primeira apresenta uma análise do desempenho dos estudantes em função do número de respostas corretas, enquanto a segunda traz uma análise das justificações dadas pelos estudantes. Nas duas seções, é oferecida uma comparação dos resultados em função das condições testadas: gráfico de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada e casos isolados.

- Desempenho dos estudantes

Neste experimento, os estudantes foram solicitados a resolver os mesmos problemas, apenas as formas de apresentação dos problemas variaram. Um total de 43 alunos resolveu os problemas com a informação representada tabularmente, enquanto 45 resolveram os problemas trabalhando com gráficos e 39 com os casos isolados. A resposta dos estudantes para cada problema foi codificada como certa (código = 1) ou errada (código = 0). O desempenho dos estudantes em cada tipo de representação foi comparado com base no cálculo da média do percentual do total de acertos. A Tabela 3 mostra a estatística descritiva relativa aos resultados dessa análise. Observa-se que a média do percentual do total de acertos dos estudantes que trabalharam com tabelas, gráficos ou casos isolados não chega a 50%, quando o esperado seria 100%.

Tabela 3 – Estatística descritiva do percentual do total de respostas corretas por tipo de representação no Experimento 1

Tipos de representação	**N**	**Médias**	**Desvio-padrão**
Tabela	43	*40,4*	*17,6*
Gráficos	45	*40,7*	*22,8*
Casos individuais	39	*28,6*	*17,1*

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Uma análise de variância (ANOVA) de uma entrada foi conduzida sobre os dados para analisar o efeito das formas de apresentação da informação no desempenho dos estudantes, concernente às médias do percentual de respostas corretas. Houve significativa diferença entre as condições, $F= 5{,}10$, $p = 0{,}007$.

Para a comparação entre os pares de médias utilizou-se o teste de comparações múltiplas de Scheffé. Os contrastes revelaram significativas diferenças ($p< 0{,}05$) entre casos e tabelas e casos e gráficos, indicando que os estudantes que trabalharam com tabelas ou gráficos apresentaram um melhor resultado do que os estudantes que trabalharam com os casos isolados. Diferenças entre tabelas e gráficos não foram observadas.

- Justificativas dos estudantes

As justificativas dadas pelos estudantes para cada problema foram analisadas em cada condição pesquisada. Nessa análise, considerou-se o conteúdo das justificações e o raciocínio dos estudantes quando o conteúdo envolveu a quantificação. Numa análise posterior, o raciocínio que os estudantes utilizaram nos problemas de proporcionalidade foram especificados.

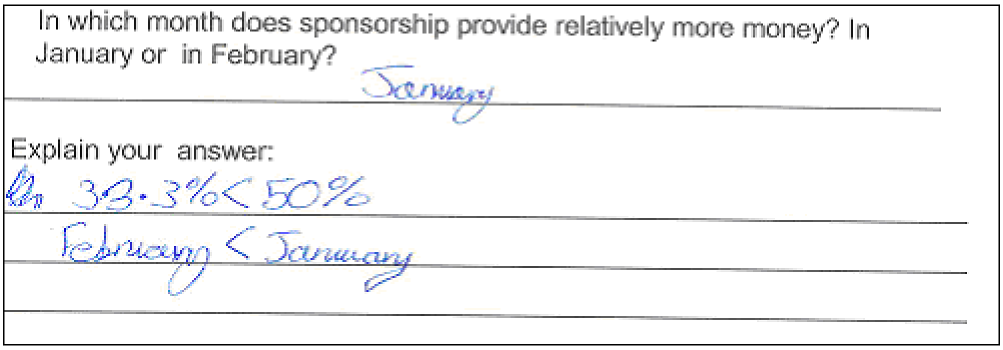
- Conteúdos abordados

Um total de 762 justificações foram analisadas tendo em vista verificar se elas continham ou não referência para as quantidades. Esse total de justificações foi obtido considerando-se o número total de participantes da pesquisa (127) vezes o número possível de justificações para cada aluno (6), logo obteve-se 127*6 = 762. A Tabela 4 apresenta a classificação das justificativas quanto ao conteúdo abordado.

Tabela 4 – Classificação das justificações dos estudantes no Experimento 1 quanto ao tipo de conteúdo

Conteúdos	**Descrição**
Quantifica	Referência explícita para o uso de números, relações ou operações
Não-quantifica	Justifica sem usar quantificação
Não justifica	Deixa em branco, escreve *não sei* ou repete a pergunta

Os estudantes usaram ou não quantificações para explicar os seus julgamentos sobre as tarefas. As Figuras 11 e 12 oferecem exemplos desses tipos de justificações. O primeiro exemplo mostra a justificação escrita de uma garota que trabalhou com gráficos. Ela usa o conceito de porcentagem para estabelecer comparações entre os dados do problema 6 (em qual mês patrocínio deu relativamente mais dinheiro ao clube ?) resolvendo corretamente o problema. O segundo exemplo mostra a justificação de um garoto que trabalhou com tabelas. Ele comenta sobre a relação entre as variáveis no problema 1 (Existe maior possibilidade de encontrar alunos com cabelos pretos entre os alunos de olhos azuis ou de olhos pretos?) e justifica a sua resposta em função da sua experiência em relação ao conteúdo tratado. Ele resolveu o problema corretamente e, uma vez que a sua justificação não se baseou nos aspectos quantitativos da informação, ela foi categorizada como não quantitativa.


In which month does sponsorship provide relatively more money? In January or in February?

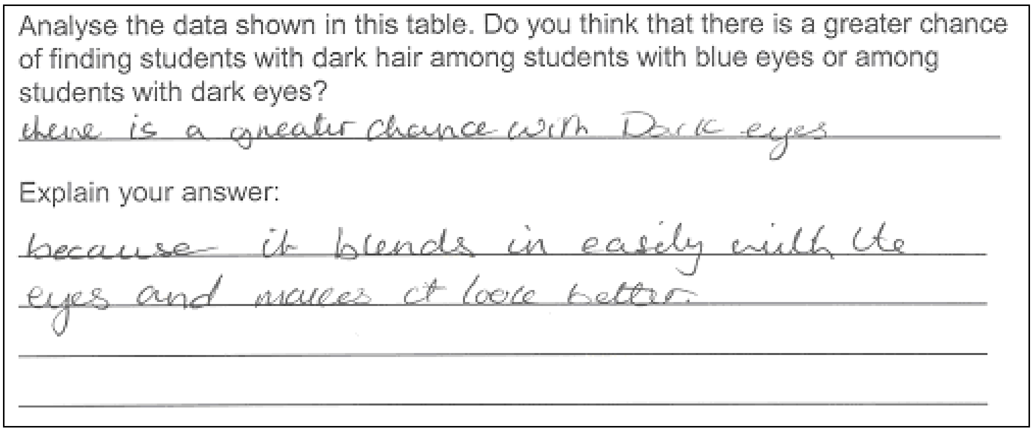
January

Explain your answer:

33.3% < 50%

February < January

Figura 11 – Exemplo de justificação em que o aluno *quantifica*.
Fonte: Justificativa de uma garota no trabalho com gráficos.


Analyse the data shown in this table. Do you think that there is a greater chance of finding students with dark hair among students with blue eyes or among students with dark eyes?

there is a greater chance with Dark eyes

Explain your answer:

because it blends in easily with the eyes and makes it look better.

Figura 12 – Exemplo de justificação em que o aluno *não quantifica*.
Fonte: Justificativa de um garoto no trabalho com tabelas.

A Tabela 5 mostra as freqüências obtidas para cada tipo de representação com a categorização das respostas dos estudantes para o Experimento 1.

Tabela 5 – Freqüência e porcentagem do conteúdo das justificações dos estudantes por tipo de representação no Experimento 1 (N= 762)

	Tipos de representação			
Conteúdo	Casos isolados	Gráficos	Tabelas	Total
Quantifica	205 (87,6%)	229 (84,8%)	221 (85,7%)	655
Não quantifica	6 (2,6%)	15 (5,6%)	6 (5,6%)	27
Não justifica	23 (9,8%)	26 (9,6%)	31 (12,0%)	80
Total	234 (100%)	270 (100%)	258 (100%)	762

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Conforme dados apresentados na tabela acima, 655 ou 86% dos estudantes fizeram referências às quantidades. A minoria dos estudantes, 27 ou 3.5%, oferecem justificações cujo conteúdo não envolvia quantificações, enquanto 80 estudantes (10,5%) não apresentaram justificações. Os grupos não se diferenciaram quanto ao tipo de conteúdo quando analisados em função das condições estudadas. O uso de quantificações em todas as condições investigadas consistiu no padrão de respostas dos estudantes.

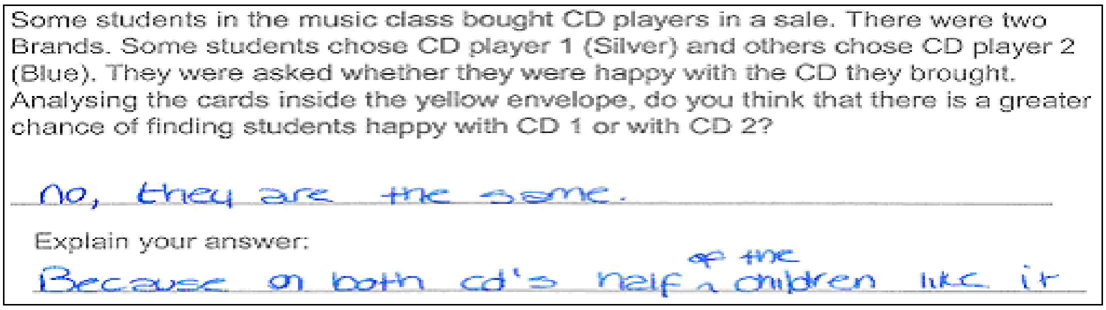
- Raciocínio matemático dos alunos

Esta análise foi conduzida para examinar o tipo de raciocínio que os estudantes empregaram quando resolveram os problemas quantitativamente. O total das justificações em que os estudantes quantificaram (655) foi analisado. A Tabela 6 apresenta uma descrição dos tipos de raciocínio. As Figuras 13, 14 e 15 apresentam exemplos retirados dos protocolos dos estudantes e a Tabela 6, na seqüência, mostra a freqüência e a porcentagem em que eles foram usados em cada condição no Experimento 1.

Tabela 6 – Raciocínio dos estudantes quando abordaram quantitativamente os problemas no Experimento 1

Raciocínio	Descrição	Exemplos
Proporcional	Referência para proporções duplas	“Eles estão satisfeitos igualmente. Nos dois tipos de CDs metade das crianças estão satisfeitas”
Direto	Referência para proporções simples	“Patrocínio deu mais dinheiro ao clube, em Janeiro foi 5000 e em fevereiro foi apenas 2000”
Outros	Justificativas não identificáveis	“Eles são iguais, basta olhar o gráfico”

As Figuras 13, 14 e 15 apresentam três exemplos que ajudam a compreender os tipos de raciocínios que os estudantes usaram. O primeiro exemplo mostra uma garota que trabalhou com tabelas. Ela usa o conceito de *metade* para encontrar a equivalência entre as variáveis no problema 3. Ela corretamente resolve o problema e seu raciocínio foi classificado como proporcional, pois se referiu para a dupla proporção, estabelecendo relações entre as variáveis. O segundo exemplo mostra uma garota que também trabalhou com tabelas. Ela usa os valores apresentados na tabela para justificar a sua resposta no problema 6. Ela resolve corretamente o problema e seu raciocínio foi baseado numa análise direta das proporções simples, sendo classificado como tal. O terceiro problema mostra o caso de um garoto que trabalhou com gráficos. Na resolução do problema 1, o conteúdo da sua justificação foi considerado quantitativo, pois ele faz referência ao gráfico, que é uma forma de representar quantidades. Seu raciocínio, contudo, não pode ser facilmente identificável, o que resultou na classificação do seu tipo de raciocínio na categoria *outros*.

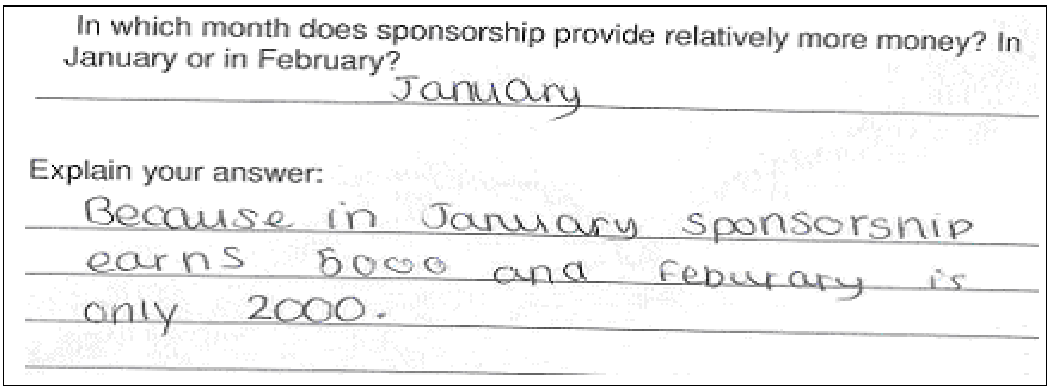

Some students in the music class bought CD players in a sale. There were two Brands. Some students chose CD player 1 (Silver) and others chose CD player 2 (Blue). They were asked whether they were happy with the CD they brought. Analysing the cards inside the yellow envelope, do you think that there is a greater chance of finding students happy with CD 1 or with CD 2?

no, they are the same.

Explain your answer:

Because on both cd's half of the children like it

Figura 13 – Exemplo de raciocínio baseado na *relação entre variáveis*.
Fonte: Justificativa de uma garota no trabalho com tabelas.

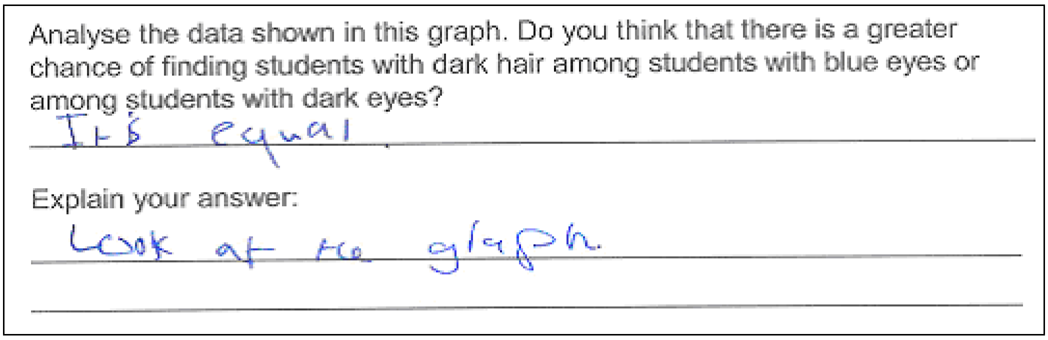

In which month does sponsorship provide relatively more money? In January or in February?

January

Explain your answer:

Because in January sponsorship earns 6000 and Feburary is only 2000.

Figura 14 – Exemplo de raciocínio com *análise direta das proporções* simples.
Fonte: Justificativa de uma garota no trabalho com tabelas.


Analyse the data shown in this graph. Do you think that there is a greater chance of finding students with dark hair among students with blue eyes or among students with dark eyes?

It's equal.

Explain your answer:

Look at the graph.

Figura 15 – Exemplo de *raciocínio não identificável.*
Fonte: Justificativa de um garoto no trabalho com gráficos.

Tabela 7 – Freqüência e porcentagem dos tipos de raciocínio no Experimento 1 (N= 655)

	Condições			
Raciocínio	Casos isolados	Gráficos	Tabelas	*Total*
Proporcional	11 (5,4%)	29 (12,7%)	29 (13,1%)	69
Direto	194 (94,6%)	185 (81,1%)	183 (82,4%)	562
Outros	0 (0%)	14 (6,2%)	10 (4,5%)	24
Total	205 (100%)	228 (100%)	222 (100%)	655

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Como pode ser visto na Tabela 7, de um total de 655 estudantes, apenas 69 ou aproximadamente 11%, usaram o raciocínio proporcional. O uso do raciocínio direto foi freqüente, sendo observado em 562 casos ou 86%. Embora o uso do raciocínio proporcional tenha se dado numa proporção muito pequena, foi duas vezes mais usado pelos estudantes que trabalharam com gráficos ou tabelas do que pelos estudantes que trabalharam com os casos individuais.

Em todas as condições, o uso do raciocínio proporcional foi mais freqüente nos dois problemas de dupla proporção. Esses problemas envolveram as variáveis *compra de produtos (CDs ou calculadoras) e satisfação com a compra (satisfeito ou insatisfeito).* A Tabela 8 mostra a freqüência no uso do raciocínio proporcional nesses dois problemas em relação aos demais problemas, para cada condição.

Tabela 8 – Freqüência e porcentagem de uso do raciocínio proporcional por tipo de problema em cada condição no Experimento 1 (N= 69)

Uso do raciocínio proporcional	**Condições**			
	Casos isolados	Gráficos	Tabelas	Total
Problemas de dupla proporção (3 e 4)	7 (16,3%)	17 (39,5%)	19 (44,2%)	43 (100%)
Problemas de proporção simples (1, 2, 5 e 6)	4 (15,4%)	12 (46,1%)	10 (38,5%)	26 (100%)

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Como pode ser visto na Tabela 8, os estudantes que resolveram os problemas por meio de tabelas e gráficos utilizaram o raciocínio multiplicativo numa maior proporção do que aqueles que resolveram os problemas por meio de casos isolados.

5.2.2.6 Principais resultados do Experimento 1

- O nível de sucesso dos estudantes na resolução dos problemas variou quando os meios usados para apresentar as informações também variaram. A habilidade dos estudantes para relacionar variáveis discretas por meio de gráficos ou tabelas foi melhor do que por meio dos casos isolados.
- O uso de quantificações em todas as condições investigadas consistiu no padrão de respostas dos estudantes.
- A maioria dos estudantes usou com maior freqüência o raciocínio direto do que o proporcional.
- A maioria dos estudantes fez uso do raciocínio proporcional nos problemas de dupla proporção quando comparados com os outros problemas.
- Os estudantes que resolveram os problemas por meio de tabelas e gráficos utilizaram o raciocínio proporcional numa maior proporção do que aqueles que resolveram os problemas por meio de casos isolados.
- Os gráficos e as tabelas potencializaram o desempenho dos estudantes na consideração das variáveis e das relações entre as variáveis.

5.2.3 Experimento 2: O efeito de informações sobre variáveis contínuas nas interpretações gráficas dos estudantes

5.2.3.1 Objetivos e justificativa

O Experimento 2 teve três objetivos: 1) replicar resultados de pesquisas anteriores que documentaram a dificuldade que estudantes de 11 a 14 anos apresentam quando solicitados a interpretar gráficos apresentando informações sobre variáveis contínuas; 2) oferecer uma análise conceitual dos níveis de dificuldades dos estudantes tomando como base as suas ações na resolução dos problemas; 3) explorar uma nova hipótese por introduzir questões onde os estudantes eram solicitados a realizar inferências diretas ou inversas entre a figura do gráfico e a terceira variável.

Estudos prévios identificaram dificuldades que estudantes de 11 a 14 anos apresentam quando solicitados a interpretar gráfico (JANVIER, 1978; KERSLAKE, 1981; CURCIO, 1987; SWATON; TAYLOR, 1994). Janvier (1978), por exemplo, que entrevistou 20 estudantes ingleses, distinguiu informações relacionadas a fatores gráficos locais ou globais; os estudantes interpretavam os fatores locais mais facilmente do que os globais. Swatton e Taylor (1994) que classificaram a informação gráfica como concreta (localizar um ponto), semi-concreta (interpolação) e abstrata (interpretar a relação entre as variáveis), demonstraram que os estudantes achavam mais fácil resolver problemas sobre informações concretas do que abstratas.

Um aspecto comum nesses estudos é a existência de níveis diferentes da informação tratada – informações locais (análise de um ponto), interpolações (análise entre dois pontos) ou informações globais (análise de tendências) – as quais poderiam predizer o grau de dificuldade dos estudantes na interpretação de gráficos. Essa forma de abordagem baseia-se nos aspectos gráficos como forma de apresentação externa da informação.

No presente estudo, é oferecida uma análise conceitual dos níveis de dificuldades dos estudantes na interpretação de gráficos com base nas ações que eles empreendem para considerar a informação tratada. Essa análise se baseia nas perspectivas teóricas propostas por Vergnaud (1983; 1998) e Nunes, Desli e Bell (2003).

Vergnaud distingue problemas de mais de uma variável como pertencendo ao campo das estruturas multiplicativas. Nesses problemas, os estudantes são requeridos a resolver problemas baseados em situações de isomorfismo de medidas ou produto de medidas. No isomorfismo de medidas, as ações dos estudantes concentram-se no estabelecimento de correspondências entre duas variáveis representadas por proporções simples, enquanto no produto de medidas as suas ações estão concentradas nas relações entre variáveis, pois os problemas são de proporção dupla. Em problemas de produto de medidas os estudantes precisam relacionar as duas variáveis, e realizar inferências sobre a terceira.

Vergnaud não analisa se o tipo de questão em problemas de produtos de medidas afeta o tipo de inferência que os estudantes precisam formular. Esse aspecto foi analisado por Nunes Desli e Bell (2003).

Nunes et al. (2003) analisaram se o tipo de questão, direta ou inversa, aplicada em problemas de produto de medidas afetava a compreensão de estudantes da faixa etária de seis a oito anos. Os estudantes eram solicitados a resolver problemas sobre *paladar*, *velocidade* e *custo*, entre outros. As questões diretas ou inversas foram aplicadas ao mesmo tipo de problema. Os resultados indicaram que as crianças de todas as idades tiveram mais dificuldades em resolver as questões inversas do que as diretas.

Estudos que investigam questões de inferências diretas e inversas aplicadas em problemas apresentados graficamente não são comuns na literatura sobre gráficos. Pode-se mencionar o estudo conduzido por Lima (1998) no qual essa pesquisadora selecionou, de uma revista de circulação semanal (VEJA), um gráfico apresentando uma relação inversa. Esse estudo, no entanto, foi exploratório e as inferências requeridas pelos sujeitos não foram analisadas com relação ao tipo de questão utilizada.

No presente experimento, as questões diretas ou inversas são aplicadas ao mesmo gráfico. Nesses problemas não será pedido aos estudantes que leiam os gráficos e façam inferências sobre x e y, e sim que eles façam uma inferência sobe a terceira variável que é introduzida pelo tipo de questão.

5.2.3.2 Participantes

Estudantes ingleses do Year 7, Year 8 e Year 9 (correspondem em idades ao 7º, 8º e 9º ano no Brasil) da escola situada em Headington em Oxford participaram do experimento. Ao todo foram 84 estudantes, com idades variando de 11,2 a 14,1 anos, com média de idade de 12,8 anos e 0,88 de desvio-padrão. A amostra foi composta por 41 rapazes (48,8%) e 43 garotas (51,2%).

4.2.3.3 Tipos de informação tratada

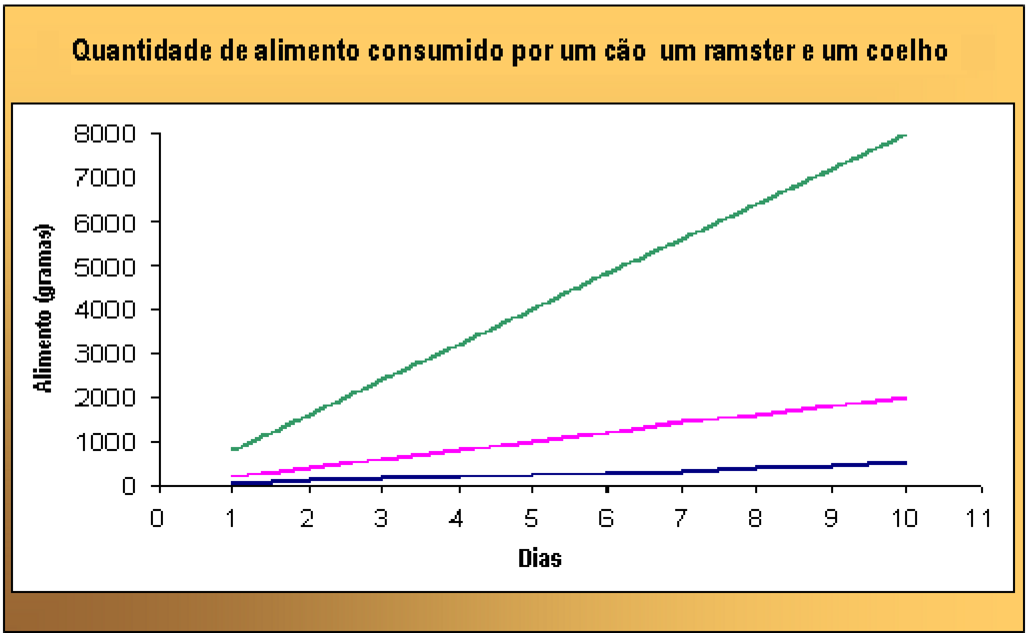
Os estudantes foram solicitados a resolver 20 problemas envolvendo os três tipos de dificuldades discutidas na literatura: cinco questões *locais* (Qual é a altura de Ann?), quatro questões de *interpolação* (Estime a altura da flor na metade do caminho da semana que inicia em 5 de junho) e nove questões *globais* (Durante qual semana a planta cresceu mais rápido?). Duas questões de inferência foram incluídas nas questões globais: uma sobre *inferência direta* (Qual linha você pensa que corresponde à quantidade de comida que um cão, um ramster e um coelho consomem em dez dias?) e a outra sobre *inferência inversa* (Qual moeda tem mais valor quando comparada à libra esterlina, o peso argentino ou o dólar australiano?). Duas questões de *cálculo* foram também adicionadas às tarefas (Em média quantas pessoas existem morando por casa em East Carlton?). A Tabela 9 apresenta os problemas gráficos já classificados nessas categorias.

Tabela 9 – Classificação dos problemas gráficos usados no Experimento 2

Gráficos	Descrição das questões	Classificação
1. Crescimento da planta (The flower growth)	a) Durante qual semana a planta cresceu mais rápido?	Global
	b) Estime a altura da planta na metade da semana que termina em 5 de junho.	Interpolação
	c) O que você acha que aconteceu na semana que inicia em 3 de julho?	Interpolação
	d) Imagine que a planta cresceu na mesma proporção por 5 semanas. Complete o gráfico no seu caderno de respostas para mostrar esse crescimento.	Global
2. Altura e cintura (Height and waist)	a) Qual é a altura de Ann(A)?	Local
	b) Qual é a cintura de Ann(A)?	Local
	c) A altura de Raul é 150cm e sua cintura é 70cm. Coloque uma cruz no diagrama do seu caderno de respostas mostrando onde você pensa que Raul(R) deve estar.	Local
	d) O que você pode dizer sobre a aparência de Charles(C)?	Global
	e) O que você pode dizer sobre a aparência de Dino(D)?	Global
	f) As Alturas das crianças estão relacionadas com as suas cinturas?	Global
	g) O que você pode dizer sobre a altura de uma criança cuja cintura mede 59 cm?	Interpolação
3. Troca de moedas	a) Qual moeda é mais valiosa quando comparada com a libra esterlina?	Global
	b) A moeda russa, o rublo, é mais valioso que o peso argentino. Desenhe uma linha no diagrama do seu caderno de resposta que represente o valor da moeda russa em libras esterlinas.	Global
4.Quantidade de comida para um cachorro, um hamster e um coelho	a) Qual linha você pensa que corresponde a qual animal?	Global
5. O Distrito de Corby	a) Qual é a cidade mais populosa?	Local
	b) Em média quantas pessoas existem morando por casa em East Carlton?	Cálculo
	c) Qual cidade tem casas onde moram mais pessoas, Stanion or Cottingham? .	Cálculo
6. A jornada de John (The John’s journey)	a) De que horas John saiu de casa para ir à discoteca?	Local
	b) O que você pensa que John estava fazendo entre 21h00min e 22h45min?	Interpolação
	c) John fez um percurso caminhando e tomou um ônibus para fazer o outro percurso. Qual percurso ele caminhou?	Global

Os gráficos 1, 2 e 6 referidos na Tabela 9 fazem parte da avaliação conduzida pelo programa Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) (BROWN; HART; KUCHEMANN, 1985) que testou, dentre outras, as habilidades dos estudantes para o trabalho com gráficos.

Os problemas gráficos foram apresentados aos estudantes na ordem em que aparecem na Tabela 9. As Figuras 17 e 18 mostram os Gráficos 3 e 4, os quais apresentam respectivamente os problemas de inferências direta e inversa entre a terceira variável e a figura da linha da função projetada.



TERCEIRA VARIÁVEL

Qual linha você pensa que corresponde a qual animal?

Verde: ____ *Rosa:*____ *Azul:*___

Porque você pensa assim?

____

____

Figura 16 – Gráfico do Experimento 2 apresentando inferência direta.

Observa-se no gráfico que a relação é entre a quantidade de comida (y) ingerida por três diferentes animais em 10 dias (x); no entanto, a questão perguntada – qual linha você pensa que corresponde a qual animal? – introduz a terceira variável, que é a correspondência entre o tipo de animal e as linhas da função no gráfico. Essa correspondência não está dada na figura; o estudante vai precisar construí-la com base em inferências entre a terceira variável e a figura projetada no gráfico. Nesse caso, a linha mais alta na figura, a que tem a inclinação mais acentuada, é diretamente relacionada à pergunta realizada; logo, quanto mais alta a linha, maior será o animal que ela representa. Trata-se de um caso de inferência direta entre a terceira variável e a figura.

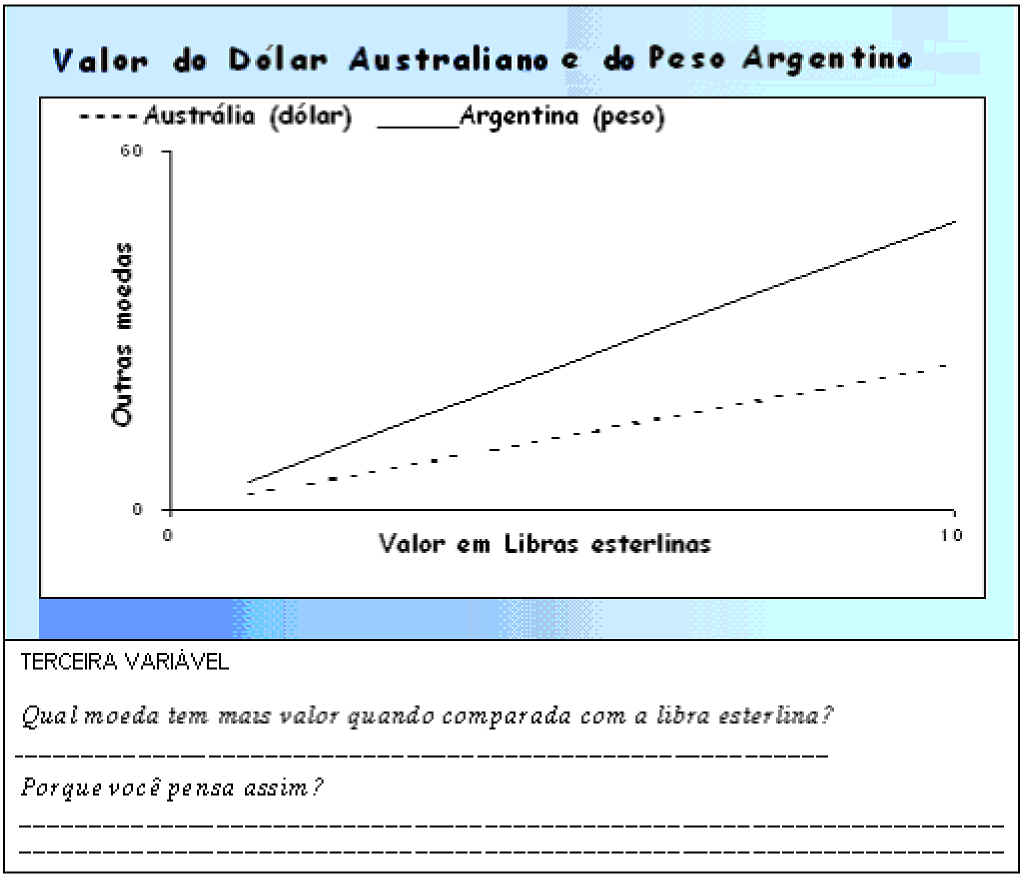


Figura 17 – Gráfico do Experimento 2 apresentando inferência inversa.

O gráfico da Figura 17 mostra que quanto mais você paga pela libra, mais desvalorizada é a moeda. Como resultado, o crescimento da variável que está no gráfico que fica acima na figura é mais rápido; no entanto, isso significa que essa moeda é mais desvalorizada. Nesse caso, a linha que está mais alta na figura não significa que ela tem mais no sentido absoluto das quantidades. Trata-se de um caso de inferência inversa entre a terceira variável e a figura.

5.2.3.4 Materiais

Um computador do tipo *laptop* com *PowerPoint* e um projetor acoplado foram usados para apresentar os gráficos aos estudantes. Projetava-se cada gráfico numa tela branca, acompanhando esse processo com as devidas explanações e leitura das questões (ver no Apêndice F as tarefas gráficas projetadas para o Experimento 2). Um caderno de respostas foi entregue aos estudantes. Os estudantes ouviam as questões que se liam e as respondiam, individualmente, nos seus cadernos de respostas.

5.2.3.5 Resultados

Os resultados estão apresentados em duas seções. Na primeira, tem-se uma análise das dificuldades dos estudantes para cada tipo de questão em termos gerais e por escolaridade. Na segunda seção, o desempenho dos estudantes é analisado apenas em função dos problemas de inferências direta e inversa.

Os problemas de inferência entraram na análise quantitativa conduzida sobre os dados e, numa análise posterior, foram analisados isoladamente para explorar os seus efeitos na interpretação gráfica dos estudantes.

- Comparação das dificuldades dos estudantes nos tipos de questões

A média de percentual de acertos em cada tipo de questão está apresentada na Tabela 10. O maior percentual de acertos foi verificado nas questões de natureza local (89,52%) e nas que requereram o uso de cálculo (79,76%). Questões sobre interpolação e questões globais apresentaram percentual de acerto de, respectivamente, 71,13% e 68,12%.

Tabela 10 – Médias do percentual de acertos por questão no Experimento 2

Questões	**Médias do percentual de acertos**
Local	89,5
Interpolação	71,1
Cálculo	79,8
Global	68,1

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Ao comparar a média do percentual de acertos por meio da ANOVA, de medidas repetidas, verificou-se uma diferença significativa entre médias para F = 37,983 e p = 0,001. O teste de comparações múltiplas de Bonferroni identificou diferença significativa entre os seguintes pares de médias: local e interpolação, local e cálculo, local e global; interpolação e cálculo; e cálculo e global.

- Comparação das dificuldades dos estudantes nos tipos de questões por escolaridade

A média do percentual de acertos em cada tipo de questão por escolaridade dos estudantes está apresentada na Tabela 11 e na Figura 18. Os dados dessa tabela são analisados para cada tipo de questão.

Tabela 11 – Médias do percentual de acertos em cada questão e por escolaridade no Experimento 2

Tipos de questões	**Escolaridade**	**Médias**	**Valor de F**	**Valor de p**
Local	Sétimo	82,5		
	Oitavo	87,6	7,10	0,001
	Nono	96,8		
Interpolação	Sétimo	65,6		
	Oitavo	75,0	1,55	0,21
	Nono	71,8		
Cálculo	Sétimo	60,4		
	Oitavo	86,2	6,18	0,003
	Nono	88,7		
Global	Sétimo	48,6		
	Oitavo	72,0	24,18	0,001
	Nono	79,5		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

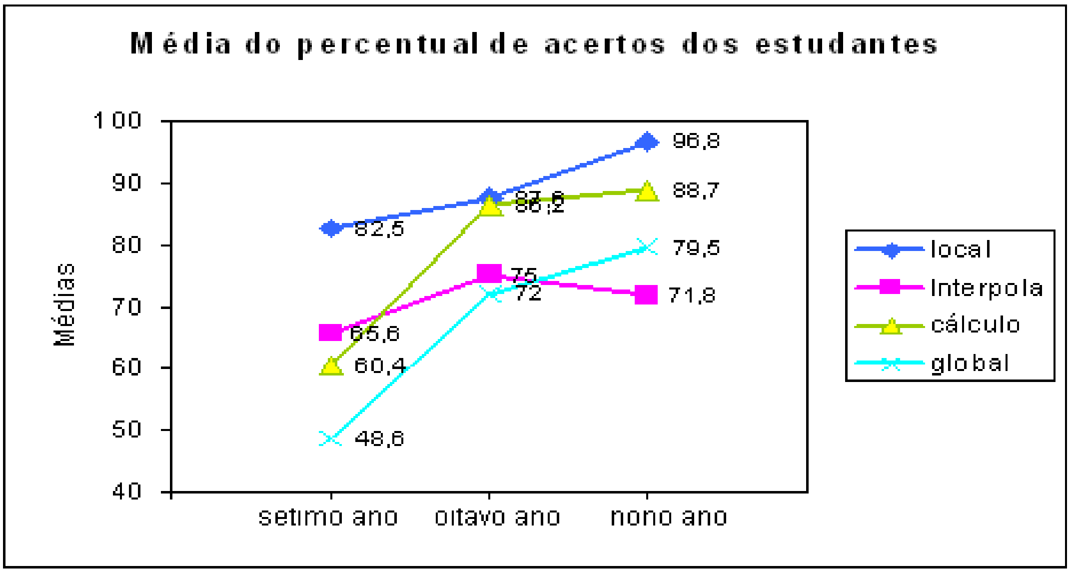


Figura 18 – Médias do percentual de acertos por tipo de questão no Experimento 2
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

- Questões Locais

Numa análise das questões locais em relação aos anos escolares, observa-se que as médias das percentagens de acertos aumentam de acordo com o aumento da escolaridade, tendo-se os respectivos valores para o sétimo, oitavo e nono anos: 82,5%, 87,6% e 96,8%. Para a verificação da existência de diferenças significativas entre as médias, realizou-se a ANOVA de uma entrada, obtendo-se um valor de $F = 7{,}10$, significativo para $p = 0{,}001$.

Na identificação dos pares de médias que apresentaram diferença significativa, realizou-se inicialmente o teste de homogeneidade de variâncias de Levene, que mostrou não existir homogeneidade de variâncias ($L = 13{,}38$ para $p = 0{,}001$). Dessa forma utilizou-se o teste de comparação múltipla de Tamhane. Foram encontradas diferenças significativas somente entre o nono e o sétimo anos e entre o nono e o oitavo anos. As médias do sétimo e do oitavo anos não apresentaram diferenças significativas.

- Questões de Interpolação

Nas perguntas de interpolação, a média de acertos do sétimo ano foi de 65,6%, do oitavo 75% e do nono 71,8%. Apesar dessas diferenças amostrais a ANOVA não identificou nenhuma diferença significativa entre as médias ($F = 1{,}55$ para $p = 0{,}21$).

- Questões de Cálculo

Nas perguntas de cálculo, foram observados os seguintes valores médios: 60,4% para o sétimo ano, 86,2% para o oitavo e 88,7% para o nono ano. Na realização da ANOVA de uma entrada, para a identificação das diferenças entre essas médias, obteve-se valor de $F = 6{,}18$ significativo para $p = 0{,}003$.

Para a identificação de quais pares de médias diferiam entre si, o teste de Levene apresentou a não-existência de homogeneidade de variâncias ($L = 12{,}70$ para $p = 0{,}001$). Dessa forma, utilizou-se o teste de Tamhane para comparações múltiplas que identificou diferença significativa somente entre as médias do sétimo e oitavo anos e entre o sétimo e nono anos. Entre o oitavo e o nono anos não se verificou diferença significativa.

- Questões Globais

Na análise das perguntas de natureza global, verificaram-se os seguintes valores de médias de acertos, respectivamente, para o sétimo, oitavo e nono anos: 48,6%, 72% e 79,5%. A ANOVA de uma entrada identificou a existência de uma diferença significativa entre pelo menos um par de médias (F = 24,18 para p = 0,001)

Procedendo à identificação de qual par de médias diferiam entre si, o teste de Levene mostrou a não-existência de homogeneidade entre as variâncias (L = 11,32 para p = 0,001). Dessa forma, utilizou-se o teste de Tamhane para comparações múltiplas, que identificou diferença significativa somente entre as médias do sétimo e oitavo anos e entre o sétimo e nono anos. Entre o oitavo e o nono anos, não se verificou diferença significativa, sendo essa a mesma relação apresentada na variável cálculo.

- Dificuldades nas inferências diretas e inversas

A maioria dos estudantes resolveu corretamente a questão de inferências diretas quando essas foram comparadas com as questões inversas. A Tabela 12 mostra a média da porcentagem de respostas corretas nas questões inferenciais por nível de escolaridade.

Tabela 12 – Médias do percentual de respostas corretas nas questões inferenciais por escolaridade no Experimento 2

Inferências	**Escolaridade**	**Médias**	**Valor de F**	**Valor de p**
	Sétimo	66,6		
Diretas	Oitavo	89,6	12,0	0,001
	Nono	98,4		
	Sétimo	25,0		
Inversas	Oitavo	32,7	0,61	0,54
	Nono	37,1		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Na análise às perguntas de natureza direta, observa-se aumento constante da média em relação à carreira escolar dos alunos. O sétimo ano apresentou uma média de 66,6% de acertos, enquanto o oitavo ano demonstou 89,6% e o nono ano 98,4%. A ANOVA de medidas repetidas identificou a existência de diferença significativa entre as médias dos três níveis de escolaridade (F = 12,0 para p = 0,001).

Na identificação dos pares de médias que apresentam diferença significativa, o teste de comparações múltiplas de Tamhane verificou existir diferença entre os pares, sétimo e oitavo anos e sétimo e nono anos. O teste de Tamhane foi utilizado pela não-existência de homogeneidade de variâncias (L = 25,27 para p = 0,001).

Nas perguntas de natureza inversa, observam-se os seguintes valores de média por anos de escolaridade: sétimo 25%, oitavo 32,7% e nono 37,1%. Apesar desse aumento das médias em relação ao crescimento da escolaridade, estas diferenças não se apresentaram como significativa por meio da ANOVA (F = 0,61 para p = 0,54). A Figura 19 mostra a média do percentual de acerto nas questões de inferência direta e inversa por escolaridade.

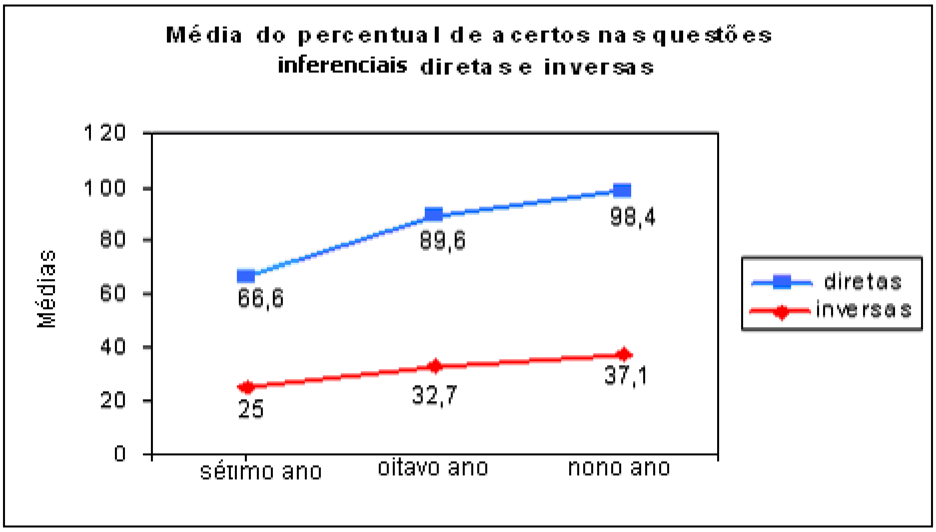


Figura 19 – Médias do percentual de acertos nas inferências diretas e inversas no Experimento 2.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

As estratégias adotadas pelos estudantes para compreender os problemas diretos consistiu de associações entre o tamanho do animal e a altura da linha, conforme exemplos descritos em seguida.

“Verde para o cão porque é a linha com a maior inclinação. Rosa para o coelho porque essa linha vem em seguida e azul para o ramster, porque essa é a linha menos inclinada”. (Aluno do 8º ano).

“Porque o cachorro é maior, logo ele vai comer mais. O coelho é maior que o ramster logo ele vai comer mais. Cachorro>coelho>ramster”. (Aluno da 8ª série).

“Porque o ramster é o menor de todos e o cachorro é o maior, logo o coelho está entre eles”. (Aluno do 7º ano).

As estratégias adotadas pelos estudantes para compreenderem o problema inverso consistiu da análise visual ou numérica da relação entre as variáveis, conforme exemplos descritos em seguida.

"O dólar australiano, porque a linha mostrando o dólar é menor que a do peso". (Aluno do 7º ano).

"O dólar australiano, porque no final do gráfico ele está mais próximo da libra do que o peso". (Aluno do 8º ano).

"O dólar australiano tem mais valor, porque você obtém mais libras com menos dólares". (Aluno do 9º ano).

Uma estratégia comum entre os alunos que erraram o problema inverso foi considerá-lo como um problema direto, analisando o grafico mais alto na figura como estando diretamente relacionado à terceira variável, como pode ser constatado nos exemplos a seguir.

"O peso argentino, porque a linha no gráfico envolve números maiores do que o dólar". (Aluno do 7º ano).

"O peso argentino, porque ele vai mais alto no gráfico; logo ele vale mais dinheiro". (Aluno do 8º ano).

"O peso argentino tem mais valor, porque a linha é mais alta; logo ela provavelmente vale mais". (Aluno do 9º ano).

- Problemas de construção e de interpretação direta *versus* inversa

A Tabela 13 mostra a média do percentual de acertos dos estudantes nos problemas de construção e interpretação nas questões inferenciais direta *versus* inversa.

Tabela 13 – Médias do percentual de acertos nos problemas de construção e interpretação usados no Experimento 2

Tipos de problemas	**Médias**
Construção direta	86,9%
Construção inversa	25,0%
Interpretação direta	85,7%
Interpretação inversa	39,3%

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Observa-se na Tabela 13 que as dificuldades dos estudantes com as questões inversas são mantidas mesmo se os problemas requerem que eles interpretem ou elaborem os gráficos das funções lineares.

5.2.3.6 Principais resultados do Experimento 2

- Os estudantes de todas as séries apresentaram melhor desempenho nas informações locais do que nas informações globais. Esse resultado converge para a distinção do nível de dificuldade na interpretação de gráficos, apresentando variáveis contínuas conforme proposto na literatura, como é o caso daquela oferecida por Janvier (1978).
- O fato de os problemas locais requererem dos estudantes o estabelecimento de ações de correspondências entre as variáveis talvez tenha contribuído para torná-los mais fáceis. Os problemas globais, por sua vez, porque requerem dos estudantes uma análise das relações entre as variáveis, podem ter se tornado mais difíceis. Esses aspectos são consistentes com uma análise conceitual das estruturas multiplicativas como a proposta por Verganud (1983)
- O tipo de problema de proporção, direto ou inverso, entre a terceira variável e a figura, também constituiu importante fator para predizer o nível de dificuldade dos estudantes. O problema de proporção direta foi mais facilmente resolvido do que o de proporção inversa. Esses resultados suportam as conclusões realizadas por Nunes et al. (2003) que examinaram o problema com crianças pequenas.
- O tipo de inferência requerida nos problemas configurou-se como importante fator para predizer as ações dos estudantes, mesmo quando consideradas em tarefas de construção ou interpretação.

5.2.4 Conclusões do Estudo 1

O objetivo do Estudo 1 foi verificar se o tipo de apresentação da informação e o tipo de informação afetariam o desempenho dos estudantes. Considerou-se a hipótese de que variações no tipo de representação ou no tipo de informação teriam influência no raciocínio matemático dos estudantes. As duas questões de pesquisa propostas serão analisadas de modo mais detalhado em relação aos experimentos realizados.

Como diferentes ferramentas de representação usadas para apresentar os mesmos dados numéricos afetam o raciocínio matemático dos estudantes? Verificou-se que o uso de gráficos de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada ou representação pictórica de casos isolados não propiciaram as mesmas bases para os estudantes estabelecerem relações entre variáveis discretas. Os estudantes que trabalharam com gráficos e tabelas tiveram desempenho significantemente melhor nas tarefas do que os estudantes que trabalharam com os casos isolados. Esse resultado confirma a hipótese de que os aspectos simbólicos da informação potencializam ações voltadas para o estabelecimento de relações entre variáveis. Logo, variações na forma de apresentação da informação afetam o desempenho dos estudantes para resolver os mesmos problemas.

Como diferentes informações apresentadas pela mesma ferramenta de representação afetam o raciocínio matemático dos estudantes?

Para responder a essa questão, verificou-se se os aspectos conceituais da informação poderiam predizer o grau de dificuldade dos estudantes nas interpretações de gráficos, apresentando variáveis contínuas. Explorou-se nesse experimento a hipótese de que variáveis contínuas, por possuírem diferente natureza conceitual (correspondência ou relação entre variáveis com problemas diretos ou inversos, poderiam requerer diferentes ações por parte dos estudantes. As questões globais foram significativamente mais difíceis do que as questões locais e das questões onde o cálculo era requerido, no entanto, não diferiram de questões de interpolação. A natureza das questões globais, portanto, parece requerer maior engajamento dos estudantes na resolução dos problemas, no sentido de eles estimarem as quantidades ou relacionarem as variáveis e construírem significados para elas.

Uma análise mais detalhada dos tipos de questões em função da escolaridade mostrou diferenças significativas entre o sétimo e oitavo anos e sétimo e nono anos; diferenças entre o oitavo e o nono anos não foram verificadas. Observou-se ainda que as questões globais diretas foram mais fáceis do que as inversas. Esse resultado requer uma análise das dificuldades nas questões globais relacionadas com as relações inversas.

Destaca-se a possibilidade de alguns tipos de erros no raciocínio sobre as questões inversas decorreram das abordagens visuais, onde os aspectos simbólicos da informação eram tratados de forma análoga, sem uma mediação dos aspectos conceituais envolvidos. Essa análise dos aspectos visuais e conceituais, contudo, requer estudos mais rigorosos que envolvam o controle do tipo de informação envolvida no problema. No Experimento 2, os dois gráficos de linhas introduzidos para analisar o problema das inferências diretas ou inversas apresentaram diferentes conteúdos – consumo de alimento (problema direto) e valor monetário (problema inverso).

Segundo Monteiro (2006), a maioria dos argumentos de professores-estudantes na interpretação de gráficos encontra-se relacionada com as opiniões e conjecturas dos participantes sobre o contexto dos dados. Monteiro analisou as justificações escritas de professores-estudantes ingleses e brasileiros com bse num questionário com questões sobre interpretação de gráficos dos media impressos. Dentre quatro categorias de análise das justificações, a baseada na opinião dos participantes foi a mais freqüente (46%). Existem também evidências de que problemas envolvendo situações sobre valor monetário são difíceis de resolver, pois eles requerem uma compreensão das quantidades como quantidades intensivas (HOWE; NUNES; BRYANT; JAFRI, 2004).

Os problemas relativos ao conteúdo do gráfico podem contribuir para confundir os resultados. Nesse sentido, as dificuldades dos estudantes para formular inferências sobre o gráfico da troca de moedas poderia ser explicada com base no conteúdo do gráfico e não no fato de ela requerer o uso de inferência inversa. Análise mais detalhada sobre a origem das dificuldades nas relações inversas deve incluir um controle sobre o conteúdo do problema. No estudo descrito em seguida, esse aspecto da interpretação de gráficos foi controlado experimentalmente.

5.3 Estudo 2 – A influência dos aspectos visuais, conceituais e representacionais

5.3.1 Introdução

O Estudo 1, discutido previamente nesse capítulo, mostrou que o tipo de representação e o tipo de informação têm efeito no desempenho dos estudantes quando eles são solicitados a considerar relações entre variáveis. O Experimento 1 mostra que as representações simbólicas (gráficos ou tabelas) são mais eficientes do que as representações análogas (casos isolados) para apresentar variáveis discretas. O Experimento 2 mostra que a interpretação dos aspectos globais da informação envolvendo relações inversas, pelo fato de requererem ações sobre os aspectos simbólicos da informação, resultou em maior freqüência de erros.

Nos dois experimentos que compõem o Estudo 2, Experimentos 3 e 4, descritos neste capítulo, os aspectos diretos ou inversos das informações sobre variáveis contínuas e os aspectos simbólicos dos gráficos e tabelas para apresentar esse tipo de variáveis são investigados. Objetiva-se nesse estudo examinar a influência dos aspectos visuais ou conceituais sobre o desempenho e raciocínio dos estudantes.

Alimenta-se a hipótese que se os aspectos conceituais e representacionais da informação tiverem realmente influência no desempenho e raciocínio dos estudantes, como mostrado nos experimentos do Estudo 1, a dificuldade dos estudantes em raciocinar inversamente talvez seja resultante de interações que eles precisam estabelecer entre os aspectos visuais e conceituais.

As seguintes questões são examinadas nesses experimentos: qual a origem das dificuldades para os estudantes estabelecerem inferências inversas entre a terceira variável e a figura projetada em gráficos de linhas? Qual o efeito do uso de gráficos de linhas com quantificação explícita, tabelas de dupla entrada e a combinação de ambas as representações, no desempenho e raciocínio dos estudantes?

5.3.2 Experimento 3: Análise das interações dos aspectos visuais e conceituais

5.3.2.1 Objetivo e justificativa

O objetivo desse experimento foi investigar a origem das dificuldades dos estudantes na formulação de inferências inversas entre a terceira variável e a figura projetada em gráficos de linhas, com inclinação positiva ou negativa.

Nos diferentes contextos de uso de gráficos de linhas (escola, mídia impressa) as relações inversas são convencionalmente apresentadas em gráficos de inclinação negativa; nesses casos, quanto menor a inclinação, maior a taxa de decrescimento das variáveis.

Em gráficos com a inclinação positiva, quanto mais alta a inclinação, maior a taxa de crescimento da variável. O reforço ao uso de gráficos com inclinação positiva na escola pode influenciar os estudantes a usarem leituras automatizadas que mascaram o uso de *regras intuitivas* (STAVY; TIROSH, 2000) tais como, *quanto mais inclinada a linha maior o valor da variável*. As regras intuitivas são acessadas com base em aspectos visuais do gráfico, não incluindo uma análise aos aspectos conceituais da informação.

Talvez a dificuldade com as relações inversas decorra das generalizações que as pessoas fazem no uso de leituras análogas para modelos simbólicos que requerem um nível de compreensão conceitual do problema e não apenas visualizações diretas; isto é, a compreensão das relações inversas talvez requeira uma interação dos aspectos visuais e conceituais.

Os aspectos visuais por estarem relacionados muitas vezes com o uso de *regras intuitivas*, podem constituir o ponto de partida para a compreensão inicial dos estudantes sobre os problemas, principalmente quando estes são apresentados graficamente.

5.3.2.2 Predições

1ª) O desempenho dos estudantes na formulação de inferências diretas será melhor do que na formulação de inferências inversas.

2ª) Um efeito significativo da escolaridade no desempenho dos estudantes será observado nos problemas de inferência inversa com inclinação negativa, pois nesses problemas o tipo de inferência e o tipo de relação entre as variáveis remetem para duplo entendimento de inversão.

5.3.2.3 Participantes

Estudantes do Year 7 e Year 9 (correspondem em idade ao 7º e 9º ano no Brasil) da escola situada no bairro de Cowley em Oxford e das escolas situadas em Holton e Kidlington participaram do experimento. Ao todo foram 186 estudantes, 86 garotos e 100 garotas, com idades que variaram de 11,7 a 14,8 anos, com média de idade de 13,2 anos e 1,07 de desvio-padrão. A escolha do Year 7 e do Year 9 ocorreu em parte para aumentar a probabilidade dos efeitos da idade ou escolarização.

5.3.2.4 Os problemas

Os estudantes foram randomicamente distribuídos para resolver dez problemas apresentados em gráficos de linhas com a inclinação positiva ou dez problemas com a inclinação negativa. A terceira variável foi introduzida por meio de uma questão de comparação e se caracterizou por não incidir diretamente sobre as relações entre as duas variáveis identificadas nos eixos perpendiculares *x e y*; por exemplo, havia no gráfico as variáveis apresentadas (distância, tempo), no entanto, a pergunta era sobre a velocidade.

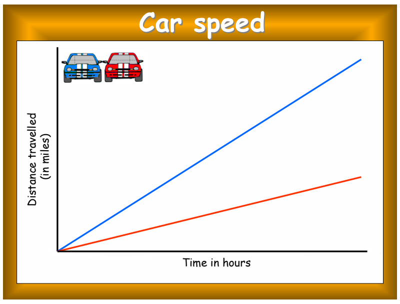
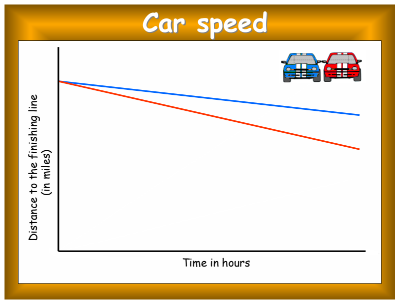
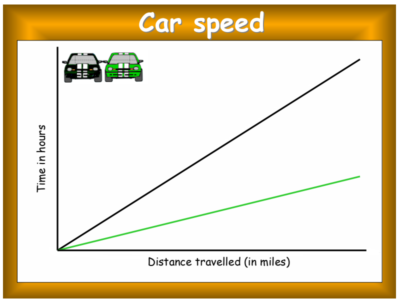
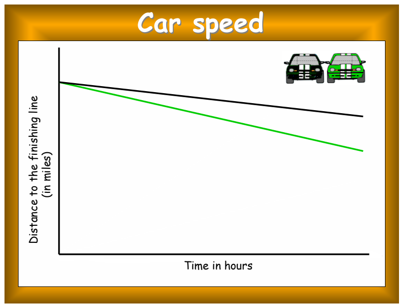
Considerando-se que diferenças encontradas no Experimento 2 confundiram o efeito do tipo de inferência com o conteúdo do gráfico, nesse experimento, problemas envolvendo cinco tipos de conteúdos diferentes foram usados – velocidade, valor monetário, programas de abstinência ao uso de drogas, custo e consumo de gasolina; no entanto, esses conteúdos foram controlados pelos tipos de inclinação e inferência.

Os problemas, portanto, combinaram ortogonalmente inclinações positiva e negativa, com problemas de inferências diretos ou inversos, produzindo quatro combinações de problemas gráficos para cada conteúdo abordado: inclinação positiva-problema direto, inclinação positiva-problema inverso, inclinação negativa-problema direto e inclinação negativa-problema inverso. Os participantes foram alocados randomicamente para trabalhar em cada tipo de inclinação, positiva ou negativa, e a ordem de apresentação dos problemas foi equilibrada, usando-se o método do Quadrado Latino.

A Tabela 14 mostra um exemplo da combinação ortogonal aplicada aos gráficos nesse experimento; o exemplo focaliza o conteúdo da velocidade. Como pode ser visto, embora seja possível variar a apresentação da informação combinando inclinações positiva ou negativa com problemas de inferências direta ou inversa, a discussão é sobre as mesmas três variáveis

– distância, tempo e velocidade – para cada uma das possibilidades. Esse mesmo método foi usado para elaborar os problemas nos cinco conteúdos utilizados.

Tabela 14 – Exemplo da variação ortogonal aplicada aos gráficos nas tarefas do Experimento 3

Inferências	***Inclinações***	
	Positiva	Negativa
Direta	 *Qual carro está indo mais rápido?*	 *Qual carro está indo mais devagar?*
Inversa	 *Qual carro está indo mais rápido?*	 *Qual carro está indo mais rápido?*

A variação das tarefas com inclinação positiva ou negativa e inferências direta ou inversa encontra-se apresentada para cada conteúdo no Apêndice G.

5.3.2.5 Materiais

Dois tipos de cadernos de respostas, um apresentando gráficos com inclinação positiva e outro gráficos com inclinação negativa, foram impressos em folhas de papel A4 e distribuídos entre os alunos.

5.3.2.6 Resultados

Os resultados foram analisados quantitativamente. Comparou-se o desempenho dos estudantes nas situações de inclinação (positiva ou negativa) em cada tipo de inferência (direta ou inversa).

A Tabela 15 e a Figura 20 apresentam as médias do percentual de acertos nas questões de inferências diretas e inversas para cada tipo de inclinação, positiva ou negativa.

Tabela 15 – Médias do percentual de acertos dos estudantes nos problemas do Experimento 3

Problemas	**Médias**
1. Inclinação positiva-inferência direta	62,1
2. Inclinação positiva-inferência inversa	52,4
3. Inclinação negativa-inferência direta	62,0
4. Inclinação negativa-inferência inversa	44,0

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

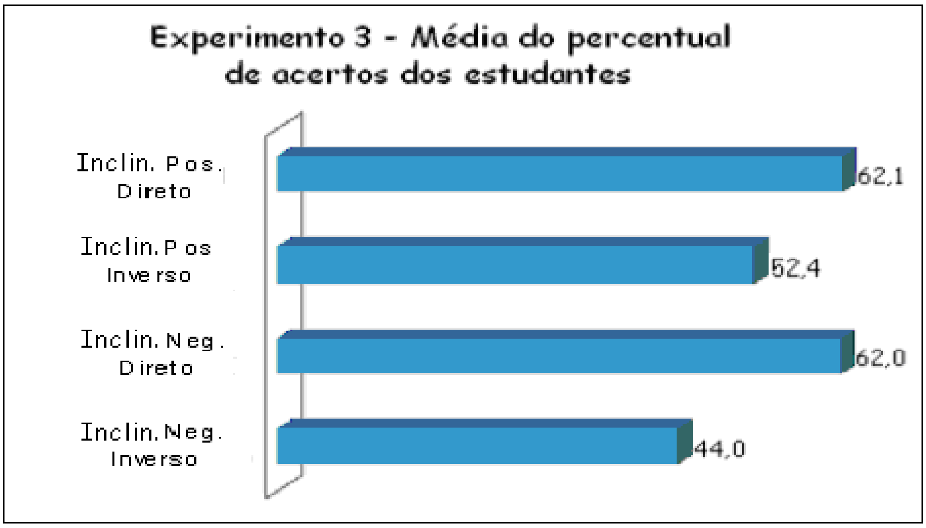


Figura 20 – Médias do percentual de acertos dos estudantes no Experimento 3.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Os alunos que responderam às perguntas diretas (tanto com inclinação positiva quanto negativa) apresentaram maiores médias, com os respectivos valores de 62,1% e 62%. Nas questões inversas, os alunos apresentaram médias menores, 52,4% para inclinação positiva, e 44% para inclinação negativa. A ANOVA de medidas repetidas identificou diferença estatisticamente significativa entre os grupos ($F = 9,53$ para $p = 0,001$).

Antes das comparações múltiplas entre médias, realizou-se o teste de Levene para identificar a existência de homogeneidade de variância. O valor do teste foi de 1,79 para $p = 0,11$, identificando-se a presença da homogeneidade de variâncias. O teste de comparação múltipla de Scheffé identificou a média de percentual de acertos dos estudantes nos problemas 1 (inclinação positiva-inferência direta), diferindo significativamente apenas dos problemas 4 (inclinação negativa-inferência inversa), ambos de natureza inversa. A média do percentual de acertos dos estudantes nos problemas 4 (inclinação negativa-inferência inversa) difere dos problemas 1 (inclinação positiva-inferência direta) e 3 (inclinação negativa-inferência direta), ambos de natureza direta. Dessa forma, verifica-se que o fato de a pergunta ser inversa influencia para uma média baixa de acertos e diminui consideravelmente quando associada a uma inclinação negativa.

Verifica-se que a média de percentual de acertos dos estudantes nos problemas 1 (inclinação positiva-inferência direta) difere significativamente somente dos problemas 2 (inclinação positiva-inferência inversa) e dos problemas 4 (inclinação negativa-inferência inversa), ambos de natureza inversa. A média do percentual de acertos dos estudantes nos problemas 4 (inclinação negativa-inferência inversa) difere dos problemas 1 (inclinação positiva-inferência direta) e 3 (inclinação negativa-inferência direta), ambos de natureza direta. Dessa forma, verifica-se que o fato de o problema ser inverso influencia para uma média baixa de acertos e diminui consideravelmente quando associado a um inclinação negativa.

Ao analisar o escore de acertos relacionados às tarefas cujos gráficos apresentavam inclinações positiva ou negativa, dividiu-se estes resultados de acordo com a escolaridade dos alunos. Então, foi possível comparar os resultados dos grupos por escolaridade de duas maneiras:

(1) uma comparação intergupos, em que pelo Teste-t de amostras independentes, se verificou a existência de significativas diferenças entre os anos escolares em cada combinação de problemas (inclinação positiva-inferência direta, inclinação positiva-inferência inversa, inclinação negativa-inferência direta e inclinação negativa-inferência inversa);

(2) uma comparação intragrupos em que foi realizada uma ANOVA de medidas repetidas para verificar se as médias das quatro combinações de problemas dentro de cada ano escolar apresentavam diferenças significativas.

- Comparação intergupos

A Tabela 16 e a Figura 21 apresentam os resultados da estatística descritiva da comparação intergupos para cada combinação de problemas e para cada ano escolar.

Tabela 16 – Estatística descritiva da comparação intergupos para cada combinação de problemas do Experimento 3

Problemas	**Escolaridade**	**Médias do escore de acertos**	**Valor de t**	**Valor de p**
Inclinação positiva einferência direta	sétimo nono	53,0 71,7	-4,33	0,001
Inclinação positiva e inferência inversa	sétimo nono	47,3 57,7	-1,86	0,06
Inclinação negativa e inferência direta	sétimo nono	55,3 71,4	-2,92	0,005
Inclinação negativa e inferência inversa	sétimo nono	31,0 62,3	-6,57	0,001

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

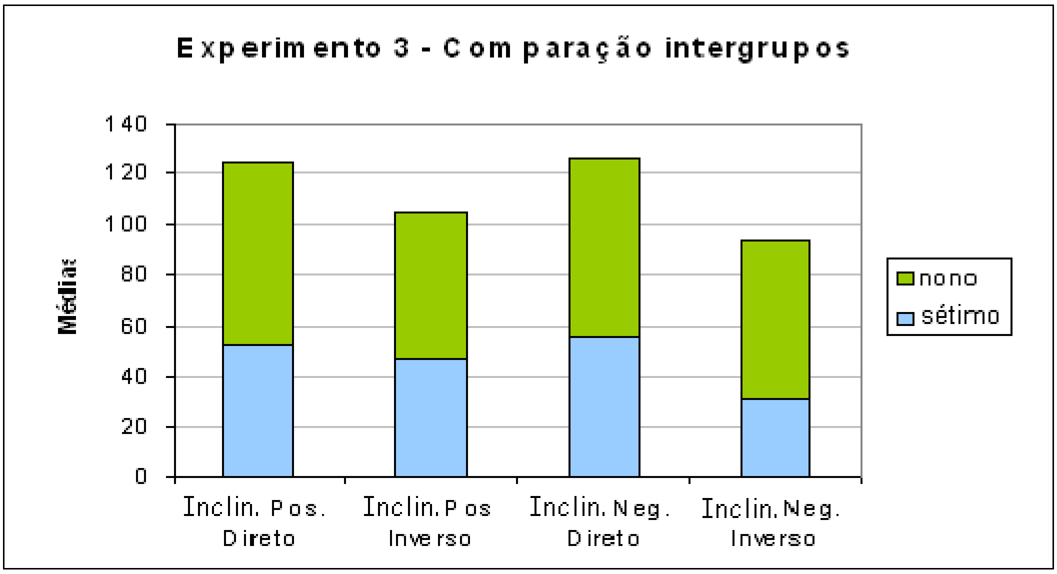


Figura 21 – Comparação intergrupos das combinações inclinação-inferência por série escolar no Experimento 3.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Em todos os tipos de problema, os alunos do nono ano apresentaram maiores médias que os alunos do sétimo ano. Nos problemas de inclinação positiva e inferências diretas, o sétimo ano teve média de 53,0% e o nono 71,7%, sendo que essa diferença foi significativa para $t = -4,33$ e $p = 0,001$. Em relação aos problemas de inclinação positiva e inferência inversa, o sétimo e o nono anos apresentaram médias de, respectivamente, 47,3% e 57,7%, com um valor de $t = -1,86$ para amostras dependentes, não sendo significativa essa diferença para $p < 0,05$, mas quase significativo, pois o valor de p foi de 0,06. As médias do sétimo e nono anos escolares nos problemas de inclinação negativa e inferência direta foram, respectivamente, 55,3% e 71,4%, com diferença significativa para $t = -2,92$ e $p = 0,005$. Por último, nos problemas de inclinação negativa e inferência inversa, o sétimo ano teve média de 31% de acertos e o nono de 62,3% de acertos com diferença signifcativa para $t = -6,57$ e $p = 0,001$.

Ao comparar os valores das médias de percentual de acertos entre os dois anos escolares observa-se que os alunos do nono ano apresentam maiores médias de acertos em todas as categorias. Também se verifica que existe tendência de maiores médias de acertos nas questões de inferências diretas do que nas questões de inferências inversas.

Dessa forma, pode-se afirmar que os alunos possuem maior dificuldade de acerto nas questões inversas. Esta dificuldade foi realçada nos alunos do sétimo ano, nas respostas às questões que, além de requererem inferências inversas, tinham um inclinação negativa.

- Comparação intragrupos

A Tabela 17 e a Figura 22 apresentam os resultados estatísticos da comparação intragrupos para cada combinação de problemas e para cada série.

Tabela 17 – Estatística descritiva da comparação intragrupos para cada combinação de problemas no Experimento 3

Escolaridade	Problemas	Médias	Valor de F	Valor de p
Sétimo ano	Inclinação positiva-inferência direta	52,9	10,66	0,001
	Inclinação positiva-inferência inversa	47,3		
	Inclinação negativa-inferência direta	55,3		
	Inclinação negativa-inferência inversa	31,0		
Nono ano	Inclinação positiva-inferência direta	71,7	3,31	0,02
	Inclinação positiva-inferência inversa	57,7		
	Inclinação negativa-inferência direta	71,4		
	Inclinação negativa-inferência inversa	62,3		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

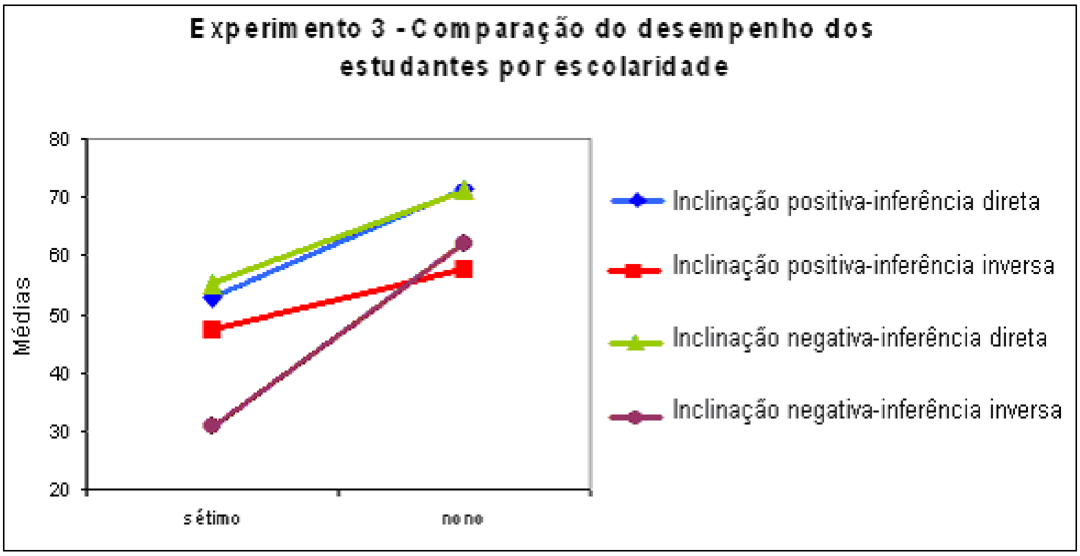


Figura 22 – Comparação intragrupos das combinações inclinação-inferências por série escolar no Experimento 3.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

No sétimo ano, os alunos obtiveram maiores médias de acertos nos problemas de inferências diretas, independentemente do tipo de inclinação da linha. Na resolução dos problemas inversos, estes foram os que apresentaram médias menores. Os grupos que resolveram os problemas de inclinação negativa com inferência inversa foram os que apresentaram a menor média entre os grupos. A ANOVA de medidas repetidas encontrou diferença estatisticamente significativa entre as médias para F = 10,66 e p = 0,001.

O teste de Levene informou não existir homogeneidade de variâncias (L = 3,56 para p = 0,01). Em conseqüência disso, utilizou-se o teste de comparações múltiplas de Tamhane, que identificou diferenças significativas entre os seguintes pares de médias: inclinação positiva-inferência direta e inclinação negativa-inferência inversa; inclinação positiva-inferência inversa e inclinação negativa-inferência inversa; e inclinação negativa-inferência direta e inclinação negativa-inferência inversa. No sétimo ano, os alunos obtiveram médias menores de acertos nos problemas de inclinação negativa com inferências inversas.

Analisando as médias de acertos do nono ano, verifica-se que os alunos obtiveram maiores médias de acertos nas questões diretas, independentemente do tipo de inclinação (da mesma forma que os alunos do sétimo ano). Os alunos que responderam às questões de inferências inversas apresentaram médias menores.

Para a comparação estatística das médias, utilizou-se a ANOVA, que identificou a existência de pelo menos uma diferença entre médias (F = 3,31 para p < 0,03). O teste de Levene informou não existir homogeneidade de variâncias (L = 3,31 para p = 0,02). Em virtude desse fato utilizou-se o teste Tamhane para as comparações múltiplas. Somente nos grupos com inclinação positiva e inferências diretas ou inversas foi encontrada uma diferença de médias estatisticamente significativas. O grupo que respondeu a questões de inclinação positiva-inferência inversa foi o que apresentou menor média, resultado este contrário ao do sétimo ano, mas que não foi significativo.

5.3.2.7 Principais resultados do Experimento 3

- O fato de a inferência ser inversa influenciou para uma média baixa de acertos.
- A média de acertos nas questões de inferências inversas diminuiu consideravelmente quando a pergunta esteve associada a uma inclinação negativa.
- Numa comparação intergupos, os estudantes dos dois anos escolares apresentaram maior dificuldade nas questões inversas do que nas diretas. Esta dificuldade foi realçada entre os alunos do sétimo ano e naqueles que responderam às questões inversas apresentadas com uma inclinação negativa.
- Numa comparação intragupos, os alunos do sétimo ano obtiveram maiores médias de acertos nos problemas de inferências diretas, independentemente da inclinação; na

resolução dos problemas inversos, estes foram os que apresentaram médias menores. Os grupos que resolveram os problemas de inclinação negativa com inferências inversas foram os que apresentaram a menor média entre os grupos.

- Numa comparação intragupos, entre os alunos do nono ano, somente nos grupos com inclinação positiva com inferência direta ou inversa, respectivamente, foi encontrada diferença de médias estatisticamente significativas. O grupo que respondeu os problemas de inclinação positiva e inferências inversas foi o que apresentou a menor média.
- Esses resultados remetem a considerações sobre interações de representações e conceitos, na medida em que se tem nessas situações uma dupla inversão: da forma de representação (inclinação negativa da linha) e do tipo de inferência (inversa).

5.3.3 Experimento 4: O efeito de gráficos, tabelas e ambas as representações na apresentação de variáveis contínuas

5.3.3.1 Objetivo e justificativa

Nesse experimento, buscou-se investigar o efeito de gráficos, tabelas e ambas as representações no raciocínio matemático dos estudantes. Encontra-se na literatura uma discussão sobre abordagens pontuais e variacionais no raciocínio matemático que estudantes precisam estabelecer nas relações entre variáveis contínuas. Nemirovsky (1996) destaca a noção que gráficos sem quantificação são melhores para os estudantes analisarem as relações entre as variáveis. A presença de números afetaria, portanto, o raciocínio matemático dos estudantes. Neste experimento, serão usados gráficos com os valores das variáveis explícitas, em contraste com os gráficos do Experimento 3, cujos valores das variáveis não eram parte dos dados do problema. O objetivo é analisar se a presença de quantificação numérica nos gráficos de linhas pode facilitar o raciocínio matemático dos estudantes nos problemas de inclinação negativa e inferência inversa.

5.3.3.2 Participantes

Estudantes do *Year* 7 e *Year* 9 (correspondem em idade ao 7º e 9º ano no Brasil) das escolas localizadas em Holton e Kidlington participaram do experimento. No *Year* 7, foram 105 estudantes, 45 garotos e 60 garotas; a média de idade foi de 11,9 anos e 0,30 de desvio-padrão. No Year 9, foram 96 estudantes, 45 garotos e 51 garotas; a média de idade foi de 13,86 anos e 0,28 de desvio-padrão.

5.3.3.3 Os problemas

Ao todo foram 20 problemas, os mesmos utilizados no Experimento 3. Nesse experimento, contudo, os problemas foram apresentados por meio de gráficos de linhas, tabelas 2x2 ou ambas as representações, sendo dez problemas com inclinação positiva e dez problemas com inclinação negativa. A terceira variável foi introduzida por meio de uma questão de comparação e se caracterizou, como no Experimento 3, por não incidir diretamente sobre as relações entre as duas variáveis identificadas nos eixos perpendiculares *x e y.*

Em cada tarefa de inclinação positiva ou negativa, cinco problemas eram sobre inferências diretas e cinco sobre inferências inversas. Os estudantes foram distribuídos randomicamente para trabalhar com as tarefas de inclinação positiva ou negativa e com a informação apresentada por meio de gráficos, tabelas ou ambas as representações. Cinco tipos de conteúdos foram usados: velocidade, valor monetário, nível de abstinência às drogas, custo e consumo de gasolina. A ordem de apresentação dos problemas em cada tarefa foi contrabalançada por intermédio do uso da técnica do Quadrado Latino. A Tabela 18 mostra o *design* do Experimento 4.

Tabela 18 – *Design* do Experimento 4

Inferências	**Escolaridade dos participantes**											
	Year 7 (7º ano no Brasil)						Year 9 (9º ano no Brasil)					
	Inclinação Positiva			Inclinação Negativa			Inclinação Positiva			Inclinação Negativa		
	G	T	GT	G	T	GT	G	T	GT	G	T	GT
Inferência direta	05	05	05	05	05	05	05	05	05	05	05	05
Inferência inversa	05	05	05	05	05	05	05	05	05	05	05	05
Total	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

A Figura 23 mostra os três tipos de ferramentas de representação usadas. O conteúdo do exemplo é sobre a velocidade com inferência direta e a tarefa é de inclinação positiva.

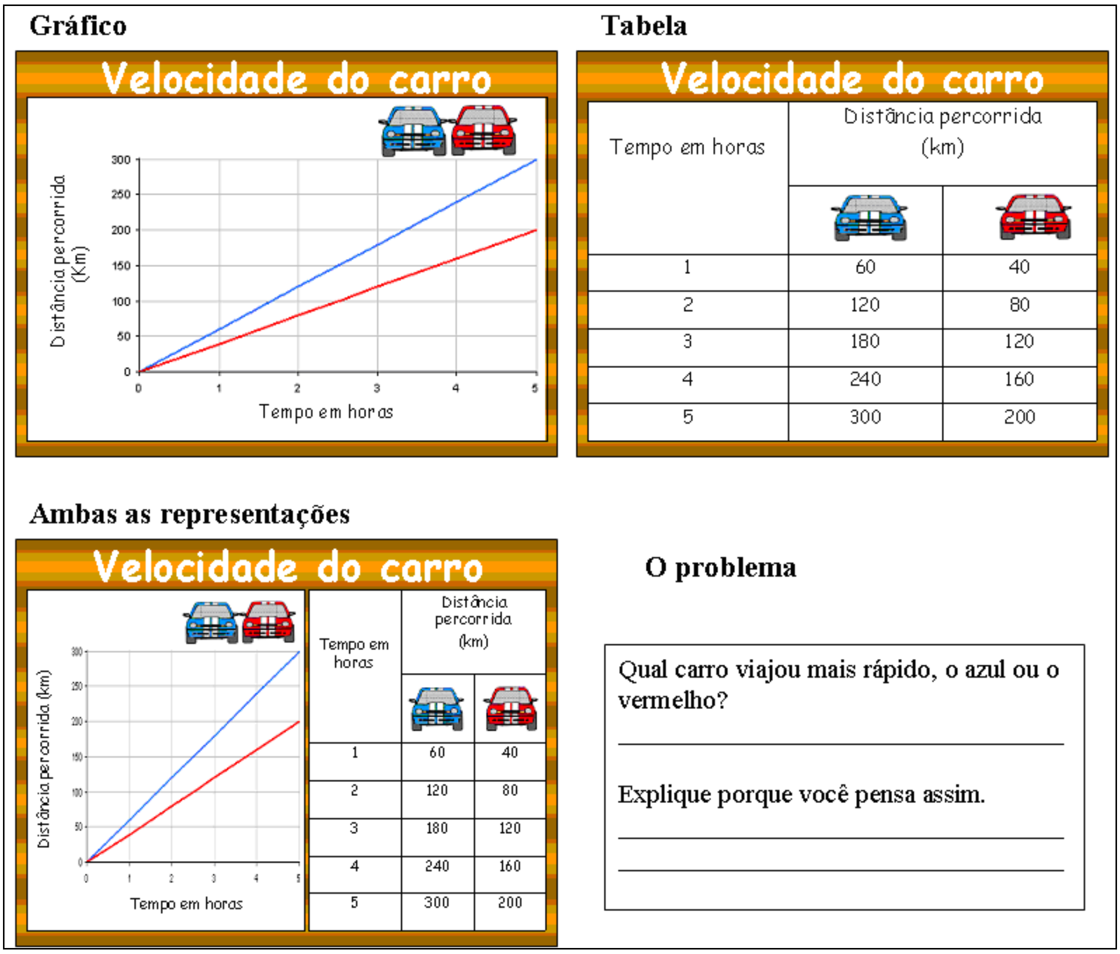


Figura 23 – Tipos de representação usadas no Experimento 4.

A variação completa das tarefas com inclinação positiva ou negativa e inferências direta ou inversa apresentadas por meio de gráficos, tabelas ou ambas as representações encontra-se nos Apêndices H, I, J, K e L, respectivamente, para os conteúdos de velocidade, valor monetário, custo, consumo de gasolina e programas de abstinência ao uso de drogas.

5.3.3.4 Materiais

Seis cadernos de respostas foram usados como material de coleta de dados: inclinação positiva-gráfico, inclinação positiva-tabela, inclinação positiva-ambas as representações; inclinação negativa-gráfico, inclinação negativa-tabela, inclinação negativa-ambas as representações.

5.3.3.5 Resultados

Os resultados serão apresentados em duas seções, a primeira das quais exibe os resultados baseados nos escores de acertos dos estudantes, os quais foram transformados em percentuais para facilitar as comparações. A segunda seção apresenta os resultados baseados no tipo de raciocínio que os estudantes utilizaram.

- Desempenho dos estudantes

Conforme o *design* mostrado na Tabela 18, os alunos responderam dez problemas que poderiam possuir a seguintes características: (1) serem diretos ou inversos; (2) terem inclinação positiva ou negativa e (3) serem apresentados por meio de ferramentas de representação diferentes: gráfico, tabela ou ambas as representações.

Na análise geral do escore numérico transformado, a média do percentual de acertos foi de 73,8%, independentemente das características do problema. Quando comparada a média do percentual de acertos entre os problemas de inferência direta e inversa, foram obtidas as respectivas médias de 76,4% e 71,1%. Apesar da pequena diferença entre as médias (5,3%), esta se mostrou estatisticamente significativa por meio do Teste t de amostras independentes (t = 3,16 e p = 0,002).

Analisando a relação entre os problemas de inferência direta e inversa com inclinação positiva ou negativa, o resultado mostrou que, nos problemas de inferência direta, os estudantes que trabalharam com a tarefa de inclinação positiva tiveram média de 78,0% de acerto e os que trabalharam com a de inclinação negativa, 74,8%. O teste t de amostras independentes não identificou diferença significativa entre estas duas médias para t = 1,10 e p = 0,27. Nos problemas inversos, a média na tarefa de inclinação positiva foi de 74,3% e a de inclinação negativa 67,9% e esta diferença não foi estatisticamente significativa para t = 1,83 e p = 0,06. A Tabela 19 mostra os escores de acertos nos problemas de inferência direta e inversa com inclinação negativa e positiva.

Tabela 19 – Médias do percentual de acertos dos estudantes nos problemas diretos ou inversos por tipo de inclinação no Experimento 4

Inferências	**Inclinações**	**Médias**	**Valor de t**	**Valor de p**
Direta	Positiva	78,0	1,10	0,27
	Negativa	74,8		
Inversa	Positiva	74,3	1,83	0,06
	Negativa	67,9		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Com a ajuda da Figura 24, pode-se perceber que os problemas de inferências diretas tenderam a ter maiores percentuais de acerto, sendo que este valor foi influenciado pelo tipo de inclinação da linha, no entanto, essas diferenças não foram significativas. A combinação de problemas de inferência direta e inclinação positiva apresentaram a maior média e a combinação de problemas de inferência inversa e inclinação negativa apresentou a menor média.

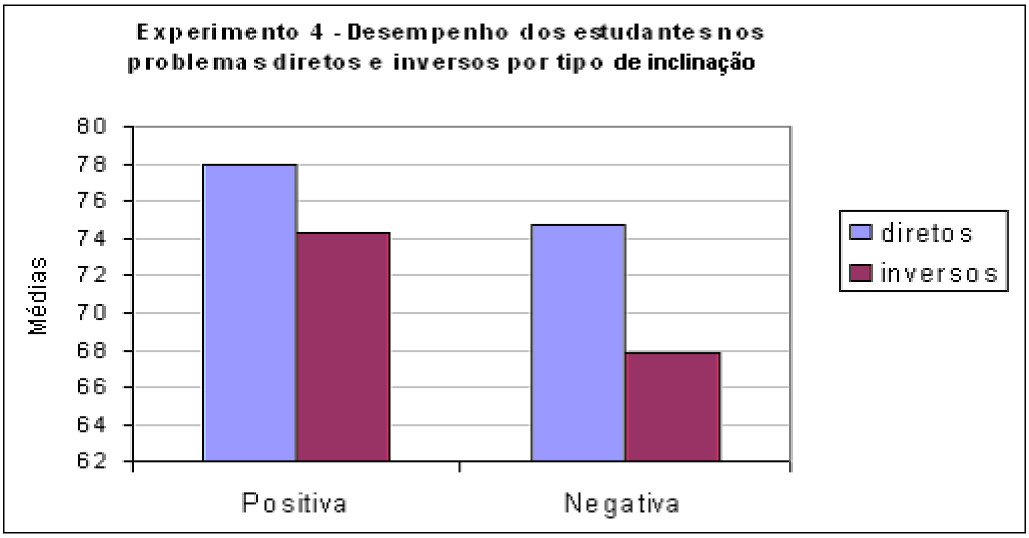


Figura 24 – Desempenho dos estudantes nos problemas diretos e inversos por tipo de inclinação no Experimento 4.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Na análise entre o tipo de inferências (direta ou inversa) e o tipo de ferramenta de representação (gráfico, tabela ou ambas), são estes os resultados: nas diretas, o gráfico apresentou média de 81,8%, tabela 71,2% e ambas 76,2%. A ANOVA identificou diferença significativa entre as médias (F = 4,26 e p = 0,01). O teste de Levene teve um valor de 1,54 para p = 0,21, identificando a existência de homogeneidade de variância. O teste de comparações múltiplas de Sheffé identificou que somente as médias de gráficos e tabela eram significativamente diferentes. Nas inferências inversas, o gráfico teve média de 74,6%, a tabela 67,9% e ambas as representações 70,9%; não se observou diferença estatisticamente significativa entre essas médias (F = 1,23 e p = 0,29). A Tabela 20 mostra um sumário desses resultados e a Figura 25 apresenta uma comparação das médias dos percentuais de acerto.

Tabela 20 – Médias do percentual de acerto dos estudantes nos problemas diretos ou inversos por tipo de representação no Experimento 4

Inferências	**Representações**	**Médias**	**Valor de F**	**Valor de p**
Diretas	Gráfico	81,8		
	Tabela	71,2	4,26	0,01
	Ambos	76,2		
Inversas	Gráfico	74,6		
	Tabela	67,9	1,23	0,29
	Ambos	70,9		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Pode-se verificar que interfere mais no percentual de acertos é o fato de os problemas serem diretos e apresentados na forma de gráfico, e, na mesma perspectiva, tem-se que as médias menores de acertos são nos problemas inversos e apresentados na forma de tabelas. Apesar de a maioria das comparações entre as médias não ter sido significativa, as diferenças amostrais são relevantes.

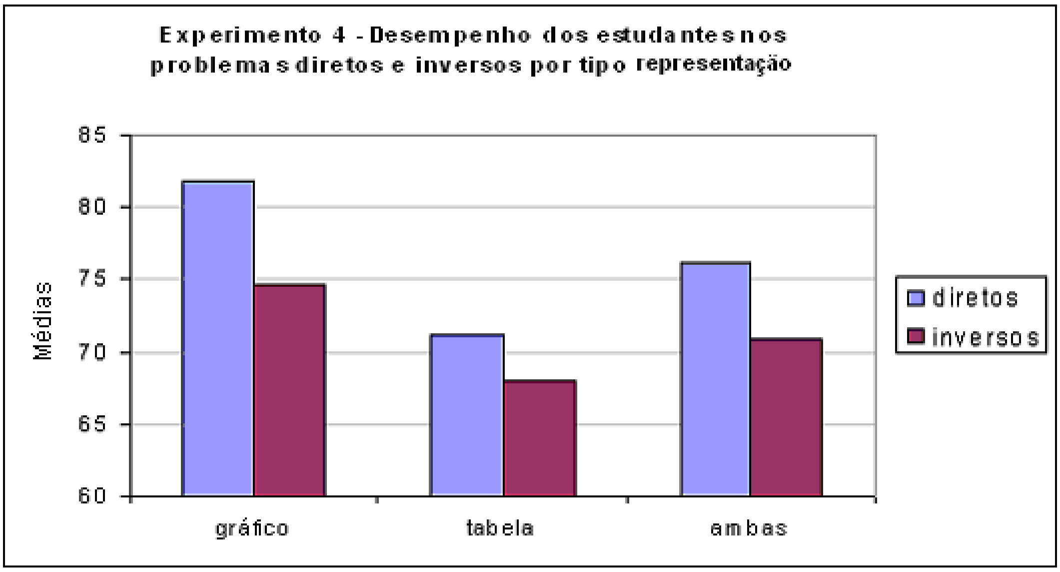


Figura 25 – Desempenho dos estudantes nos problemas diretos e inversos por tipo de representação no Experimento 4.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Procurando identificar melhor a relação entre o tipo de inclinação e o tipo de representação, tanto nos problemas de inferências diretas quanto nas inversas, criou-se a variável i*nclinação-representação*, que traz as seguintes categorias: positiva-gráfico, negativa-gráfico, positiva-tabela, negativa-tabela, positiva-ambos e negativa-ambos. Então, se analisou as médias destas categorias nas perguntas diretas e inversas. A Tabela 21 apresenta as médias do percentual de acerto nessas categorias.

Tabela 21 – Médias do percentual de acertos nos problemas diretos ou inversos por inclinação-representação no Experimento 4

Inferências	**Inclinação-Representação**	**Médias**	**Valor de F**	**Valor de p**
Diretas	Positiva-Gráfico	88,0	3,13	0,01
	Negativa-Gráfico	75,0		
	Positiva-Tabela	70,1		
	Negativa-Tabela	71,5		
	Positiva-Ambos	74,7		
	Negativa-Ambos	77,6		
Inversas	Positiva-Gráfico	78,3	1,24	0,29
	Negativa-Gráfico	70,6		
	Positiva-Tabela	72,1		
	Negativa-Tabela	63,6		
	Positiva-Ambos	72,4		
	Negativa-Ambos	69,4		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Nas perguntas diretas, positiva-gráfico teve média de 88,00%, negativa-gráfico 75,0%, positiva-tabela 70,1%, negativa-tabela 71,5%, positiva-ambos 74,7% e negativa-ambas as representações 77,6%. A ANOVA identificou diferença estatisticamente significativa entre as médias ($F = 3{,}13$ para $p = 0{,}01$). O teste de Levene identificou a existência de homogeneidade de variância ($L = 1{,}24$ para $p = 0{,}28$) e o teste de comparações múltiplas de Scheffé somente identificou diferença significativa no par de médias positiva-gráfico e positiva-tabela. Já para as perguntas inversas, têm-se as seguintes médias: positiva-gráfico 78,3%, negativa-gráfico 70,6%, positiva-tabela 72,1%, negativa-tabela 63,6%, positiva-ambos 72,4% e negativa-ambas as representações 69,4%. Não houve diferença estatisticamente significativa entre estas médias ($F = 1{,}24$ para $p = 0{,}29$).

Com as informações apresentadas e com o gráfico da Figura 26, é possível identificar que: (1) nas perguntas diretas, há maiores médias de acertos do que nas questões inversas; (2) em ambos os tipos de inferências (diretas e inversas), a associação inclinação positiva-gráfico apresenta as maiores médias e (3) a associação inferência inversa + inclinação positiva-gráfico apresentou a maior média de acerto e a associação inferência inversa + inclinação negativa-tabela apresentou a menor média.

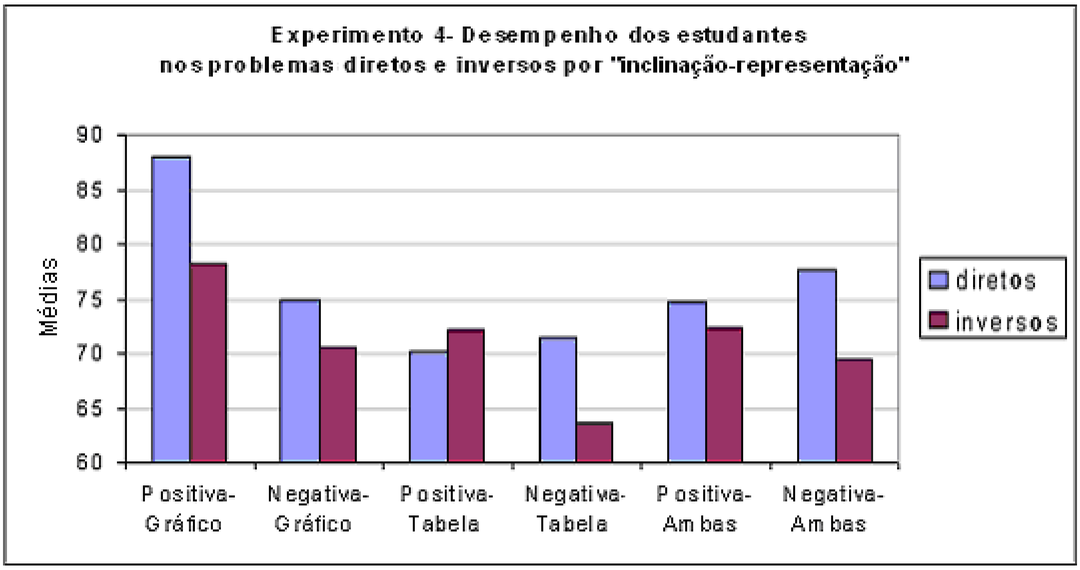


Figura 26 – Desempenho dos estudantes nos problemas diretos e inversos por tipo de i*nclinação-representação* no Experimento 4.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

De acordo com a técnica da Análise de Covariância (ANCOVA)[4], estas relações não são afetadas pela série e idade do aluno com os respectivos valores de F = 0,11 e p = 0,73, para o sétimo ano e F = 0,89 e p = 0,34, para o nono ano.

- Raciocínio dos estudantes

A classificação dos tipos de raciocínio dos estudantes foi baseada nas respostas certas ou errada e nas justificativas que eles deram para cada problema. As suas justificativas foram designadas para apenas um tipo de raciocínio. A Tabela 22 mostra os tipos de raciocínios usados pelos estudantes para justificar as suas respostas, e a Tabela 23 apresenta a freqüência de uso desses raciocínios de acordo com o tipo de ferramenta de representação que eles trabalharam.

---

[4] A ANCOVA é uma extensão do uso da ANOVA (FIELD, 2006). Ela é usada para incluir variáveis que podem predizer os resultados (variáveis dependentes), mas que não é parte da principal manipulação experimental.

Tabela 22 – Classificação dos raciocínios dos estudantes no Experimento 4

Tipos de raciocínio	Descrição das ações dos estudantes	Exemplos de justificativas
Resposta matemática correta, sem números	Analisa corretamente os problemas, sem fazer uma referência explícita para os valores numéricos	"O programa de Hipnoterapia é mais difícil para as pessoas permanecerem, porque a linha está mais embaixo" "O carro rosa é mais barato para dirigir, porque no fim da jornada ele tem a maior quantidade de gasolina deixada lá"
Resposta matemática correta, com números	Analisa corretamente os problemas, fazendo uma referência explícita para os valores numéricos	"O carro azul está indo mais devagar, porque ele está indo a 20mpmin enquanto que o carro vermelho está indo a 30mpmin" "O dollar australiano é mais valioso, porque cerca de 12 pesos equivale a 2 pounds mas 6 dólares equivale a 2 pounds"
Resposta matemática errada, sem números	Analisa incorretamente os problemas, sem fazer uma referência explícita para os valores numéricos	"O peso argentino é mais valioso que o dollar australiano, porque a linha é mais alta" "O real brasileiro tem tido mais sucesso em melhorar o valor da sua moeda, porque existem números maiores em pounds ao final do gráfico"
Resposta matemática errada, com números	Analisa incorretamente os problemas, fazendo uma referência explícita para os valores numéricos	"O peso argentino é mais valioso, porque para 4 libras você consegue 24 pesos, mas apenas 12 dólares"
Referência para conteúdos externos	Refere-se para os contextos não matemáticos para os quais as variáveis estão relacionadas	"A terapia individual resulta em mais saídas, porque é mais fácil com outras pessoas ao seu redor que estão com o mesmo problema. Você provavelmente vai se sentir mais confortável" "O programa de autocontrole é mais efetivo em manter as pessoas, porque as pílulas podem afetar as pessoas de diferentes maneiras"
Não apresenta argumento	A tabela ou o gráfico são usados como argumento; repete a pergunta; diz "eu não sei" ou deixa em branco	"Terapia individual resulta em mais saídas, porque eu olhei no gráfico" "O carro azul viajou mais rápido, porque ele é mais rápido"

Tabela 23 – Freqüência e porcentagem de uso dos tipos de raciocínio por tipo de representação no Experimento 4 (N=2010)

Tipos de raciocínio	Tipos de representação			
	Ambas (GT)	Gráficos	Tabelas	Total
Resposta matemática correta, sem números	304 (44,7%)	293 (43,7%)	231(35,0%)	828 (41,2%)
Resposta matemática correta, com números	149 (21,9%)	188 (28,1%)	186 (28,2%)	523 (26,0%)
Resposta matemática errada, sem números	92 (13,5%)	79 (11,8%)	92 (13,9%)	263 (13,1%)
Resposta matemática errada, com números	28 (4,1%)	33 (4,9%)	66 (10,0%)	127 (6,3%)
Referência para conteúdos externos	10 (1,5%)	33 (4,9%)	26 (3,9%)	69 (3,4%)
Não apresenta argumento	97 (14,3%)	44 (6,6%)	59 (8,9%)	200 (10,0%)
Total	680 (100,0%)	670 (100,0%)	660 (100,0%)	2010 (100,0%)

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

A maioria dos estudantes usou o raciocínio matemático para resolver os problemas. Esse tipo de raciocínio foi identificado em 86,6% do total de justificações (1741 de 2010).

Uma comparação mais específica das freqüências observadas foi conduzida para determinar se a proporção de estudantes usando o raciocínio matemático com ou sem referências para os números poderia ser associada com os tipos de representação que eles trabalharam na resolução dos problemas. Nessa análise, considerou-se o total do raciocínio matemático, com ou sem números, em gráficos e tabelas e em ambas as representações *versus* tabelas. Os resultados serão apresentados por escolaridade dos estudantes.

Espera-se que tabelas possam limitar os estudantes a fazerem explícitas referências para os números, enquanto gráficos permitem que os estudantes façam comparações visuais ou procedam a leituras baseadas no uso explícito de números.

Considerou-se nessa análise o total de raciocínios matemáticos (N= 1741). Os resultados serão organizados pela proporção com a qual estudantes de cada ano escolar fazem referências matemáticas com ou sem números.

- Predição 1 – Raciocínio com ou sem números em gráficos e tabelas

As Figuras 27 e 28 mostram a proporção de uso do raciocínio matemático pelos estudantes, de cada ano escolar, que trabalharam com tabelas e gráficos.

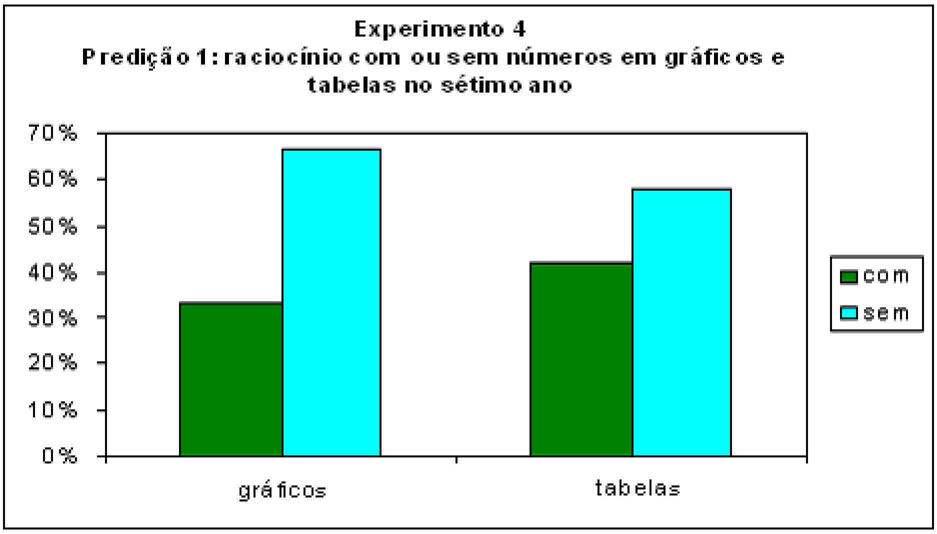


Figura 27 – Raciocínio matemático com e sem números em gráficos e tabelas entre estudantes do sétimo ano no Experimento 4.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

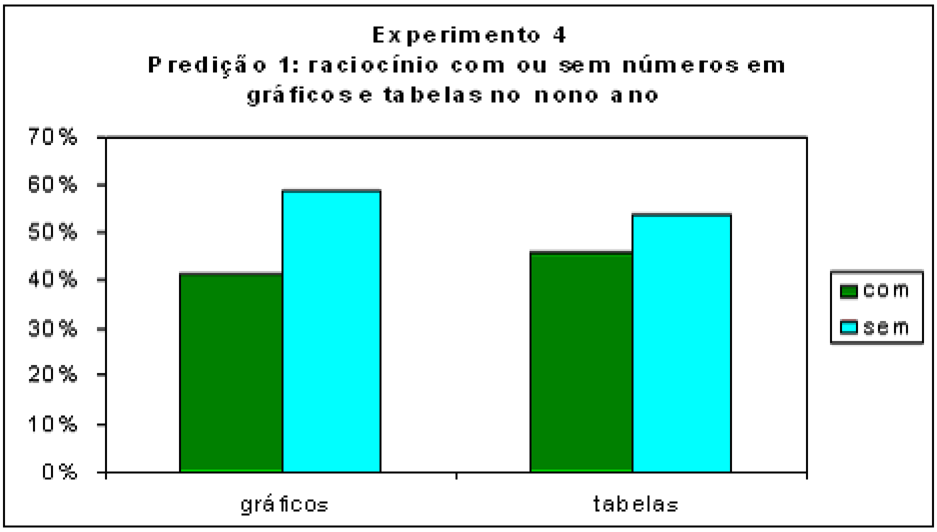


Figura 28 – Raciocínio matemático com e sem números em gráficos e tabelas entre estudantes do nono ano no Experimento 4.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

No sétimo ano, houve significativa associação entre gráficos e tabelas e se os estudantes faziam ou não explícita referências para os números com χ^2 (1) = 4.57, p < 0,05. Entre os estudantes que *raciocinaram sem números*, os que trabalharam com gráficos foram 1,43 vezes mais propensos a usar esse raciocínio do que aqueles que trabalharam com tabelas. Diferenças significativas não foram encontradas entre os estudantes do nono ano (χ^2 (1) = 1.20, p > 0,05).

- Predição 2 – Raciocínio com ou sem números em ambas as representações e tabelas

As Figuras 29 e 30 mostram a proporção de uso do raciocínio matemático pelos estudantes, de cada ano escolar, que trabalharam com ambas as representações e tabelas.

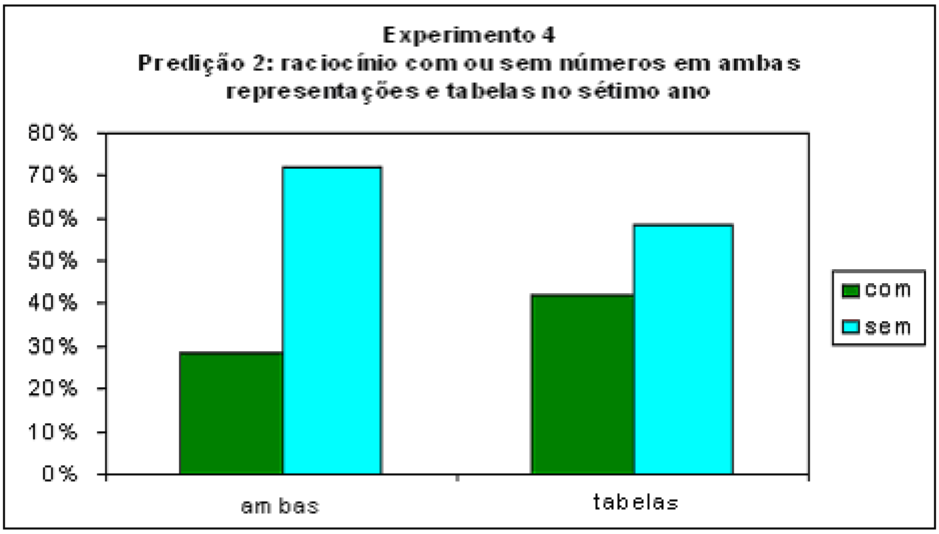


Figura 29 – Raciocínio matemático com e sem números em ambas e tabelas entre estudantes do sétimo ano no Experimento 4.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

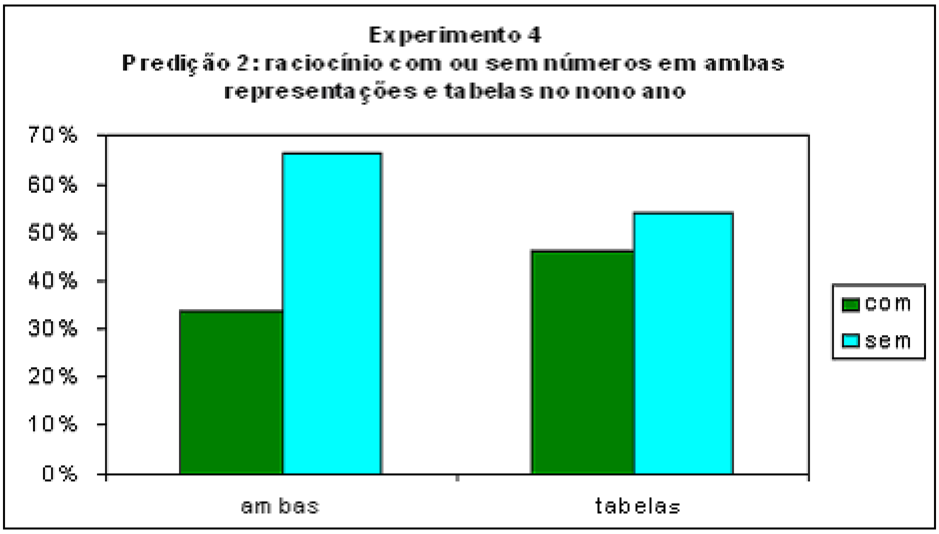


Figura 30 – Raciocínio matemático com e sem números em ambas e tabelas entre estudantes do nono ano no Experimento 4.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Houve significativa diferença no uso do raciocínio matemático com ou sem números numa comparação entre ambas as representações e tabelas entre os estudantes do sétimo ano (χ^2 (1) = 12,22, p < 0,001) e do nono ano (χ^2 (1) = 8,60, p < 0,004). No sétimo ano, entre os estudantes que *raciocinaram sem números*, os que trabalharam com ambas as representações tiveram uma maior probabilidade (1,83 vez) de usar esse raciocínio do que aqueles que trabalharam com tabelas. O mesmo tipo de tendência foi observada no nono ano, tendo-se notado que entre os estudantes que raciocinaram sem números, a probabilidade de uso desse raciocínio foi 1,67 vez maior entre os que trabalharam com ambas as representações, quando comparados aos que trabalharam com tabelas.

5.3.3.6 Principais resultados do Experimento 4

- Os problemas de inferências diretas tenderam a ter maiores percentuais de acerto do que os de inferências inversas, sendo estas diferenças significativas.
- Embora a combinação de problemas de inferência direta e inclinação positiva tenham apresentado a maior média e a combinação de problemas de inferência inversa e inclinação negativa tenha mostrado a menor média, não houve diferenças significativas.
- O tipo de representação parece não ter influído no desempenho dos estudantes. O uso de representações simbólicas, como gráficos e tabelas, considerados isolada ou conjuntamente, não interferiu significativamente no desempenho dos estudantes para considerar relações entre variáveis contínuas.
- Considerando-se a variável inclinação-representação, foram obtidas diferenças significativas apenas nos problemas de inferência direta, comparando-se o desempenho dos estudantes nos pares: inclinação positiva-gráfico e inclinação positiva-tabela. Esse resultado indica que os gráficos com a inclinação positiva possibilitaram melhor desempenho dos estudantes do que o mesmo tipo de informação apresentada por meio de tabelas.
- Não se observou efeito da escolaridade no desempenho dos estudantes.
- O raciocínio matemático, com ou sem referências explícitas para os números, configurou-se em padrão nas análises empreendidas pelos estudantes.
- Um efeito da escolaridade foi observado no tipo de raciocínio dos estudantes. Os estudantes do sétimo ano que trabalharam com gráficos apresentaram uma tendência significativa em analisar os problemas sem fazer referências aos números, quando comparados aos que trabalharam com tabelas. Os estudantes do nono ano não apresentaram preferência para usar um ou o outro tipo de análise, quando trabalharam com gráficos ou tabelas.

- Estudantes do sétimo e do nono anos que trabalharam com ambas as representações apresentaram uma tendência significativa a raciocinar sem fazer referência explícita para os números, quando comparados com aqueles que trabalharam com tabelas.

5.3.4 Conclusões do Estudo 2

O objetivo do Estudo 2 foi investigar a influência dos aspectos visuais ou conceituais sobre o desempenho e raciocínio dos estudantes. Levantou-se a hipótese que se os aspectos conceituais e representacionais da informação tivessem realmente influência no desempenho e raciocínio dos estudantes, como mostrado nos experimentos do Estudo 1. Então, a dificuldade dos estudantes em raciocinar inversamente talvez fosse resultante de interações que eles precisam estabelecer com esses aspectos. As duas questões de pesquisa propostas serão analisadas de modo mais detalhado em relação aos experimentos realizados.

Qual a origem das dificuldades para os estudantes estabelecerem inferências inversas entre a terceira variável e a figura projetada em gráficos de linhas?

Para responder a essa questão, no Experimento 3 foram usados gráficos, sem a quantificação explícita dos valores das variáveis. Utilizou-se ainda de um *design* que combinou ortogonalmente problemas de inclinação positiva ou negativa e com inferência direta e inversa. Esse *design* permitiu controlar um possível efeito do conteúdo do problema observado no Experimento 2. Nos gráficos, os eixos x e y faziam referência às duas variáveis do problema, no entanto, a pergunta era sobre a terceira variável, cujo significado não estava dado explicitamente no gráfico, mas precisava ser elaborado pelos estudantes.

Previu-se nesse experimento a possibilidade de que o desempenho dos estudantes na construção de inferências diretas fosse melhor do que na formulação de inferências inversas. Previu-se, ainda, a idéia de que um efeito significativo da escolaridade no desempenho dos estudantes seria observado nos problemas de inferência inversa com inclinação negativa, pois nesses problemas o tipo de inferência e o tipo de relação entre as variáveis remetem a um duplo entendimento de inversão, tanto visual como conceitual. Considerando-se os resultados, pode-se dizer que as duas predições foram confirmadas. Os estudantes apresentaram melhor desempenho nos problemas diretos do que nos inversos, resultado esse que confirmou a primeira predição. Tanto na comparação inter como na intragrupos, os alunos do sétimo ano tiveram mais dificuldades do que os do nono ano nos problemas de inferência inversa com a inclinação negativa, o que confirmou a segunda predição no tocante a um efeito da escolaridade no desempenho dos estudantes nesse tipo de problemas.

Considerando que a inclinação negativa é uma forma convencional de apresentação de relações inversas entre as variáveis, verifica-se uma tensão entre os aspectos da representação do conceito e o processamento da sua leitura pelos estudantes, influindo tal aspecto na sua percepção sobre a resposta ao problema.

Qual o efeito do uso de gráficos de linhas, tabelas de dupla entrada e ambas as representações, apresentadas juntas, no desempenho e raciocínio dos estudantes?

Os resultados do Experimento 4 reforçam as dificuldades dos estudantes na resolução dos problemas de inferência inversa, em contraste com os de inferência direta que foram mais facilmente resolvidos. Com relação ao efeito da forma de apresentar a informação, apesar das diferenças amostrais no desempenho dos estudantes que trabalharam com gráficos, tabelas e ambas as representações terem sido relevantes nas inferências inversas, não foi observado diferenças significativas entre as médias. Observou-se, no entanto, diferença significativa na resolução das inferências diretas entre os grupos que trabalharam com gráficos e os que trabalharam com tabelas; o desempenho dos estudantes que trabalharam com gráficos foi melhor do que os que trabalharam com tabelas.

Numa tentativa de identificar diferenças criou-se a variável inclinação-símbolo e procedeu-se às devidas comparações. Diferenças significativas, contudo, foram verificadas apenas nos pares de médias: inclinação positiva-gráfico e inclinação positiva-tabela, confirmando a análise anterior.

Numa análise ao raciocínio dos estudantes, pode-se observá-los ocorrendo em seis níveis, e com uma predominância para o uso do raciocínio matemático. Previu-se uma freqüência maior na referência explícita para os números nas tabelas, enquanto as referências visuais e o uso de números poderiam estar mais associados aos gráficos. Essa predição foi verificada parcialmente. Os estudantes do sétimo ano que trabalharam com gráficos apresentaram tendência a raciocinar matematicamente sem números, quando comparados aos estudantes que trabalharam com tabelas. Os estudantes do nono ano que trabalharam com gráficos ou tabelas apresentaram raciocínio matemático com e sem números.

Anteviu-se também que, em ambas as representações, o raciocínio dos estudantes poderia ser assemelhado àqueles usados em gráficos. Essa predição também foi parcialmente verificada, pois o raciocínio dos estudantes de ambas as séries que trabalharam com ambas as representações esteve mais associado ao uso de referência aos aspectos matemáticos sem números.

5.4 Conclusões dos estudos realizados nas escolas inglesas

O uso de representações simbólicas, como os gráficos e tabelas, facilitou o desempenho e o raciocínio dos estudantes quando eles foram solicitados a considerar relações entre variáveis discretas. A apresentação de informações proporcionais em representações que não potencializaram os aspectos proporcionais ou numéricos da informação influencia o desempenho dos estudantes, quando eles precisaram considerar relações entre variáveis discretas. Os resultados obtidos no Experimento 1 evidenciam que diferentes sistemas de representação propiciam a coordenação pelos estudantes de diferentes propriedades matemáticas. Esses resultados são ainda consistentes com a classificação proposta por Nunes (1997; 2004) para os sistemas de signos na Matemática. Nunes classifica os sistemas de signos em Matemática como análogos ou simbólicos; os primeiros realçam as unidades da informação, enquanto os simbólicos comprimem as informações matemáticas básicas, requerendo do estudante uma experiência prévia para a sua leitura e compreensão. Esse resultado foi verificado tanto em relação ao desempenho dos estudantes quanto no tocante ao raciocínio que eles usaram para responder aos problemas. Os estudantes usaram com maior freqüência o raciocínio aditivo, o que pode explicar o elevado índice de erros.

O raciocínio proporcional foi pouco empregado, e, quando verificado, foi mais freqüente entre os grupos que trabalharam com gráficos ou tabelas e nos problemas de proporcionalidade. Dessa forma, a hipótese de que os sistemas simbólicos em Matemática como são o caso de gráficos e tabelas, seriam mais efetivos para os estudantes estabelecerem relações entre variáveis é confirmada. A formação dos processos simbólicos prescinde da leitura e compreensão das regras de uso dos símbolos e das experências de aprendizagens em sala de aula.

Observa-se que, no currículo das escolas inglesas para o *Key Stage* 3, o uso de gráficos e tabelas para apresentar variáveis discretas é parte do conteúdo do tratamento de dados, conforme recomendações do Departmento de Educação e Emprego (*Department for Education and Employment*, 2001). No oitavo ano (*Year* 8), espera-se que os estudantes elaborem, leiam e comparem as células em tabelas de contingência que apresentam situações do tipo *métodos de locomoção e distância para a escola* e que elaborem gráficos de barras com as informações empilhadas. Os aspectos curriculares prescritos e objetificados em sala de aula parecem ter tido uma influência na percepção dos estudantes.

Quando considerados em relação a informações sobre variáveis contínuas, o desempenho dos estudantes com gráficos de linhas apresentou níveis de dificuldades que podem ser explicados com base nas ações que eles empreenderam para justificar os seus julgamentos aos problemas. Como mostrado no Experimento 2, o desempenho dos estudantes nas questões locais ou de cálculo foi diferente das questões globais. O nível de dificuldade com as questões globais remete para ações de estimativas ou de relações entre variáveis. Pode-se concluir, portanto, que a dificuldade com respeito às questões globais representadas graficamente é observada em situações matemáticas que envolvem proporções inversas, mas não naquelas que envolvem proporções diretas.

Os Experimentos 3 e 4 confirmam a tendência observada no Experimento 2 ao mostrar que as informações proporcionais inversas foram as mais difíceis de compreender, quando apresentadas por meio de gráficos de linhas sem ou com referência explícita às quantificações. Em gráficos de linhas sem referência explícita às quantificações, os estudantes do sétimo ano apresentaram mais dificuldade em entender os problemas de inferência inversa combinados com situações de inclinação negativa. A dificuldade dos estudantes do sétimo ano com essa dupla inversão sugere que o estabelecimento de interações dos aspectos análogos e simbólicos das tarefas precisa ser elaborado pelos estudantes e não apenas interpretados; além disso, essa elaboração tem um efeito da escolaridade. Em gráficos de linhas, com referência explícita às quantificações, aqueles com a inclinação positiva são mais eficientes para apresentar as relações diretas, quando comparados ao uso de tabelas com a inclinação positiva. Pode-se concluir, portanto, que os gráficos de linhas ajudam os estudantes a pensar proporcionalmente sobre a relação entre dados contínuos, quando o tipo de inferência requerida é direta.

Não se observou influência do tipo de apresentação da informação sobre variáveis contínuas no desempenho dos estudantes em problemas de inferência inversa. O fraco desempenho dos estudantes nas inferências inversas manteve-se mesmo quando este foi analisado em função da forma de apresentação da informação em gráficos, tabelas ou em ambas as representações. Com a análise do Currículo Nacional das escolas inglesas, e também da observação não participante descrita na introdução deste capítulo, observa-se ênfase nas escolas inglesas em situações com inclinação positiva, nas quais os estudantes são solicitados a interpretar ou formular inferências diretas entre as variáveis. O currículo objetificado em situações concretas nas salas de aula pode contribuir para explicar a dificuldade dos estudantes com as informações proporcionais inversas.

No Experimento 4, um efeito do tipo de apresentação da informação sobre variáveis contínuas foi observado apenas quanto ao tipo de raciocínio usado pelos estudantes. Comparando-se o raciocínio com ou sem números em gráficos e tabelas, notou-se que os estudantes do sétimo ano que trabalharam com gráficos tiveram uma tendência a raciocinar sem fazer referência aos números. Os estudantes do nono ano não apresentaram preferência para usar um ou outro tipo de raciocínio. Comparando-se o raciocínio com ou sem números em tabelas e ambas as representações, comprovou-se que os estudantes do sétimo e nono anos que trabalharam com ambas as representações apresentaram tendência a raciocinar matematicamente sem fazer referência aos números.

No currículo das escolas inglesas, os gráficos de linhas são mais usados para apresentar tendências e variações, enquanto as tabelas são utilizadas para apresentar valores numéricos e essa distinção é enfatizada ao longo do processo de ensino do *Key Stage* 3. No sétimo ano, embora persista essa distinção, o trabalho com gráficos é enfatizado. Talvez essa distinção se torne mais evidente quando ambas as representações forem apresentadas juntas e os estudantes dos dois anos escolares prefiram raciocinar usando os gráficos a tabelas.

Os resultados obtidos nos experimentos realizados nas escolas inglesas evidenciaram as dimensões secundárias e terciárias das ferramentas de representação examinadas. Esses resultados permitem conceber a formação dos processos simbólicos empreendidos por meio de gráficos ou tabelas como algo ao mesmo tempo individual e social. As regras de ação requeridas para os estudantes compreenderem esses artefatos são parte da tradição histórica do currículo da Matemática, no entanto, o contexto escolar onde a atividade matemática se desenvolve parece se configurar como mediador para a forma como os estudantes utilizarão esses artefatos (nível social) e também à atividade cognitiva do aluno (nível individual).

Conclui-se que o relativo nível de dificuldade em interpretar os artefatos analisados possibilita a emergência de uma importante questão: será que diferenças na desempenho e no raciocínio dos estudantes com base nas ferramentas de representação matemática analisadas podem ser generalizadas para estudantes que aprendem em países onde a Matemática é ensinada de forma diferente? Para responder a essa questão, replicaram-se os Experimentos 1 e 4 em escolas brasileiras. O objetivo dessas replicações não foi comparar o desempenho dos estudantes brasileiros e ingleses, mas demarcar a existência de formas diferentes de conceituar o papel das tecnologias e apresentação da informação no pensamento do estudante sobre dados. O Capítulo 6 descreve e analisa o estudo empírico realizado nas escolas brasileiras.

6 EXPERIMENTOS REALIZADOS NAS ESCOLAS BRASILEIRAS

6.1 Introdução

Os Experimentos 1 e 4 realizados nas escolas inglesas e descritos no Capítulo 5, foram replicados em duas escolas brasileiras. O objetivo dessas replicações foi oferecer um diagnóstico do uso das tarefas dos Experimentos 1 e 4 numa realidade diferente. Os experimentos descritos neste capítulo serão denominados Experimentos 5 e 6, como uma forma de dar continuidade aos quatro experimentos realizados. Como a coleta de dados dos Experimentos 5 e 6 foi realizada apenas com uma amostra de estudantes do Ensino Fundamental, apenas os aspectos curriculares dos PCN relativos a esse nível de ensino serão aprofundados.

Os PCN organizam as orientações didáticas e pedagógicas para as faixas etárias correspondentes ao Ensino Fundamental de ensino em quatro ciclos: Ciclo-1 (7-8 anos), Ciclo-2 (9-10 anos), Ciclo-3 (11-12 anos), e Ciclo-4 (13-14 anos). O Ciclo-3 compreende o sexto e sétimo anos, enquanto o Ciclo-4 compreende o oitavo e nono anos. Os PCN enfatizam que o ensino fundamental deve propiciar o desenvolvimento dos alunos como cidadãos, adotando na vida diária atitudes de solidariedade, cooperação e respeito; repudiando as injustiças e respeitando-se mutuamente. Espera-se também que os estudantes se comportem criticamente frente a diferentes situações sociais, usando o diálogo como caminho para mediar os conflitos e alcançar a tomada de decisões coletivas.

A Lei nº11. 274/2006 programa mudanças para o Ensino Fundamental, as quais devem ser acatadas pelos Municípios, Estado e o Distrito Federal até o prazo de 2010. Antes desta lei, o Ensino Fundamental estava organizado em 8 séries (1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª). Depois desta lei, o Ensino Fundamental obrigatório passa a ser organizado em 9 anos. Dessa forma, após a lei tem-se a seguinte organização do Ensino Fundamental: 1º ano, 2º ano, 3º ano, 4º ano, 5º ano, 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano. A nova organização do Ensino Fundamental é adotada nesta tese.

As duas escolas que participaram da coleta de dados apresentaram salas de aula equipadas apenas com quadros brancos de parede e carteiras escolares. As escolas possuem um laboratório de computação que pode ser usados pelos estudantes como parte de projetos desenvolvidos pelos professores para cada ano escolar. A jornada da escola situada no bairro da Torre tem início às 07h20min e finaliza às 12h20min. A escola situada no Campus da UFPE, na Cidade Universitária, possui uma jornada escolar ampliada com as atividades escolares iniciando às 07h20min e se estendendo até às 15h30min.

Português, Matemática, Ciências, Geografia, História, Artes e Educação Física são as áreas do conhecimento que devem ser abordadas durante o período de escolarização no ensino fundamental. Nos terceiro e quarto ciclos inclui-se também o ensino de uma segunda língua. Em cada área do conhecimento é recomendado não apenas o que deve ser ensinado em cada série, mas também como deve ser o ensino. Os PCN sugerem que cada disciplina deve ser ensinada considerando os seguintes temas transversais – ética, saúde, meio ambiente, orientação sexual e pluralidade cultural.

Os PCN realçam a necessidade de mudanças no ensino da Matemática nas escolas do ensino fundamental no Brasil, propondo nesse sentido uma reforma na educação matemática e com base em duas orientações importantes. Primeiro, o ensino deve estabelecer relações entre as observações do mundo real e as representações convencionalmente usadas para apresentar essas informações, como é o caso dos gráficos, tabelas, diagramas ou imagens num sentido amplo. Segundo, o ensino deve propiciar ao aluno a possibilidade de estabelecer relações dessas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesta perspectiva, o ensino de Matemática é organizado em torno de quatro blocos de conceitos e procedimentos: *números e operações*, *espaço e forma*, *magnitudes e medidas* e *tratamento da informação*. Espera-se, no documento oficial, que a organização desses blocos de conteúdos se concretize por meio de projetos realizados pelos professores durante um ano letivo.

No processo didático em Matemática, recomenda-se o uso de ferramentas de representação e de comunicação matemática e, ainda, que os professores criem situações que possam ajudar os estudantes a falar e escrever sobre a Matemática. O papel dos professores de Matemática é realçado como organizadores do conhecimento matemático construído em sala de aula, contrastando essa idéia com a dos professores como detentores de todo o conhecimento que precisa ser apropriado pelos estudantes.

Considerando que a amostra de estudantes que participou dos Experimentos 5 e 6 foi proveniente dos Ciclos 3 e 4, será provida uma análise mais detalhada do currículo de Matemática para estes ciclos.

Nestes ciclos, o ensino de Matemática visa a desenvolver no educando: o pensamento numérico, algébrico e geométrico; a competência para lidar com medidas; e o desenvolvimento do raciocínio proporcional, estatístico e probabilístico. O uso de gráficos e tabelas está mais relacionado com o desenvolvimento do raciocínio proporcional e probabilístico.

O processo de avaliação dos Ciclos 3 e 4 inclui diferentes critérios. Espera-se que os estudantes possam resolver problemas sobre variações envolvendo duas magnitudes que se encontrem em relação proporcional direta ou inversa. Espera-se também que os estudantes representem essas variações por meio do sistema de coordenadas cartesianas. Além dessas habilidades, espera-se ainda que os estudantes se mostrem competentes para ler e interpretar os gráficos e as tabelas correspondentes.

Diferentes livros de Matemática são oferecidos como recurso para o ensino e aprendizagem dos estudantes durante os Ciclos 3 e 4. Os livros intitulados M*atemática para todos*, escritos por Imenis e Lellis (2002a, 2002b, 2002c), configuram em recurso didático oferecido pela escola pública onde parte da coleta de dados foi realizada. Uma análise das tabelas de conteúdo desses livros revela a existência de ênfases diferentes nos conteúdos oferecidos para cada série dos Ciclos 3 e 4. O conteúdo de Proporcionalidade é ensinado no Ciclo 3, enquanto os conteúdos de Estatística e Probabilidade são iniciados apenas no Ciclo 4. Uma análise do conteúdo dos livros revelou que o trabalho com tabelas é mais comum quando os estudantes trabalham o conceito de proporcionalidade no sétimo ano, e o conceito de funções no nono ano. No sétimo ano, o uso de tabelas envolve basicamente atividades de copiar e completar as tabelas, enquanto o uso de gráficos envolve atividades de interpretação e de cálculo. O uso de múltiplas representações, tais como diagrama em árvore, gráficos e tabelas juntas, é comumente trabalhado no oitavo ano. Esse emprego diminui consideravelmente no nono ano, quando se encontra com maior freqüência a combinação de gráficos e tabelas como ferramentas para o ensino de funções. Nos livros de Imenes e Lellis, o uso de representações múltiplas encontra-se inicialmente relacionado com o raciocínio estatístico. Parece que a base do raciocínio estatístico e probabilístico se encontra associada com a representação das variáveis sob a forma do diagrama em árvore. No nono ano, o uso de gráficos e tabelas concentra-se mais intensivamente no ensino de funções.

Os livros intitulados M*atemática Contextualizada*, escritos por Silveira e Marques (2004), configuram em recurso didático oferecido pela escola particular onde a outra parte da coleta de dados foi realizada. Embora os livros sejam parte de uma coleção concebida em quatro volumes, apenas o livro do oitavo ano foi disponibilizado pela escola. Uma análise do conteúdo do livro destinado ao oitavo ano revela que o uso de gráficos e tabelas é restrito ao tópico de estatística e probabilidade. Esse tópico é inserido após os estudantes terem trabalhado o conceito de números, realizado diferentes operações matemáticas com números (potenciação e radiciação com números, cálculo algébrico, fatoração e frações) e resolverem sistemas de equações com duas variáveis. Nesse tópico, são usadas tabelas para apresentar intervalos e freqüências de dados provenientes de pesquisa (ex. altura, em centrímetros, de 32 alunos de uma sala). Na sequência, os dados organizados na tabela são apresentados por meio de gráficos de segmentos, colunas ou de barras. Os autores oferecem o gráfico de setores para apresentar partes de um total, e ainda cartogramas e pictogramas para representar quantidades enfatizando, respectivamente, as áreas geográficas ou elementos figurativos do assunto tratado.

Os estudantes da escola situada na Torre participaram dos Experimentos 5 e 6 em maio de 2007 e os estudantes da escola situada na Cidade Universitária participaram em agosto de 2007. As escolas deram permissão para que a pesquisa fosse conduzida e os professores de Matemática também aprovaram o projeto. Para assegurar a comparabilidade entre os problemas nos dois países onde os experimentos foram conduzidos, utilizou-se o método de tradução e tradução simultânea (*translation and back translation*).

6.2 Experimento 5: O efeito de gráficos, tabelas e casos isolados na apresentação de variáveis discretas

6.2.1 Objetivo

Comparar o efeito do uso de gráficos de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada ou casos isolados no raciocínio matemático dos estudantes sobre variáveis discretas.

6.2.2 Participantes

Estudantes do oitavo ano das duas escolas brasileiras mencionadas participaram do Experimento 5. Ao todo foram 99 estudantes, 51 garotos e 48 garotas, com média de idade de 13,5 anos e 0,46 de desvio-padrão. Nas duas turmas da escola particular onde foram realizadas as coletas de dados, não foi encontrado nenhum estudante com necessidades especiais.

6.2.3 Os problemas

As tarefas foram compostas de seis problemas envolvendo variáveis discretas – os mesmos utilizados no Experimento 1 (ver nos Apêndice M, N, O, P e Q os problemas apresentados por meio de tabelas, gráficos ou casos individuais no Experimento 6). Os valores das variáveis nos problemas foram controlados de modo que os estudantes eram sempre solicitados a compará-los. Os estudantes foram randomicamente distribuídos para trabalhar com gráficos de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada e casos isolados.

6.2.4 Materiais

Cadernos de respostas específicos para cada tipo de condição foram entregues aos estudantes. Esses cadernos de respostas foram similares aos usados no Experimento 1, a diferença é que as tarefas se encontravam descritas em português.

Os estudantes que trabalharam com gráficos ou tabelas resolveram os problemas com o suporte da leitura das informações impressas nos cadernos de respostas. Os estudantes que trabalharam com os casos isolados manipularam os cartões, representando os casos isolados para cada problema; estes lhes eram entregues misturados dentro de envelopes.

6.2.5 Resultados

Os resultados serão apresentados em duas seções. A primeira mostra uma análise do desempenho dos estudantes em função do número de respostas corretas. A segunda seção traz uma análise das justificações dadas pelos estudantes para cada resposta. Nas duas seções, é oferecida uma comparação dos resultados em função das condições testadas: gráfico de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada ou casos isolados.

6.2.5.1 Desempenho dos estudantes

A Tabela 24 apresenta a estatística descritiva relativa aos resultados do Experimento 5.

Tabela 24 – Estatística descritiva do percentual do total de respostas corretas por tipo de representação no Experimento 5

Tipos de representação	**N**	**Médias**	**Desvio-padrão**
Gráficos	32	70,8	26,77
Tabela	32	53,6	22,69
Casos individuais	35	55,2	20,52

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Uma análise de variância (ANOVA) de uma entrada foi conduzida sobre os dados para analisar o efeito das formas de apresentação da informação no desempenho dos estudantes, concernente ao número de respostas corretas. Houve significativa diferença entre as condições, $F = 5,33$, $p = 0,006$.

O teste de comparações múltiplas de Scheffé identificou o fato de que os pares de médias gráficos e tabela, e gráfico e casos isolados foram os que realmente diferiram entre si, para um valor significativo $p < 0,05$. Dessa forma, quando apresentadas na forma de gráficos, as respostas tenderam a ter maior número de acertos. Diferenças entre tabelas e casos isolados não foram observadas.

6.2.5.2 Justificativas dos estudantes

As justificativas dadas pelos estudantes para cada problema foram analisadas em cada condição pesquisada. Nessa análise, foram considerados o conteúdo das justificações e o raciocínio dos estudantes quando o conteúdo envolveu a quantificação. Numa análise posterior, o raciocínio que os estudantes utilizaram nos problemas de proporcionalidade foram especificados.

- Conteúdos abordados

Um total de 594 justificações foram analisadas, tendo em vista verificar se os estudantes faziam ou não referência às quantidades. Esse total de justificações foi obtido considerando-se o total de participantes no experimento (99) multiplicado pelo número possível de justificações (99 x 6 = 594). As Tabelas 25 e 26 apresentam uma classificação das justificações quanto ao seu conteúdo e quanto às freqüências obtidas em cada condição testada, respectivamente.

Tabela 25 – Classificação das justificações dos estudantes no Experimento 5 quanto aos tipos de conteúdo

Conteúdos	**Descrição**	**Exemplos**
Quantifica	Referência explícita para o uso de números, relações ou operações	"Entre as pessoas de olhos pretos só tem 7 e de olhos azuis são 10" "50% dos alunos que compraram o CD1 gostaram e 50% dos que compraram o CD2 também gostaram" "Existem mais pessoas de cabelos pretos e olhos pretos do que pessoas de cabelo preto e olhos azuis"
Não quantifica	Justifica sem usar quantificação	"Cabelos pretos com olhos pretos combinam mais" "A marca do CD1 pode ser melhor do que a do CD2"
Não justifica	Deixa em branco, escreve 'não sei', repete a pergunta	"Porque sim"

Tabela 26 – Freqüência e porcentagem do conteúdo das justificações dos estudantes por tipo de representação no Experimento 5 (N= 594)

	Condições			
Conteúdo	Casos isolados	Gráficos	Tabelas	Total
Quantifica	189 (90%)	174 (90,6%)	179 (93,23%)	542
Não-quantifica	16 (7,6%)	10 (5,2%)	6 (3,13%)	32
Não justifica	5 (2,4%)	8 (4,2%)	7 (3,64%)	20
Total	210 (100%)	192 (100%)	192 (100%)	594

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Conforme dados apresentados na tabela acima, a maioria dos estudantes (542 ou 91,2%) fez referências às quantidades. Apenas 32 participantes (5,3%) ofereceram justificações cujo conteúdo não envolvia quantificações. Quando analisados em função das condições estudadas, pode-se perceber que os grupos não se diferenciaram quanto ao tipo de conteúdo. O uso de quantificações em todas as condições investigadas consistiu no padrão de respostas dos estudantes.

- Raciocínio utilizado

Esta análise foi conduzida para examinar o tipo de raciocínio que os estudantes empregaram quando resolveram os problemas quantitativamente. Um total de 542 justificações foi analisado. Esse total de justificações foi obtido considerando-se o total de justificações em que os estudantes quantificaram (189 + 174 + 179 = 542). A Tabela 27 apresenta uma descrição dos tipos de raciocínio e a Tabela 28 mostra a freqüência e a porcentagem em que eles foram usados em cada condição no Experimento 5.

Tabela 27 – Raciocínio dos estudantes quando abordaram os problemas quantitativamente no Experimento 5

Raciocínio	**Descrição**	**Exemplos**
Proporcional	Referência para as relações entre as variáveis	"Eles estão satisfeitos igualmente. Nos dois tipos de CDs metade das crianças estão satisfeitas"
Direto	Referência para relações parte-todo entre as quantidades	"Patrocínio deu mais dinheiro ao clube, em janeiro foi 5000 e em fevereiro foi apenas 2000"
Outros	Justificativas não identificáveis	"Eles são iguais, basta olhar o gráfico"

Tabela 28 – Freqüência e porcentagem dos tipos de raciocínio no Experimento 5 (N= 542)

	Condições			
Raciocínio	Casos isolados	Gráficos	Tabelas	Total
Proporcional	57 (30,2%)	108 (62,1%)	68 (37,99%)	233
Direto	123 (65,0%)	61 (35,0%)	106 (59,22%)	290
Outros	9 (4,87%)	5 (2,9%)	5 (2,79%)	19
Total	189 (100%)	174 (100%)	179 (100%)	542

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

A maioria dos estudantes que trabalhou com tabelas ou casos isolados usou o raciocínio direto. Este fator pode ter contribuído para esses estudantes apresentarem desempenhos mais fracos na solução dos problemas. Os estudantes que trabalharam com gráficos apresentaram uma tendência a usar com maior freqüência o raciocínio proporcional na resolução dos problemas. Este fator pode ter contribuído para esses estudantes apresentarem melhores desempenhos na solução dos problemas.

A freqüência no uso do raciocínio proporcional nos problemas 3 e 4 em relação aos demais problemas é o que mostra a Tabela 29. Os problemas 3 e 4 são sobre proporções duplas e requereram mais freqüentemente o uso, pelos estudantes, do raciocínio proporcional. Entre aqueles estudantes que trabalharam com gráficos, esse uso também foi estendido para os outros problemas.

Tabela 29 – Freqüência e porcentagem de uso do raciocínio proporcional por tipo de problema em cada condição no Experimento 5 (N= 233)

Uso do raciocínio proporcional	**Condições**			
	Casos isolados	Gráficos	Tabelas	*Total*
Problemas 3 e 4 (proporção dupla)	30 (52.6%)	40 (37.0%)	30 (44.1%)	100 (100%)
Problemas 1, 2, 5 e 6 (proporção simples)	27 (47.4%)	68 (63.0%)	38 (55.9%)	133 (100%)
Total	57 (100%)	108 (100%)	68 (100%)	

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

6.2.6 Principais resultados do Experimento 5

- O nível de sucesso dos estudantes na resolução dos problemas variou quando os meios usados para apresentar as informações também variaram.
- A habilidade dos estudantes para relacionar variáveis discretas por meio de gráficos foi melhor do que por meio de tabelas e casos isolados.
- O uso de quantificações em todas as condições investigadas consistiu no padrão de respostas dos estudantes.
- A maioria dos estudantes que trabalhou com tabelas ou casos isolados usou o raciocínio direto. Este fator pode ter contribuído para esses estudantes apresentarem desempenhos mais fracos na solução dos problemas.
- A maioria dos estudantes fez uso do raciocínio proporcional nos problemas de proporção dupla quando comparados com os outros problemas de proporção simples. Entre os estudantes que trabalharam com gráficos esse uso foi estendido também para os outros problemas.
- Os gráficos potencializaram o desempenho dos estudantes na consideração das relações entre variáveis discretas, tanto em relação ao desempenho quanto ao raciocínio dos estudantes.

6.3 Experimentos 6: O efeito de gráficos, tabelas e ambas as representações na apresentação de variáveis contínuas

6.3.1 Objetivo

Comparar o efeito de gráficos de linhas, tabelas de dupla entrada ou ambas as representações juntas no raciocínio matemático dos estudantes sobre dados contínuos.

6.3.2 Participantes

Estudantes do sétimo e nono anos das duas escolas brasileiras participaram do experimento. Foram 225 estudantes, sendo 117 do sétimo ano, 58 garotos e 59 garotas, com média de idade de 12,5 anos; e 108 do nono ano, 55 garotos e 53 garotas, com média de idade de 14,7 anos. Nas turmas do nono ano da escola particular, cinco estudantes apresentavam necessidades especiais, sendo dois com atraso mental, idades acima da média da faixa etária dos estudantes da turma (16 e 17 anos), duas estudantes surdas-mudas e uma estudante com deficiência visual. Apenas os dados da estudante com deficiência visual não entraram na análise de dados do experimento, em razão da dificuldade da representação dos gráficos para a aluna. A aluna realizou a tarefa com o suporte da interpretação visual de uma tradutora. A tradutora descrevia o que via em cada problema e, em seguida, lia a pergunta para a estudante. Esta escrevia a resposta usando uma máquina de escrever em Braile Os dados dos demais estudantes foram considerados na análise quantitativa.

6.3.3 Os problemas

Ao todo foram dez problemas envolvendo variáveis contínuas com inclinação positiva e dez problemas com inclinação negativa. Os problemas foram os mesmos usados no Experimento 4, e foram apresentados aos alunos por meio de gráficos de linhas, tabelas 2x2 ou ambas as representações. A terceira variável foi introduzida por meio de uma questão de comparação e se caracterizou, como no Experimento 4, realizado originalmente na Inglaterra, por não incidir diretamente sobre as relações entre as duas variáveis identificadas nos eixos perpendiculares *x e y*.

Em cada tarefa de inclinação positiva ou negativa, cinco problemas eram sobre inferências diretas e cinco sobre inferências inversas. Os estudantes foram distribuídos randomicamente para trabalhar com as tarefas de inclinação positiva ou negativa e com a informação apresentada pelas diferentes ferramentas de representação. A ordem de apresentação dos problemas em cada tarefa foi contrabalançada pelo método do Quadrado Latino.

6.3.4 Materiais

Seis cadernos de respostas foram usados como material de coleta de dados: inclinação positiva-gráfico, inclinação positiva-tabela, inclinação positiva-ambas as representações; inclinação negativa-gráfico, inclinação negativa-tabela, inclinação negativa-ambas as representações. Estes foram similares aos usados no Experimento 4. A diferença é que, no Experimento realizado em escolas brasileiras, as tarefas estavam escritas em português.

A variação completa das tarefas com inclinação positiva ou negativa e inferência direta ou inversa apresentada por meio de gráficos, tabelas ou ambas as representações escritas em português encontra-se nos Apêndices R, S, T, U e V, respectivamente, para os conteúdos de velocidade, valor monetário, custo, consumo de gasolina e programas de abstinência ao uso de drogas.

6.3.5 Resultados

Os resultados serão apresentados em duas seções. A primeira exibe o desempenho dos estudantes, com base na análise dos escores de acertos. Esses escores foram transformados em percentuais para facilitar as comparações. A segunda seção traz os resultados baseados no tipo de raciocínio que os estudantes utilizaram.

6.3.5.1 Desempenho dos estudantes

No Experimento 6, os alunos responderam dez problemas envolvendo inferências diretas ou inversas que poderiam possuir as seguintes características: (1) ter inclinação positiva ou negativa e (2) ser representados por gráfico, tabela ou ambas representações.

Na análise geral do escore transformado, a média foi de 70,7% de acertos, independentemente das características dos problemas. Quando comparado o percentual de acertos entre os problemas de inferência direta ou inversa, observaram-se as respectivas médias de 72,9% e 69,24%. Esta diferença entre as médias não se mostrou estatisticamente significativa pelo Teste t de amostras independentes (t = 1,79 e p = 0,07).

Analisando a relação entre as inferências diretas e inversas e o tipo de inclinação, positiva ou negativa, tem-se que, nas diretas, os grupos de inclinação positiva tiveram média de 76,76% de acerto e os de inclinação negativa 67,54%. O teste t de amostras independentes identificou diferença significativa entre estas duas médias para t = 2,54 e p = 0,012. Já nas perguntas inversas, a média da inclinação positiva foi de 75,14% e a do negativo 63,51%, sendo que esta diferença foi estatisticamente significativa para t = 3,83 e p = 0,002. A Tabela 30 mostra as médias de acertos nos problemas de inferência direta e inversa com inclinação negativa e positiva.

Tabela 30 – Médias do percentual de acertos dos estudantes nos problemas de inferência direta ou inversa por inclinação no Experimento 6

Inferências	**Inclinações**	**Médias**	**Valor de t**	**Valor de p**
Direta	Positiva	76,8	2,54	0,012
	Negativa	67,5		
Inversa	Positiva	75,1	3,08	0,002
	Negativa	63,5		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Com a ajuda da Figura 31, é possível perceber que as inferências diretas tenderam a apresentar maiores percentuais de acerto, sendo que este valor foi influenciado pelo tipo de inclinação da linha. A combinação inferência direta-inclinação positiva apresentou maior média de percentual de acerto e a associação inferência inversa-inclinação negativa mostrou a menor média.

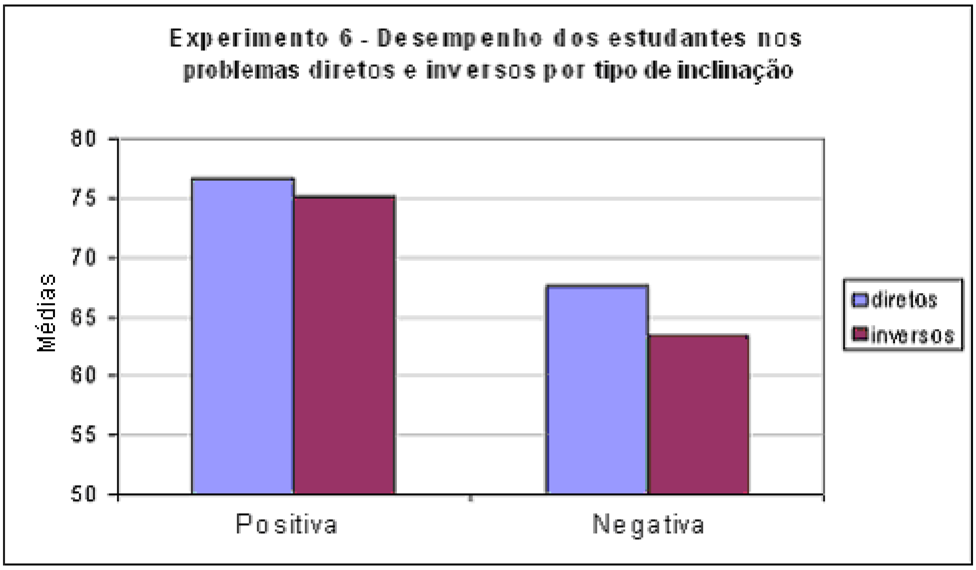


Figura 31 – Desempenho dos estudantes nos problemas diretos e inversos por tipo de inclinação no Experimento 6.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Na análise entre o tipo de inferência (direta ou inversa) e o tipo de ferramenta de representação (gráfico, tabela ou ambas), tem-se os seguintes resultados: nas diretas, o gráfico apresentou média de 70,38%, tabela 77,56% e ambos 68,33%. A ANOVA não identificou diferença significativa entre as médias para F = 2,32 e p = 0,10. Nas inferências inversas o gráfico teve média de 70,38%, tabela 70,27% e ambos 66,94% e não se observou diferença estatisticamente significativa entre essas médias (F = 0,33 e p = 0,71). A Tabela 31 mostra um sumário desses resultados e a Figura 32 traz uma comparação das médias dos percentuais de acerto.

Tabela 31 – Médias do percentual de acerto dos estudantes nos problemas diretos ou inversos por tipo de representação no Experimento 6

Inferências	Representações	Médias	Valor de F	Valor de p
Diretas	Gráfico	70,4		
	Tabela	77,6	2,32	0,10
	Ambos	68,3		
Inversa	Gráfico	70,4		
	Tabela	70,3	0,33	0,71
	Ambos	66,9		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

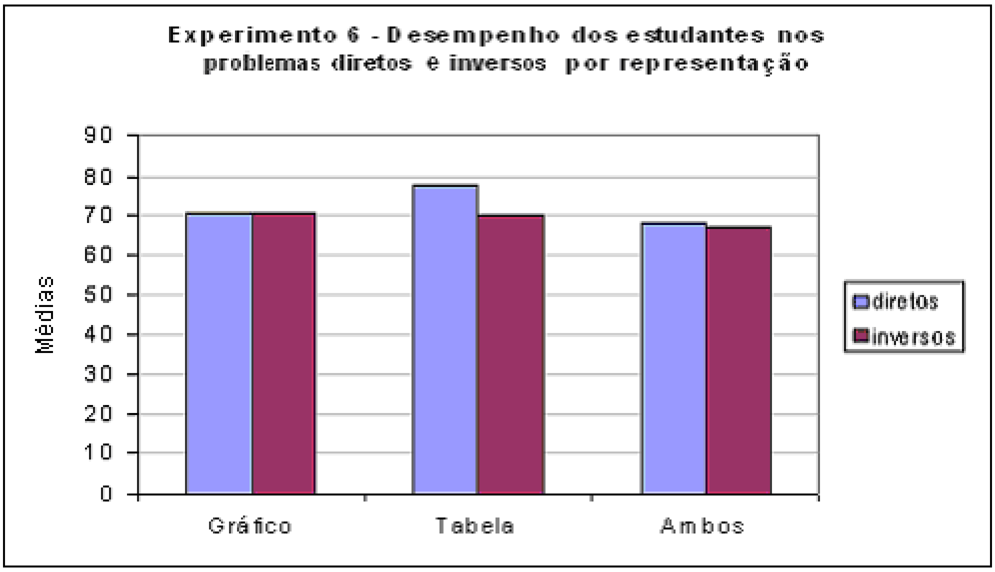


Figura 32 – Desempenho dos estudantes nos problemas diretos e inversos por tipo de representação no Experimento 6.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Pode-se verificar que o que interfere mais em um percentual de acertos é o fato de as perguntas serem diretas e apresentadas na forma de tabela, e, na mesma perspectiva, tem-se que as menores médias de acertos ocorrem nas perguntas inversas e apresentadas na forma de ambas as representações. Apesar de a maioria das comparações entre as médias não ter sido significativa, as diferenças amostrais são relevantes.

Procurando identificar melhor a relação entre o tipo de inclinação e o tipo de representação usada tanto nos problemas de inferência direta quanto nos de inferência inversa, construiu-se a variável i*nclinação-representação* que apresenta as seguintes categorias: positiva-gráfico, negativa-gráfico, positiva-tabela, negativa-tabela, positiva-ambas as representações e negativa-ambas as representações. Com base nessas categorias, foram analisadas as médias destas categorias nos problemas de inferências diretas e inversas. A Tabela 32 apresenta as médias do percentual de acerto nessas categorias.

Tabela 32 – Médias do percentual de acertos dos estudantes nos problemas diretos ou inversos no Experimento 6 por tipo de inclinação-representação

Inferências	**Inclinação-Representação**	**Médias**	**Valor de F**	**Valor de p**
Diretas	Positiva-Gráfico	74,50	3,15	0,009
	Negativa-Gráfico	66,15		
	Positiva-Tabela	87,43		
	Negativa-Tabela	68,72		
	Positiva-Ambos	68,89		
	Negativa-Ambos	67,78		
Inversa	Positiva-Gráfico	74,50	2,59	0,027
	Negativa-Gráfico	66,15		
	Positiva-Tabela	81,14		
	Negativa-Tabela	60,51		
	Positiva-Ambos	70,00		
	Negativa-Ambos	63,89		

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

Nas inferências diretas, tem-se que inclinação positiva-gráfico teve média de 74,50%, negativa-gráfico 66,15%, positiva-tabela 87,43%, negativa-tabela 68,82%, positiva-ambas as representações 68,89% e negativa-ambas as representações 67,78%. A ANOVA identificou diferença estatisticamente significativa entre as médias (F = 3,13 para p = 0,01). O teste de Levene identificou a não-existência de homogeneidade de variâncias (L= 4,7 para p= 0,02). O teste de comparações múltiplas de Tamhane identificou diferença significativa no par de médias negativa-gráfico e positiva-tabela; positiva-tabela e negativa-tabela; positiva-tabela e positiva-ambos; e positiva-tabela e negativa-ambas as representações.

Já para as inferências inversas há as seguintes médias, positiva-gráfico 74,50%, negativa-gráfico 66,15%, positiva-tabela 81,14%, negativa-tabela 60,51%, positiva-ambas as representações 70,00% e negativa-ambas as representações 63,89%. Houve diferença estatisticamente significativa entre estas médias (F = 2,59 para p = 0,027). O teste de Levene identificou a não-homogeneidade de variância (L= 3,5 para p = 0,04), sendo que o teste de comparações múltiplas de Tamhane identificou diferença significativa apenas no par de médias positiva-tabela e negativa-tabela.

Com base nas informações apresentadas e na Figura 33 seguinte, pode-se identificar: (1) nos dois tipos de inferências (diretas e inversas), a combinação inclinação positiva-tabela apresenta as maiores médias e (2) a combinação inferência inversa + inclinação negativa-tabela exibe a menor média.

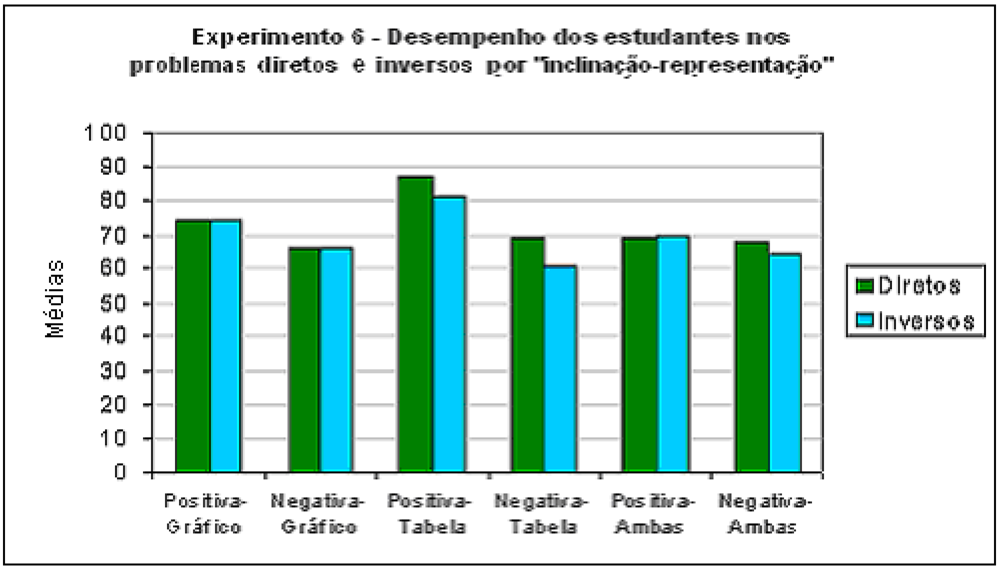


Figura 33 – Desempenho dos estudantes nas inferências diretas e inversas por tipo de *inclinação- representação* no Experimento 6.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

De acordo com a técnica da Análise de Covariância (ANCOVA), estas relações não são afetadas pela série e idade do aluno com os respectivos valores $F = 1{,}90$ com $p = 0{,}08$ e $F = 2{,}07$ com $p = 0{,}07$.

6.3.5.2 Raciocínio dos estudantes

O raciocínio dos estudantes foi classificado com base em seis categorias: resposta matemática correta, sem números; resposta matemática correta, com números; resposta matemática errada, sem números; resposta matemática errada, com números; referência para conteúdos externos ou não justifica. Como 225 alunos participaram do experimento, foi analisado um total de 2250 justificações. A Tabela 33 apresenta a freqüência de uso desses raciocínios de acordo com o tipo de ferramenta de representação no Experimento 6.

Tabela 33 – Freqüência e proporção de uso dos tipos de raciocínio por tipo de representação no Experimento 6 (N=2250)

Tipos de raciocínio	**Tipos de representação**			
	Ambas (GT)	Gráficos	Tabelas	Total
Resposta matemática correta, sem números	282 (39,2%)	234 (29,6%)	291 (39,3%)	807 (35,9%)
Resposta matemática correta, com números	205 (28,5%)	322 (40,8%)	256 (34,6%)	783 (34,8%)
Resposta matemática errada, sem números	93 (12,9%)	90 (11,4%)	59 (8,0%)	242 (10,8%)
Resposta matemática errada, com números	32 (4,4%)	50 (6,3%)	48 (6,5%)	130 (5,8%)
Referência para conteúdos externos	14 (1,9%)	6 (0,8%)	16 (2,2%)	36 (1,6%)
Não apresenta argumento	94 (13,1%)	88 (11,1%)	70 (9,5%)	252 (11,2%)
Total	720 (100,0%)	790 (100,0%)	740 (100,0%)	2250 (100,0%)

Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo SPSS.

A maioria dos estudantes usou o raciocínio matemático para resolver os problemas. Esse tipo de raciocínio foi identificado em 87,2% do total de justificações (1962 de 2250).

Uma comparação mais específica das freqüências observadas foi conduzida para determinar se a proporção de estudantes usando o raciocínio matemático com ou sem referências para os números poderia ser associada com o tipo de representação que eles trabalharam na resolução dos problemas. Nessa análise, considerou-se o total do raciocínio matemático, com ou sem números, em gráficos e tabelas e em ambas as representações e tabelas. Os resultados serão apresentados por escolaridade dos estudantes.

Semelhante ao Experimento 4 descrito no Capítulo 5, esperava-se que os estudantes que trabalharam com tabelas fizessem explícita referência para os números, mas aqueles que trabalhassem com gráficos usassem comparações visuais ou se baseassem na leitura dos gráficos e usassem os números explicitamente. Esperava-se ainda que o raciocínio dos estudantes que trabalharam com ambas as representações se assemelhasse àqueles que trabalharam apenas com gráficos.

Considerou-se nessa análise o total de raciocínios matemáticos (N= 1962); e os resultados serão organizados pela proporção com a qual estudantes de cada ano escolar fazem referências matemáticas com ou sem números.

Predição 1 – Raciocínio com ou sem números em gráficos e tabelas

As Figuras 34 e 35 mostram a proporção de uso do raciocínio matemático pelos estudantes, de cada ano escolar, que trabalharam com tabelas e gráficos.

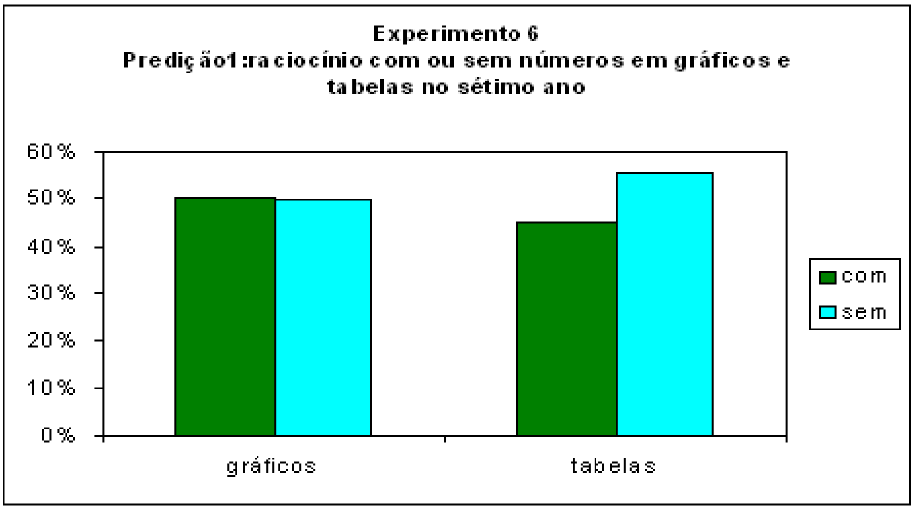


Figura 34 – Raciocínio matemático com ou sem números em gráficos e tabelas entre estudantes do sétimo ano no Experimento 6.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

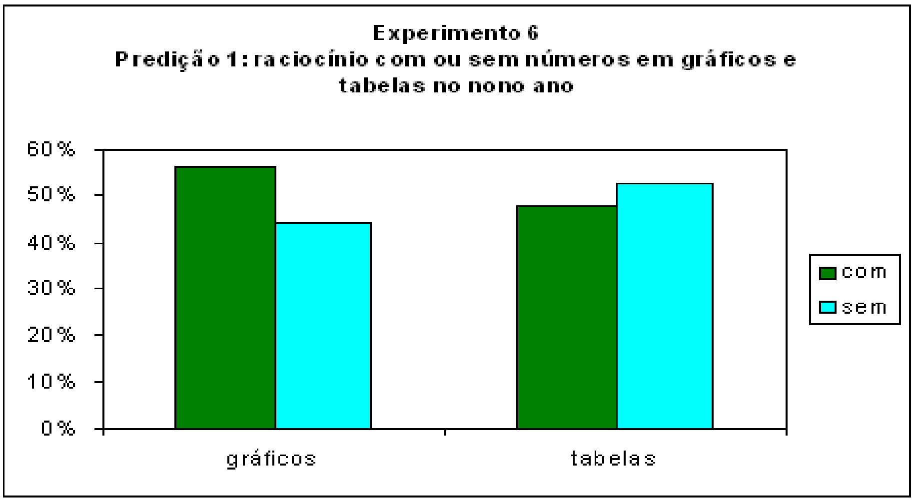


Figura 35 – Raciocínio matemático com e sem números em gráficos e tabelas entre estudantes do nono ano no Experimento 6.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

No nono ano houve significativa associação entre gráficos e tabelas e se os estudantes faziam ou não explícita referências para os números (χ^2 (1) = 4,99, $p < 0,05$). Entre os estudantes que raciocinaram com números, os que trabalharam com gráficos foram 1,41 vezes mais propensos a usar esse tipo de raciocínio do que os que trabalharam com tabelas. Diferenças significativas não foram encontradas entre os estudantes do sétimo ano (χ^2 (1,66) = 1,95, $p > 0,05$).

Predição 2 – Raciocínio com ou sem números em ambas as representações e tabelas

As Figuras 36 e 37 mostram a proporção de uso do raciocínio matemático pelos estudantes, de cada ano escolar, que trabalharam com tabelas e combinação de ambas as representações.

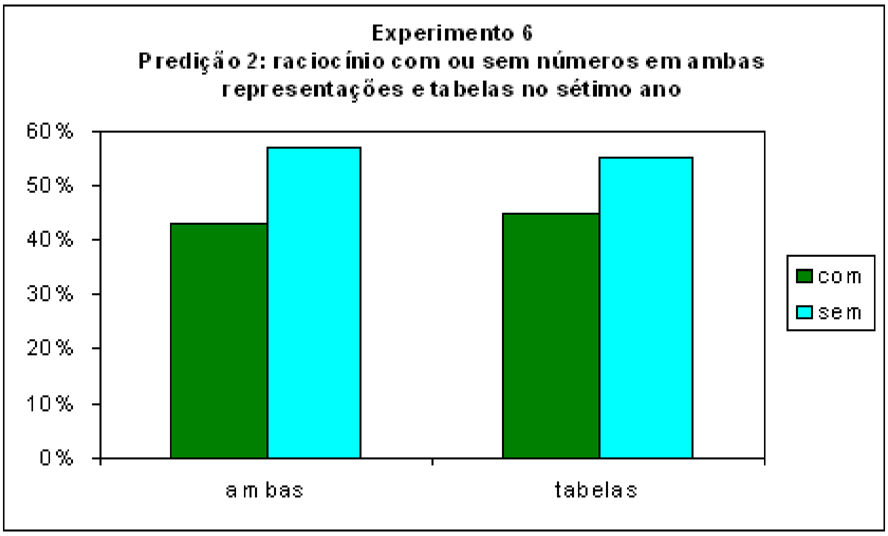


Figura 36 – Raciocínio matemático com ou sem números em ambas e tabelas entre estudantes do sétimo ano no Experimento 6.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

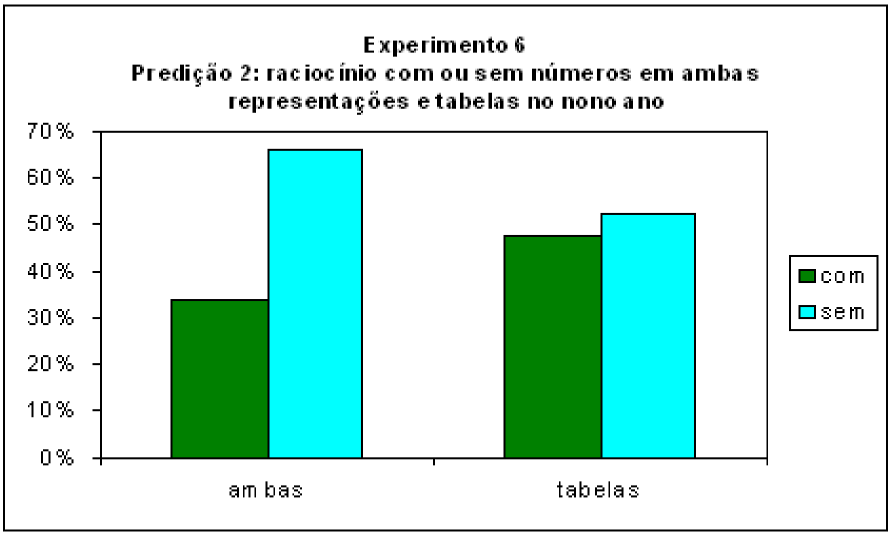


Figura 37 – Raciocínio matemático com ou sem números em ambas e tabelas entre estudantes do nono ano no Experimento 6.
Fonte: Dados obtidos da pesquisa e gerados pelo EXCEL.

Houve significativa diferença no uso do raciocínio matemático com ou sem números numa comparação entre ambas as representações e tabelas entre os estudantes do nono ano (χ^2 (1) = 11,34, p < 0,001). Os estudantes que trabalharam com ambas as representações tiveram maior probabilidade (1,76 vezes) de raciocinar sem fazer referência para os números do que aqueles que trabalharam com tabelas. Diferenças significativas não foram encontradas entre os estudantes do sétimo ano (χ^2 (1) = 0,23 p > 0,05).

6.3.6 Principais resultados do experimento 6

- O desempenho dos estudantes nos problemas de inferências diretas não diferenciou muito dos problemas de inferências inversas.
- Os problemas diretos ou inversos com inclinação positiva foram mais facilmente resolvidos do que os problemas diretos ou inversos com inclinação negativa.
- Não foram encontradas diferenças significativas com relação ao tipo de ferramentas de representação e se a inferência era direta ou inversa.
- Considerando-se a variável i*nclinação-representação*, os estudantes tiveram melhor desempenho nas inferências diretas com a combinação positivo-tabela. Essa combinação só não diferiu da combinação positiva-gráfico. Em problemas diretos, as

tabelas com a inclinação positiva possibitaram um desempenho similar aos mesmos problemas apresentados por meio de gráficos. Não foram observadas diferenças siginificativas quanto ao desempenho dos estudantes nas inferências inversas.

- Não se observou efeito da escolaridade no desempenho dos estudantes.
- O raciocínio matemático, com ou sem referências explícitas para os números, configurou-se em padrão nas análises empreendidas pelos estudantes.
- Um efeito da escolaridade foi observado no tipo de raciocínio. Os estudantes do nono ano que trabalharam com gráficos apresentaram tendência significativa para analisar os problemas com base em referências numéricas quando comparados aos que trabalharam com tabelas. Os estudantes do sétimo ano não apresentaram uma preferência para usar um ou outro tipo de análise quando trabalharam com gráficos ou tabelas.
- Estudantes do nono ano que trabalharam com ambas as representações apresentaram tendência significativa para raciocinar sem referência explícita para os números, quando comparados com aqueles que trabalharam com tabelas. Os estudantes do sétimo ano não apresentaram uma preferência por um ou por outro raciocínio.

6.4 Conclusões dos experimentos realizados nas escolas brasileiras

O Experimento 5, realizado com estudantes de escolas brasileiras, replicou dois resultados concernentes ao desempenho dos estudantes de escolas inglesas obtidos no Experimento 1: (1) o uso de gráficos facilita o desempenho dos estudantes na consideração de relações entre variáveis, enquanto o uso de casos isolados dificulta o desempenho dos estudantes; (2) o raciocínio matemático consistiu no padrão de respostas. Não se observaram similaridades no uso de tabelas quanto ao desempenho obtido entre os estudantes ingleses ou brasileiros. Enquanto gráficos e tabelas potencializaram igualmente as considerações às relações entre as variáveis entre os estudantes nas escolas inglesas; nas escolas brasileiras esse efeito não foi observado.

A apresentação de informações proporcionais em representações que não potencializam os aspectos proporcionais da informação, em casos isolados, ou o fazem em termos numéricos, em tabelas, dificultam o desempenho dos estudantes brasileiros quando eles precisam considerar relações entre variáveis discretas. No currículo das escolas brasileiras, o trabalho com gráficos para apresentar dados é encorajado no ensino fundamental. No 4º ciclo de estudos (8º e 9º ano), em particular, o PCN de Matemática recomenda que, no conteúdo relativo ao tratamento da informação sejam usados procedimentos de "coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões". E, ainda, que os estudantes sejam encorajados a proceder à "leitura e interpretação de dados". (BRASIL, 1998, p. 74). O quarto ciclo inclui o oitavo e nono anos escolares. Essas prescrições encontram-se objetivadas em atividades para o oitavo ano, mas não para o nono ano no livro didático usado por uma das escolas campo de pesquisa (IMENES E LELIS, 2002a, 2002b e 2002c). No oitavo ano enfatiza-se o uso de tabelas para os estudantes formalizarem a aprendizagem da estratégia da regra de três, preparando-os para o trabalho com funções matemáticas. No nono ano o uso de tabelas envolve basicamente tarefas em que os estudantes são solicitados a copiar as informações e completar a regra de três, enquanto o trabalho com gráficos envolve tarefas de interpretação e cálculo. Essa limitação no uso de tabelas no 9º ano das escolas brasileiras ajuda a explicar por que esses estudantes foram mais eficientes no uso dos gráficos do que no uso de tabelas para estabelecer relações entre os dados.

No currículo das escolas inglesas para o 9º ano, espera-se que os estudantes elaborem, leiam e comparem as células em tabelas de contingência, apresentando situações do tipo *métodos de locomoção e distância para a escola*, e que elaborem gráficos de barras com as informações empilhadas. Esses aspectos talvez ajudem a explicar por que os estudantes das escolas inglesas mostraram performances similares, trabalhando com os gráficos ou as tabelas. São essas duas formas de apresentação usadas nas escolas inglesas como ferramentas de apresentação de relações entre variáveis.

Embora os estudantes de ambas as culturas escolares tenham se referido aos aspectos matemáticos para justificar as suas respostas no trabalho com gráficos, tabelas ou casos isolados, algumas similaridades e diferenças foram observadas quanto ao tipo de raciocínio matemático que eles usaram. Entre os estudantes ingleses, o uso do raciocínio aditivo foi oito vezes mais freqüente (89%) do que o do raciocínio proporcional (11%). Entre os estudantes brasileiros, o uso do raciocínio aditivo (56%) foi apenas um pouco mais freqüente do que o do raciocínio proporcional (44%). Embora o raciocínio proporcional tenha sido pouco utilizado pelos estudantes ingleses, na maioria das vezes em que eles foram computados, foram observados entre os que trabalharam com gráficos ou tabelas. Entre os estudantes brasileiros, aqueles que trabalharam com os gráficos usaram quase duas vezes mais o raciocínio proporcional do que o aditivo, quando comparados com aqueles que trabaharam com tabelas ou casos isolados. Pode-se concluir que o efeito do tipo de representação incidiu sobre o desempenho e o raciocínio dos estudantes, quando eles precisaram analisar informações sobre variáveis contínuas.

O Experimento 6 realizado com estudantes de escolas brasileiras, replicou três resultados relativos ao desempenho dos estudantes obtidos no Experimento 4, realizado com estudantes de escolas inglesas: (1) não houve um efeito do tipo de ferramentas de representação sobre o desempenho dos estudantes nos problemas de inferências inversas, mesmo quando esses problemas foram combinados com o tipo de inclinação, positiva ou negativa; (2) alguns efeitos do tipo de representação foram observados apenas quando analisado o desempenho dos estudantes em relação aos problemas diretos. Entre os estudantes ingleses, os problemas de inferência direta foram mais facilmente resolvidos pelos estudantes que trabalharam com gráficos do que entre os que trabalharam com tabelas, mas não diferiu do desempenho daqueles que trabalharam com ambas as representações juntas. A combinação problemas de inferência direta-inclinação positiva-gráficos foi mais eficaz do que a combinação inferência direta-inclinação positiva-tabelas, mas não diferiu das outras combinações. Entre os estudantes brasileiros, a combinação problemas de inferência direta-inclinação positiva-tabelas foi mais eficiente do que as demais combinações, com exceção da combinação direta-inclinação positiva-gráficos; e (3) não houve influência da escolarização ou idade no desempenho dos estudantes.

Pode-se concluir que os aspectos inversos das informações sobre variáveis contínuas constituem-se em forte preditor das dificuldades dos estudantes para considerar as relações entre variáveis. Esses aspectos, no entanto, não parecem interagir com os fatores materiais da informação, isto é, as suas representações externas. Os aspectos diretos da informação sobre variáveis contínuas podem ser realçados pelo tipo de representação, residindo nesse ponto diferenças no uso das representações. A experiência prévia sobre os aspectos diretos ou inversos das informações sobre variáveis contínuas é um fator que pode interferir no desempenho dos estudantes. O tipo de representação tem papel relevante, desde que o estudante já tenha passado pela experiência de debater e analisar as diferentes relações que podem ser combinadas nas informações sobre dados contínuos. A compreensão de relações inversas sobre os conceitos de valor monetário envolvendo a troca de moedas, assim como o consumo de gasolina ou velocidade, podem constituir importante ponto de partida para ajudar os estudantes a estabelecerem interações de representações e conceitos.

Numa análise sobre o tipo de raciocínio que os estudantes utilizaram para justificar as suas respostas nos problemas sobre variáveis contínuas, verificou-se que a referência aos aspectos matemáticos, numéricos ou não, consistiu em raciocínio-padrão apresentado tanto pelos estudantes ingleses como pelos brasileiros. Os aspectos matemáticos da informação emergiram associados ao tipo de representação que os estudantes trabalharam, quando analisados por escolaridade.

Com relação aos estudantes brasileiros, diferenças significativas de raciocínio, com ou sem referência para os números, foram observadas apenas entre aqueles do nono ano. Entre esses estudantes, aqueles que trabalharam com gráficos apresentaram uma tendência a raciocinar fazendo referências explícitas aos números quando comparados aos que trabalharam com tabelas. Quando, porém, analisou-se o raciocínio usado pelos alunos que trabalharam com ambas as representações, a tendência foi eles raciocinarem sem se reportarem explicitamente aos números, sendo essa associação significativa quando comparada ao uso das tabelas. Alguns elementos da organização do ensino de Matemática para o terceiro ciclo de aprendizagem, onde se inclui o sétimo ano de escolarzação, podem explicar essas tendências no raciocínio dos estudantes.

Para o terceiro ciclo de ensino da Matemática (6º e 7º ano), os PCN esperam para o conteúdo do tratamento da informação que os estudantes sejam capazes de “construir, ler e interpretar tabelas e gráficos e escolher o tipo de representação gráfica mais adequada para expressar dados estatísticos”. (BRASIL, 1998, p. 77). No conteúdo de Álgebra, os PCN esperam que os estudantes sejam capazes de “utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos”. (BRASIL, 1998, p. 76). Para o quarto ciclo de ensino da Matemática (8º e 9º ano), espera-se, para o conteúdo do tratamento da informação, que os estudantes sejam capazes de “ler e interpretar tabelas e gráficos, coletar informações e representá-las em gráficos, fazendo algumas previsões a partir do cálculo das medidas de tendência central da pesquisa”. (BRASIL, 1998, p. 93). Com relação à Álgebra, espera-se que os estudantes sejam capazes de “resolver situações-problema que envolva a variação de duas grandezas direta ou inversamente proporcionais e representar em um sistema de coordenadas essa variação”. (BRASIL, 1998, p. 92)

Entende-se que essas recomendações podem estimular práticas escolares voltadas para o desenvolvimento de raciocínios numéricos ou não com base na leitura e interpretações de gráficos ou tabelas. Essa análise pode explicar por que não se observou uma tendência para um raciocínio com referência explícita ou não para os números entre os alunos do sétimo ano que trabalharam com gráficos, tabelas ou ambas as representações.

Entre os estudantes ingleses, diferenças significativas de raciocínio, com ou sem referência para os números, foram observadas entre os estudantes do sétimo ano, quando comparados gráficos e tabelas e entre os estudantes do nono ano quando comparados tabelas e ambas as representações. No currículo das escolas inglesas, os gráficos são mais usados para apresentar tendências e variações, enquanto as tabelas são empregadas para apresentar valores numéricos e essa distinção é enfatizada ao longo do processo de ensino do *Key Stage Three*. No sétimo ano, embora persista essa distinção, o trabalho com gráficos para apresentar tendências é enfatizado. Essa forma de abordagem aos gráficos pode explicar por que o raciocínio dos estudantes do sétimo ano no trabalho com gráficos esteve mais associado com os aspectos matemáticos sem referência explícita para os números. No nono ano, os gráficos de linhas são mais usados para apresentar tendências e variações, enquanto tabelas são mais utilizadas para apresentar valores numéricos. Essa distinção talvez seja potencializada quando os estudantes desses anos escolares são apresentados a ambas as representações juntas. Nessas situações, talvez eles prefiram raciocinar com base nos gráficos do que nas tabelas.

7 REFLEXÕES CONCLUSIVAS

O objetivo deste trabalho foi investigar se diferentes formas de conceber o papel dos artefatos e apresentação da informação influenciavam o pensamento de estudantes de 11 a 14 anos para raciocinar matematicamente sobre dados. Uma série de seis experimentos foi conduzida, sendo quatro em escolas inglesas (Experimentos 1, 2, 3 e 4) e dois em escolas brasileiras (Experimentos 5 e 6). O Experimento 5 realizado nas escolas brasileiras é similar ao Experimento 1 realizado na Inglaterra e o Experimento 6, é similar ao Experimento 4. Utilizou-se uma metodologia experimental de pesquisa com base no *design* de tarefas direcionadas para uso em salas de aula de Matemática. Explorou-se o papel mediacional dessas tarefas, desde a sua confecção e introdução na sala até o seu uso pelos estudantes em contextos específicos de prática da Matemática. Hipotetizou-se que essas tarefas poderiam ser concebidas como artefatos, por essa teorização incluir tantos os aspectos tecnológicos de produção do material como o seu uso pelas pessoas em diferentes contextos. Analisou-se principalmente o potencial das tarefas em influir no desempenho e raciocínio dos estudantes para considerarem o constructo de variável e de relações entre variáveis. As conclusões apresentadas são organizadas no trabalho de pesquisa empreendido, que intentava responder à principal questão de pesquisa: como a forma de apresentação dos dados influencia a construção de significados matemáticos pelas pessoas como é o caso do conceito de variáveis e de suas relações?

Três questões são expressas na análise do papel da forma de apresentação dos dados: será que estudantes tiram proveito para pensar sobre dados, quando estes são apresentados já organizados numericamente nas formas tabular ou gráfica? Será que estudantes que precisam realizar a combinação dos dados mostram eventualmente uma melhor compreensão dos dados? Será que as tendências verificadas no desempenho e raciocínio de estudantes poderiam ser explicadas quanto ao uso dessas ferramentas de representação em diferentes práticas escolares?

Os Experimentos 1 e 5, conduzidos respectivamente, na Inglaterra e no Brasil, oferecem evidências de que estudantes já familiarizados com as representações em tabelas e gráficos para apresentar variáveis discretas não se beneficiam em atividades em que eles são requeridos a organizar os dados por eles mesmos, por meio de casos isolados. Nos casos isolados, os estudantes não mostram raciocínios conceituais concernentes às associações requeridas para analisar as variáveis e as suas relações. Os gráficos, por sua vez, oferecem melhores possibilidades para os estudantes raciocinarem proporcionalmente. Os resultados obtidos no uso dos gráficos e tabelas e as suas conexões com os respectivos currículos nacionais desses países mostraram algumas divergências, considerando-se os tipos de ferramentas. O uso de gráficos e tabelas beneficiou claramente o desempenho dos estudantes ingleses. Para surpresa, no entanto, os estudantes brasileiros não tiraram proveito da apresentação da informação por meio de tabelas, como o fizeram os estudantes ingleses. Apenas o gráfico beneficiou o desempenho e o raciocínio dos estudantes brasileiros para a análise de relações entre variáveis discretas. A esse respeito, é importante mencionar a tendência a uma generalização no uso do raciocínio proporcional pelos estudantes brasileiros. Nos problemas de proporção simples utilizados no Experimento 5, conforme dados mostrados na Tabela 29 (p. 163), o uso do raciocínio proporcional foi considerável. Nessas situações, o uso de correspondência direta por meio de uma leitura visual seria suficente, no entanto, os estudantes brasileros preferiram usar o raciocínio proporcional.

Os Experimentos 4 e 6, também conduzidos respectivamente, na Inglaterra e no Brasil, oferecem evidências de que o tipo de apresentação da informação não afeta o desempenho dos estudantes dos estudantes quando eles são solicitados a relacionar variáveis contínuas. Algumas tendências do tpo de apresentação da informação, no entanto, foram observadas com base no tipo de raciocínio que os estudantes utilizaram. O Experimento 4 foi realizado com as mesmas atividades do Experimento 3, discutido mais adiante, mas incluiu diversidade nas representações simbólicas, com gráficos, tabelas e ambas as representações. O tipo de inclinação (positiva ou negativa) como fator isolado não influiu no desempenho dos estudantes ingleses. O tipo de problema (direto ou inverso), no entanto, como fator isolado, teve influência no desempenho. Eles tiveram mais facilidade em resolver os problemas diretos do que os inversos. O tipo de apresentação da informação tomada como fator isolado não afetou o desempenho dos alunos sobre os tipos de problemas. Quando, porém, combinada com o tipo de inclinação da linha, observou-se que os estudantes se beneficiaram mais em problemas diretos apresentados em gráficos com a inclinação positiva. Não houve efeito sobre os problemas inversos. Esse resultado traz à tona a possível conexão entre problemas diretos-gráficos de linhas nas atividades objetivadas em sala de aula das escolas inglesas.

O Experimento 4 também foi replicado entre estudantes brasileiros (Experimento 6). O tipo de problema (direto ou inverso) como fator isolado não influiu no desempenho dos estudantes brasileiros, no entanto, o tipo de inclinação (positiva ou negativa) teve efeito isolado no desempenho dos estudantes; eles tiveram mais facilidade em resolver os problemas com a inclinação positiva do que os problemas com a inclinação negativa. A forma de apresentação da informação, como fator isolado, também não influiu no desempenho dos estudantes brasileiros. Apenas quando combinada com o tipo de inclinação (positiva ou negativa), observou-se o seu efeito. Para surpresa, a forma combinada que mais beneficiou os estudantes brasileiros no trabalho com os problemas diretos foi inclinação positiva-tabela; não houve efeito dos problemas inversos. Essa combinação só não diferiu da combinação inclinação positiva-gráfico para apresentar os mesmos tipos de problemas (diretos). O uso de gráficos e tabelas para apresentar variáveis contínuas é encorajado nos PCN, onde se privilegia o seu uso em problemas sobre relações funcionais.

Quanto ao tipo de raciocínio que os estudantes utilizaram, esperava-se nos experimentos 4 e 6 que os que tivessem a informação numérica disponível em tabelas, justificassem a sua resposta usando números e aqueles que tivessem as informações disponibilizadas por meio de gráficos, justificassem a sua resposta usando argumentos visuais (ex. a linha é mais alta; a linha é mais inclinada). Conjecturou-se a idéia de que, quando os estudantes tivessem ambas as formas de apresentação da informação, eles poderiam usar os dois tipos de raciocínio ou alternar entre eles. Os estudantes brasileiros que tinham a informação gráfica foram mais propensos a usar a informação numérica do que aqueles que tinham a tabela disponível. Não se observou essa preferência entre os estudantes ingleses. Os estudantes, tanto brasileiros quanto ingleses, que tinham ambas as formas de apresentação da informação (gráficos e tabelas), eram mais propensos a não usar referências para os números. Eles pareciam tratar a tarefa como se ela envolvesse um requerimento implícito para ler o gráfico. O raciocínio dos estudantes, portanto, recebeu a influência do tipo de apresentação da informação, podendo essa influência ser explicada com o uso que eles fazem dessas ferramentas nas suas práticas escolares.

Alguns resultados dos Experimentos 4 e 6 podem ser analisados conjuntamente: 1) os estudantes não tiram mais vantagem de problemas inversos com base na forma de apresentação da informação; 2) em ambos os contextos, não houve co-variação do desempenho com a escolaridade ou idade dos alunos; 3) o uso de gráficos e tabelas combinados (ambas representações) não teve efeito no desempenho dos estudantes; e 4) o raciocínio visual e numérico dos estudantes recebeu influência da apresentação da informação usada na resolução dos problemas.

Em resposta às duas primeiras questões na análise das formas de apresentação da informação – será que estudantes tiram proveito para pensar sobre dados, quando estes são apresentados já organizados numericamente nas formas tabular ou gráfica? Será que estudantes que precisam realizar a combinação dos dados mostram eventualmente uma melhor compreensão dos dados? – pode-se concluir, portanto, que os estudantes que possuem experiência sobre variáveis discretas tiram proveito para pensar sobre dados, quando estes são apresentados já organizados na forma gráfica. Os estudantes que precisaram realizar a combinação dos dados, por eles mesmos, mostram maior dificuldade em realizar as tarefas, sendo esse aspecto observado em termos de desempenho e raciocínio. No que concerne às variáveis contínuas, os estudantes que trabalharam com tabelas, gráficos ou ambas as representações não apresentaram diferenças significativas no desempenho. Quando os resultados focalizaram o raciocínio dos estudantes, no entanto, houve uma influência do tipo de apresentação da informação.

Quanto ao uso de tabelas nos Experimentos 1 e 5, em particular, cabe uma reflexão: o mesmo desempenho observado entre os estudantes ingleses não corresponde ao desempenho dos estudantes brasileiros. Os estudantes ingleses tiraram proveito igualmente das tabelas e dos gráficos para considerar as variáveis discretas e as suas relações (médias do percentual de acertos: 40,4% nas tabelas e 40,7% nos gráficos). Os estudantes brasileiros não se beneficiaram no uso de tabelas para analisar variáveis discretas (médias do percentual de acertos: 53,6% nas tabelas e 70,8% nos gráficos). No currículo nacional inglês, os estudantes do ensino fundamental são encorajados a usar gráficos e tabelas para considerar as variáveis dos problemas e as suas relações. Os PCN no Brasil também recomendam o uso de gráficos e tabelas no trabalho com os estudantes do ensino fundamental, observando-se recomendações para o conteúdo do tratamento da informação. No Brasil, entretanto, existe uma ênfase no uso de gráficos.

Em resposta à terceira questão na análise das formas de apresentação dos dados – Será que as tendências verificadas no desempenho e raciocínio de estudantes poderiam ser explicadas quanto ao uso dessas ferramentas de representação em diferentes práticas escolares? – conclui-se que as práticas escolares concernentes ao uso de gráficos, tabelas ou casos isolados, objetificadas em sala de aula, possuem influência na forma dos estudantes compreenderem informações sobre dados. Esse resultado pode evidenciar o fato de que a percepção como processo eminentemente humano, vai além dos aspectos ecológicos da informação, isto é, dos aspectos resultantes apenas da relação sujeito-objeto. A percepção inclui interações entre aspectos visuais e matemáticos, requerendo uma organização cuidadosa de atividades com artefatos.

Os artefatos como mediadores do conhecimento oferecem possibilidades para os estudantes construírem significados relacionados a diferentes informações da realidade. Conforme discutido no Capítulo 3, a organização dos artefatos nas dimensões primária (demonstrar dados), secundária (procedimentos e regras de leitura e interpretação) e terciária (sentido pessoal), mostra uma evolução no uso e uma possibilidade de ser uma ferramenta do pensamento. Neste último caso, os artefatos constituem ferramentas de representação que oferecem possibilidades para uma compreensão conceitual. As ferramentas elaboradas para os experimentos deste trabalho possuem caráter material e psicológico, e são organizadas nas dimensões primárias (das tarefas), secundária (procedimentos de leitura para compreensão das tarefas) e, finalmente, artefatos terciários que consistem na construção dos significados matemáticos e nas possibilidades de os estudantes pensarem matematicamente nas respostas dadas. O *design* experimental, portanto, foi elaborado com base na perspectiva educacional, buscando prover aos estudantes o uso de conceitos matemáticos, mais particularmente os conceitos de variável e de relações entre variáveis. Presume-se que essa finalidade tenha sido alcançada, na medida em que as tarefas propiciaram o uso de conteúdos matemáticos evidenciados no raciocínio dos alunos.

Como teorização oferecida no segundo capítulo, embora o conceito de variável esteja presente nas três formas de representação analisadas – gráficos, tabelas e casos isolados – a natureza das tarefas envolveu dificuldades específicas, as quais estiveram relacionadas com a forma de apresentação da informação e os seus raciocínios necessários para a apreensão global da informação pelos estudantes. Nos casos isolados, os estudantes precisaram separar as variáveis antes de estabelecer as relações necessárias. A noção de variável neste tipo de representação precisou ser construída, pois as quantidades estão dadas de forma análoga, enfatizando-se as unidades elementares da informação. Nas tabelas e gráficos, a impressão global das variáveis das relações entre as variáveis estão dadas de forma simbólica. Nas tabelas, a organização em fileiras e colunas representa, simbolicamente, as variáveis (colunas) e suas relações; isto é, dois dados na mesma fileira mostram a correspondência entre as variáveis. O estudante precisa inspecionar os números para elaborar uma impressão sobre os dados. Nos gráficos, os eixos representam as variáveis e as curvas; aqui, o estudante precisa considerar a natureza da curva para formular a idéia de relação entre as variáveis.

Considerando-se a natureza extensiva dos casos isolados, a solicitação de uma leitura simbólica com base em representação análoga consistiu num fator de dificuldade para o raciocínio de estudantes.

O problema da leitura análoga para representações simbólicas pode estar relacionado à forma como a pessoa está lendo determinado tipo de apresentação da informação, isto é, depende das suas ações e das suas percepções sobre o uso de uma dada representação. Nesse sentido, as inferências que as pessoas precisam estabelecer na leitura de uma representação simbólica envolve tanto aspectos intuitivos, como defendido por Stavy e Tirosh, como também conceituais e relacionados com as regras de leitura e de uso dessas ferramentas. Um aspecto relevante no uso de leituras visuais é que elas podem ser suficientes para os estudantes terem êxito no desempenho das tarefas, quando considerada a sua solução certa ou errada. Elas não se apresentam, no entanto, suficientes para afirmar que o estudante compreende o significado matemático das variáveis e das relações entre as variáveis envolvidas no problema. Nesse ponto, ressalta-se a possibilidade das tarefas elaboradas nos Experimentos 3 e 4, pois elas permitem checar se o estudante está empreendendo apenas uma leitura visual sobre o objeto ou está de fato conectando o seu conhecimento matemático prévio sobre inversão com os aspectos simbólicos da informação.

Os gráficos usados para apresentar variáveis contínuas, como as variáveis sobre valor monetário, consumo de alimento, jornada, crescimento da flor, utilizados no Experimento 2, realizado na Inglaterra, posuíram diferentes níveis de complexidades. As leituras de pontos não constituiram obstáculos para os estudantes interpretarem os gráficos. A questão *qual a altura de Ann?* teve freqüência elevada de acertos, com média percentual de 85,5%. As dificuldades com as informações globais estiveram firmemente relacionadas com as dificuldades dos estudantes em estabelecer inferências inversas entre os fatores gráficos e conceituais das informações. No caso de problemas sobre variáveis contínuas, o pensamento proporcional do estudante foi observado nas situações em que eles eram requeridos a analisar relações proporcionais inversas entre a figura do gráfico e a questão proposta.

O tipo de inferência requerida nos problemas gráficos configurou-se como importante fator para predizer as ações dos estudantes. Nesse sentido, diferentes tipos de informações apresentadas graficamente podem afetar o raciocínio matemático dos estudantes. As questões globais de natureza inversa requerem maior engajamento na análise das variáveis. Mencionam-se, em particular, a necessidade da leitura do gráfico e o estabelecimento de relação entre as variáveis nas situações inversas.

Relações proporcionais diretas foram mais facilmente compreendidas pelos estudantes, pois elas foram mais baseadas em leituras visuais. No Experimento 3, realizado com estudantes ingleses, observou-se que a dificuldade com a análise das relações inversas entre as variáveis foi em gráficos com a inclinação negativa. Os estudantes não apresentaram dificuldades em realizar inferências baseadas em gráficos apresentando relações proporcionais diretas. Gráficos de linhas com inclinação negativa consistem em forma convencional de representar na Matemática as relações inversas. Nessas situações, os estudantes precisam estabelecer interações dos fatores visuais dos gráficos e os tipos de variáveis, resolvendo o problema como uma proporção dupla. Os dados relativos aos gráficos de linhas requerem uma habilidade que precisa ser mais bem trabalhada nas escolas inglesas, pois exige do aluno o raciocínio, além dos aspectos visuais da informação. Como o uso de gráficos de linhas é mais convencionalmente voltado para apresentar problemas diretos, a percepção dos estudantes pode já estar automatizada para uma leitura desse tipo de situação nessa forma de apresentar a informação. Nesse sentido, a visão sobre gráficos não pode ser apenas concebida como uma reação fisiológica a um estímulo externo, mas como parte de uma atividade social e cultural, em que o artefato assume importância.

Nos seis experimentos realizados, enfatiza-se o emprego do computador, tanto como ambiente auxiliar na produção das tarefas, por meio do uso de recursos como *PowerPoint* ou *Printbrush*, e o seu uso como recurso metodológico para apresentação das tarefas durante o experimento. Analisando-se mais particularmente sua aplicação como recurso metodológico, atesta-se o seu suporte na introdução dos gráficos para os estudantes no segundo experimento realizado nas escolas inglesas. Observou-se, durante a realização dos experimentos, que os estudantes ficaram motivados em visualizar os gráficos numa tela. O processo também facilitou o trabalho da pesquisadora, que apenas lia as informações e as perguntas, enquanto os estudantes respondiam em seus cadernos. Por outro lado, do ponto de vista da pesquisa, este trabalho não pode ser estendido, pois uma variável importante nos experimentos em Psicologia, o efeito da ordem de apresentação dos problemas, pode consistir em fator difícil de ser isolado num *design* em que os estudantes resolvam os problemas numa sequência fixa.

O uso de múltiplas representações, como é o caso da combinação de gráficos e tabelas, pode criar a falsa idéia de que essa forma de apresentação teria incorporado a força de levar o estudante a adquirir uma flexibilidade no trato com dados, variáveis e relações entre variáveis. O uso de múltiplas representações, porém, talvez requeira dos estudantes um esforço adicional para lidar com as dificuldades de cada representação em particular.

A discussão dos resultados deste trabalho possui importantes implicações pedagógicas, algumas das quais já foram sugeridas por outros autores. A interpretação de gráficos apresentando informações sobre variáveis contínuas possui diferentes níveis de complexidade, sendo a interpretação dos fatores globais as mais difíceis, pois requer dos estudantes alguma forma de representação mental sobre a situação. A discussão apresentada neste trabalho aprofunda os níveis de dificuldades, por incluir a necessidade de uma discriminação do tipo de representação mental requerida na interpretação dos fatores gráficos globais. Informações sobre relações diretas entre variáveis podem ser mais facilmente interpretadas do que informações sobre relações inversas. Nas relações diretas, o raciocínio visual pode ser suficiente para o estudante compreender a informação. Gráficos que apresentam relações inversas, contudo, requerem maior acuidade interpretativa e o uso do raciocínio proporcional.

Neste sentido, chama-se a atenção para a necessidade de uma discriminação da informação não apenas em termos da sua classificação quanto ao tipo de variável, em discreta ou contínua, ou nos fatores gráficos da informação, mas também nos aspectos conceituais da informação, concernente ao tipo de relação entre as variáveis. É imprescindível o estímulo à expressão do raciocínio dos estudantes em todas as atividades propostas em sala de aula. Destacam-se, nessa direção, ações interdisciplinares na escola, envolvendo diferentes áreas do conhecimento, de modo a possibilitar que os alunos discutam sobre as informações, percebendo-as sob diferentes ângulos e combinações possíveis, a fim de isolar as variáveis e entender como variam elas inversamente. Informações sobre *custo*, *valor monetário*, *velocidade*, *grau de abstinência ao uso de drogas* e *consumo*, usados nesse trabalho, podem constituir importante ponto de partida para encorajar estudantes a raciocinarem sobre relações inversas, podendo configurar em base para a organização de atividades introdutórias ao estudo de variáveis e de suas relações na escola.

Chama-se a atenção, finalmente, para o constructo teórico de Vergnaud e como este pode ser usado para avaliar a natureza matemática do raciocínio dos estudantes. Enfatiza-se ainda, a distinção dos tipos de problemas multiplicativos sugeridos por Vergnaud e Nunes e Bryant e colaboradores e a classificação das ferramentas de representação matemática proposta por Nunes como aportes do domínio matemático a serem usados no *design* de tarefas para o uso em sala de aula.

Os resultados deste trabalho podem servir de base para a organização do *design* de tarefas direcionadas para estudantes do ensino fundamental com vistas ao ensino introdutório de aspectos conceituais concernentes às noções de variáveis e suas relações. O foco do trabalho consistiu da investigação de aspectos visuais e conceituais da informação inferidos com base em ferramentas matemáticas como mediadoras da informação. Embora a influência do conteúdo da informação tenha ficado fora dessa análise, considera-se possível a elaboração de uma sequência didática organizada a partir de um processo exploratório do conteúdo das informações com vistas à descoberta de padrões de variação direta ou inversa, seguida da formulação de ferramentas matemáticas. Com base na análise da informação é possível isolar as variáveis e formular hipotéticas relações entre elas. Essa forma de abordagem pode beneficiar o entendimento das relações inversas.

As tarefas usadas nesse trabalho não foram elaboradas com vistas ao seu uso por pessoas com necessidades visuais. Para o desenvolvimento de trabalhos futuros que possam integrá-las como parte de uma atividade inclusiva em sala de aula, recomenda-se a sua configuração traduzida para o B*raile*.

A pesquisa lança algumas possibilidades para o ensino da matemática no Ensino Fundamental II buscando suprir a complexidade que envolve o uso de representações e a formação daqueles que a organizam numa perspectiva de trabalhos com sequências didáticas.

Em primeiro lugar, torna-se indispensável compreender que *um gráfico não vale por mil palavras*. Na construção de significados matemáticos a partir de gráficos, é preciso que os estudantes estabeleçam relações em vez de apreender a informação de forma instantânea e direta. Em decorrência desse aspecto, é preciso que sejam aprofundadas as noções de variáveis, tanto no que se refere ao seu significado quanto a sua natureza e relações.

No momento em que as ferramentas matemáticas, e os gráficos em particular, são amplamente divulgados pelos media, requerendo dos estudantes e da sociedade em geral competências sobre as noções citadas, cabe à escola incluir na sua organização escolar essa discussão. Nesse ponto, cabe uma pergunta: será que a formação que o professor recebe garante a apropriação desse saber? Entende-se que essas dimensões no uso de ferramentas matemáticas nas salas de aula de matemática devem constar num programa de formação de professores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACIOLY, N. A Justa medida: um estudo sobre as competências matemáticas de trabalhadores de cana de açúcar do Nordeste do Brasil no domínio da medida. In: SEMANA DE ESTUDOS EM PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1995, Recife. **Anais ...** Recife: Universidade federal de Pernambuco. CFCH. Pós-Graduação em Psicologia, 1995.

ACREODOLO, C.; ADAMS, A.; SCHMID, J. On the understanding of the relationships between speed, duration and distance. **Child Development**, 55, p. 2151-2159, 1984.

AINLEY, J. Transparency in graphs and graphing tasks: an interactive process. **Journal of Mathematical Behavior**, v.19, p. 365-384, 2000.

AINLEY, J.; PRATT, D. Introducing a special issue on constructing meanings from data. **Educational Studies in Mathematics**, n. 5, p. 1-13, 2001.

BELL, A.; BREKKE, G.; SWAN, M. Diagnostic teaching: 5 graphical interpretations teaching styles and their effects. **Mathematics teaching**, 120, p. 50-57, 1987.

BOOTH, L. R. **Algebra**: children's strategies and errors. Windsor, UK: NFER-Nelson, 1984.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matematica (3º e 4º ciclos). Brasilia, 1998. Disponível em: http://www.sinepe-sc.org.br/5a8mtm.htm. Acesso em: 25 nov. 2007.

BRIZUELA, B. M.; LARA-ROTH, S. Additive relations and functions tables. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, J. Vincent (Ed.), **Proceedings of the 12th ICM study conference**: The future of the teaching and learning of algebra (pp. 110-119). Melbourne, Australia: The University of Melbourne, 2002.

BROWN, M.; HART, K.; KUCHEMANN, D. Graphs. In: _______. **Chelsea Diagnostic Mathematics Test**, 1985.

CARRAHER, T. N., CARRAHER, D. W., & SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo, SP: Cortez, 1989.

BRYANT, P.; SOMERVILLE, S. The spatial demands of graphs. **British Journal of Psychology**, 77, p. 187-197, 1986.

CHUA, H.; YATES, F.; SHAH, P. Risk avoidance: graphs versus numbers. **Memory and Cognition**, 34, p. 399-410, 2006.

COLE, M. **Cultural Psychology**: a once and future discipline. Harvard: Belknap Press, 2003. Sixth printing.

CONFREY, J. (1994). Sppliting, similarity, and rate of change: a new approach to multiplication and exponential function. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (Ed.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics** (p. 291-330). Albany, NY: Suny Press, 1994.

DFEE. **Key Stage 3 National Strategy**: framework for teaching Mathematics, Years 7, 8 and 9. London: Publisher, 2001.

CURCIO, F. Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. **Journal for Research in Mathematics Education**, 18, p. 382-393, 1987.

DESLANDES, S. F. A construção do projeto de pesquisa. In: MINAYO, M. C. (Org.). **Teoria, método e criatividade**: Introdução à pesquisa social. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 1994, p. 31-50.

DUVAL, R. Sémiosis et Noésis. Conferência proferida à **A.P.M.E.P. I.R.E.M.** Paris, 1992.

______. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, v.1, n. 1-2, p. 103-131, 2006

DFEE/QCA. National Curriculum for England at Key Stages 3 and 4. Disponível em: http://curriculum.qca.org.uk/key-stages-3-and-4/index.aspx. Acesso em: 19/07/2007.

FIELD, A. **Discovering statistics using SPSS**. 2nd. edition, London: SAGE, 2006.

FRIEL, S.; CURCIO, F.; BRIGHT, G. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. **Journal for Research in Mathematics Education**. v. 31, n 2, p. 124-158, 2001.

GAMBOA, S. S. **Fundamentos para la investigación educativa:** pressupostos epistemológicos que orientam al investigador. Santa Fé de Bogotá: Cooperativa de Editorial Magistério, 1998.

GAMBOA, S. S. (Org.). **Pesquisa Educacional:** quantidade-qualidade. São Paulo: Cortez, 2000.

GATTIS, M. Structure mapping in spatial reasoning. **Cognitive Development**, 17, p. 1157-1183, 2002.

GIBSON, J. J. **The ecological approach to visual perception**. Boston: Houghton Mifflin, 1979.

GRAVEMEIJER, K. Mediating between concrete and abstract. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Ed.). **Learning and teaching mathematics**: an international perspective. Sussex: Psychology press,1997, p. 315-342.

HARDY, I; SCHNEIDER, M.; JONEN, A.; STERN, E; MOLLER, K. Fostering diagrammatic reasoning in science education. **Swiss Journal of Psychology**, v. 64, n. 3, p. 207-217, 2005.

HIEBERT, J.; LEVEBRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.) Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics, Hillsdale. N. J.: Erlbaum, 1986.

HOWE, C; NUNES, T.; BRYANT, P.; JAFRI, S. Intensive quantities: why they matter to mathematics education. **TLRP Annual Conference**. Cardiff, nov. 2004.

IMENES, L.; LELLIS, M. **Matemática para todos.** 3º Ciclo, 6º ano, São Paulo: Scipione, 2002a.

______. Matemática para todos. 4º Ciclo, 7º ano, São Paulo: Scipione, 2002b.

______. Matemática para todos. 4º Ciclo, 8º ano, São Paulo: Scipione, 2002c.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **The growth of logical thinking from childhood to adolescence**. New York: Basic Books, 1958.

JANVIER, C. **The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations**: studies and teaching experiments. Nottingham: University of Nottingham, 1978.

JANVIER, C. Use of situations in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, 12, p. 113-122, 1981.

JANVIER, C. Translation processes in mathematics education. In: ______. (Ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. London: Hillsdale, 1987.

JANVIER, C. Modeling and the initiation into algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; L. LEE (Ed.). **Approaches to algebra**: perspectives for research and teaching. London: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 225-236.

KARLSON, P. **A magia dos números**. São Paulo: Globo, 1961.

KERSLAKE, D. Graphs. In: HART, K. (Ed.), **Children's understanding of mathematics 11-16**. Oxford: John Murray, 1981, p. 120-136.

KIERAN, C.; BOILEAU, A.; GARAÇON, M. Introducing algebra by means of a technology - supported, functional approach. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to algebra:** perspectives for research and teaching London: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 257-294.

LARKIN, J. H.; SIMON, H. A. Why a diagram is (sometimes) worth 10,000 words. **Cognitive Science**, v. 11, p. 65-99, 1987.

LAVE, J. **Cognition in Practice**: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life. Cambridge: University Press, 1988.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning**: Legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LEINHARDT, G., ZASLAVSKY, O.; STEIN, M. K. Functions, graphs, and graphing: tasks, learning and teaching. **Review of Educational Research**, 60, p. 1-64, 1990.

LEONTIEV, A.N. The problem of activity in psychology. *In*: WERTSCH, J.V. (Org.). **The concept of activity in soviet psychology.** N.Y.: M.E. Sharpe, 1981, pp. 37-71.

LIMA, L. M. T. **Interpretação de gráficos de quantidades veiculados pela mídia impressa:** um estudo exploratório. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1998.

MCCONNELL, C. R.; BRUE, S. L. **Macroeconomics**: principles, problems and polices. New York: McGraw-Hill, 1996.

MEIRA, L. Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 29, n. 2, p. 121-142, 1998.

MEIRA, L. O “mundo-real” e o dia-a-dia no ensino da matemática. **Educação Matemática em Revista**, n. 1, p. 59-71, 1993.

MEVARECH, Z.; STERN, E. Interaction between knowledge and contexts on understanding abstract mathematical concepts. **Journal of Experimental Child Psychology**, 65, p. 68-95, 1997.

MOLYNEAUX-HODGSON, S.; ROJANO, T.; SUTHERLAND, R.; URSINI, S. Mathematical modelling: the interaction of culture and practice. **Educational Studies in Mathematics**, 39, p. 167-183, 1999.

MONTEIRO, C. E. F. **Investigating critical sense in the interpretation of media graphs**. University of Warwick, 2006.

NELSON, D. Graph. In: ______. **Dictionary of mathematics**. 3rd. ed. London: Penguin Reference, 2003, p. 189.

______. Slope. In: ______. **Dictionary of mathematics**. 3rd. ed. London: Penguin Reference, 2003, p. 392.

NEMIROVSKY, R. A functional approach to algebra: two issues that emerge. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to algebra**: perspectives for research and teaching: Dordretch: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 295-313.

NOSS, R.; POZZI, S.; HOYLES, C. Touching epistemologies: meanings of average and variation in nursing practice. **Educational Studies in Mathematics**, 40, p. 25-51, 1999.
NOSS, R.; BAKKER, A.; HOYLES, C.; KENT, P. Situating graphs as workplace knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, 65, p. 367-384, 2007.

NUNES, T. **Teaching mathematics to deaf children**. London: Whurr, 2004.

______. Systems of signs and mathematical reasoning. In: NUNES, T. BRYANT, P. (Ed.). **Learning and teaching mathematics**: an international perspective. Oxford: Psychology Press, p. 29-44, 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Children doing mathematics**. Oxford: Blackwell, 1996.

______. **Learning and teaching mathematics**: an international perspective. Hove: Psychology Press. 1997.

NUNES, T.; BRYANT; EVANS, D.; BELL, D.; GARDNER, S.; GARDNER, A.; CARRAHER, J. The contributions of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. **British Journal of Developmental Psychology**, 25, p. 147-166, 2007.

NUNES, T.; DESLI, D.; BELL, D. The development of children's understanding of intensive quantities. **International Journal of Educational Research**, 39, p. 651-675, 2003.

PARSONS, R. **Key Stage three Maths**: the workbook. Newcastle. Coordination Group Publications Ltd, 2003a.

______. **Key Stage three Mathematics**: the revision guide. Newcastle: Coordination Group Publications Ltd, 2003b.

PEREZ-ECHEVERRIA, M.; PECHARROMAN, A.; POSTIGO, Y. Graphicacy: the university students' skills to translate information. Paper presented at the **EARLI 2005 11a Conference**, Cyprus, 2005.

PIAGET, J. **The child's conception of movement and speed**. London: Routledge and Kegan Paul, 1970

ROTH, M. Competent workplace mathematics: how signs become transparent in use. **Journal of Computers for Mathematical learning**, n. 8, p. 161-189, 2003.

SALJO E WYNDHAMN. Solving everyday problems in the formal setting: an empirical study of the school as context for thought. In: CHAIKLIN, S.; LAVE, J. (Ed). **Understanding practice**: perspectives on activity and context, Cambridge: University Press, 1993.

SAXE, G. **Culture and Cognitive development**: studies in mathematical understanding. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1991.

SELLKE, D.; BEHR, M.; VOELKER, A. Using data tables to represent and solve multiplicative story problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 22, p. 30-38, 1991.

SELVA, A.; FALCAO, J.; NUNES, T. Solving additive problems at pre-elementary school level with the support of graphical representation. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICAL EDUCATION, Melbourne, 2005.

SILVA, R. N., LIMA, M. T. L. O tratamento da informação no âmbito escolar: aspectos pedagógicos e didáticos. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORTE E NORDESTE, 15, 2001, São Luís. **Anais ...** São Luís, 2001.

SILVA, T. T. **Documentos de identidade**: uma introdução às teorias do currículo. Belo Horizonte: Autêntica, 1999.

SILVEIRA, E.; MARQUES, C. **Matemática Contextualizada**. 7ª série. Recife: Editora Construir, 2004.

SINGER, J.; KOHN, A.; RESNICK, L. Knowing about proportions in different contexts. In: NUNES, T. BRYANT, P. (Ed.). **Learning and teaching mathematics**: an international perspective. Oxford: Psychology Press, p. 115-132, 1997.

SOUZA, D. A.; LIMA, M. T. L. A matemática num curso de EJA: relações didático-pedagógicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO**,** 11, Goiânia. **Anais ...** Goiânia, 2002.

SOMEREN, W.; REIMAN, P.; BOSHUIZEN, H.; DE JONG, T. **Learning with multiple representations**: advances in learning and instruction serie. New York: Elsevier, 1998.

SPINILLO, A. G. ; BRYANT, P. Children's proportional judgements: the importance of 'half'. **Child Development**, Chicago, v. 62, n. 2, p. 427-440, 1991.

SQUIRE, S.; BRYANT, P. Children's understanding and misunderstanding of the inverse relation in division. **British Journal of Developmental Psychology**, 21, p. 507-526, 2003.

STAVY, R.; TIROSHI, D. **How students (mis-)understanding science and mathematics**. New York: Teachers College Press, 2000.

SWATTON, P.; TAYLOR, R. M. Pupil performance in graphical tasks and its relationship to the ability to handle variables. **British Educational Research Journal**, v. 20, n. 2, p. 227-243, 1994.

UPTON, G.; COOK, I. Data. In: ______. **Oxford dictionary of statistics**. 2nd. ed. New York: Oxford University Press Inc., 2006, p.117.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of mathematics concepts and process.** London: Academic Press, 1983, p. 128-175.

______. Conclusion. In: C. JANVIER (Ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. London: Hillsdale, 1987, p. 227-232.

______. **El ninõ, las matematicas y la realidade**. Problemas de la ensenânsa de las matematicas en la scuela primaria, México: Trillas, 1991.

______. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T. BRYANT, P. (Ed.). **Learning and teaching mathematics**: an international perspective. Oxford: Psychology Press, p. 5-28, 1997.

______. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

VOIGT, J. **Ascribing mathematical meaning to empirical phenomena**: custom and dynamics of classroom discourse. In: CONFERENCE ON THE CULTURE OF THE MATHEMATICS CLASSROOM. Osnabruck, Germany, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **Mind in society**: the development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

______. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

______. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

VYGOTSKY, L.; LURIA, A. Tool and symbol in child development. In: VEER, R.; VALSINER, J. (Ed.). **The Vygotsky reader**. Oxford: Blackwell, 1994.

WARTOFSKY, M. **Models**: representation and scientific understanding: Dordrecht: Reidel, 1979.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. Development of reasoning associated with pictographs: representing, interpreting, and predicting. **Educational Studies in_Mathematics**, 48, p. 47-81, 2001.

WERTSCH, J. **Mind as action**. Oxford: Oxford University Press, 1998.

APÊNDICE A – Problema 1 apresentado por meio de Tabelas, Gráficos ou Casos individuais no Experimento 1

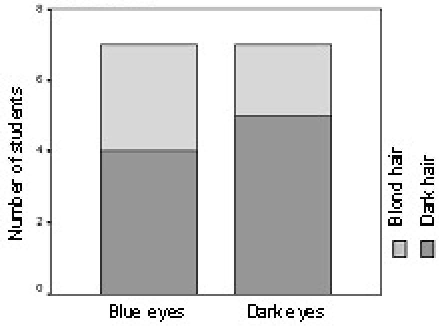
Problema 1:
Students' eye and hair colour

Do you think that there is a greater chance pf finding students with dark hair among students with blue eyes or among students with dark eyes?

TABELA

	Blue eyes	Dark eyes	Total
Blond hair	3	2	5
Dark hair	4	5	9
Total	7	7	

GRÁFICO



CASOS INDIVIDUAIS

APÊNDICE B – Problema 2 apresentado por meio de Tabela, Gráfico ou Casos Individuais no Experimento 1

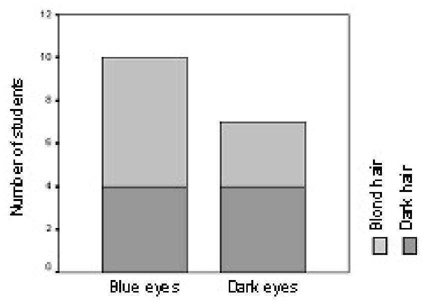
Problema 2:
Students' eye and hair colour

Do you think that there is a greater chance pf finding students with dark hair among students with blue eyes or among students with dark eyes?

TABELA

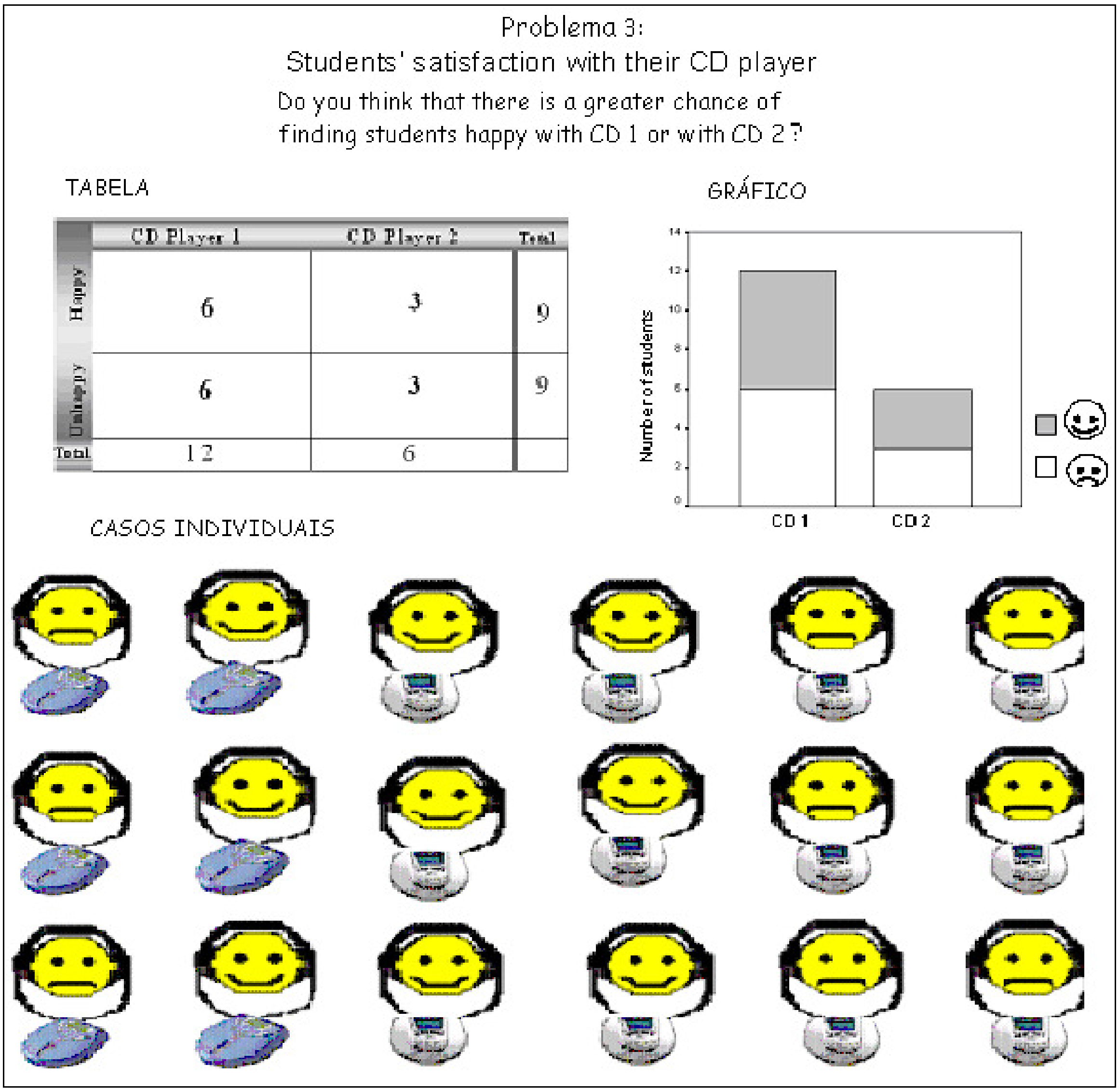
	Blue eyes	Dark eyes	Total
Blond hair	6	3	9
Dark hair	4	4	8
Total	10	7	

GRÁFICO



CASOS INDIVIDUAIS

APÊNDICE C - Problema 3 apresentado por meio de Tabela, Gráfico ou Casos Individuais no Experimento 1



APÊNDICE D – Problema 4 apresentado por meio de Tabela, Gráfico ou Casos Individuais no Experimento 1

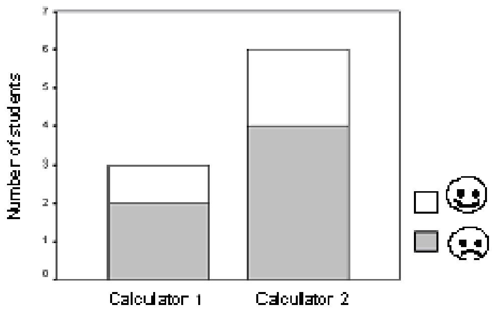
Problema 4:

Do you think that there is a greater chance of finding students happy with Calculator 1 or with Calculation 2?

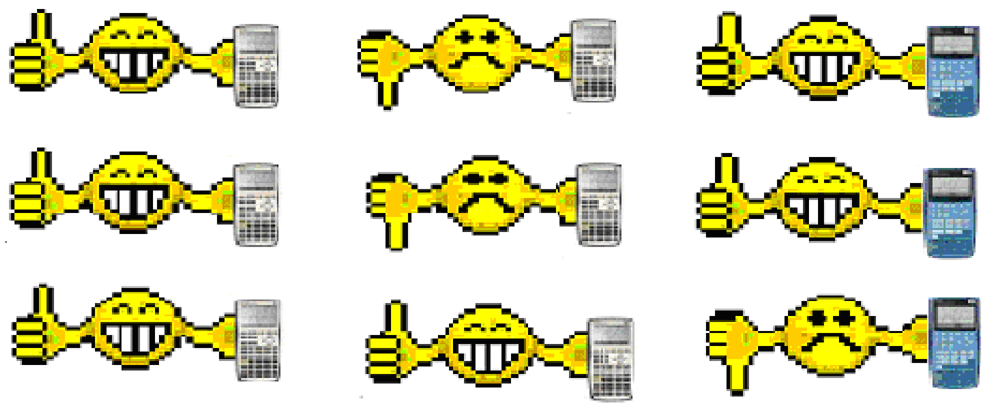
TABELA

	Calculator 1	Calculator 2	Total
Happy	2	4	6
Unhappy	1	2	3
Total	3	6	

GRÁFICO



CASOS INDIVIDUAIS



APÊNDICE E – Problemas 5 e 6 apresentados por meio de Tabela, Gráfico ou Casos Individuais no Experimento 1

Problemas 5 e 6:

5. In which month do tickets provide relatively more money? In January or in February?

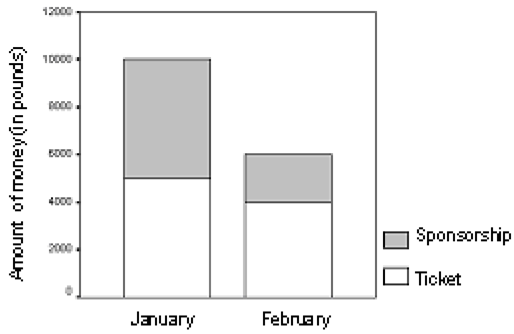
6. In which month does sponsorship provide relatively more money? In January or in February?

TABELA

	January	February	Total
Tickets	5000	4000	9000*
Sponsorship	5000	2000	7000*
Total	10000*	6000*	

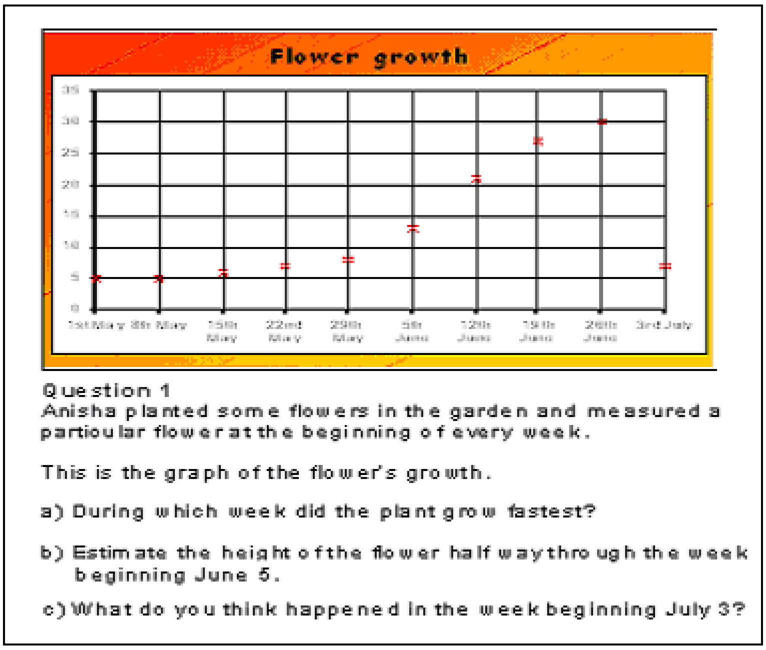
* Values in pounds

GRÁFICO

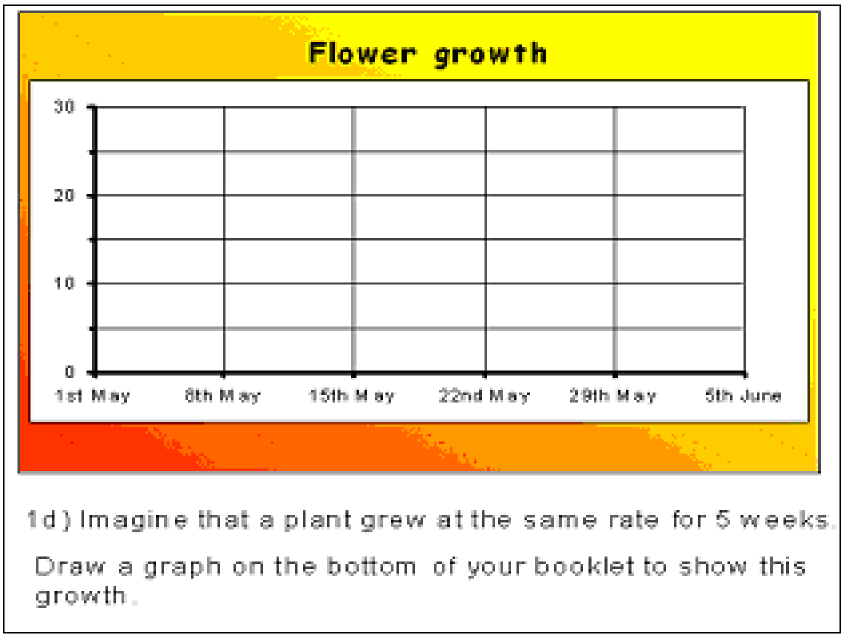


CASOS INDIVIDUAIS

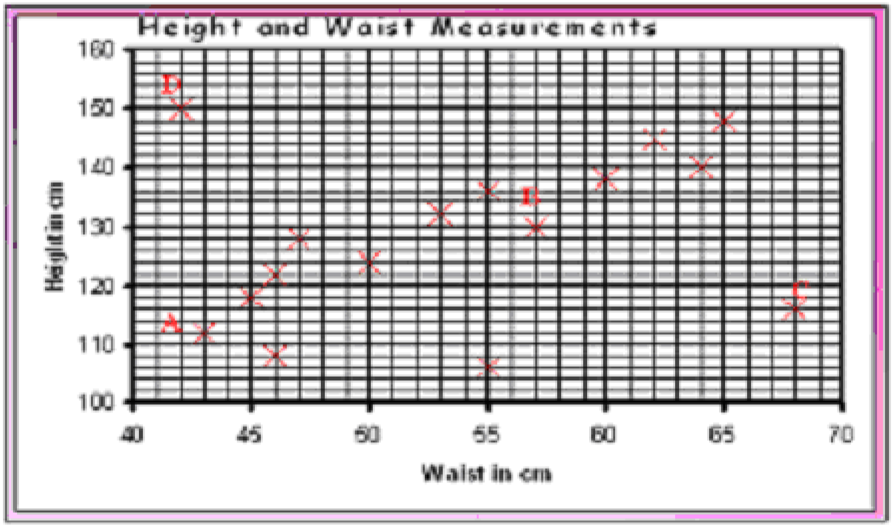
APÊNDICE F – Tarefas gráficas do Experimento 2



[5]



5 Gráfico usado no programa *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS) (BROWN; HART; KUCHEMANN, 1985).



Question 2

Susan drew a diagram to show the height and waist measurement of the students in her class.

a) What is Ann's (A) height?

b) What is Ann's (A) waist?

c) Using an R, mark on the diagram of your booklet the Raul (R) measures. His height is 150cm and his waist is 70cm.

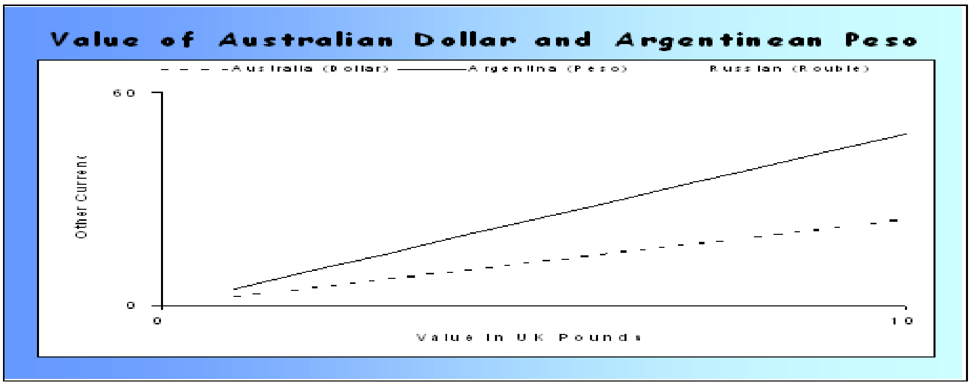
d) What can you say about Charles' (C) appearance?

e) What can you say about Dino's (D) appearance?

f) Is the children's height related to their waist measure? Why do you think this?

g) What can you say about the height of a child whose waist is 59 cm? Why do you think this? [6]

[6] Gráfico usado no programa *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS) (BROWN; HART; KUCHEMANN, 1985).



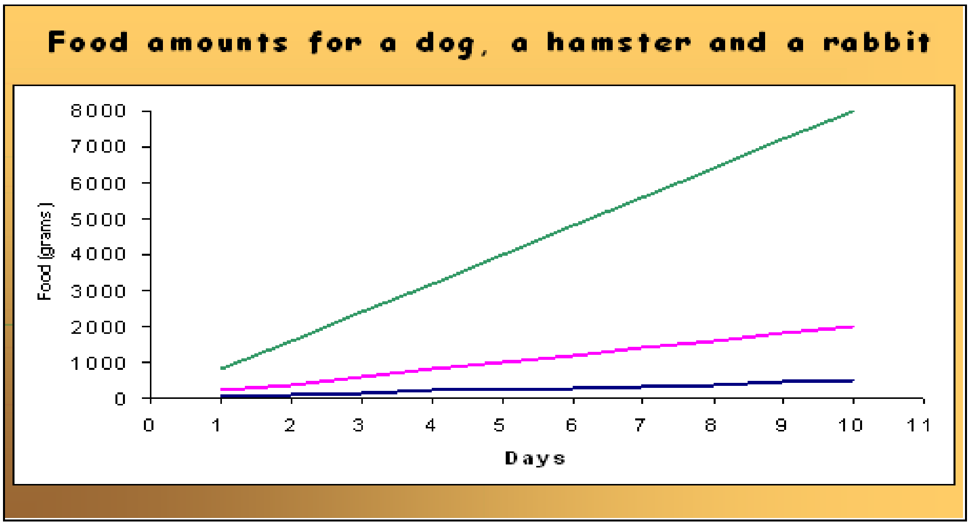
Question 3

The graph shows the value of the Australian Dollar and of the Argentinean Peso in pounds (£).

a) Which one is more valuable when compared to the British Pound?

b) Why do you think this?

c) The Russian Rouble is less valuable than the Argentinean Peso. Draw a line that could represent the value of the Russian Rouble in pounds.

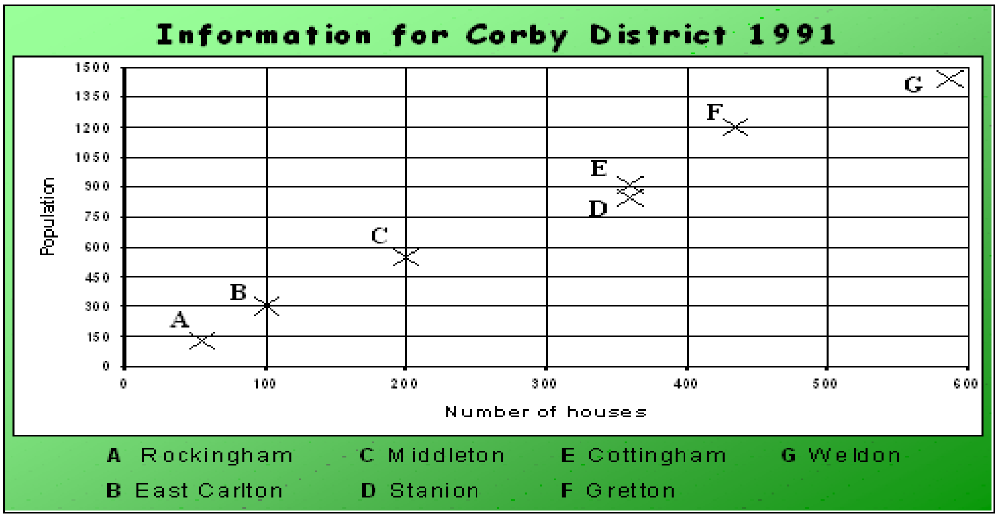


Question 4

This graph shows how much food a dog, a hamster and a rabbit eat on average over 10 days.

a) Which line do you think corresponds to which animal? Write next to the each colour the name of the animal that you think corresponds to the line that has that colour.

b) Why do you think so?

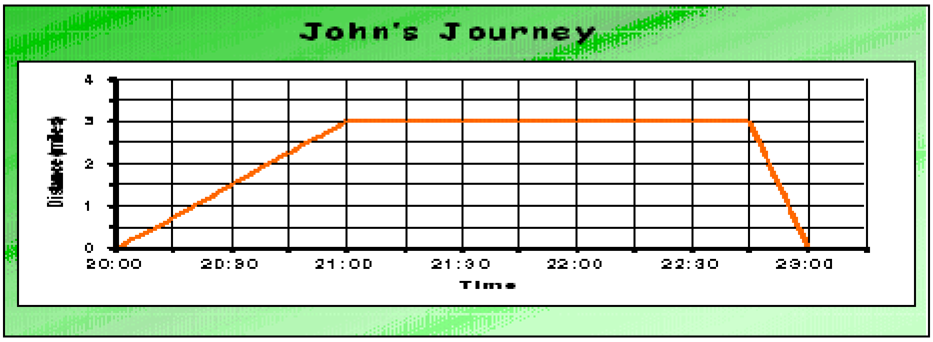


Question 5

a) Which is the most populated town?

b) On average how many people are there per house living in East Carlton?

c) Which town has more crowded houses, Stanion or Cottingham? Please explain why you think so.



Question 6

John leaves home to go to a disco 3 miles away. This is the graph of his journey.

a) At what time did he leave home to go to the disco?

b) What do you think he was doing between 21.00 and 22.45?

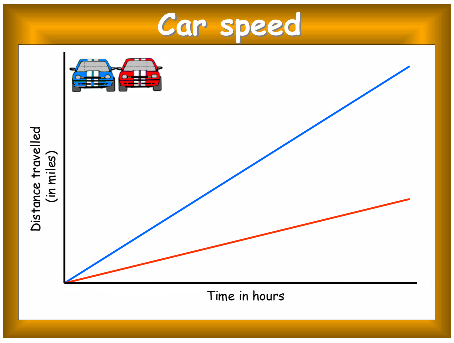
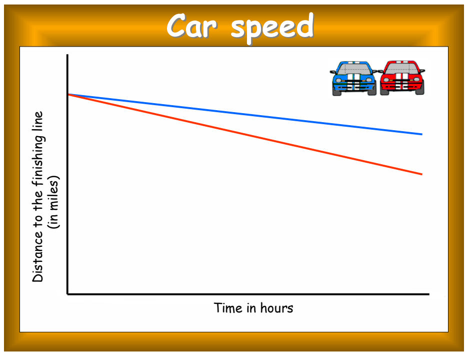
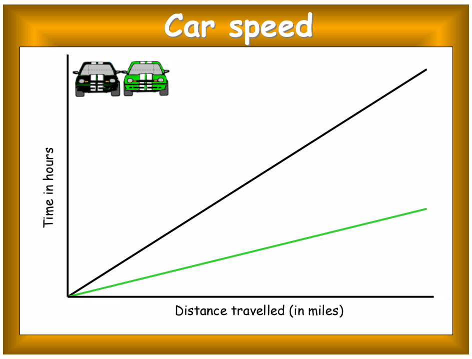
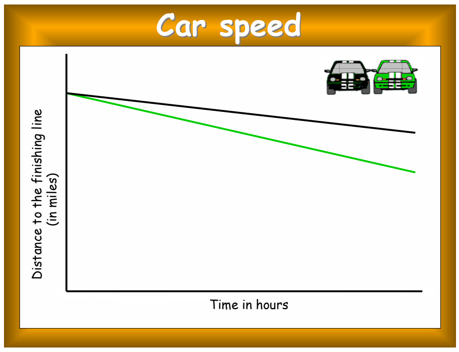
c) He walked one way and took the bus the other way. Which way did he walk? Why do you think so? [7]

---

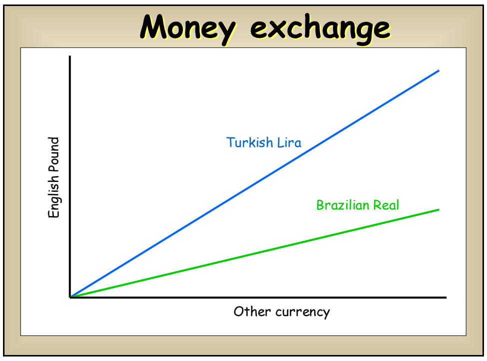
[7] Gráfico usado no programa *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS) (BROWN; HART; KUCHEMANN, 1985).

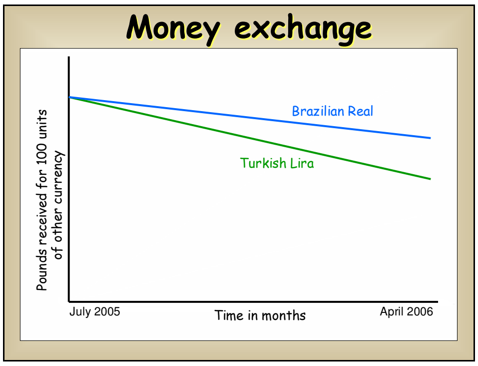
APÊNDICE G – Variação dos gráficos de linhas usados no Experimento 3

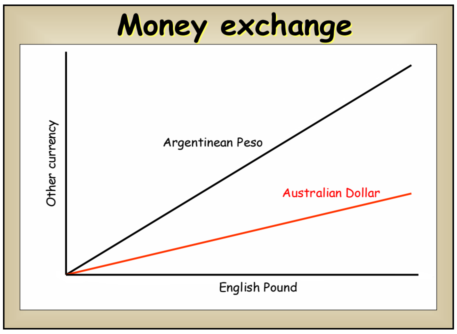
CONTEÚDO: VELOCIDADE

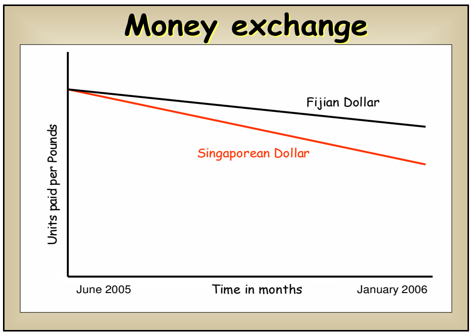
Inferências	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**
Direta	 Which car travelled faster, the blue one or the red one?	 Which car is going slower?
Inversa	 Which car travelled faster, the black one or the green one?	 Which car moves faster?

CONTEÚDO: VALOR MONETÁRIO

<table>
<tr><th rowspan="2">Inferências</th><th colspan="2">Inclinação</th></tr>
<tr><th>Positiva</th><th>Negativa</th></tr>
<tr><td>Direta</td><td>

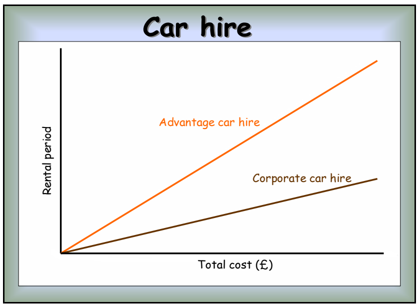
Which currency is more valuable in comparison to the Pound, the Turkish or the Brazilian?</td><td>

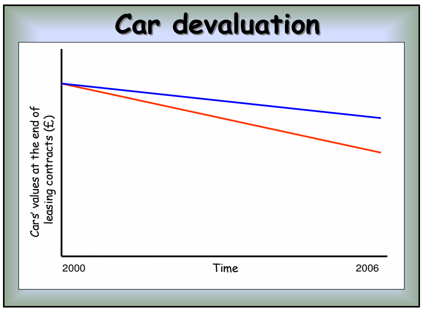
Which government has been more successful in increasing the value of their currency?</td></tr>
<tr><td>Inversa</td><td>

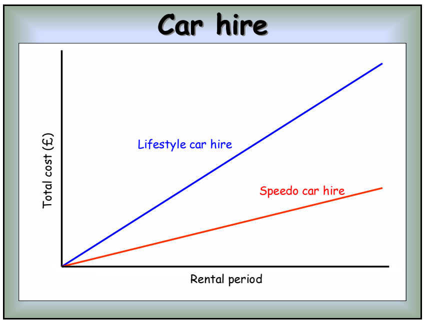
Which currency is more valuable in comparison to the Pound, the Argentinean or the Australian?</td><td>

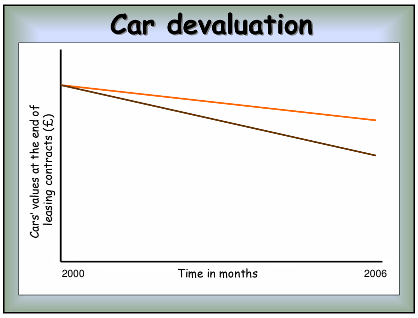
Which government has been more successful in increasing the value of their currency?</td></tr>
</table>

CONTEÚDO: CUSTO

<table>
<tr><th rowspan="2">Inferências</th><th colspan="2">Inclinação</th></tr>
<tr><th>Positiva</th><th>Negativa</th></tr>
<tr><td>Direta</td><td>

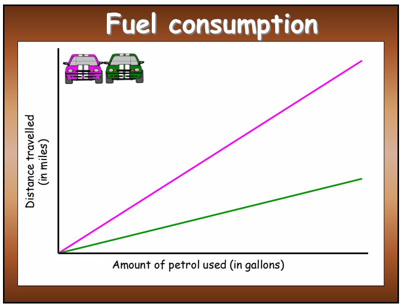
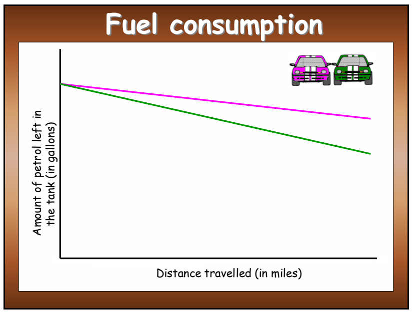
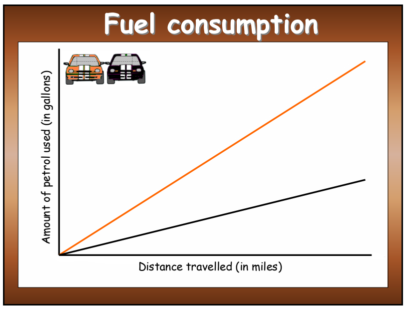
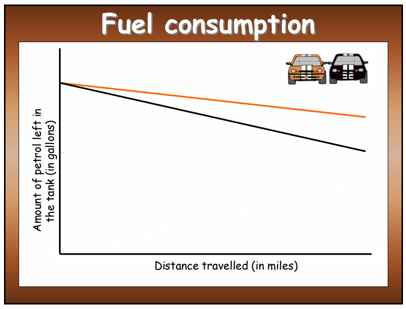
In which company is it more advantageous to hire a car, Advantage or Corporation?</td><td>

It is expected that at the end of leasing contracts, cars that devaluated faster are sold for less money. In 2000, two types of cars, Citroen Xsara and Susuki Gran Vitara, were sold for the same price at the end of a leasing contract. This graph shows that the Susuki Gran Vitara has devaluated slowly since 2000.
Using this information, can you write which line on the graph represents the value of the Susuki Gran Vitara and the value of the Citroen Xsara at the end of the leasing contract?</td></tr>
<tr><td>Inversa</td><td>

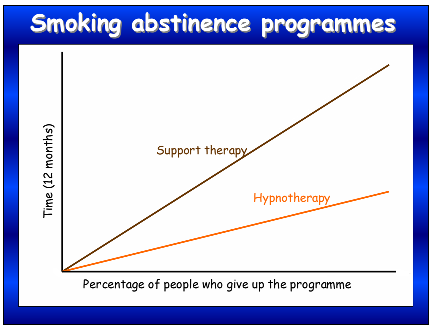
In which company is it more advantageous to hire a car, Lifestyle or Speedo?</td><td>

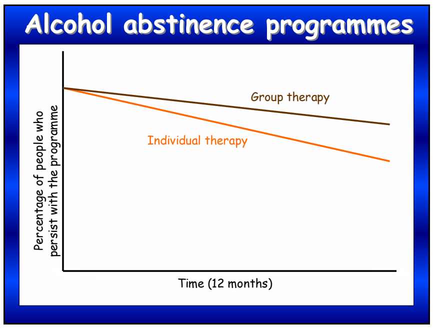
In 2000, two types of cars, BMW and Mercedes, were sold for the same price at the end of a leasing contract. The quality level has fallen more in the Mercedes model than in the BMW model, since 2000.
Can you write which line on the graph represents the value of the BMW and which represents the value of the Mercedes?</td></tr>
</table>

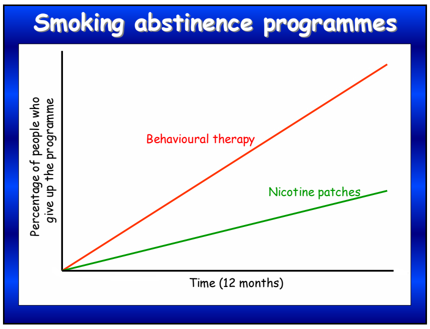
CONTEÚDO: CONSUMO DE GASOLINA

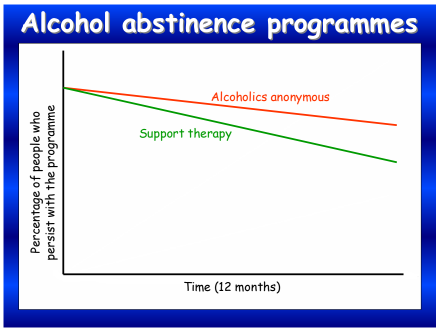
Inferências	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**
Direta	 Which car is cheaper to run, the pink one or the green one?	 Which car is cheaper to run, the pink one or the green one?
Inversa	 Which car is cheaper to run, the orange one or the black one?	 Which car is more expensive to run, the orange one or the black one?

CONTEÚDO: PROGRAMAS DE ABSTINÊNCIA AO USO DE DROGAS

<table>
<tr><th rowspan="2">Inferências</th><th colspan="2">Inclinação</th></tr>
<tr><th>Positiva</th><th>Negativa</th></tr>
<tr><td>Direta</td><td>


Which type of programme is harder for people to stay on, Support therapy or Hypnotherapy?</td><td>


Which type of programme results in more drop-outs, Group therapy or Individual therapy?</td></tr>
<tr><td>Inversa</td><td>


Which type of programme is harder for people to stay on, Behavioural therapy or Nicotine patches?</td><td>


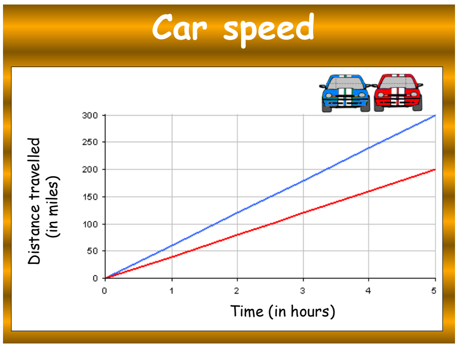
Which type of programme is more effective in keeping people on board, Alcoholics anonymous or support therapy?</td></tr>
</table>

APÊNDICE H – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 4 para o conteúdo *Velocidade*

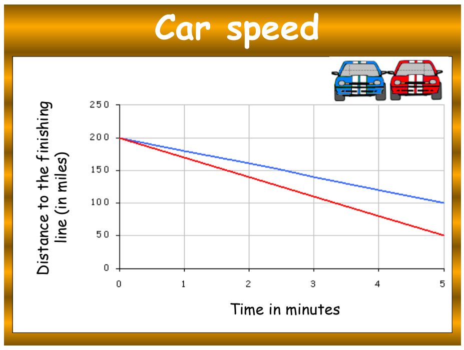
Inferência direta	***Inclinação*** – **Positiva**	***Inclinação*** – **Negativa**

Gráfico

Positiva:

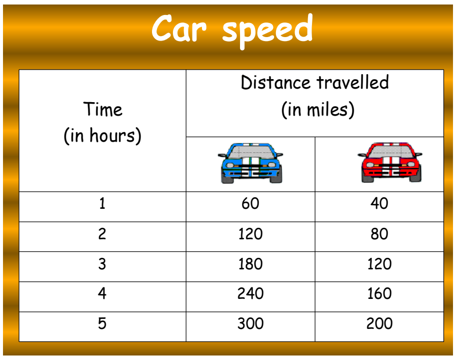


Negativa:



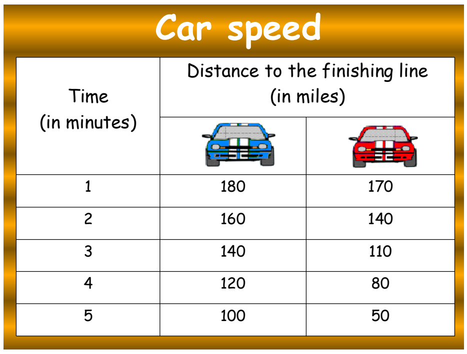
Tabela

Positiva:


Car speed

Time (in hours)	Distance travelled (in miles) – blue	Distance travelled (in miles) – red
1	60	40
2	120	80
3	180	120
4	240	160
5	300	200

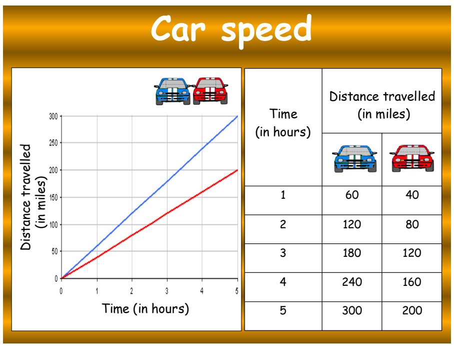
Negativa:


Car speed

Time (in minutes)	Distance to the finishing line (in miles) – blue	Distance to the finishing line (in miles) – red
1	180	170
2	160	140
3	140	110
4	120	80
5	100	50

Ambas representações

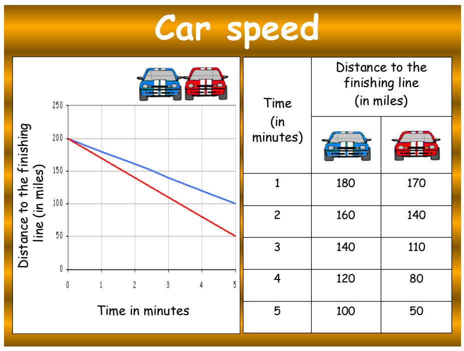
Positiva:



Time (in hours)	Distance travelled (in miles) – blue	Distance travelled (in miles) – red
1	60	40
2	120	80
3	180	120
4	240	160
5	300	200

Which car travelled faster, the blue one or the red one?

Negativa:



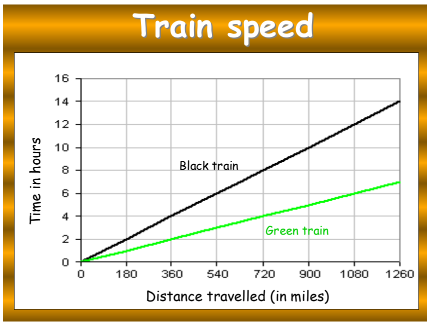
Time (in minutes)	Distance to the finishing line (in miles) – blue	Distance to the finishing line (in miles) – red
1	180	170
2	160	140
3	140	110
4	120	80
5	100	50

Which car is going slower, the blue one or the red one?

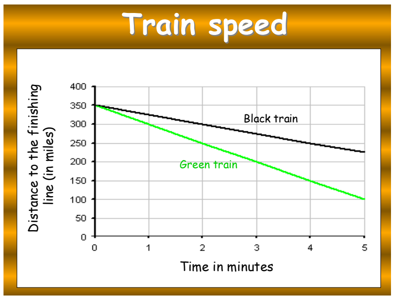
Inferência inversa	*Inclinação*	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

Positiva:



Negativa:



Tabela

Positiva:

Train speed

Distance travelled (in miles)	Time in hours	
	Black train	**Green train**
180	2	1
360	4	2
540	6	3
720	8	4
900	10	5
1080	12	6
1260	14	7

Negativa:

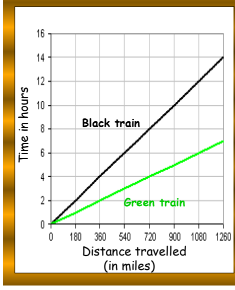
Train speed

Time (in minutes)	Distance to the finishing line (in miles)	
	Black train	**Green train**
1	325	300
2	300	250
3	275	200
4	250	150
5	225	100

Ambas representações

Positiva:

Train speed

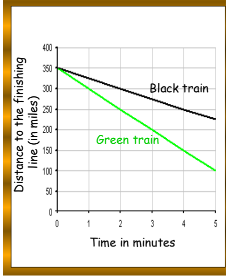


Distance travelled (in miles)	Time in hours	
	Black train	**Green train**
180	2	1
360	4	2
540	6	3
720	8	4
900	10	5
1080	12	6
1260	14	7

Which train travelled faster, the black one or the green one?

Negativa:

Train speed



Time (in minutes)	Distance to the finishing line (in miles)	
	Black train	**Green train**
1	325	300
2	300	250
3	275	200
4	250	150
5	225	100

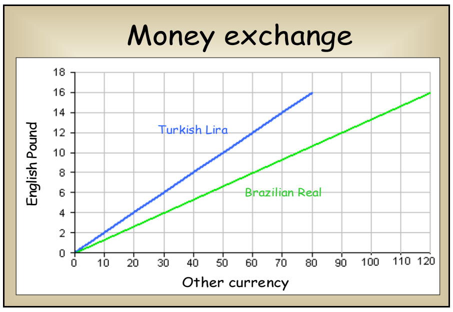
Which train moves faster, the black one or the green one?

APÊNDICE I – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 4 para o conteúdo V*alorMonetário*

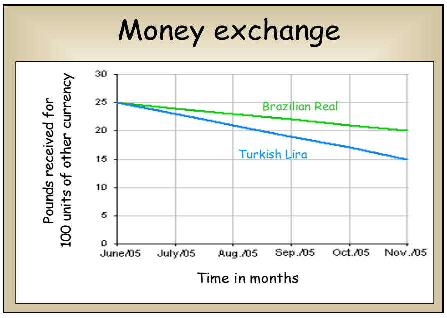
Inferência direta	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

Positiva



Negativa



Tabela

Positiva

Money exchange

English Pound	Other currency	
	Turkish Lira	Brazilian Real
2	10	15
4	20	30
6	30	45
8	40	60
10	50	75
12	60	90
14	70	105
16	80	120

Negativa

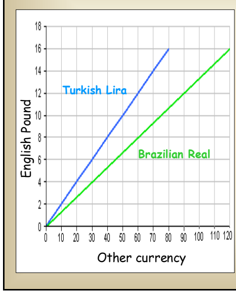
Money exchange

Time in Months	Pounds received for 100 units of other currency	
	Brazilian Real	Turkish Lira
Jun/05	25	25
Jul/05	24	23
Aug/05	23	21
Sep/05	22	19
Oct/05	21	17
Nov/05	20	15

Ambas representações

Positiva

Money exchange

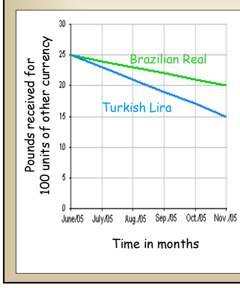


English Pound	Other currency	
	Turkish Lira	Brazilian Real
2	10	15
4	20	30
6	30	45
8	40	60
10	50	75
12	60	90
14	70	105
16	80	120

Which currency is more valuable in comparison to the Pound, the Turkish or the Brazilian?

Negativa

Money exchange



Time in Months	Pounds received for 100 units of other currency	
	Brazilian Real	Turkish Lira
Jun/05	25	25
Jul/05	24	23
Aug/05	23	21
Sep/05	22	19
Oct/05	21	17
Nov/05	20	15

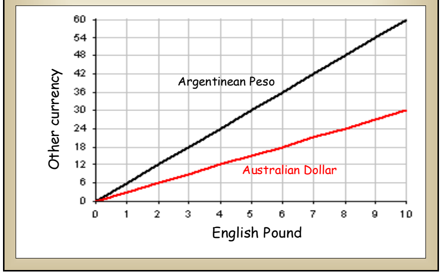
Which government has been more successful in improving the value of their currency against the Pound?

Inferência inversa	***Inclinação*** **Positiva**	**Negativa**

Gráfico

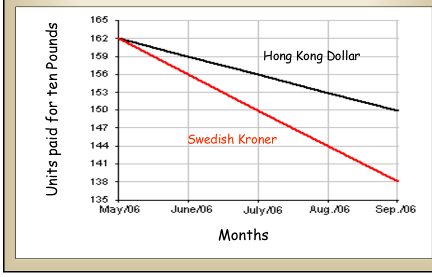
Positiva

Money exchange



Negativa

Money exchange



Tabela

Positiva

Money exchange

English Pound	Other currency: Argentinean Peso	Other currency: Australian Dollar
1	6	3
2	12	6
3	18	9
4	24	12
5	30	15
6	36	18
7	42	21
8	48	24
9	54	27
10	60	30

Negativa

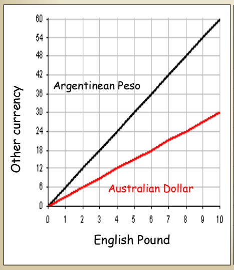
Money exchange

Months	Units paid for ten Pounds: Hong Kong Dollar	Units paid for ten Pounds: Swedish Kroner
May/06	162	162
June/06	159	156
July/06	156	150
Aug./06	153	144
Sep./06	150	138

Ambas representações

Positiva

Money exchange

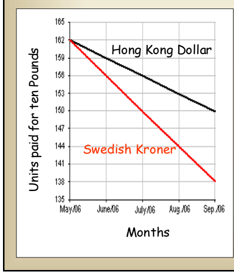


English Pound	Other currency: Argentinean Peso	Other currency: Australian Dollar
1	6	3
2	12	6
3	18	9
4	24	12
5	30	15
6	36	18
7	42	21
8	48	24
9	54	27
10	60	30

Which currency is more valuable in comparison to the Pound, the Argentinean or the Australian?

Negativa

Money exchange



Months	Units paid for ten Pounds: Hong Kong Dollar	Units paid for ten Pounds: Swedish Kroner
May/06	162	162
June/06	159	156
July/06	156	150
Aug./06	153	144
Sep./06	150	138

Which government has been more successful in improving the value of their currency against the English Pound?

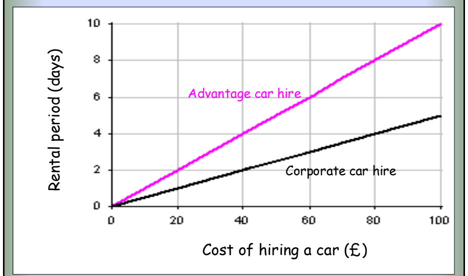
APÊNDICE J – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 4 para o conteúdo C*usto*

Inferência direta	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

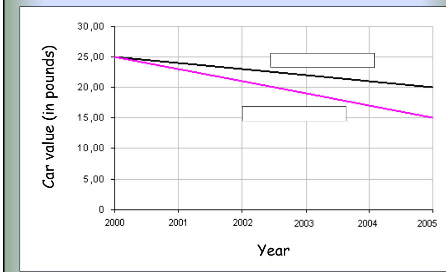
Positiva

Car hire



Negativa

Car value



Tabela

Positiva

Car hire

Cost of hiring a car (£)	Rental period (days)	
	Advantage car hire	Corporate car hire
20	2	1
40	4	2
60	6	3
80	8	4
100	10	5

Negativa

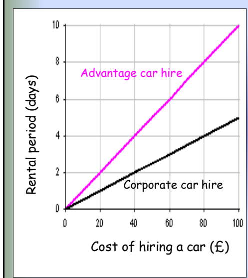
Car value

Year	Car value (in pounds)	
2000	25,000	25,000
2001	24,000	23,000
2002	23,000	21,000
2003	22,000	19,000
2004	21,000	17,000
2005	20,000	15,000

Ambas as representações

Positiva

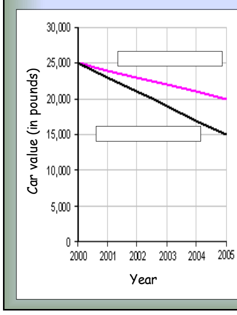
Car hire



Cost of hiring a car (£)	Rental period (days)	
	Advantage car hire	Corporate car hire
20	2	1
40	4	2
60	6	3
80	8	4
100	10	5

Negativa

Car value



Year	Car value (in pounds)	
2000	25,000	25,000
2001	24,000	23,000
2002	23,000	21,000
2003	22,000	19,000
2004	21,000	17,000
2005	20,000	15,000

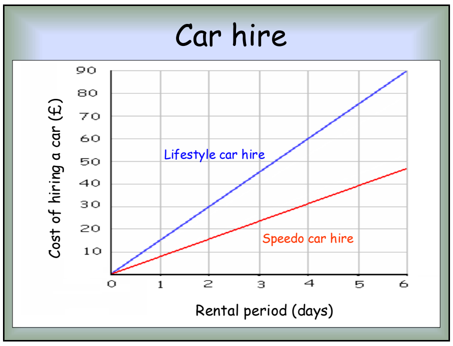
Which company offers you a better value, Advantage or Corporate?

In the year 2000 Paul bought a car for £25,000 and John bought a car for £25,000. Over the subsequent 5 years John's car kept its value better than Paul's car.
Using this information, can you write the names of the owners in the blank spaces in the graph?

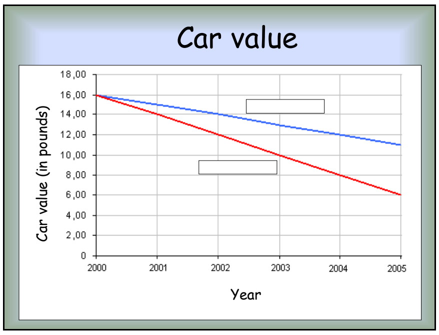
Inferência inversa	*Inclinação* — **Positiva**	*Inclinação* — **Negativa**
Gráfico	see below	see below

Gráfico

Positiva



Negativa



Tabela

Positiva

Car hire

Rental period (days)	Cost of hiring a car (£) Lifestyle car hire	Cost of hiring a car (£) Speedo car hire
1	15	8
2	30	16
3	45	24
4	60	32
5	75	40
6	90	48

Negativa

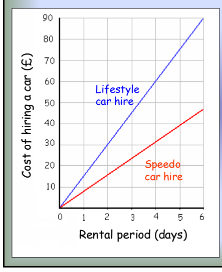
Car value

Year	Car value (in pounds)	
2000	16,000	16,000
2001	15,000	14,000
2002	14,000	12,000
2003	13,000	10,000
2004	12,000	8,000
2005	11,000	6,000

Ambas as representações

Positiva

Car hire

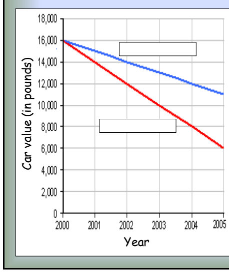


Rental period (days)	Cost of hiring a car (£) Lifestyle car hire	Cost of hiring a car (£) Speedo car hire
1	15	8
2	30	16
3	45	24
4	60	32
5	75	40
6	90	48

Which company offers you a better value, Lifestyle or Speedo?

Negativa

Car value



Year	Car value (in pounds)	
2000	16,000	16,000
2001	15,000	14,000
2002	14,000	12,000
2003	13,000	10,000
2004	12,000	8,000
2005	11,000	6,000

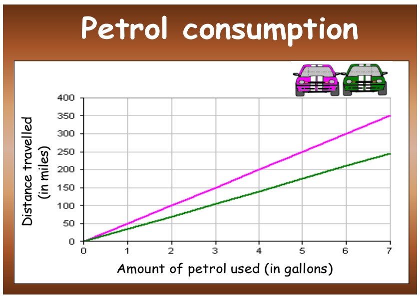
In the year 2000 Mary bought a car for £16,000 and Claire bought a car for 16,000. Over the subsequent 5 years Claire's car devaluated faster than Mary's car.
Using this information, can you write the name of the owners in the blank spaces in the graph?

APÊNDICE K – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 4 para o conteúdo C*onsumo de Gasolina*

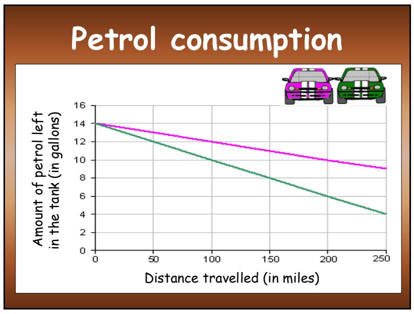
Inferência Direta	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

Positiva:

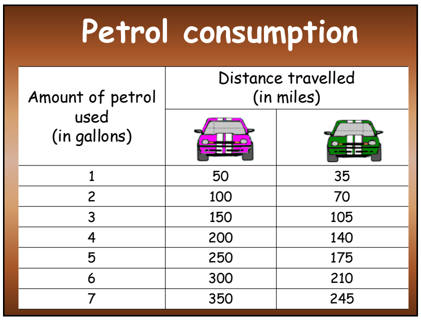


Negativa:



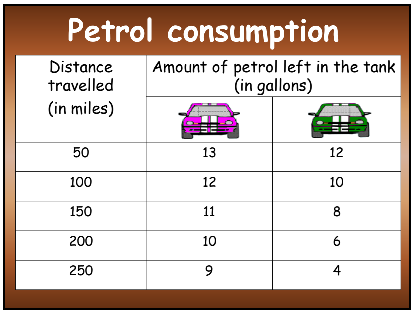
Tabela

Positiva:



Amount of petrol used (in gallons)	Distance travelled (in miles)	
	pink	green
1	50	35
2	100	70
3	150	105
4	200	140
5	250	175
6	300	210
7	350	245

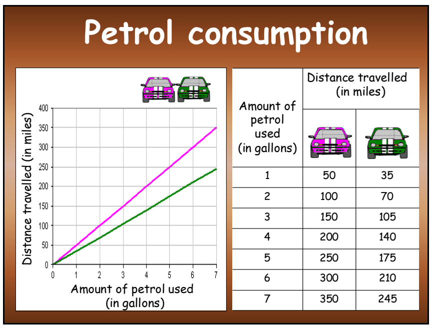
Negativa:



Distance travelled (in miles)	Amount of petrol left in the tank (in gallons)	
	pink	green
50	13	12
100	12	10
150	11	8
200	10	6
250	9	4

Ambas as representações

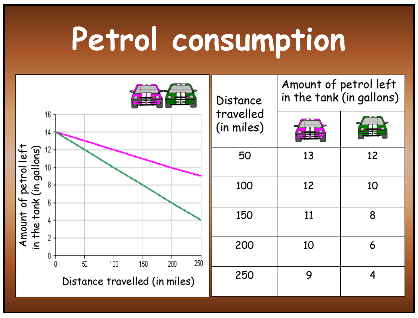
Positiva:



Amount of petrol used (in gallons)	Distance travelled (in miles)	
	pink	green
1	50	35
2	100	70
3	150	105
4	200	140
5	250	175
6	300	210
7	350	245

Which car is cheaper to run, the pink one or the green one?

Negativa:



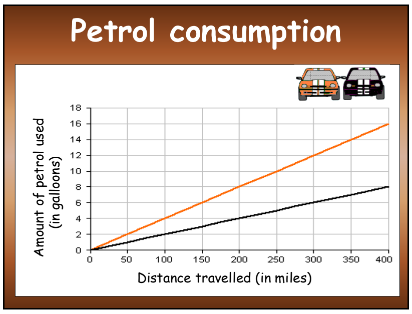
Distance travelled (in miles)	Amount of petrol left in the tank (in gallons)	
	pink	green
50	13	12
100	12	10
150	11	8
200	10	6
250	9	4

Which car is cheaper to run, the pink one or the green one?

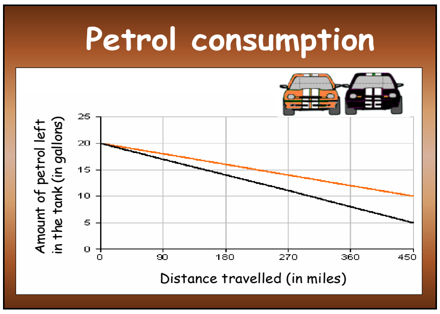
Inferência inversa	*Inclinação*	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

Positiva:

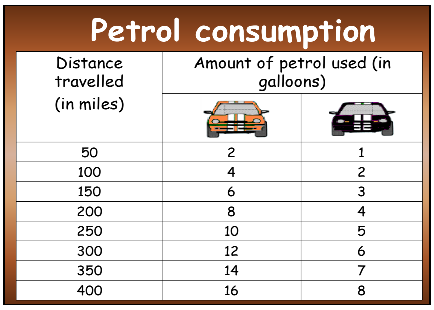


Negativa:



Tabela

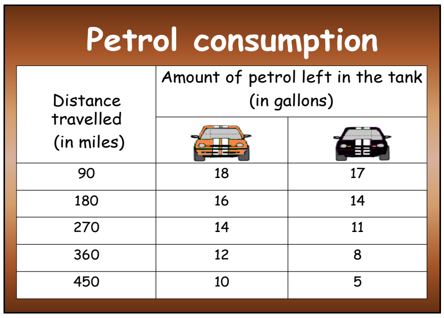
Positiva:



Petrol consumption

Distance travelled (in miles)	Amount of petrol used (in galloons) — orange car	black car
50	2	1
100	4	2
150	6	3
200	8	4
250	10	5
300	12	6
350	14	7
400	16	8

Negativa:

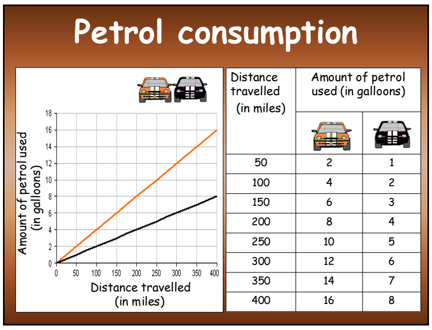


Petrol consumption

Distance travelled (in miles)	Amount of petrol left in the tank (in gallons) — orange car	black car
90	18	17
180	16	14
270	14	11
360	12	8
450	10	5

Ambas as representações

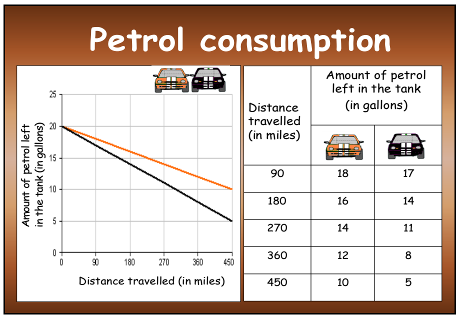
Positiva:



Distance travelled (in miles)	Amount of petrol used (in galloons) — orange car	black car
50	2	1
100	4	2
150	6	3
200	8	4
250	10	5
300	12	6
350	14	7
400	16	8

Which car is cheaper to run, the orange one or the black one?

Negativa:



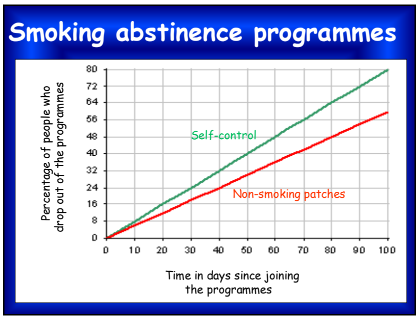
Distance travelled (in miles)	Amount of petrol left in the tank (in gallons) — orange car	black car
90	18	17
180	16	14
270	14	11
360	12	8
450	10	5

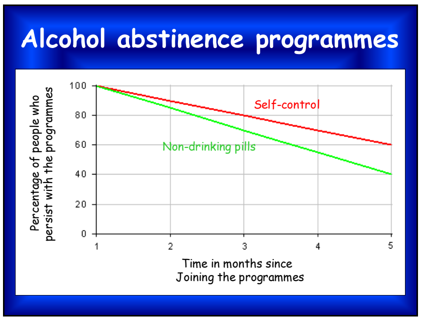
Which car is more expensive to run, the orange one or the black one?

APÊNDICE L – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 4 para o conteúdo *Programas de Abstinência ao Uso de Drogras*

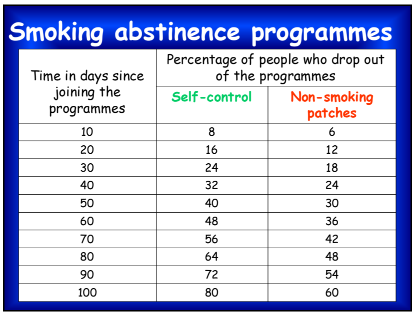
Inferência direta	*Inclinação*	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

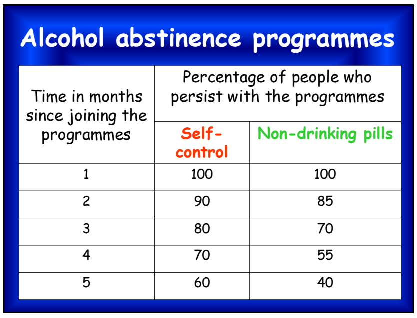




Tabela

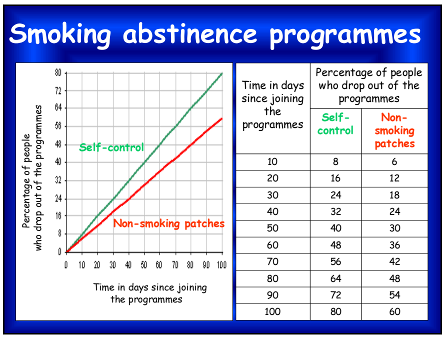


Time in days since joining the programmes	Percentage of people who drop out of the programmes	
	Self-control	Non-smoking patches
10	8	6
20	16	12
30	24	18
40	32	24
50	40	30
60	48	36
70	56	42
80	64	48
90	72	54
100	80	60

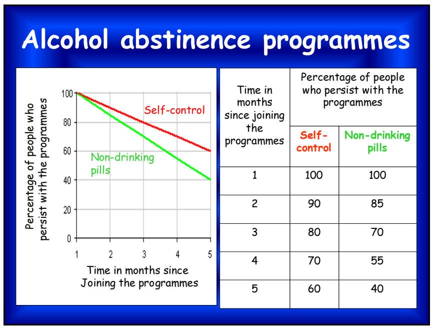


Time in months since joining the programmes	Percentage of people who persist with the programmes	
	Self-control	Non-drinking pills
1	100	100
2	90	85
3	80	70
4	70	55
5	60	40

Ambas representações



Time in days since joining the programmes	Percentage of people who drop out of the programmes	
	Self-control	Non-smoking patches
10	8	6
20	16	12
30	24	18
40	32	24
50	40	30
60	48	36
70	56	42
80	64	48
90	72	54
100	80	60



Time in months since joining the programmes	Percentage of people who persist with the programmes	
	Self-control	Non-drinking pills
1	100	100
2	90	85
3	80	70
4	70	55
5	60	40

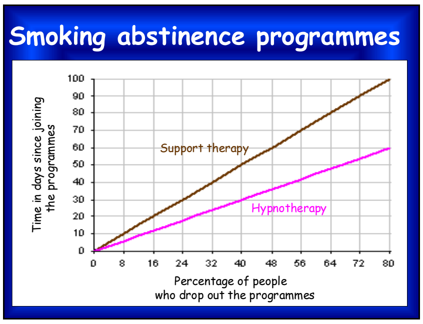
Which type of programme is harder for people to stay on, Self-control or Non-smoking patches?

Which type of programme is more effective in keeping people on board, Self-control or Non-drinking pills?

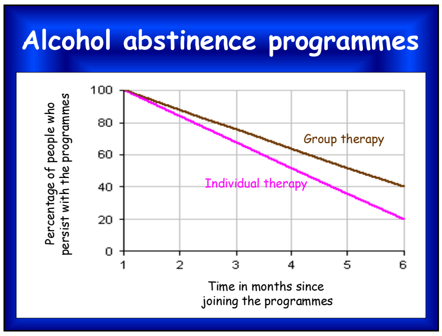
Inferência inversa	***Inclinação*** **Positiva**	***Inclinação*** **Negativa**

Gráfico

Positiva:



Negativa:



Tabela

Positiva:

Smoking abstinence programmes

Percentage of people who drop out of the programmes	Time in days since joining the programmes	
	Support therapy	Hypnotherapy
8	10	6
16	20	12
24	30	18
32	40	24
40	50	30
48	60	36
56	70	42
64	80	48
72	90	54
80	100	60

Negativa:

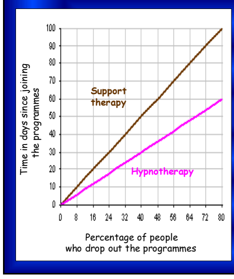
Alcohol abstinence programmes

Time in months since joining the programmes	Percentage of people who persist with the programmes	
	Group therapy	Individual Therapy
1	100	100
2	88	82
3	76	64
4	64	52
5	52	40
6	40	28

Ambas as representações

Positiva:

Smoking abstinence programmes

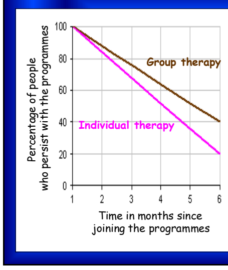


Percentage of people who drop out of the programmes	Time in days since joining the programmes	
	Support therapy	Hypnotherapy
8	10	6
16	20	12
24	30	18
32	40	24
40	50	30
48	60	36
56	70	42
64	80	48
72	90	54
80	100	60

Which type of programme is harder for people to stay on, Support therapy or Hypnotherapy?

Negativa:

Alcohol abstinence programmes



Time in months since joining the programmes	Percentage of people who persist with the programmes	
	Group therapy	Individual Therapy
1	100	100
2	88	82
3	76	64
4	64	52
5	52	40
6	40	28

Which type of programme results in more drop-outs, Group therapy or Individual therapy?

APÊNDICE M – Problema 1 apresentado por meio de Tabelas, Gráficos ou Casos Individuais no Experimento 5

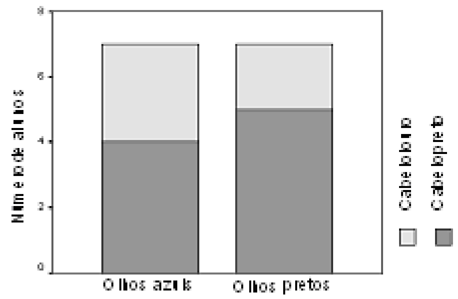
Problema 1:

Você acha que existe uma maior possibilidade de encontrar alunos com cabelos pretos entre os alunos de olhos azuis ou de olhos pretos?

TABELA

Cor de cabelos	Cor de Olhos: Azul	Preto	Total
Louro	3	2	5
Preto	4	5	9
Total	7	7	

GRÁFICO



CASOS INDIVIDUAIS

APÊNDICE N – Problema 2 apresentado por meio de Tabelas, Gráficos ou Casos Individuais no Experimento 5

Problema 2:

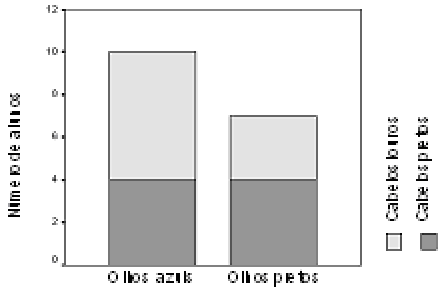
Você acha que existe uma maior possibilidade de encontrar alunos com cabelos pretos entre os alunos de olhos azuis ou de olhos pretos?

TABELA

Cor de Olhos

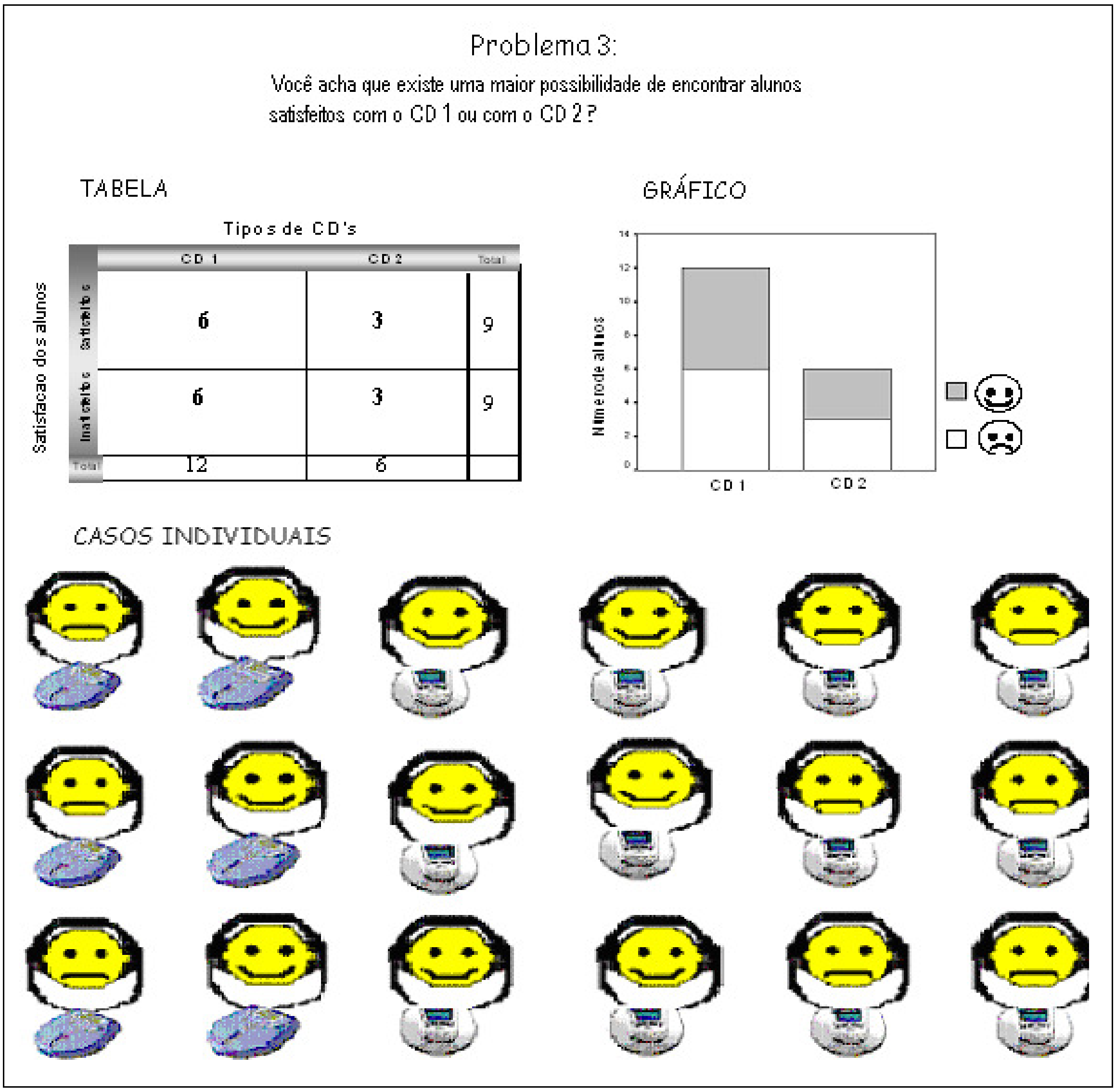
Cor de cabelos	Azuis	Pretos	Total
Louro	6	3	9
Preto	4	4	8
Total	10	7	

GRÁFICO



CASOS INDIVIDUAIS

APÊNDICE O – Problema 3 apresentado por meio de Tabelas, Gráficos ou Casos Individuais no Experimento 5



APÊNDICE P – Problema 4 apresentado por meio de Tabelas, Gráficos ou Casos Individuais no Experimento 5

Problema 4:

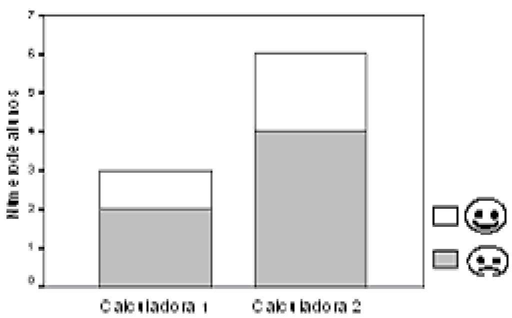
Você acha que existe uma maior possibilidade de encontrar alunos satisfeitos com a calculadora 1 ou com a calculadora 2 ?

TABELA

Tipos de Calculadoras

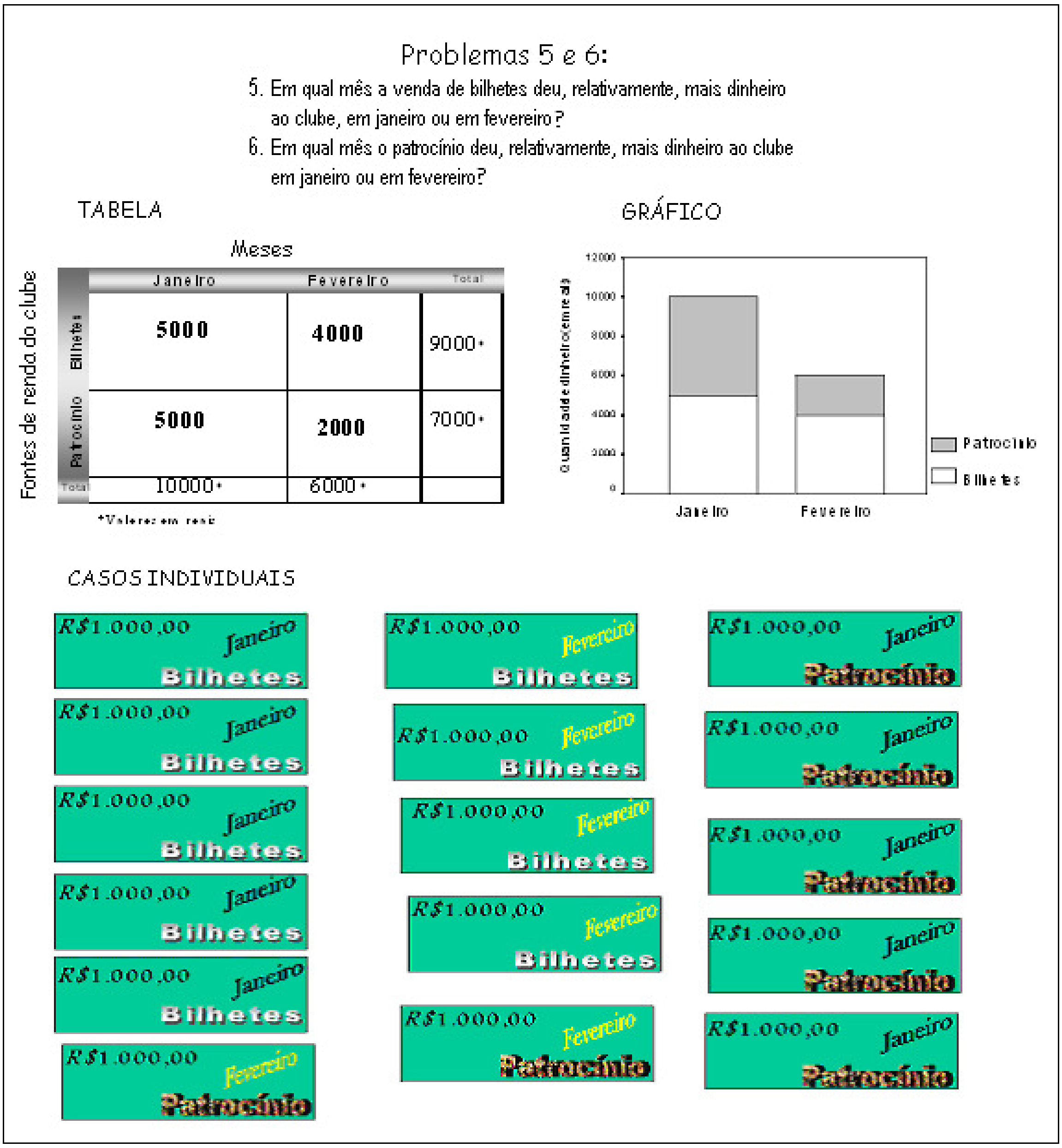
Satisfacao dos alunos	Calculadora 1	Calculadora 2	Total
Satisfeitos	2	4	6
Insatisfeitos	1	2	3
Total	3	6	

GRÁFICO

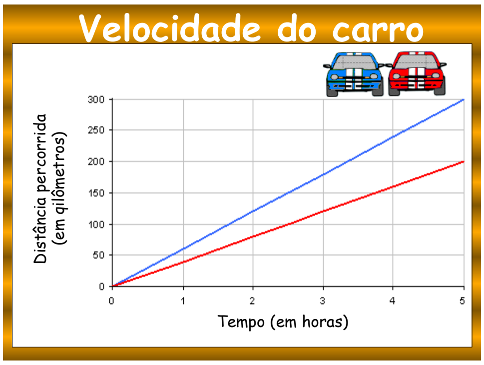
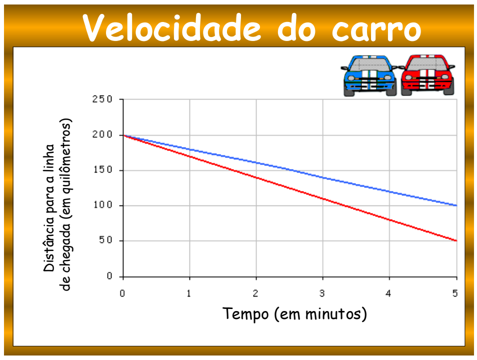


CASOS INDIVIDUAIS

APÊNDICE Q – Problemas 5 e 6 apresentados por meio de Tabelas, Gráficos ou Casos Individuais no Experimento 5



APÊNDICE R – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 6 para o conteúdo V*elocidade*

Inferência direta	*Inclinação* — **Positiva**	*Inclinação* — **Negativa**
Gráfico		

Tabela

Positiva — Velocidade do carro

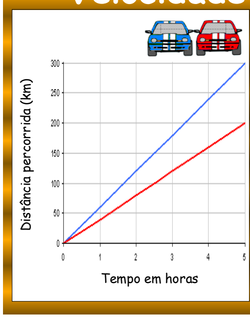
Tempo em horas	Distância percorrida (em quilômetros)	
1	60	40
2	120	80
3	180	120
4	240	160
5	300	200

Negativa — Velocidade do carro

Tempo em minutos	Distância para a linha de chegada (em quilômetros)	
1	180	170
2	160	140
3	140	110
4	120	80
5	100	50

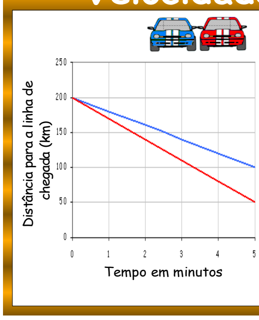
Ambas as Representações

Positiva — Velocidade do carro



Tempo em horas	Distância percorrida (km)	
1	60	40
2	120	80
3	180	120
4	240	160
5	300	200

Negativa — Velocidade do carro



Tempo em minutos	Distância para a linha de chegada (km)	
1	180	170
2	160	140
3	140	110
4	120	80
5	100	50

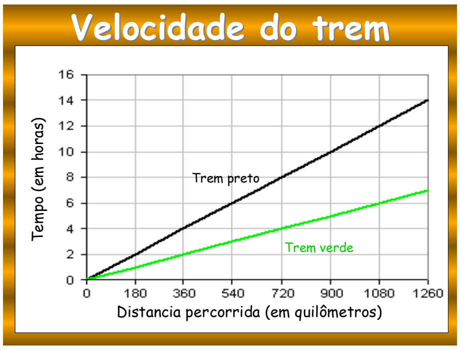
Qual carro foi mais rápido, o azul ou o vermelho?

Qual carro está indo mais devagar, o azul ou o vermelho?

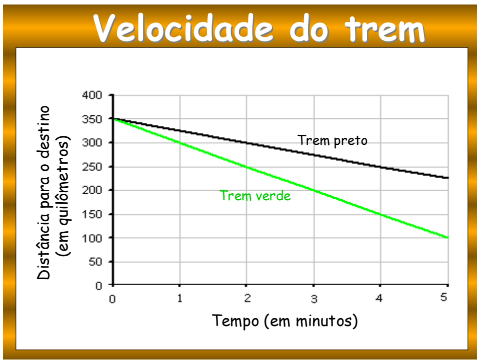
Inferência inversa	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

Positiva:



Negativa:



Tabela

Positiva:

Velocidade do trem

Distância percorrida (em quilômetros)	Tempo em horas	
	Trem preto	Trem verde
180	2	1
360	4	2
540	6	3
720	8	4
900	10	5
1080	12	6
1260	14	7

Negativa:

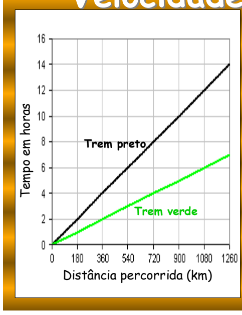
Velocidade do trem

Tempo em minutos	Distância para o destino (em quilômetros)	
	Trem preto	Trem verde
1	325	300
2	300	250
3	275	200
4	250	150
5	225	100

Ambas Representações

Positiva:

Velocidade do trem

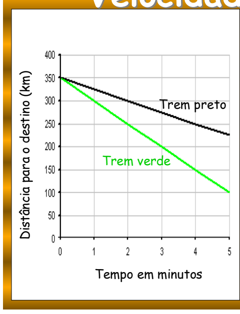


Distância percorrida (km)	Tempo em horas	
	Trem preto	Trem verde
180	2	1
360	4	2
540	6	3
720	8	4
900	10	5
1080	12	6
1260	14	7

Qual trem foi mais rápido, o preto ou o verde?

Negativa:

Velocidade do trem



Tempo em minutos	Distância para o destino (km)	
	Trem Preto	Trem verde
1	325	300
2	300	250
3	275	200
4	250	150
5	225	100

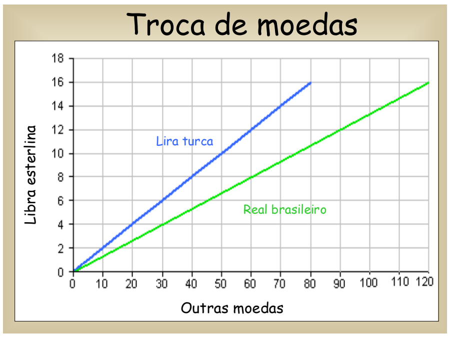
Qual trem está indo mais rápido, o preto ou o verde?

APÊNDICE S – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 6 para o conteúdo V*alor Monetário*

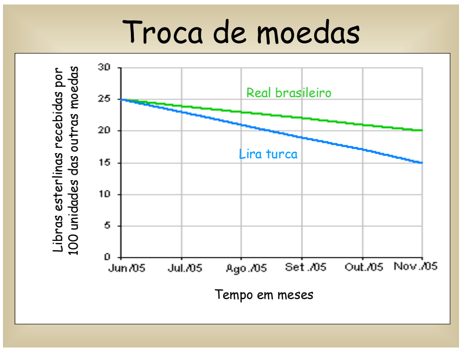
Inferência direta	***Inclinação*** **Positiva**	***Inclinação*** **Negativa**

Gráfico

Positiva



Negativa



Tabela

Positiva

Troca de moedas

Libra esterlina	Outras moedas: Lira turca	Outras moedas: Real brasileiro
2	10	15
4	20	30
6	30	45
8	40	60
10	50	75
12	60	90
14	70	105
16	80	120

Negativa

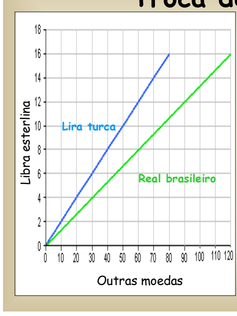
Troca de moedas

Tempo em meses	Libras esterlinas recebidas por 100 unidades das outras moedas: Real brasileiro	Libras esterlinas recebidas por 100 unidades das outras moedas: Lira turca
Jun/05	25	25
Jul/05	24	23
Aug/05	23	21
Sep/05	22	19
Oct/05	21	17
Nov/05	20	15

Ambas Representações

Positiva

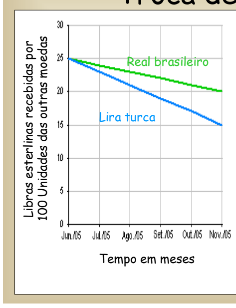
Troca de moedas



Libra esterlina	Outras moedas: Lira turca	Outras moedas: Real brasileiro
2	10	15
4	20	30
6	30	45
8	40	60
10	50	75
12	60	90
14	70	105
16	80	120

Negativa

Troca de moedas



Tempo em meses	Libras esterlinas recebidas por 100 unidades das outras moedas: Real brasileiro	Libras esterlinas recebidas por 100 unidades das outras moedas: Lira turca
Jun./05	25	25
Jul./05	24	23
Ago./05	23	21
Set./05	22	19
Out./05	21	17
Nov./05	20	15

Qual moeda vale mais em comparação com a libra esterlina, a turca ou a brasileira?

Qual governo tem obtido mais êxito na valorização de sua moeda em relação à libra esterlina, o brasileiro ou o turco?

Inferência inversa	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**

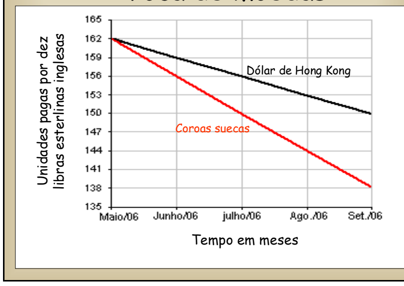
Gráfico

Positiva

Troca de moedas

Negativa

Troca de moedas



Tabela

Positiva

Troca de moedas

Libra esterlina	Outras moedas	
	Peso argentino	**Dólar australiano**
1	6	3
2	12	6
3	18	9
4	24	12
5	30	15
6	36	18
7	42	21
8	48	24
9	54	27
10	60	30

Negativa

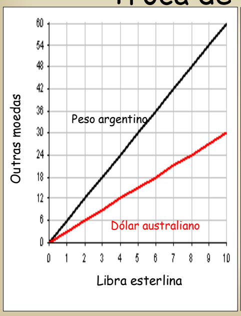
Troca de moedas

Meses	Unidades pagas por dez libras esterlinas inglesas	
	Dólar de Hong Kong	**Coroas suecas**
May/06	162	162
June/06	159	156
July/06	156	150
Aug./06	153	144
Sep./06	150	138

Ambas Representações

Positiva

Troca de moedas

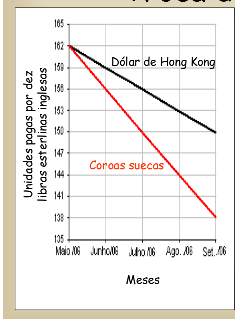


Libra esterlina	Outras moedas	
	Peso Argentino	**Dólar australiano**
1	6	3
2	12	6
3	18	9
4	24	12
5	30	15
6	36	18
7	42	21
8	48	24
9	54	27
10	60	30

Qual moeda vale mais em comparação com a libra esterlina, a argentina ou a australiana?

Negativa

Troca de moedas



Meses	Unidades pagas por dez libras esterlinas inglesas	
	Dólar de Hong Kong	**Coroas suecas**
Maio/06	162	162
Junho/06	159	156
Julho/06	156	150
Ago./06	153	144
Set./06	150	138

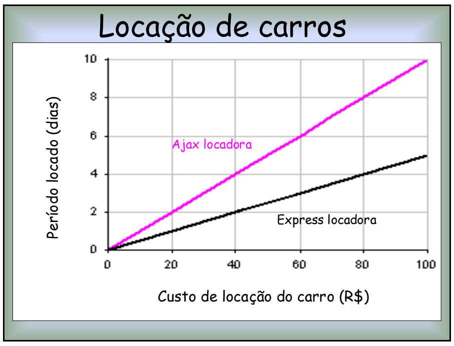
Qual governo tem obtido mais êxito na valorização de sua moeda em relação à libra esterlina, o de Hong Kong ou o sueco?

APÊNDICE T – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 6 para o conteúdo C*usto*

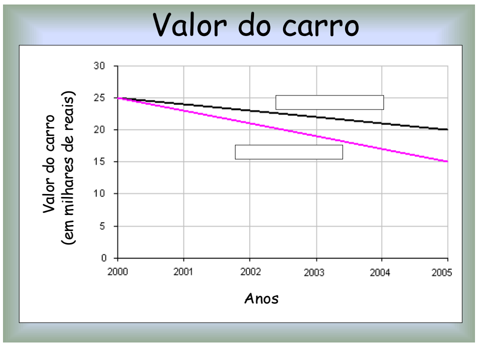
Inferência direta	***Inclinação*** – **Positiva**	***Inclinação*** – **Negativa**

Gráfico

Positiva



Negativa



Tabela

Positiva

Locação de carros

Custo da locação do carro (R$)	Período locado (dias)	
	Ajax locadora	Express Locadora
20	2	1
40	4	2
60	6	3
80	8	4
100	10	5

Negativa

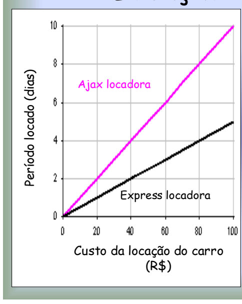
Valor do carro

Anos	Valor do carro (em milhares de reais)	
2000	25	25
2001	24	23
2002	23	21
2003	22	19
2004	21	17
2005	20	15

Ambas Representações

Positiva

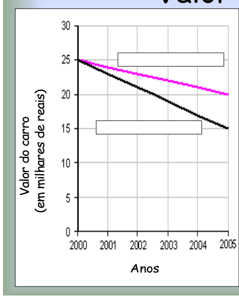
Locação de carros



Custo da locação do carro (R$)	Período locado (dias)	
	Ajax locadora	Express locadora
20	2	1
40	4	2
60	6	3
80	8	4
100	10	5

Negativa

Valor do carro



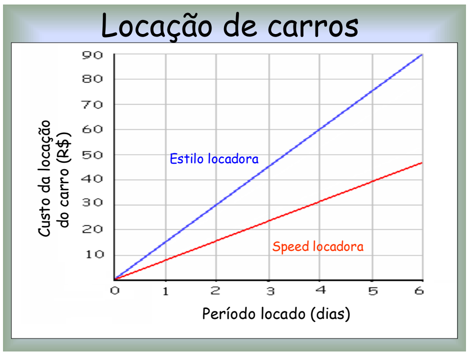
Anos	Valor do carro (em milhares de reais)	
2000	25	25
2001	24	23
2002	23	21
2003	22	19
2004	21	17
2005	20	15

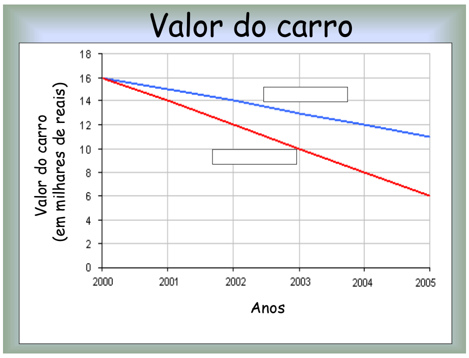
Qual locadora ofereçe a você o melhor valor, Ajax ou Express?

Em 2000 Paulo comprou um carro por R$25,000 e João comprou um outro carro por R$25,000. Em 5 anos, o carro de João manteve melhor o seu valor do que o carro de Paulo.
Usando essa informação escreva os nomes dos proprietários nos espaços vazios indicados no gráfico.

Inferência inversa	***Inclinação***	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico





Tabela

Locação de carros

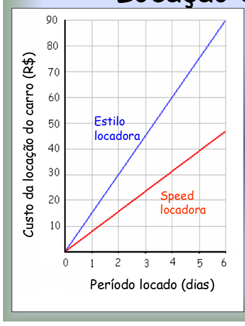
Período locado (dias)	Custo da locação do carro (R$)	
	Estilo locadora	Speed locadora
1	15	8
2	30	16
3	45	24
4	60	32
5	75	40
6	90	48

Valor do carro

Anos	Valor do carro (em milhares de reais)	
2000	16	16
2001	15	14
2002	14	12
2003	13	10
2004	12	8
2005	11	6

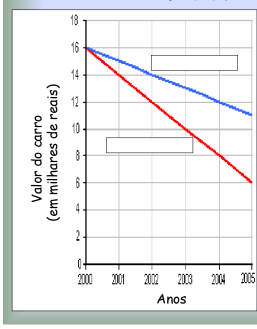
Ambas Representações

Locação de carros



Período locado (dias)	Custo da locação do carro (R$)	
	Estilo locadora	Speed locadora
1	15	8
2	30	16
3	45	24
4	60	32
5	75	40
6	90	48

Valor do carro



Anos	Valor do carro (em milhares de reais)	
2000	16	16
2001	15	14
2002	14	12
2003	13	10
2004	12	8
2005	11	6

Qual locadora oferece a você o melhor valor, Estilo ou Speed?

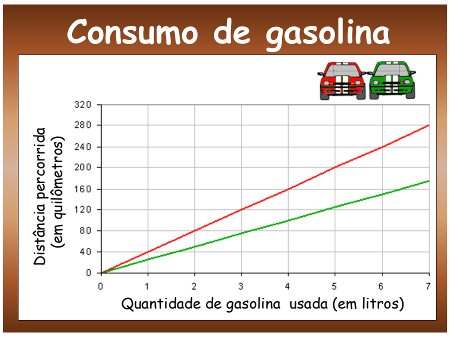
Em 2000, Maria comprou um carro por R$16,000 e Clara comprou um outro carro por R$16,000. Em 5 anos, o carro de Clara se desvalorizou mais rapidamente que o carro de Maria.
Usando essa informação, escreva os nomes dos proprietários nos espaços vazios indicados no gráfico.

APÊNDICE U – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 6 para o conteúdo C*onsumo de Gasolina*

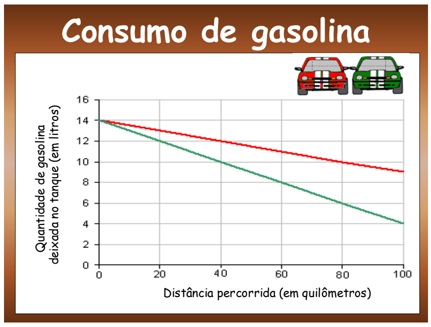
Inferência direta	*Inclinação* Positiva	*Inclinação* Negativa

Gráfico

Positiva:

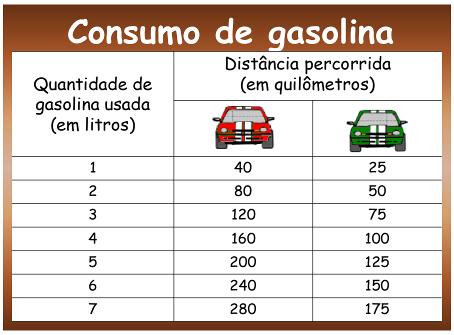


Negativa:



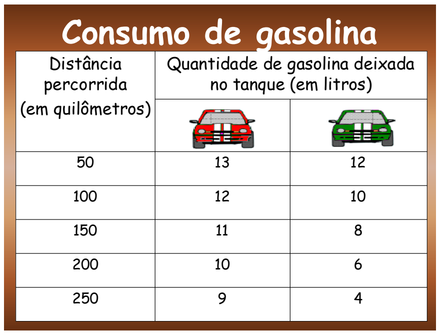
Tabela

Positiva:


Consumo de gasolina

Quantidade de gasolina usada (em litros)	Distância percorrida (em quilômetros)	
	(vermelho)	(verde)
1	40	25
2	80	50
3	120	75
4	160	100
5	200	125
6	240	150
7	280	175

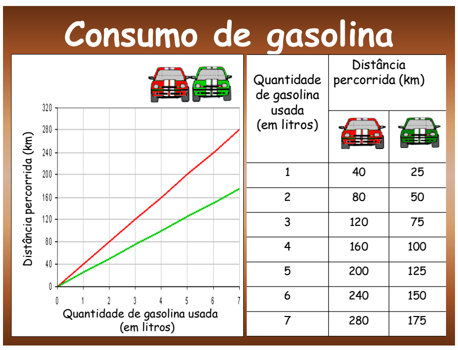
Negativa:


Consumo de gasolina

Distância percorrida (em quilômetros)	Quantidade de gasolina deixada no tanque (em litros)	
	(vermelho)	(verde)
50	13	12
100	12	10
150	11	8
200	10	6
250	9	4

Ambas as Representações

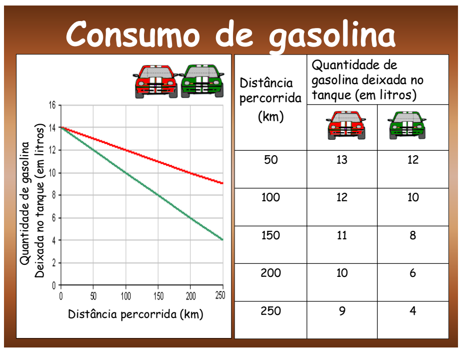
Positiva:



Quantidade de gasolina usada (em litros)	Distância percorrida (km)	
	(vermelho)	(verde)
1	40	25
2	80	50
3	120	75
4	160	100
5	200	125
6	240	150
7	280	175

Qual carro é mais econômico na corrida, o vermelho ou o verde?

Negativa:



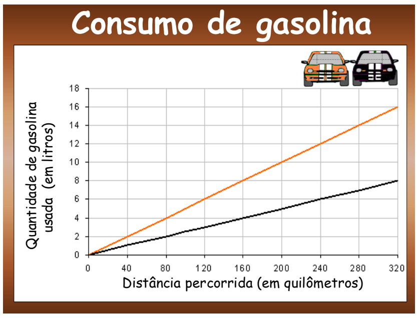
Distância percorrida (km)	Quantidade de gasolina deixada no tanque (em litros)	
	(vermelho)	(verde)
50	13	12
100	12	10
150	11	8
200	10	6
250	9	4

Qual carro é mais econômico na corrida, o vermelho ou o verde?

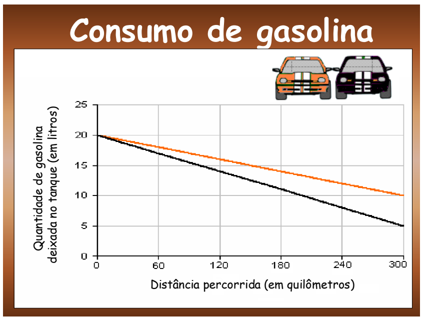
Inferência inversa	*Inclinação*	
	Positiva	**Negativa**

Gráfico

Positiva



Negativa



Tabela

Positiva

Consumo de gasolina

Distância percorrida (em quilômetros)	Quantidade de gasolina usada (em litros) – carro laranja	Quantidade de gasolina usada (em litros) – carro preto
40	2	1
80	4	2
120	6	3
160	8	4
200	10	5
240	12	6
280	14	7
320	16	8

Negativa

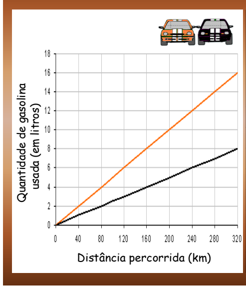
Consumo de gasolina

Distância percorrida (em quilômetros)	Quantidade de gasolina deixada no tanque (em litros) – carro laranja	Quantidade de gasolina deixada no tanque (em litros) – carro preto
90	18	17
180	16	14
270	14	11
360	12	8
450	10	5

Ambas Representações

Positiva

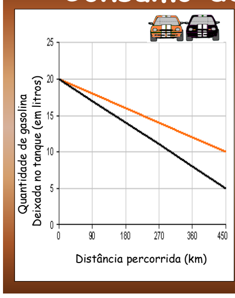
Consumo de gasolina



Distância percorrida (km)	Quantidade de gasolina usada (em litros) – carro laranja	Quantidade de gasolina usada (em litros) – carro preto
40	2	1
80	4	2
120	6	3
160	8	4
200	10	5
240	12	6
280	14	7
320	16	8

Negativa

Consumo de gasolina



Distância percorrida (km)	Quantidade de gasolina deixada no tanque (em litros) – carro laranja	Quantidade de gasolina deixada no tanque (em litros) – carro preto
90	18	17
180	16	14
270	14	11
360	12	8
450	10	5

Qual carro é mais econômico na corrida, o vermelho ou o verde?

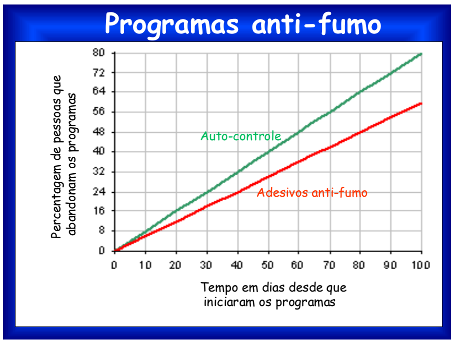
Qual carro é mais dispendioso na corrida, o laranja ou o preto?

APÊNDICE V – Variação nas formas de apresentação usadas no Experimento 4 para o conteúdo *Programas de Abstinência ao Uso de Drogras*

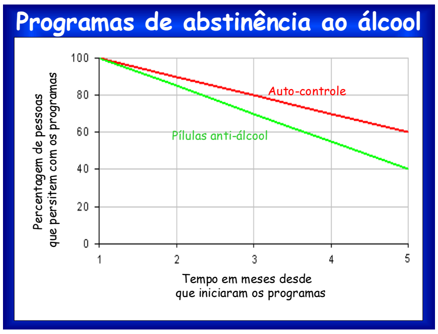
Inferência direta	***Inclinação*** **Positiva**	***Inclinação*** **Negativa**

Gráfico

Positiva



Negativa



Tabela

Positiva

Programas anti-fumo

Tempo em dias desde que iniciaram os programas	Percentagem de pessoas que abandonaram os programas	
	Auto-controle	Adesivos anti-fumo
10	8	6
20	16	12
30	24	18
40	32	24
50	40	30
60	48	36
70	56	42
80	64	48
90	72	54
100	80	60

Negativa

Programas de abstinência ao álcool

Tempo em meses desde que iniciaram os programas	Percentagem de pessoas que persistem com os programas	
	Auto-controle	Píulas anti-álcool
1	100	100
2	90	85
3	80	70
4	70	55
5	60	40

Ambas as Representações

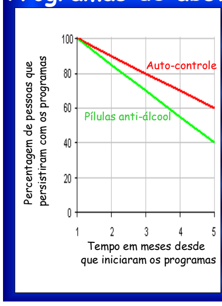
Positiva

Programas anti-fumo

Tempo em dias desde que iniciaram os programas	Percentagem de pessoas que abadonam os programas	
	Auto-controle	Adesivos anti-fumo
10	8	6
20	16	12
30	24	18
40	32	24
50	40	30
60	48	36
70	56	42
80	64	48
90	72	54
100	80	60

Negativa

Programas de abstinência ao álcool



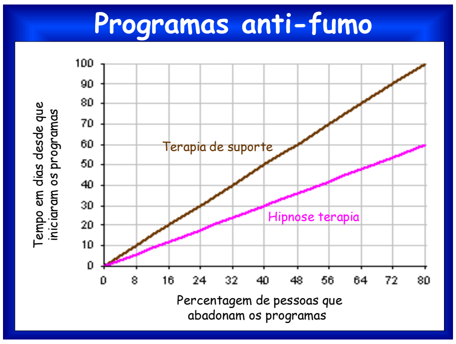
Tempo em meses desde que iniciaram os programas	Percentagem de pessoas que persistem com os programas	
	Auto-controle	Pílulas anti-álcool
1	100	100
2	90	85
3	80	70
4	70	55
5	60	40

Que tipo de programa é mais difícil para as pessoas permanecerem, auto-controle ou adesivos anti-fumo?

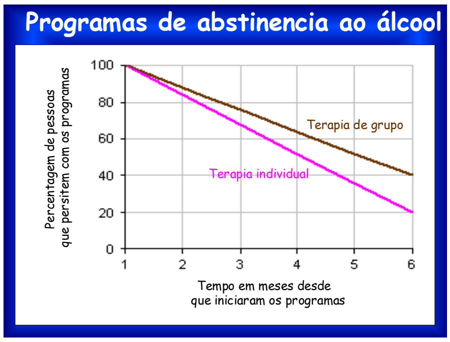
Que tipo de programa é mais eficaz para as pessoas permanecerem, auto-controle ou pílulas anti-álcool?

Inferência direta	*Inclinação*	
	Positiva	**Negativa**
Inversa		

Programas anti-fumo



Programas de abstinencia ao álcool



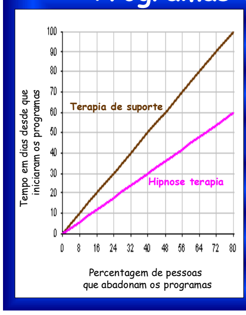
Programas anti-fumo

Percentagem de pessoas que abandonam os programas	Tempo em dias desde que iniciaram os programas	
	Terapia de Suporte	Hipnose terapia
8	10	6
16	20	12
24	30	18
32	40	24
40	50	30
48	60	36
56	70	42
64	80	48
72	90	54
80	100	60

Programas de abstinencia ao álcool

Tempo em meses desde que iniciaram os programas	Percentagem de pessoas que persistem com os programas	
	Terapia de grupo	Terapia individual
1	100	100
2	88	82
3	76	64
4	64	52
5	52	40
6	40	28

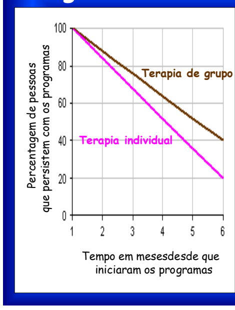
Programas anti-fumo



Percentagem de pessoas que abadonam os programas	Tempo em dias desde que iniciaram os programas	
	Terapia de suporte	Hipnose terapia
8	10	6
16	20	12
24	30	18
32	40	24
40	50	30
48	60	36
56	70	42
64	80	48
72	90	54
80	100	60

Que tipo de programa é mais difícil para as pessoas permanecerem, terapia de suporte ou hipnose terapia?

Programas de abstinência ao álcool



Tempo em meses desde que iniciaram os programas	Percentagem de pessoas que persistem com os programas	
	Terapia de grupo	Terapia individual
1	100	100
2	88	82
3	76	64
4	64	52
5	52	40
6	40	28

Que tipo de programa resulta em mais abandonos, a terapia de grupo ou a terapia individual?

ANEXO A – Carta de aprovação do projeto inicial pelo comitê de pesquisa da Oxford Brookes University

OXFORD BROOKES UNIVERSITY

Directorate of Academic and Student Affairs

Humanities, Environment & Social Sciences Sub-Committee
Chair: Professor G Butina Watson BA MA PhD

Jill Organ
Head of Graduate Office

Headington Campus Gipsy Lane Oxford OX3 0BP UK
t. +44 (0)1865 484244 f. +44 (0)1865 484238
jorgan@brookes.ac.uk
www.brookes.ac.uk

Ms L M T Lima de Carvalho
2 Poundfield Close
Barton
Oxford
OX3 9NL

4 July 2004

Dear Ms Lima de Carvalho

Registration as a candidate for a research degree

I am writing to inform you that the Research Degrees Committee has approved your application to register as a candidate for the degree of Master of Philosophy, with the possibility of transfer to Doctor of Philosophy. You have registered for the following programme of research with effect from 1 February 2003.

Title of programme of research:
Students' interpretation of graphs

Director of Studies:
Professor T Nunes, School of Social Sciences & Law

Second Supervisors:
Dr F Birgitsdottir, School of Social Sciences & Law
Dr U Pretzlik, School of Social Sciences and Law

Mode of study:
Full-time

Your attention is directed to the University's Research Degree Regulations (2004) and any School Guidelines. On behalf of the Sub-Committee may I extend our best wishes for your research at the University.

Yours sincerely

Georgia Butina Watson

Professor G Butina Watson
Chair

cc: Professor T Nunes, SS&L
Dr F Birgitsdottir, SS&L
Dr U Pretzlik, SS&L
Professor J MacClancy, Postgraduate Research Tutor, SS&L

THE QUEEN'S ANNIVERSARY PRIZES
FOR HIGHER AND FURTHER EDUCATION
2001

ANEXO B – Carta de aprovação do Comitê de Ética da Oxford Brookes University sobre os procedimentos da pesquisa

OXFORD BROOKES UNIVERSITY

School of Social Sciences and Law

University Research Ethics Committee
Headington Campus Gipsy Lane Oxford OX3 0BP UK
t. +44 (0)1865 483758 f. +44 (0)1865 483937
mgboulton@brookes.ac.uk
www.brookes.ac.uk

14 July 2004

Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho
Department of Psychology
Social Sciences & Law
Oxford Brookes University
Headington Campus, Gipsy Lane

Dear Ms Lima de Carvalho

040075 – Students interpreting graphs

Thank you for your letter of July 6th 2004 outlining your response to the points raised in my previous letter and attaching the revised documents.

I am pleased to inform you that, on this basis, I have given Chair's Approval for the study to begin.

In order to monitor studies approved by the University Research Ethics Committee, we will ask you to provide a (very brief) report on the conduct and conclusions of the study in a year's time. If the study is completed in less than a year, could you please contact me and I will send you the appropriate guidelines for the report.

Yours sincerely

Mary Boulton

Professor Mary Boulton
Chair
University Research Ethics Committee

Cc

THE QUEEN'S ANNIVERSARY PRIZES
FOR HIGHER AND FURTHER EDUCATION
2001