



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL –
FECLESC
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

GABRIELLE ANDRADE PEREIRA

ARGUMENTAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E RESULTADOS MATEMÁTICOS EM
GEOMETRIA: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

QUIXADÁ – CE

2018

GABRIELLE ANDRADE PEREIRA

ARGUMENTAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E RESULTADOS MATEMÁTICOS EM
GEOMETRIA: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Edisom Eugenio de Sousa.

Coorientador: Prof. Dr. Ulisses Lima Parente.

QUIXADÁ – CEARÁ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistemas de Bibliotecas

Pereira, Gabrielle Andrade .

Argumentação, demonstração e resultados matemáticos em Geometria: uma análise de livros didáticos do Ensino Médio [recurso eletrônico] / Gabrielle Andrade Pereira. - 2018.

1 CD-ROM: il.; 4 $\frac{3}{4}$ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 61 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Graduação em Matemática, Quixadá, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Edisom Eugenio de Sousa.

Coorientação: Prof. Dr. Ulisses Lima Parente.

1. Demonstração. 2. Geometria. 3. Livro didático.
I. Título.

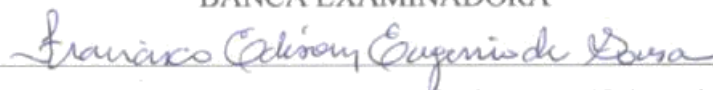
GABRIELLE ANDRADE PEREIRA

ARGUMENTAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E RESULTADOS MATEMÁTICOS EM
GEOMETRIA: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de
Licenciatura Plena em Matemática da
Faculdade de Educação, Ciências e
Letras do Sertão Central da Universidade
Estadual do Ceará, como requisito
parcial à obtenção do título de licenciada
em Matemática.

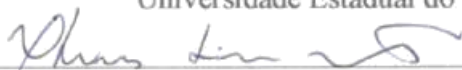
Apresentada em: 21 de junho de 2018.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Francisco Edison Eugênio de Sousa (Orientador)

Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC
Universidade Estadual do Ceará - UECE



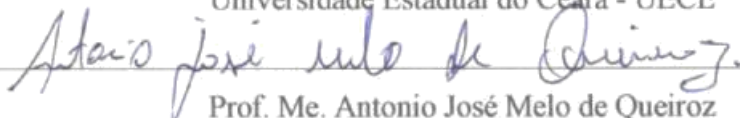
Prof. Dr. Ulisses Lima Parente (Coorientador)

Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira

Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC
Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof. Me. Antonio José Melo de Queiroz

Faculdade de Educação, Ciências e Tecnologia da Região do Inhamuns - CECITEC
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Aos professores da Educação Básica, para que tenham força e incentivo ao se dedicarem à formação dos nossos estudantes.

À minha mãe, para que saiba que pode ser tudo o que ela desejar. É só acreditar e lutar.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por toda saúde e força que tenho para correr atrás dos meus objetivos.

À minha mãe Nelma, meu pai Miguel, minhas irmãs Michelle e Giselle, meu irmão Bismarck e todos os integrantes da minha família, por todo carinho ao longo da vida.

À minha mãe, em especial, por toda paciência, dedicação e por me incentivar a cursar Matemática.

Ao meu namorado, Ulisses, por todo amor e apoio durante essa jornada.

Aos meus queridos amigos, Bruna, Eduarda, Fabiola e Guilherme pelo companheirismo.

Agradeço também aos meus amigos de graduação, Nanda, Nara, Claudiana, Emanuel, Eduardo, Ian e outros, por estarem ao meu lado nesta caminhada.

Ao orientador Prof. Dr. Francisco Edisom Eugenio de Sousa e ao coorientador Prof. Dr. Ulisses Lima Parente, pela significativa contribuição a esta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Ulisses Lima Parente por me ajudar a construir as figuras apresentadas neste trabalho.

Aos professores da Educação Básica que emprestaram seus livros didáticos para realização deste trabalho.

Aos professores Jobson Oliveira e Tony Melo que compuseram a banca de defesa desta monografia, pelas valiosas contribuições.

Ao Prof. Me. Luiz Oswaldo Sant'Iago Moreira de Souza, por todo carinho dedicado aos seus queridos alunos, especialmente, todo apoio que me deu durante essa jornada.

Aos professores, funcionários e alunos da FECLESC, por terem contribuído de alguma forma em minha formação.

Por fim, quero agradecer a todos que não foram citados aqui, mas que contribuíram para minha formação de forma direta ou indireta, seja por terem feito parte do caminho ou por terem apenas cruzado com ele.

“As mal ditas frases acabam sim virando
malditas frases”.

(Cydara Ripoll)

RESUMO

Este estudo decorreu de uma análise das coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018, a fim de analisar como são apresentadas as demonstrações e os resultados matemáticos em conteúdos de Geometria do Ensino Médio. Inicialmente, a autora verificou quais as indicações do PNLD (BRASIL, 2018) em relação às demonstrações de resultados matemáticos nos conteúdos de Geometria dos livros didáticos do Ensino Médio e o que educadores matemáticos (MARTINS, 2012; LIMA, 1999; entre outros) dizem a respeito dessas demonstrações. Em seguida, fez um estudo dos conteúdos que tinha como foco de análise, “Semelhança de triângulos” e “Triângulo retângulo”, no qual viu como podem ser apresentados esses conteúdos e suas respectivas demonstrações voltadas à Matemática escolar, feitas pelos pesquisadores Dolce e Pompeo (2005). Após a fundamentação teórica em torno da pesquisa, partiu para a análise de dados, com o objetivo de investigar também se a linguagem utilizada, mesmo simples, conserva sua essência científica. Baseando-se na teoria disposta neste trabalho percebeu que as coleções ainda não estão apresentando de forma satisfatória determinados pontos da Matemática, pois as demonstrações que estão sendo feitas não estão cumprindo o rigor que deveriam e algumas coleções, se quer, estão trabalhando tais demonstrações como algo realmente importante no desenvolvimento lógico-dedutivo dos estudantes. A autora acredita que isto só acontecerá quando todos os envolvidos na escrita, escolha e utilização dos livros didáticos compreenderem a importância de tais demonstrações no processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar.

Palavras-chave: Demonstração. Geometria. Livro didático.

ABSTRACT

This study developed an analysis of High School Mathematics textbook collections, approved by the National Program of Textbook (PNLD) in 2018, in order to investigate how the demonstrations and mathematical results are presented in contents of Geometry in High School. Initially, the author verified the indications of PNLD (BRAZIL, 2018) related to demonstrations of mathematical results in contents of Geometry in High School textbooks and what mathematics educators (MARTINS, 2012; LIMA, 1999; among others) say about such demonstrations. Then, based on researchers Dolce and Pompeo (2005), a study of the contents was elaborated which had as focus of analysis “Similar triangle” and “Right triangle”, in which the author observed how these contents and their respective demonstrations addressed to schools can be presented. After the theoretical foundation concerning the research, the analysis of data was developed, investigating whether the language used, even when it is simple, retains its scientific essence. Based on the theory presented in this paper, the author realized that the collections are still not presenting satisfactorily certain Mathematics concepts, because the demonstrations that are being produced are not fulfilling the rigor that they should have and some collections are not even working on such demonstrations as something really important for the development of the students’ deductive reasoning. The author believes that this will only happen when all those involved in writing, choosing and using textbooks understand the importance of such demonstrations in the teaching and learning process of school mathematics.

Keywords: Demonstration. Geometry. Textbook.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ABORDAGENS TEÓRICAS EM TORNO DA PESQUISA	15
2.1	DISCUSSÕES ACERCA DO LIVRO DIDÁTICO.....	15
2.2	DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	20
2.3	O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	23
3	ESTUDOS DOS CONTEÚDOS EM FOCO	27
3.1	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	27
3.2	TRIÂNGULO RETÂNGULO	33
4	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA	38
4.1	PROCEDIMENTOS METOLÓGICOS	38
4.2	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	39
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

Os processos de argumentação e demonstração matemática são de fundamental importância na educação, pois são partes essenciais no campo dos conteúdos matemáticos, contribuindo tanto para a vida acadêmica dos estudantes, quanto para suas relações pessoais, seja no meio social, político ou econômico.

No meio acadêmico, os conhecimentos lógico-dedutivos preparam os alunos para experimentar cada nova etapa de aprendizado com estímulo e, referindo-se ao convívio social, temos que os questionamentos e as argumentações adquiridas em sala de aula influenciam de maneira positiva, levando-os a questionar e a argumentar, também, problemas sociais e de qualquer outra natureza. Ou seja, contribuem para que os estudantes se tornem cidadãos que pensam, questionam e criticam.

Para que o ensino da matemática seja significativo, precisamos levar em consideração três pontos fundamentais nesse percurso: **conceituação**, quando serão introduzidas as formas corretas de enunciar conceitos e definições matemáticas, a prática do raciocínio dedutivo e a conscientização de que conclusões sempre são resultantes de hipóteses que se admitem; **manipulações**, quando os estudantes entram em contato com a utilização de equações, fórmulas, construções geométricas elementares, entre outros; e **aplicações** quando os problemas matemáticos são relacionados com o cotidiano dos estudantes. (LIMA, 1999).

Lima (1999) afirma que durante as décadas de 60 e 70, período em que surgiu o Movimento da Matemática Moderna (MMM), ocorreu no ensino uma forte predominância da conceituação e quase não havia lugar para as manipulações e para as aplicações. Dessa forma, o ensino perdia muito a objetividade, insistindo em detalhes irrelevantes e deixando de destacar o essencial.

Uma importante questão é ter um equilíbrio entre esses três componentes – conceituação, manipulação e aplicações –, pois cada um tem um papel fundamental para a construção do conhecimento matemático escolar e precisam atuar juntos, como foi comentado anteriormente. Esse é um grande desafio que os professores enfrentam frequentemente em suas salas de aulas, pois devem levar em consideração o nível de maturidade dos estudantes.

Referenciando a prática de provas em sala de aula, Balacheff (1987), citado por Martins (2012), afirma que ela precisa encontrar seu lugar desde as práticas matemáticas das primeiras classes, aceitando que sejam reconhecidas como provas outras coisas que não são demonstrações no sentido estrito, ou seja, que seja levada em consideração a natureza da

racionalidade dos alunos e as condições de sua evolução, mas também encarregar-se da análise didática dos critérios aceitos de prova, que podem evoluir no decorrer da escolaridade.

Cada vez mais encontramos em sala de aula alunos que questionam frequentemente o porquê e de onde vieram determinadas conclusões matemáticas. Com isso, percebemos o quanto é importante levar esses conhecimentos para os nossos estudantes, para que saibam que conclusões matemáticas não surgiram do nada e é nesse ponto que entra o processo de argumentação e demonstração, bem como o processo histórico da Matemática, mesmo que não tão aprofundado.

É importante conhecer o meio termo. Por exemplo, não é interessante trabalhar com demonstrações óbvias, mas também não será satisfatório apresentar resultados que exijam conhecimentos muito teóricos e de difícil compreensão. Ainda assim, existem fatos matemáticos sofisticados que apresentam inúmeras demonstrações simplificadas, acessíveis à Matemática escolar. Um exemplo disso são algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Segundo Balacheff (1988 *apud* GRAVINA, 2001) as provas produzidas pelos alunos podem ser divididas nas seguintes categorias: *provas pragmáticas* e *provas intelectuais*. Sendo as *pragmáticas* apoiadas em conhecimentos práticos, e, até mesmo, utilizando desenhos e observação de figuras. As *intelectuais* baseiam-se em propriedades, bem como, relações entre essas propriedades, caracterizando-se pela linguagem matemática. E conclui que o nível de experiência mental marca a transição entre a prova pragmática e a prova intelectual.

Assim, o principal objetivo do nosso trabalho é analisar como são apresentadas as demonstrações e os resultados matemáticos em conteúdos de Geometria do Ensino Médio, nas coleções de Matemática aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018. Em geral, queremos investigar a abordagem e a consistência dos conteúdos de Geometria através da argumentação lógico-dedutiva. Assim, a pergunta principal desta pesquisa é: Como são apresentadas as demonstrações e os resultados matemáticos em conteúdos de Geometria nas Coleções de Matemática do Ensino Médio aprovadas pelo PNLD/2018?

O interesse por essa pesquisa surgiu após ouvir várias críticas dentro do ambiente escolar, enquanto atuava como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), como professora do Ensino Fundamental e Médio e, também, ao participar de algumas palestras na Universidade, relacionadas ao ensino da Matemática escolar. Essas críticas me levaram a fazer diversos questionamentos que têm total relevância para a prática

docente em Educação Matemática e para as pesquisas feitas nessa área, pois após serem respondidas, poderemos entender melhor alguns problemas relacionados à construção do saber matemático e, quem sabe, conseguiremos direcionar suas resoluções.

Os questionamentos base para formularmos nossos objetivos específicos foram: quais são as orientações do PNLD em relação às demonstrações matemáticas nos conteúdos de Geometria dos livros didáticos do Ensino Médio e o que os pesquisadores dizem a respeito dessas demonstrações? Como os pesquisadores/educadores matemáticos sugerem que sejam apresentadas essas demonstrações em Geometria para alunos do Ensino Médio? A linguagem utilizada nos livros didáticos, mesmo simples, conserva a essência científica dos conteúdos, levando em consideração a importância de incentivar a argumentação lógico-dedutiva dos estudantes?

Dessa forma, nossos objetivos específicos são: verificar quais são as indicações do PNLD em relação às demonstrações de resultados matemáticos nos conteúdos de Geometria dos livros didáticos do Ensino Médio e o que os pesquisadores dizem a respeito dessas demonstrações; estudar as sugestões de demonstrações matemáticas voltadas para a Matemática escolar, feitas por educadores matemáticos, em conteúdos de Geometria do Ensino Médio; e investigar se a linguagem utilizada, mesmo simples, conserva sua essência científica, ou seja, verificar se não ultrapassa a linha tênue que existe entre a simplificação e a vulgarização do conhecimento, levando em consideração a importância de incentivar a argumentação lógico-dedutiva dos estudantes.

A escolha dos conteúdos de Geometria deu-se porque essa área possui muitas aplicações práticas, nas quais poderemos associá-la também a diversas questões do cotidiano. Além disso, “a recuperação do ensino de geometria passou a ser, ao final dos anos 70, preocupação dos educadores matemáticos” (NACARATO; PASSOS, 2003, *apud* GONÇALVES, p. 4), pois os pesquisadores apontam a sua desvalorização como resquício do MMM, quando seu ensino se desvalorizou, precarizando a formação de professores dessa época.

Essa é uma pesquisa qualitativa por meio de um estudo de caso e nosso objeto de estudo serão as Coleções de Matemática aprovadas pelo PNLD/2018. Inicialmente, faremos uma abordagem teórica em torno da pesquisa, baseada nos autores descritos em nossas referências bibliográficas. Logo após, faremos um estudo dos conteúdos selecionados como objeto de análise, mostrando possíveis demonstrações que podem ser utilizadas nos livros didáticos do Ensino Médio, sugeridas por educadores matemáticos. E, por fim, analisaremos

os livros didáticos, utilizando como base nosso referencial teórico. A partir daí, teremos as considerações finais sobre os questionamentos levantados no decorrer do nosso trabalho.

A escolha pela análise dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio se deu pelo fato de considerarmos que os alunos dos últimos anos da Educação Básica possuem maturidade para aderir e desenvolver certo rigor matemático para a compreensão e o aprofundamento dos conceitos e resultados matemáticos básicos. Lembrando que se deve levar em consideração a importância de incentivar o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes desde as séries iniciais desse nível de ensino, dando oportunidade para que eles consigam crescer e desenvolver seus próprios argumentos e indagações.

Nosso referencial teórico trata de pesquisas publicadas por autores na área da Educação Matemática, assim como relacionadas ao nosso tema: Argumentação, demonstração e alguns resultados matemáticos em Geometria: uma análise de livros didáticos do Ensino Médio. Contamos também com as orientações do PNLD/2018 (BRASIL, 2018), assim como livros que sugerem provas geométricas para a educação básica e algumas indicações de pesquisadores sobre pontos para se analisar em um livro didático.

Nossa pesquisa está dividida em três etapas: na primeira comentaremos nosso diálogo com os pesquisadores referentes à nossa pesquisa; na segunda, abordaremos as sugestões de demonstrações feitas por pesquisadores/educadores matemáticos para os seguintes conteúdos de Geometria: Semelhança de Triângulos e Triângulo Retângulo, selecionados para analisarmos nos livros didáticos do Ensino Médio; e a terceira será nossa análise de dados, quando divulgaremos os dados colhidos nas análises das Coleções, tomando como base as teorias apresentadas em nosso referencial teórico.

Feita a pesquisa, percebemos que as coleções mesclam entre provas pragmáticas e intelectuais, mas que apesar de tentarem trazer as demonstrações para dentro do processo de ensino e aprendizagem, vimos que ainda falta muito para que isto de fato se efetive, porque ainda encontramos livros que não apresentam demonstrações, outros que apresentam, mas não com o devido rigor, outras que até apresentam, mas sem dar mais explicações sobre o que são ou pra que servem.

A linguagem utilizada em todas as coleções foi simples e a preocupação em simplificá-la se torna extrema, de tal forma que acreditamos estar havendo negligências no conhecimento matemático. Contudo, encontramos algumas exceções em nossa análise, nas quais os autores trazem todos os aspectos fundamentais deste processo, linguagem clara, mas

científica, apresentando e definindo o conhecimento através de conceitos com encadeamento lógico e outros aspectos.

É importante ressaltar que isto deve ser regra, pois só assim os estudantes irão desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo da maneira esperada. Dito isto, esperamos que os responsáveis pelos livros didáticos que chegam às salas de aula, tenham em mente quantos e quais são os pontos fundamentais na matemática para que o processo de ensino e aprendizagem se torne significativo para professores e estudantes.

Esta pesquisa contribuiu de forma positiva para a minha formação, enquanto pesquisadora e enquanto licencianda em Matemática em diversos aspectos como, por exemplo, o contato que tive com as coleções me fez desenvolver um olhar crítico em relação aos livros adotados nas escolas da Educação Básica. Experiência que terá total relevância quando for professora da Educação Básica.

Esperamos que a pesquisa contribua de forma positiva para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem (para quem ousar conhecê-la) e de antemão, esta sinaliza perguntas que nos levam a pensar em futuras pesquisas sobre livros didáticos, como por exemplo: Quais coleções estão sendo escolhidas e por quê? Feita a escolha, como essas coleções estão sendo utilizadas em sala de aula? Os professores demonstram propriedades matemáticas ou fazem “vista grossa” para o rigor estabelecido em algumas coleções? Entre outros.

2 ABORDAGENS TEÓRICAS EM TORNO DA PESQUISA

2.1 DISCUSSÕES ACERCA DO LIVRO DIDÁTICO

O livro didático percorreu um longo caminho para chegar ao seu atual *status* de utilização e foram feitos muitos projetos desde o surgimento a ideia inicial até a sua real aplicação. Segundo o LORENZONI (2018), a trajetória do livro didático teve início em 1929, com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL) que, de imediato, não saiu do papel. Ele informa ainda que o INL só recebeu suas primeiras atribuições, como edição de obras literárias para a formação cultural da população, elaboração de uma enciclopédia e de um dicionário nacionais e a expansão do número de bibliotecas públicas, em 1934, quando Gustavo Capanema tornou-se ministro da Educação do governo do presidente Getúlio Vargas.

Apesar dos “avanços”, essa trama ainda passou por muitos problemas em sua aplicação. Lorenzoni (2018) afirma que só começaram a produzir e distribuir os livros didáticos, de forma contínua e massiva, com a extinção da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) em 1997 e com a transferência da política de execução do PNLD para o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Ou seja, passaram-se 67 anos desde a ideia inicial do livro didático até a sua aplicação prática, com muitos inícios e fins que não vêm ao caso nesse momento.

O livro didático é hoje o principal e, na maioria das vezes, o único material de estudo para professores e alunos da Educação Básica. Pereira e Melo (2007), citados por Martins (2012, p. 16), apontam que “uma parcela significativa dos docentes utiliza na preparação de suas aulas, única e exclusivamente o livro didático adotado na escola, alguns até limitando o conteúdo abordado e a metodologia empregada ao proposto no livro”.

Desse modo, o livro é o instrumento que possui maior responsabilidade sobre a construção do saber matemático dentro da sala de aula, o que nos faz querer que o mesmo tenha todas as ferramentas possíveis para que ocorra o processo ensino-aprendizagem da maneira esperada.

Dante (1996) comenta que outro aspecto intrigante nessa dependência do livro didático é a diminuição das enormes possibilidades de interação entre os alunos e o professor na busca do que é realmente significativo em sala. Ele pontua também que como todo material pedagógico, o livro didático colabora com a aprendizagem (seu papel fundamental é apontar direções e caminhos), mas não se pode pretender que ele, por si só, garanta o

desenvolvimento das competências dos alunos, pois o aluno também deve ser protagonista desta tarefa.

Martins (2012) afirma que o livro didático é um eficiente recurso da aprendizagem no contexto escolar, mas que sua eficiência depende de uma adequada escolha e utilização. Essa mesma autora completa o seu pensamento afirmando que é papel do docente procurar novas ferramentas de trabalho para ajudar nessa construção do saber matemático. Ela argumenta, ainda, que é necessário que o professor amplie os seus conhecimentos, consultando mais de uma obra, explorando um determinado conteúdo, para, em segurança, transmiti-lo a seus alunos.

O processo de avaliação e escolha do Livro Didático a ser utilizado em sala de aula que é de extrema importância para a educação e é função docente fazê-lo, seguindo os critérios de avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e levando em consideração o projeto pedagógico de sua escola.

O livro didático traz, para o processo de ensino e aprendizagem, um terceiro personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o estudante. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado; os métodos adotados para que o estudante consiga apreendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade (BRASIL, 2018, p. 12).

O processo de análise e escolha do livro didático de Matemática é feito em cada escola, onde segundo o MEC (BRASIL, 2018) é dever dos professores e da equipe pedagógica analisar as resenhas contidas no guia para escolher adequadamente os livros a serem utilizados no triênio (período em que os livros são utilizados nas escolas), vendo o que se adequa melhor aos estudantes e à sua escola.

Como essa escolha é uma grande responsabilidade para o profissional docente, o MEC sugere que seja feita uma comissão, composta por professores da área e áreas afins, com o intuito de se ter uma melhor discussão acerca da coleção de livros que será escolhida e utilizada em sala de aula.

Para a avaliação das coleções didáticas do Ensino Médio inscritas no PNLD (BRASIL, 2018) existem critérios gerais de avaliação que são eliminatórios e comuns a todas as coleções. Há também critérios específicos de cada área com o objetivo de assegurar a qualidade das obras selecionadas para serem sugeridas às escolas de Educação Básica.

De acordo com o PNLD (BRASIL, 2018, p. 14), os critérios eliminatórios comuns à todas as coleções são:

- a) respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao Ensino Médio;
- b) observância de princípios éticos e democráticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;
- c) coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela obra no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados;
- d) respeito à perspectiva interdisciplinar na abordagem dos conteúdos;
- e) correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
- f) observância das características e finalidades específicas do manual do professor e adequação da obra à linha pedagógica nela apresentada;
- g) adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da obra.

Esses são os principais critérios de avaliação geral dos livros didáticos e, caso as coleções não cumpram algum desses requisitos estarão, automaticamente, eliminadas do processo de avaliação e escolha do livro didático.

O PNLD (BRASIL, 2018, p. 14) também nos informa os critérios de avaliação do componente curricular Matemática. São eles:

- a) incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, álgebra, geometria e estatística e probabilidade;
- b) privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;
- c) apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros;
- d) propiciar o desenvolvimento, pelo estudante, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras.

Citados acima os principais critérios de avaliação dos livros didáticos de Matemática, temos as ferramentas necessárias para utilizar em nossa análise. E, por fim, o

PNLD (BRASIL, 2018, p. 15) cita os critérios de avaliação no que se refere ao Manual do professor, dentre eles:

- a) apresente linguagem adequada ao leitor a que se destina – o professor – e atenda ao seu objetivo como manual de orientações didáticas, metodológicas e de apoio ao trabalho em sala de aula;
- b) contribua para a formação do professor, oferecendo discussões atualizadas acerca de temas relevantes para o trabalho docente, tais como currículo, aprendizagem, natureza do conhecimento matemático e de sua aplicabilidade, avaliação, políticas educacionais, entre outros;
- c) integre os textos e documentos reproduzidos em um todo coerente com a proposta metodológica adotada e com a visão de Matemática e de seu ensino e aprendizagem preconizadas na obra;
- d) não se limite a considerações gerais ao discutir a avaliação em Matemática, mas ofereça orientações efetivas do que, como, quando e para que avaliar, relacionando-as com os conteúdos expostos nos vários capítulos, unidades, seções;
- e) contenha, além do Livro do Estudante, orientações para o docente exercer suas funções em sala de aula, bem como propostas de atividades individuais e em grupo;
- f) explicita as alternativas e recursos didáticos ao alcance do docente, permitindo-lhe selecionar, caso o deseje, os conteúdos que apresentará em sala de aula e a sequência em que serão apresentados;
- g) contenha as soluções detalhadas de todos os problemas e exercícios, além de orientações de como abordar e tirar o melhor proveito das atividades propostas;
- h) apresente uma bibliografia atualizada para aperfeiçoamento do professor, agrupando os títulos indicados por área de interesse e comentando-os;
- i) separe, claramente, as leituras indicadas para os estudantes daquelas que são recomendadas para o professor.

Os critérios que se referem ao manual do professor têm por objetivo assegurar os direitos dos educadores e zelar pela boa relação professor-livro didático. Segundo Dante (1996) é fundamental que o livro contenha o Manual do Professor trazendo a sua proposta

didático-pedagógica, bem como, seu plano de organização e desenvolvimento, os objetivos a serem alcançados, entre outros.

Além de analisar a seleção e a distribuição dos conteúdos como números, linguagem e argumentação na Matemática para o Ensino Médio, é importante observar a metodologia de ensino e aprendizagem. O PNLD/2018 aponta esse como um dos critérios importantes na escolha do livro didático. Busca-se identificar de que forma as escolhas pedagógicas foram trabalhadas e se efetivam, tanto na apresentação e na sistematização dos conteúdos, quanto no que concerne às estratégias de participação do estudante e às competências básicas a serem desenvolvidas (BRASIL, 2018).

Outro ponto importante a ser observado é a linguagem utilizada nos livros didáticos, que nos leva a compreensão correta da Matemática. Esse é um processo que deve ser trabalhado desde os anos iniciais e, no decorrer da construção do saber matemático, essa linguagem irá se aprimorando, levando sempre aos estudantes conceitos formais da Matemática de maneira simples, mas sem negligenciar o conhecimento científico da mesma. Queiroz (2016, p. 10) afirma:

É importante pontuar que a linguagem que fundamenta [...] os campos da matemática é indispensável à compreensão de uma matemática mais sofisticada, estudada nos meios científicos e educacionais. Cabe ao livro didático disponibilizar o desenvolvimento teórico adequado ao nível de ensino mediante a apresentação das propriedades com as respectivas justificativas e demonstrações.

Ao tratar sobre o mesmo assunto, Paniago (2013) conclui que ao invés de ser um instrumento essencial para o aprendizado dos alunos, o livro didático acaba colaborando para a simplificação e a vulgarização do conhecimento.

Ou seja, compactuando com Paniago, alguns livros didáticos simplificam tanto os conteúdos que acabam negligenciando o conhecimento científico, sem resolver o problema da incompreensão e trazendo mais problemas para o âmbito educacional, como, por exemplo, a “ingestão” errada dos conteúdos escolares. Dante (1996) afirma que os conteúdos de Matemática do livro didático devem estar corretos, para que o aluno não estabeleça significados errôneos para sua própria vida.

Seguindo o mesmo raciocínio, o próximo ponto a ser discutido é a demonstração matemática nos livros didáticos, bem como a linguagem utilizada nas apresentações dos conteúdos da Matemática, mais especificamente em Geometria. Assim, relataremos agora a abordagem teórica acerca dessas demonstrações, baseada nas opiniões e argumentações dos pesquisadores em Educação Matemática e, também, nas orientações do PNLD/2018.

2.2 DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Para que o ensino da Matemática seja significativo na vida acadêmica dos estudantes, precisamos levar em consideração três pontos fundamentais nesse percurso: **aplicações** matemáticas em nossa sociedade e aos problemas gerados dentro da própria matemática, de origem pura, que muitos nos relevam surpreendentes aplicações, **manipulações** e **conceituação**, quando os estudantes entram em contato com as fórmulas matemáticas e com as demonstrações e os processos argumentativos, respectivamente (LIMA, 1999).

Lima (1999, p. 5) afirma ainda que:

Um dos maiores méritos educativos da Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas, admitidas para que a afirmação final seja válida. O processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão, chama-se demonstração e seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo.

Os conceitos de axiomas, definições, teoremas e demonstrações fazem parte desse método e é, para muitos, a face mais bonita da Matemática, pois, só com eles é possível provar fatos há muito tempo estudados pelos matemáticos. Apresentar esses conceitos nos livros didáticos é de caráter fundamental, para professores e alunos, para que a construção do saber matemático seja significativa.

Segundo Queiroz, pesquisador em Educação Matemática:

Os livros didáticos de matemática do ensino médio são estruturados a partir de saberes derivados do conhecimento disciplinar, curricular, profissional e das relações desses saberes com as outras áreas do conhecimento. Entretanto, nos tópicos de matemática não se pode perder de vista as demonstrações que bem caracteriza [*sic*] um bom ensino de matemática, além dos problemas contextualizados (QUEIROZ, 2016, p. 9).

Com essas citações, percebemos que muitos pesquisadores estão fazendo observações sobre a importância das demonstrações na Matemática escolar. Unindo essas conclusões com a prática que temos em sala de aula, começamos a pensar que esta parte da matemática pode estar sendo deixada de lado como se não fosse de total relevância para o aprendizado dos estudantes.

Martins (2012, p. 100, grifo nosso), afirma que:

É certo que algumas propriedades deveriam ser demonstradas com mais rigor matemático, entretanto, muitos alunos não veriam sentido em tal rigor, veriam apenas “complicação”. [...] Quanto à geometria dinâmica, consideramos que sua utilização pode contribuir para que os alunos entendam melhor o significado das demonstrações. Com os desenhos em movimento, os alunos podem desenvolver progressivamente habilidades para construir seus próprios argumentos, favorecendo os pensamentos de natureza visual, fonte de *insights* para a construção de demonstrações.

Martins (2012) deixa claro que é preciso haver um equilíbrio entre tais demonstrações e os resultados que devem ser apresentados aos estudantes da Educação Básica. É nessa etapa que entra a prática do professor. Por exemplo, introduzir primeiramente os conceitos formais da Matemática, depois ir caminhando juntamente com os estudantes, ao passo de cada um, dependendo do nível de compreensão no decorrer de cada demonstração, utilizando materiais didáticos, sempre que possível, para facilitar a visualização dos argumentos.

Menezes (2001) define Transposição Didática como instrumento através do qual se transforma o conhecimento científico em conhecimento escolar, para que possa ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos. Ou seja, o professor deve ter o nível de profissionalismo adequado para saber selecionar e analisar a relevância dos conteúdos e repassá-los para seus alunos da maneira mais adequada, de acordo com a realidade escolar.

Assim, Lima (1999) afirma que as demonstrações devem ser sutis e utilizadas como uma forma de convencer seus alunos através da razão, utilizando argumentos que tenham fundamentos matemáticos e não abusando da autoridade de ser professor.

Uma etapa importante nesse processo é mostrar para professores e estudantes o quanto pode ser significativo o aprendizado da Matemática básica se passarmos a investir mais em seus conhecimentos lógico-dedutivos, procurando desenvolver, cada vez mais, o raciocínio matemático dos alunos, de maneira adequada para cada ano escolar.

É importante para a formação geral no Ensino Médio, que os estudantes tenham oportunidade de um contato, não exaustivo, mas significativo, com o método axiomático das validações matemáticas. Essa seria uma boa maneira de favorecer, em sala de aula, o desenvolvimento do que é usualmente chamada de “argumentação lógica” (BRASIL, 2018, p. 37).

Miguel *et al.* (2009, p. 16) afirmam que “é função da escola promover a integração de novos significados aos conhecimentos matemáticos prévios dos alunos, escolares ou não, favorecendo novas sínteses rumo a um saber cada vez mais científico”.

Outro ponto fundamental nesse percurso é procurar diferenciar cada etapa do processo de argumentação e demonstração, para que não seja feita uma grande confusão entre os elementos que fazem parte desse processo. Por isso, é importante que os professores tenham bons materiais didáticos e, também, que o livro didático traga essas definições de modo que não se possam confundir conceitos básicos, como por exemplo, de uma proposição e sua recíproca, o que é bastante prejudicial para o aprendizado da argumentação matemática.

Rachel (2012, p. 32-33) afirma que:

Para muitos professores, o livro didático é a única fonte de pesquisa, de forma que, se as provas forem estimuladas nas coleções, isto pode encorajar os docentes não apenas a realizá-las em sala de aula, mas também a propor atividades referentes a provas aos alunos.

Para alguns especialistas é preciso saber diferenciar os pontos: argumentação, explicação, prova e demonstração. Utilizando como referência Balacheff, temos os seguintes significados:

Argumentação: qualquer discurso destinado a obter o consentimento do interlocutor sobre uma afirmação; **Explicação:** uma argumentação em que o consentimento se busca a partir da explicitação da racionalidade da afirmação, e não através de outros tipos de argumentação; As **provas** são explicações em que a explicitação da veracidade de uma asserção se realiza sob regras ou normas acordadas por uma comunidade determinada em um momento dado. Na comunidade Matemática, essas normas estabelecem a apresentação de uma sucessão de enunciados, cada um dos quais é uma definição, um axioma, um teorema prévio ou um elemento derivado mediante regras pré-estabelecidas de enunciados que lhe precedem. Nesse caso as provas recebem o nome de **demonstração** (BALACHEFF, 1987 *apud* MONTORO, 2005 *apud* MARTINS, p. 33, grifo do autor).

Segundo Balacheff (1988 *apud* GRAVINA, 2001) as provas produzidas pelos alunos podem ser divididas nas seguintes categorias: *provas pragmáticas* e *provas intelectuais*. Sendo as *pragmáticas* apoiadas em conhecimentos práticos, e, até mesmo, utilizando desenhos e observação de figuras. As *intelectuais* baseiam-se em propriedades, bem como, relações entre essas propriedades, caracterizando-se pela linguagem matemática. E conclui que o nível de experiência mental marca a transição entre a *prova pragmática* e a *prova intelectual*.

É com base nas ideias de Balacheff sobre os tipos de provas existentes no ensino, ou seja, os tipos de provas que podem ser produzidas pelos alunos da Educação Básica, que vamos investigar como os autores das Coleções de Matemática aprovadas pelo PNLD/2018 abordam as provas e demonstrações nos conteúdos de Geometria.

Agora iniciaremos a discussão acerca dos conteúdos de Geometria relacionados à Matemática escolar. Comentaremos um pouco sobre a sua história na Matemática e na Educação, bem como a sua importância para esses meios, e relataremos alguns problemas no ensino da Geometria na Educação Básica, tomando como referência os pesquisadores em Educação Matemática e Matemática pura, nos baseando também nas orientações do PNLD/2018 e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio/2006, as mais acessíveis em nossa pesquisa.

2.3 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O ponto de partida quando queremos conceituar, definir e compreender determinados assuntos na Matemática é conhecer suas origens históricas, como forma de contextualização das ideias a serem discutidas. Essa também é uma questão importante a ser discutida em sala de aula. Dessa forma, tentaremos aqui abranger o máximo de informações possíveis que possam levantar essa questão relacionada à Geometria, área de fundamental importância para a Matemática, seja no meio científico ou acadêmico.

Miguel *et al.* (2009) afirmam que encontraram duas definições para a Geometria na Antiguidade: uma delas, a expressão “medida da terra”, deriva da etimologia do termo e é devida, provavelmente, aos egípcios. Essa definição está diretamente relacionada à necessidade de medir a terra para a partilha, e aqui encontramos o conceito de área intimamente relacionado aos primórdios da Geometria. Já a definição “ciência dos corpos celestes” pode ter tido a sua origem entre os Babilônios e foi sistematizada pelos primeiros pitagóricos entre os séculos VI e V a.E.C. No caso dessa segunda definição, temos uma relação com as especulações cosmológicas como uma forma de estudar o universo em que vivemos.

Comentando os mesmos fatos, Roque e Pitombeira (2012, p. 45) defendem que:

A “geometria” dos babilônios e egípcios era essencialmente uma geometria métrica, isto é, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes. [...] Como ainda hoje acontece na Matemática escolar, os exemplos de problemas babilônicos e egípcios às vezes são bem artificiais, modelos simplificados de situações reais, propostos para exercitar ou verificar as habilidades de cálculo dos escribas.

Com o passar dos anos ocorreram transformações e o aperfeiçoamento dos conceitos geométricos, contando com colaborações essenciais para a História da Matemática. Um desenvolvimento crucial que marcou a história da Geometria foi o surgimento da série de

livros “*Os Elementos*” de Euclides, escrita com o objetivo de formalizar a Matemática “para apresentar uma geometria consistente e unificada, válida para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incommensuráveis” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 64).

Muitos outros estudiosos passaram pela Matemática e fizeram contribuições importantíssimas para o desenvolvimento da Geometria que temos hoje. Nomes como Arquimedes, Eratóstenes, Euler, entre outros, são bastante conhecidos por nós. E, apesar dos grandes avanços alcançados até hoje, não podemos classificá-la como acabada, pois a Matemática se transforma, se resolve, se descobre e se redescobre a cada dia.

Diante das citações apresentadas acima, os povos antigos utilizavam propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem demonstrarem como chegavam a esses determinados resultados, ou seja, sem qualquer sofisticação. Basicamente é isso o que é feito com nossos estudantes da Educação Básica em sala de aula. É nesse ponto que começamos a citar os problemas relacionados à falta de compreensão matemática dos alunos, pois, sem que eles consigam contextualizar os conhecimentos matemáticos, não verão a importância de se estudar determinados conteúdos.

É baseado nesse tipo de problemas que hoje se discute muito sobre a didática na sala de aula, em o que professor pode fazer para aproximar os estudantes da matéria trabalhada. Existem também diversas teorias desenvolvidas a fim de solucionar esses problemas, como por exemplo, a contextualização dos conteúdos através da história da Matemática, a resolução de problemas do cotidiano, entre outras tendências metodológicas para o ensino da Matemática.

Outros problemas nesse percurso são a falta de prática e formação por parte dos professores, além das más condições de trabalho nas escolas e na sociedade, que dificultam mais ainda o processo de aprendizagem.

Um fato importante a ser mencionado quando se fala em ensino de Geometria é o período em que surgiu o Movimento da Matemática Moderna (MMM), em meados das décadas de 60-70, em que foi valorizado o ensino simbólico da Matemática, desvalorizando alguns aspectos educacionais. Além disso, desvalorizou-se o ensino da Geometria, nos trazendo consequências negativas até os dias atuais, pois ainda encontramos professores com formação prejudicada, por conta das restrições ocorridas nessa época. Kline (1976, p. 94) afirma que:

Quase sempre parece dar-se a impressão de que os textos de matemática moderna empregam o simbolismo para ocultar a pobreza de ideias. Alternativamente, o

propósito de seu simbolismo parece ser o de tornar inescrutável o que é óbvio e afugentar, portanto, a compreensão.

Logo após esse movimento, surgiu uma onda crescente de revalorização do campo da Geometria, com o intuito de ampliar sua contribuição na formação dos estudantes. Percebendo ainda que é de extrema importância ensiná-la dentro de um contexto, relacionando sempre que possível aos conhecimentos já adquiridos pelo educando.

Entendeu-se que a geometria pode colaborar para o desenvolvimento de novas competências, novos conhecimentos, para diferentes tecnologias e linguagens, que estão sendo exigidas da humanidade neste mundo globalizado. Ainda, que a geometria é um dos pilares fundamentais do ensino da matemática (PIASESKI, 2010, p.15).

Hoje, a Geometria apresenta diversos conceitos sofisticados que podem e devem ser apresentados na Educação Básica, claro, de maneira adequada a cada ano escolar, como já mencionamos anteriormente. Essa área da Matemática é de extrema importância para o desenvolvimento intelectual e social do indivíduo, pois traz contribuições relevantes para ambos os meios, permitindo que o aluno conheça e aprenda a identificar situações no mundo em que vive, relacionando sempre a conceitos, formas e aprendizados matemáticos.

Nas Coleções do Ensino Médio aprovadas pelo PNLD/2018, no campo da Geometria, os conteúdos abordados são:

[...] geometria plana (incluindo trigonometria do triângulo retângulo); geometria espacial de posição; poliedros; as grandezas geométricas; transformações geométricas; geometria analítica – equações de retas, circunferências e cônicas no plano cartesiano (BRASIL, 2018, p. 17).

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 75, grifo do autor):

O estudo da *Geometria* deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas.

Percebemos com isso que o Ministério da Educação (MEC) entende e divulga a importância de se estudar, não somente, mas principalmente na Geometria, as demonstrações e os resultados matemáticos, a fim de proporcionar aos estudantes um contato mais

aprofundado dos conhecimentos científicos, adaptados à Matemática escolar. O PNLD/2018 (BRASIL, 2018, p. 30) afirma ainda que “como esses conteúdos fazem parte da grade curricular da etapa anterior da escolarização básica, justifica-se que sejam abordados como uma revisão no Ensino Médio”.

Uma parte importante da leitura do PNLD/2018 foi ver a importância que deram aos conteúdos que iremos trabalhar nesta pesquisa, comentando como segue:

Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras (BRASIL, 2008, p. 75-76).

Com isso, temos uma segurança maior em afirmar que pode ser feito um aprofundamento e aprimoramento nos conteúdos de Matemática na Educação Básica, especificamente em Geometria, que é nossa área de pesquisa. Iniciaremos, agora, um capítulo que abordará os conteúdos que pretendemos analisar nas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovadas pelo PNLD/2018.

3 ESTUDOS DOS CONTEÚDOS EM FOCO

Neste capítulo faremos um estudo dos conteúdos que serão nosso foco na análise, com a finalidade de sugerir alguns modelos de demonstrações que podem ser apresentadas nos livros didáticos do Ensino Médio (e conseqüentemente em sala de aula), para que os estudantes se familiarizem com as demonstrações matemáticas.

Esse estudo servirá como base para nossa análise acerca dos conteúdos apresentados nos livros didáticos: *Semelhança de triângulos*, quando estudaremos razão de semelhança, Teorema de Tales, Teorema fundamental da semelhança e critérios de semelhança; e *Triângulo retângulo*, focando em semelhança, relações métricas e o famoso Teorema de Pitágoras.

Utilizaremos como principal referência o livro de Geometria Plana da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, volume nove, escrito por Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo. Faremos o uso também do livro de Geometria da coleção do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), escrito por Antonio Caminha Muniz Neto.

3.1 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

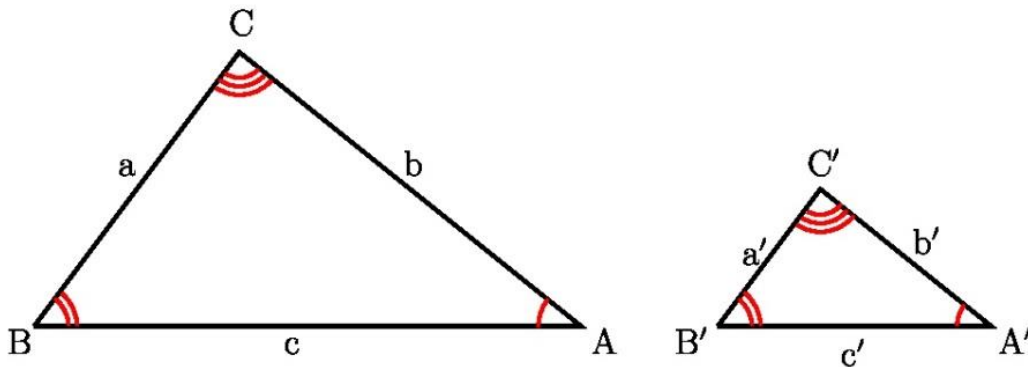
Inicialmente, abordaremos o conceito de semelhança de triângulos, de fundamental importância para tudo o que estudaremos a seguir. Dolce e Pompeo (2005, p. 198) afirmam que **“dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais”**. Em seguida, dizem que **“dois lados homólogos (*homo* = mesmo, *logos* = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes”**.

Caminha (2013, p. 148) pontua que “fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações”. Mas ele reconhece que esse ponto de vista só pode se tornar preciso através do estudo de *Transformações geométricas*, o que não faz parte do nosso objetivo.

Dolce e Pompeo (2005) pontuam que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}'$ e $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$; sendo k a razão entre os lados homólogos, chamada de *razão de semelhança dos triângulos*. Em particular, $k = 1$ implica a congruência entre os triângulos.

Assim como os autores Dolce e Pompeo, utilizamos o símbolo \sim para indicar que dois triângulos são semelhantes.

Figura 01 – Triângulos semelhantes



Fonte: Própria autora.

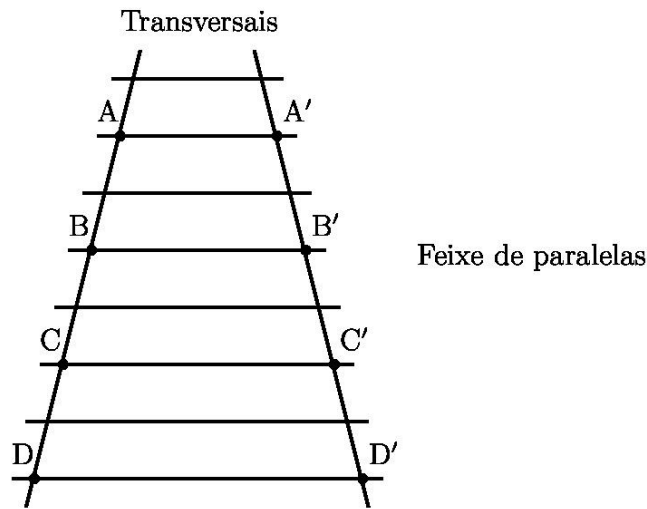
Da definição de triângulos semelhantes decorrem as seguintes propriedades (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 200):

1. Reflexiva: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$
2. Simétrica: $\Delta ABC \sim \Delta RST \Leftrightarrow \Delta RST \sim \Delta ABC$
3. Transitiva: $\Delta ABC \sim \Delta RST, \Delta RST \sim \Delta XYZ \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ$

Para demonstrar alguns resultados nos conteúdos abordados, precisaremos de um importante teorema chamado *Teorema de Tales*, o qual também será apresentado aqui como um exemplo de demonstração feita por Dolce e Pompeo. Mas, antes disso, precisamos definir alguns conceitos que serão abordados nas demonstrações.

Dolce e Pompeo (2005) trazem as seguintes definições: **Feixe de retas paralelas** é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si; **transversal do feixe de retas paralelas** é uma reta do plano que contém o feixe que concorre com todas as retas do feixe; **pontos correspondentes de duas transversais** são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe e **segmentos correspondentes de duas transversais** são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes. (Ver figura 02).

Figura 02 – Referente às definições acima

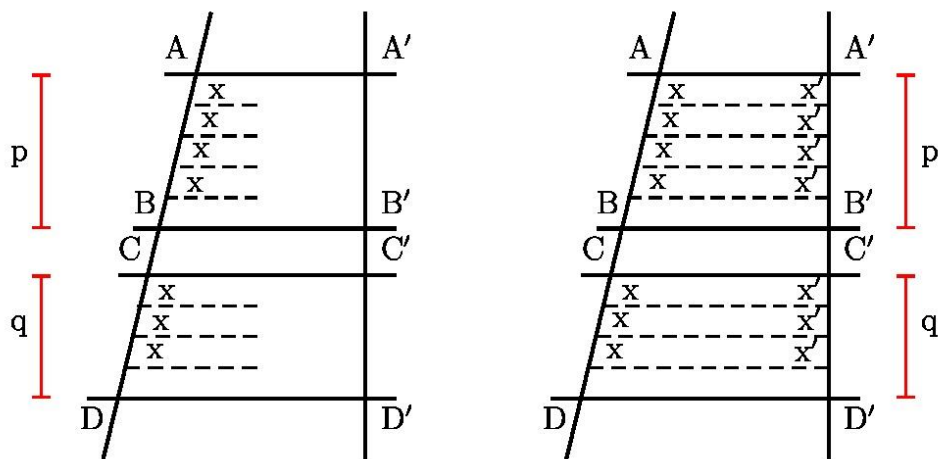


Fonte: Própria autora.

Teorema de Tales: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos *quaisquer* de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Demonstração: Caso em que os segmentos AB e CD são comensuráveis.

Figura 03 – Referente ao Teorema de Tales



Fonte: Própria autora.

Note que $AB = px$ e $CD = qx$. Ou seja, existe um segmento x que é submúltiplo de AB e de CD . Dividindo as igualdades acima, uma pela outra, obtemos $\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$ (1). Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD (ver figura 03) e aplicando a propriedade anterior, temos que $A'B' = px'$ e $C'D' = qx'$. Agora, dividindo as igualdades

acima, uma pela outra, obtemos $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q}$ (2). Comparando as igualdades (1) e (2), obtemos:

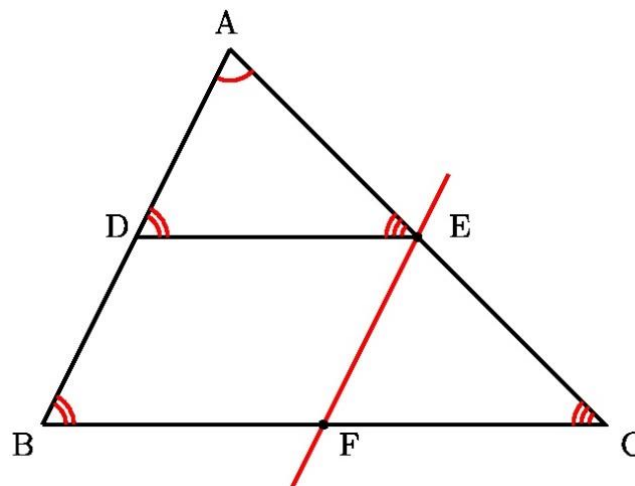
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 185).}$$

O 2º caso é quando os segmentos AB e CD são incomensuráveis, mas optamos por não fazê-lo, pois as técnicas empregadas para justificar este caso estão além do esperado para alunos do Ensino Médio.

Teorema fundamental da semelhança: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração: Para mostrarmos a semelhança entre $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:

Figura 04 – Referente ao Teorema fundamental da semelhança



Fonte: Própria autora.

1º) Ângulos congruentes: $DE \parallel BC \Rightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes) então, temos que $\hat{D} \equiv \hat{B}$, $\hat{E} \equiv \hat{C}$ e \hat{A} comum. (1);

2º) Lados proporcionais: Pelo *Teorema de Tales*, temos que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Por E construímos EF paralela a AB, com F em BC. Do paralelogramo BDEF, temos: $DE \equiv BF$. Pelo *Teorema de Tales*, temos: $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$. O que implica $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Daí, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ (2).

3º) Conclusão: As afirmações (1) e (2) implicam $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 201).

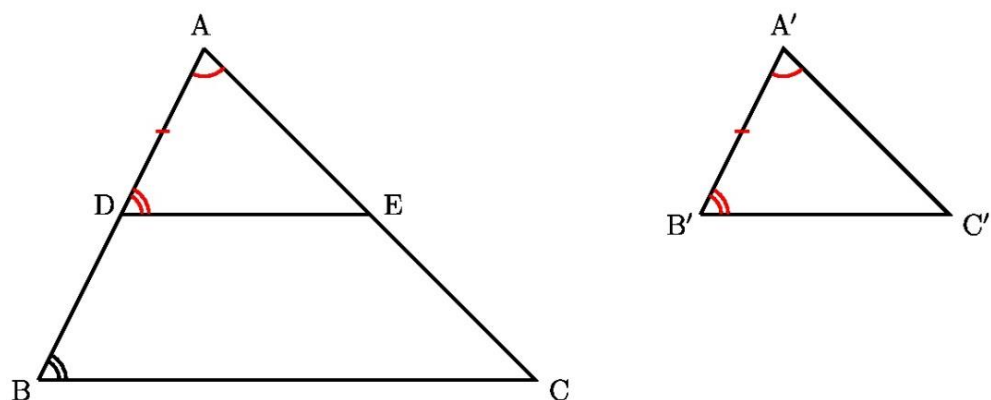
A seguir, apresentaremos os casos de semelhança de triângulos, também chamados de *critérios de semelhança*. Suas respectivas demonstrações serão apresentadas de acordo com Dolce e Pompeo (2005).

1. “Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.” (Caso AA).
2. “Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.” (Caso LAL).
3. “Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.” (Caso LLL).

Demonstrações:

1. Supondo que os triângulos não sejam congruentes e que $AB > A'B'$. Seja D um ponto de AB tal que $AD \equiv A'B'$ e o triângulo ADE com $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$ e E no lado AC. Como $\widehat{A} \equiv \widehat{A}$, $AD \equiv A'B'$, $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$, usando o caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo), temos que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$. $\widehat{B} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{D} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE'$. Assim, essas afirmações implicam $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. (Ver figura 05).

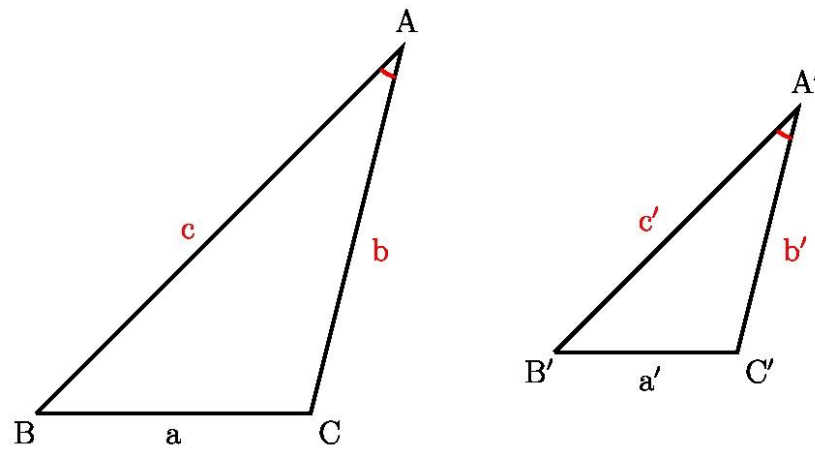
Figura 05 – 1º critério de semelhança



Fonte: Própria autora.

2. A demonstração é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado), em lugar de ALA, e o teorema fundamental da semelhança. Assim, obtemos:

Figura 06 – 2º critério de semelhança

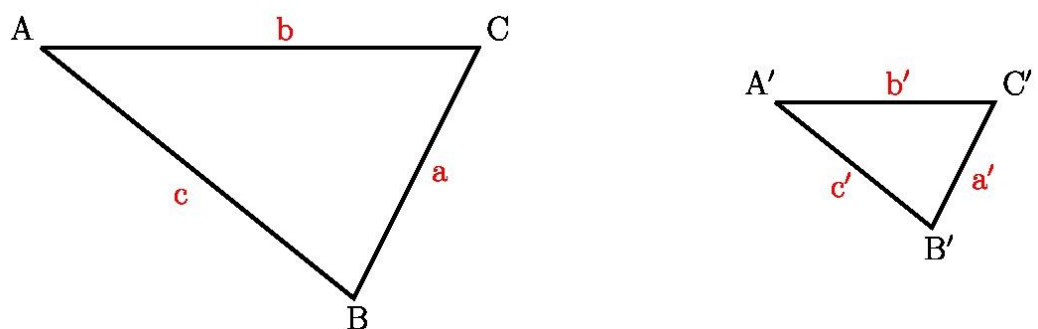


Fonte: Própria autora.

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = k \text{ e } \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \left(\frac{a}{a'} = k, \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'}\right).$$

3. A demonstração também é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência LLL (lado-lado-lado), em lugar de ALA, e o teorema fundamental da semelhança. (Ver figura 07).

Figura 07 – 3º caso de semelhança



Fonte: Própria autora.

$$\text{Assim, obtemos: } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow (\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'}).$$

(DOLCE; POMPEO, 2005, p. 204-206).

Com base nos casos/critérios de semelhança, temos os seguintes resultados:

Se a razão de semelhança de dois triângulos é k , então:

- a) a razão entre lados homólogos é k ;
- b) a razão entre os perímetros é k ;
- c) a razão entre as alturas homólogas é k ;
- d) a razão entre as medianas homólogas é k ;
- e) a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k ;
- f) a razão entre os raios dos círculos inscritos é k ;
- g) a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k ;

.....

A razão entre dois elementos lineares homólogos é k ;

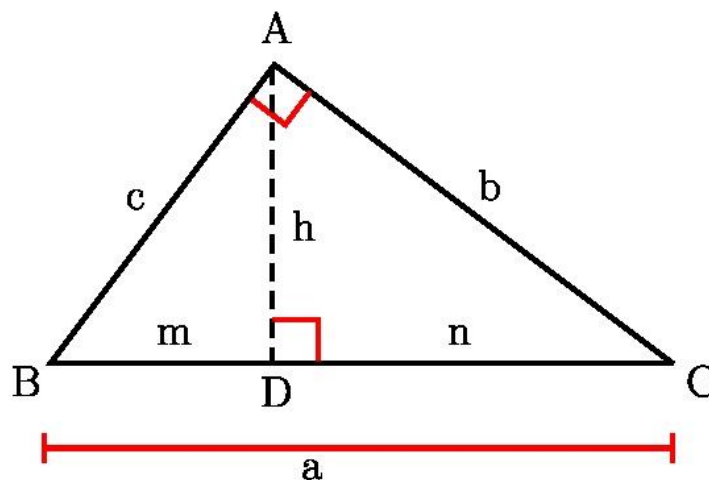
Por fim, podemos concluir que os ângulos homólogos são congruentes. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 207).

3.2 TRIÂNGULO RETÂNGULO

Iniciaremos agora nossa segunda seção de estudo na qual veremos os conteúdos relativos aos triângulos retângulos: relações métricas e Teorema de Pitágoras.

Seja ABC um triângulo retângulo em \hat{A} e AD a altura relativa ao lado BC . Podemos definir os seguintes elementos:

Figura 08 – Triângulo retângulo



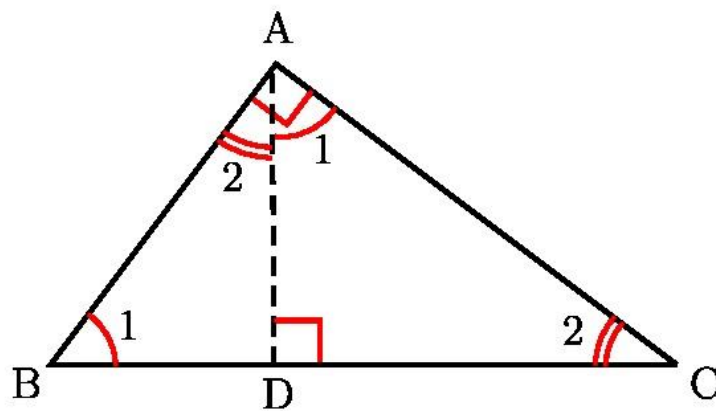
Fonte: Própria autora.

- $BC = a$: hipotenusa,
- $AC = b$: cateto,
- $AB = c$: cateto,
- $BD = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa,
- $CD = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa,
- $AD = h$: altura relativa à hipotenusa.

Com o objetivo de simplificar, denominamos um segmento pela sua medida. Assim, dizemos que a é a hipotenusa para designar que a é a medida da hipotenusa (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 220).

“Conduzindo a altura AD relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC , obtemos dois triângulos retângulos DBA e DAC semelhantes ao triângulo ABC ” explicam Dolce e Pompeo (2005, p. 221). (Ver figura 09).

Figura 09 – Triângulos semelhantes

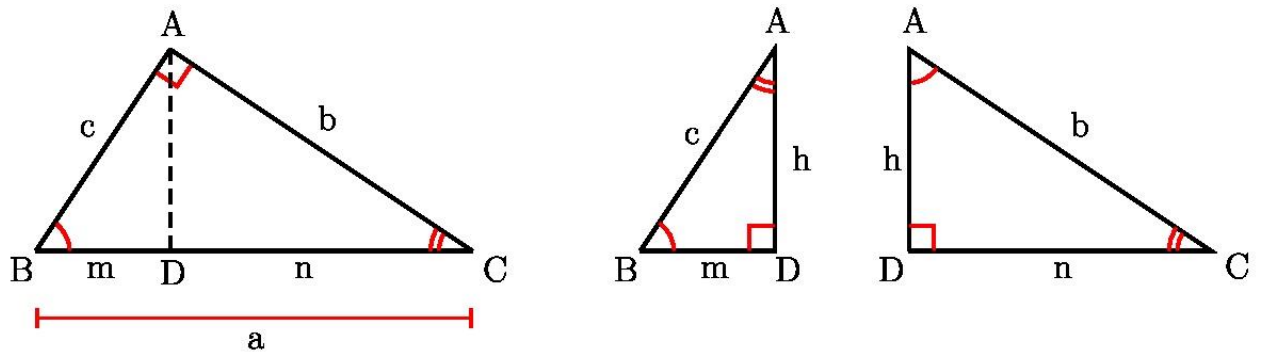


Fonte: Própria autora.

Com efeito, devido à congruência dos ângulos indicados na figura acima, $\widehat{B} \equiv \widehat{1}$ (complemento de \widehat{C}) e $\widehat{B} \equiv \widehat{2}$ (complemento de \widehat{B}). Temos que: $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, $\Delta ABC \sim \Delta DAC$, $\Delta DBA \sim \Delta DAC$, pois eles têm dois ângulos congruentes. Assim, $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$ (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 221).

Baseado nas semelhanças dos triângulos citados no item anterior e com os elementos já definidos, podemos obter *Relações métricas nos triângulos retângulos*:

Figura 10 – Triângulos retângulos



Fonte: Própria autora.

De $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ temos: (Ver figura 10).

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (4); \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \quad (2) \quad \text{e} \quad \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow ch = bm \quad (6);$$

De $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ temos: (Ver figura 10).

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \quad (1); \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (4) \quad \text{e} \quad \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow bh = cn \quad (5);$$

Por fim, de $\triangle DBA \sim \triangle DAC$ temos: (Ver figura 10).

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow bh = cn \quad (5); \quad \frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm \quad (6) \quad \text{e} \quad \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad (3).$$

Resumindo as relações encontradas e excluindo as repetidas obtemos:

- (1) $b^2 = an$
- (2) $c^2 = am$
- (3) $h^2 = mn$
- (4) $bc = ah$
- (5) $bh = cn$
- (6) $ch = bm$

(DOLCE; POMPEO, 2005, p. 222).

Dolce e Pompeo (2005, p. 223) definem *Média proporcional* dos segmentos r e s dados como o segmento x que, com os segmentos dados, forma as seguintes proporções: $\frac{r}{x} = \frac{x}{s}$ ou $\frac{x}{r} = \frac{s}{x}$. Dessas proporções segue que: $x^2 = rs$, ou ainda, $x = \sqrt{rs}$. A média proporcional de r e s coincide com a *média geométrica* de r e s .

Dessa forma, em qualquer triângulo retângulo, temos:

1º. Cada cateto é média proporcional (ou *média geométrica*) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa. Relações (1) e (2).

2°. A altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou *média geométrica*) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa. Relação (3).

3°. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela. Relação (4).

4°. O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa. Relações (5) e (6). (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 223).

Com base nessas afirmações podemos demonstrar o famoso *Teorema de Pitágoras*: “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.” Ou seja, queremos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$. (Ver figura 10).

Demonstração: Para provar esta relação basta somar membro a membro as relações (1) e (2). Vejamos:

$(b^2 = an) + (c^2 = am) \Rightarrow b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n)$, mas sabemos que $a = m + n$, então, temos que $b^2 + c^2 = a^2$. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 224).

Dolce e Pompeo (2005) fazem as seguintes observações:

1ª: As três primeiras relações métricas são as mais importantes, pois a partir delas podemos obter todas as outras. Por exemplo, multiplicando (1) e (2) membro a membro e usando (3), obtemos:

$$b^2 \cdot c^2 = an \cdot am \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 mn \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

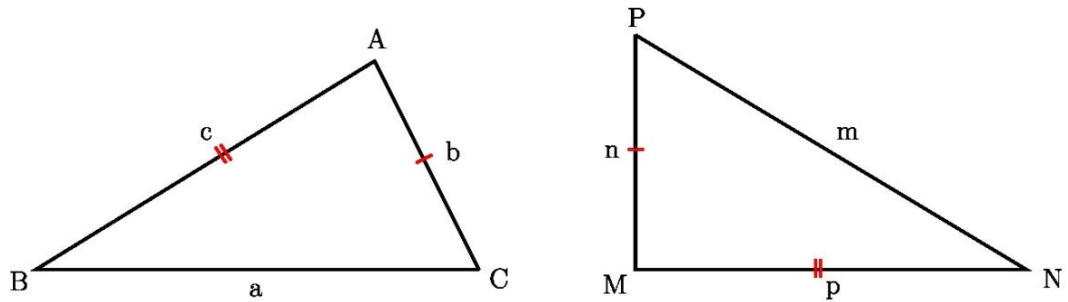
2ª: Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa. Ou seja, $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$.

$$\text{Com efeito, } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h^2} = \frac{1}{h^2}.$$

3ª: Recíproco do teorema de Pitágoras: “Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.” Ou seja, se ABC é um triângulo tal que $a^2 = b^2 + c^2$, então ABC é retângulo em \hat{A} .

Demonstração:

Figura 11 – Referente ao recíproco do teorema de Pitágoras



Fonte: Própria autora.

Construindo o triângulo MNP, retângulo em \widehat{M} e cujos catetos MN e MP sejam congruentes a AB e AC, respectivamente, temos que:

ΔMNP retângulo em $\widehat{M} \Rightarrow m^2 = n^2 + p^2$; Mas, como $n = b$ e $p = c$, temos que $m^2 = b^2 + c^2$. Daí, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$.

Então, pelo caso de congruência LLL (lado-lado-lado), $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ e, como ΔMNP é retângulo em \widehat{M} , o ΔABC é retângulo em \widehat{A} . (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 224-225).

4 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

4.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa é uma pesquisa qualitativa e um estudo de caso na qual analisaremos como são apresentadas as demonstrações e os resultados matemáticos em conteúdos de Geometria do Ensino Médio, nas Coleções de Matemática aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018, com o objetivo de investigar a abordagem e a consistência desses conteúdos através da argumentação lógico-dedutiva.

Compactuando com Godoy (1995), a pesquisa qualitativa tem como fonte direta de dados o ambiente natural e usa o investigador como instrumento fundamental neste processo, pois se valoriza o contato direto e prolongado com a situação que está sendo estudada/analisa. Em seguida, acrescenta que “os pesquisadores qualitativos estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados ou produto”.

Em relação ao estudo de caso, Godoy (1995, p. 06) afirma que “... se caracteriza como um tipo de pesquisa cujo objeto é uma unidade que se analisa profundamente. Visa ao exame detalhado de um ambiente, de um simples sujeito ou de uma situação em particular”.

Nossa primeira ação foi revisar a literatura (pesquisa bibliográfica). Utilizamos o recurso da leitura buscando/reafirmando as bases teóricas necessárias para o aprofundamento dos nossos conhecimentos relacionados à pesquisa. Nessa etapa, fizemos a leitura de artigos, monografias, teses e diversos trabalhos científicos escritos por pesquisadores referentes ao nosso campo/sujeito de estudo.

Utilizamos como principais referências as indicações do PNLD/2018, referentes aos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, pesquisas feitas por educadores e teorias sobre os tipos de demonstrações elaboradas por eles e, também, o livro de Geometria Plana da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, volume nove, escrito por Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, por meio do qual estudamos as demonstrações de alguns teoremas importantes da Geometria.

Tendo em vista a quantidade de conteúdos de Geometria presentes nos livros didáticos, nosso foco está nos conteúdos de *Semelhança de Triângulos*, quando faremos a análise no Teorema de Tales, Teorema Fundamental da Semelhança e nos critérios de semelhança; e *Triângulo Retângulo*, focando na análise das relações métricas e do Teorema de Pitágoras.

Outro ponto que nos exigiu objetividade foi a escolha das Coleções que seriam analisadas, sabendo a quantidade de livros didáticos de Matemática disponíveis nas escolas públicas. Assim, escolhemos analisar os livros das coleções aprovadas pelo PNLD 2018, por estarem sendo utilizadas durante nosso processo de pesquisa. Dessa forma, analisaremos as seguintes coleções: L1 - Matemática – Contexto & Aplicações; L2 - Quadrante – Matemática; L3 - Matemática: Ciência e Aplicações; L4 - Matemática para Compreender o Mundo; L5 - Matemática: Interação e Tecnologia; L6 - #Contato Matemática; L7 - Matemática – Paiva; L8 - Conexões com a Matemática.

Para ter acesso às coleções, contamos com o apoio de professores da rede estadual de ensino, que as tinham em seu poder, por conta do processo de escolha do livro didático realizado em suas respectivas escolas. Utilizaremos os símbolos L1,..., L8 para representar as coleções de livros didáticos, pois facilitará a descrição dos nossos dados de análise.

Iniciaremos nossa análise dos livros didáticos, contando com o conhecimento teórico que adquirimos no decorrer de nossa pesquisa e usando-o fielmente como base para fazermos nossas considerações acerca dos questionamentos feitos neste trabalho.

4.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Ao iniciar este tópico, primeiramente selecionamos quais os livros das coleções abordavam os conteúdos de Semelhança de Triângulos e Triângulo Retângulo e vimos que em todas estavam presentes no primeiro volume, visto que são conteúdos abordados como forma de revisão (aprofundamento), pois foram estudados nos anos finais do Ensino Fundamental e, além disso, são utilizados como base para o estudo da Trigonometria (conteúdo do Ensino Médio).

A fim de sermos objetivos, descreveremos como são abordados os conteúdos em cada coleção, desde a sua introdução até a sua formalização, explorando as argumentações, as demonstrações e a linguagem utilizada. É nossa intenção, também, investigar se os autores procuram aproximar os estudantes com a formalização da matemática, ensinando a argumentar, conjecturar e/ou demonstrar resultados matemáticos.

A coleção L1 - Matemática – Contexto & Aplicações, escrita por Luiz R. Dante (2016) apresenta nos dois primeiros tópicos de seu oitavo capítulo, intitulado: “Trigonometria no triângulo retângulo”, os conteúdos que pretendemos analisar: Semelhança de Triângulos e Triângulo Retângulo. O autor inicia o capítulo com uma nota em que aborda uma situação-

problema: calcular a altura de picos e montanhas. Ele afirma que os conceitos de Trigonometria nos ajudarão a obter esses resultados.

Ao iniciar o conteúdo de Semelhança de Triângulos, o autor traz um breve contexto histórico contemplando o significado da palavra Trigonometria, o conceito de proporcionalidade, quem foi Tales de Mileto e quais foram suas contribuições mais relevantes na Geometria Plana. Em nota, ele pede que os estudantes pesquisem sobre os sete sábios da Antiguidade e afirma que Tales é considerado um deles.

Dante (2017, p. 236) define Feixe de retas paralelas como “um conjunto de retas distintas de um plano, paralelas entre si” e Transversal ao feixe de retas paralelas como “uma reta do plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe”. Ele mostra em uma figura as retas paralelas cortadas por duas transversais e caracteriza seus elementos: pontos e segmentos correspondentes.

Em seguida, o autor enuncia o Teorema de Tales da seguinte forma: “Se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos de reta quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos de reta correspondentes da outra” (DANTE, 2017, p. 237). Ele demonstra esse fato de forma equivalente ao que fizemos em nossa seção 2.1. No fim, afirma que podemos enunciar o teorema de outra forma: “Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos de reta proporcionais” (DANTE, 2017, p. 237).

Antes de iniciar o conteúdo de semelhança de triângulos, o autor apresenta alguns exemplos concretos de figuras semelhantes em nosso cotidiano (fotografias e mapas), mostra seus ângulos congruentes e a proporção entre seus lados (denominada razão de semelhança). Ele define a semelhança de triângulos como: “Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais” (DANTE, 2017, p. 240). Em nota, o autor apresenta o significado da palavra homólogo como sendo: “que têm a mesma posição relativa; correspondente” (DANTE, 2017, p. 240). Abaixo das definições, traz uma figura de dois triângulos semelhantes e indica matematicamente essa definição e, em nota, explica alguns símbolos utilizados na definição.

Logo após, afirma que “se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança k (ou seja, a razão entre dois lados homólogos quaisquer é k), então quaisquer outros elementos lineares homólogos desses triângulos (alturas, perímetros, medianas, etc.) também serão proporcionais com razão k ” (DANTE, 2017, p. 240). Ele comenta em seguida que para saber se dois triângulos são semelhantes, podemos verificar apenas algumas

informações sobre eles, o que chamamos de casos de semelhança, mas ele apenas os define e mostra um exemplo, sem qualquer demonstração formal. Apresenta as seguintes definições:

Critério AA: Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro. Critério LLL: Dois triângulos são semelhantes se os lados de um são proporcionais aos lados do outro. Critério LAL: Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais (DANTE, 2017, p. 241).

O autor apresenta o Teorema Fundamental da Semelhança como a seguinte propriedade: “Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro” (DANTE, 2017, p. 242). Ele apenas a define e mostra uma figura acompanhada de uma definição com símbolos matemáticos, mas não apresenta tal demonstração.

Ao iniciar o conteúdo de Relações Métricas no Triângulo Retângulo o autor apresenta um breve contexto histórico sobre os triângulos que possuem um ângulo reto e os define como triângulos retângulos. Em seguida, define os elementos que aparecem nesses triângulos (catetos, hipotenusa) e mostra a propriedade que diz que os ângulos agudos são ângulos complementares.

L1 apresenta uma figura de um triângulo retângulo, na qual traçada a altura relativa à hipotenusa obtemos mais alguns elementos neste triângulo (que são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa). Logo após, ele enuncia e demonstra as relações métricas que obtemos a partir dos triângulos semelhantes que encontramos ao traçar a altura relativa à hipotenusa no triângulo retângulo dado inicialmente. Neste mesmo tópico, o autor deduz a relação obtida no teorema de Pitágoras apenas utilizando três relações obtidas da semelhança dos triângulos (de forma equivalente como feito em nossa seção 2.2).

Para finalizar, o autor apresenta esta última relação como o Teorema de Pitágoras e diz que pode ser enunciado da seguinte forma: “Em um triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” (DANTE, 2017, p. 247).

Para demonstrar o teorema descrito acima, o autor utiliza a construção de duas regiões quadradas de medidas $(b+c)$, ambas compostas por quatro regiões triangulares retangulares de catetos b e c . A primeira com um quadrado de lado a , e a segunda com um quadrado de lado b e com outra região menor (e quadrada) de lado c . Como ambas tem lados $(b+c)$ e são quadradas, possuem a mesma área. Ao retirarmos as regiões triangulares

congruentes de ambas, o que sobra na primeira é a^2 e é igual ao que sobra na segunda, que é $b^2 + c^2$. Obtendo assim, $a^2 = b^2 + c^2$.

A linguagem que L1 utiliza é simples e, mesmo não tendo apresentado todas as demonstrações que julgamos como importantes, o autor apresentou provas pragmáticas e intelectuais, onde soube utilizar recursos (figuras, por exemplo) e propriedades já apresentadas aos estudantes para fazer as demonstrações que se propôs. Algumas notas foram direcionadas aos estudantes com explicações mais detalhadas do que foi utilizado nas demonstrações apresentadas e algumas incentivam a pesquisar sobre o assunto, embora não tenha trazido notas incentivando o interesse dos estudantes por demonstrações matemáticas ou questionamentos que os façam refletir sobre.

A coleção do L2 - Quadrante – Matemática, escrita por Eduardo Chavante e Diego Prestes (2016), traz em seu décimo capítulo os conteúdos de Trigonometria, onde em seus primeiros tópicos aborda o Teorema de Tales e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, incluindo, o Teorema de Pitágoras. Os autores iniciam o capítulo com o Teorema de Pitágoras, mas antes, comentam em forma de nota explicativa sobre Tales de Mileto e suas contribuições à geometria demonstrativa, conceituando-a como sendo “conhecimentos geométricos que se justificam por meio de demonstrações lógicas” (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 221).

Em seguida, apresentam as seguintes definições: “Feixe de retas paralelas: duas ou mais retas de um mesmo plano que, duas a duas, são paralelas; Retas transversais a um feixe de retas paralelas são retas pertencentes ao mesmo plano do feixe e que intersectam todas as retas do feixe de retas paralelas” (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 221). Logo após, definem os elementos encontrados no feixe: os pontos de intersecção entre o feixe e as transversais e os pares de segmentos correspondentes formados por eles.

L2 enuncia o Teorema de Tales do seguinte modo: “Quando um feixe de retas paralelas é intersectado por duas retas transversais, a razão entre a medida de dois segmentos quaisquer sobre uma reta transversal é igual à razão entre a medida dos segmentos correspondentes sobre a outra reta transversal” (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 222). Os autores demonstram o teorema para segmentos comensuráveis, de maneira equivalente ao que fizemos na seção 2.1, e afirmam ser possível demonstrá-lo também para segmentos incomensuráveis.

Demonstrado o teorema, iniciam o conteúdo de Relações Métricas no Triângulo Retângulo comentando que o triângulo retângulo é conhecido há milhares de anos, pois “há

registro do tempo dos faraós de que os antigos egípcios construíam a partir de cordas divididas com nós para demarcar ângulo retos” (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 223). Logo após, caracterizam, em um exemplo, os elementos do triângulo retângulo: catetos, hipotenusa e altura relativa à hipotenusa. Eles mostram que a partir da altura relativa à hipotenusa traçada encontramos triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao dado inicialmente.

Para mostrar a semelhança entre os triângulos obtidos no exemplo, os autores os analisam primeiramente separados e logo após dois a dois. Na verificação dos primeiros, eles apenas mostram que os triângulos têm dois ângulos internos congruentes e afirmam que, como isso acontece, temos triângulos semelhantes. Por fim, utilizam a propriedade transitiva da definição de triângulos semelhantes, para mostrar a semelhança entre os triângulos obtidos (equivalente ao que fizemos em nossa seção 2.2).

Em seguida, demonstram, a partir da semelhança obtida entre os triângulos, as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, de maneira equivalente ao que fizemos em nossa seção 2.2. Para obter a relação definida pelo Teorema de Pitágoras, os autores somam duas relações métricas encontradas e utilizam uma terceira, para chegar ao resultado que queriam ($a^2 = b^2 + c^2$).

Para finalizar, apresentam em forma de nota explicativa que esta última relação é conhecida como o Teorema de Pitágoras, nome dado em homenagem ao filósofo e matemático grego Pitágoras, e comenta um pouco do que sabem sobre sua história/obra de vida, mas de forma superficial. Logo após, enunciam o teorema como: “Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 226). Por fim, descrevem e afirmam que a recíproca deste teorema é também válida.

O livro apresenta pouco dos conteúdos que pretendíamos analisar e não apresenta, por exemplo, algumas das demonstrações que trabalhamos. Ainda assim apresenta provas intelectuais, utilizando propriedades já estudadas pelos alunos. A linguagem que utiliza é simples e, em relação à interação com os estudantes, sentimos que faltou um pouco mais de incentivo para que eles se envolvessem nas demonstrações, embora algumas notas tenham sido feitas para que eles pudessem se aproximar mais dos resultados obtidos.

A coleção L3 - Matemática: Ciência e Aplicações, escrita por David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo, contempla os conteúdos que pretendemos analisar em seu décimo capítulo, intitulado: “Semelhança e triângulos

retângulos”. Os autores iniciam este capítulo mostrando um exemplo de figuras semelhantes e apresentam, a partir daí, conceitos importantes como, por exemplo, a constante de proporcionalidade (chamada razão de semelhança) que existe entre as medidas dos comprimentos das figuras. Eles afirmam que para que duas figuras sejam semelhantes, elas têm que satisfazer duas condições: medidas lineares proporcionais e medidas angulares congruentes.

L3 apresenta, ao iniciar o conteúdo de Semelhança de Triângulos, um exemplo de triângulos semelhantes e mostra as relações que obtemos entre os seus lados e ângulos. Em seguida, traz a seguinte definição para triângulos semelhantes: “Dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais” (DEGENSZAJN *et al.*, 2016, p. 198). Além disso, mostra como podemos escrever essa definição em símbolos matemáticos.

Logo após, os autores definem formalmente a razão de semelhança entre dois triângulos semelhantes e a chama de k . Em uma pequena nota do lado direito do livro, os autores perguntam aos estudantes o que ocorre quando a razão de semelhança de dois triângulos é igual a 1 e trazem a resposta somente para o livro do professor, explicando que, se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é 1, então os triângulos possuem lados respectivamente congruentes, logo, os triângulos também são congruentes.

Os autores abordam novamente a definição de semelhança de triângulos, mas afirmam que podemos reduzir tais exigências, com os chamados “casos de semelhança (ou critérios de semelhança)”, mas argumentam que para demonstrar a validade destes é necessário rever o Teorema de Tales e o Teorema Fundamental da Semelhança. Dessa forma, começam definindo os elementos encontrados em um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais (pontos e segmentos correspondentes).

L3 traz o Teorema de Tales na seguinte versão: “Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra” (DEGENSZAJN *et al.*, 2016, p. 199). A demonstração feita neste caso foi equivalente ao que fizemos em nossa seção 2.1.

Em uma nota para o (a) professor (a), os autores afirmam que “é importante que os estudantes compreendam que, ao usar o Teorema de Tales, é possível escolher *quaisquer* dois segmentos de uma transversal (e não apenas segmentos adjacentes)” (DEGENSZAJN *et al.*, 2016, p. 199).

Os autores apresentam o teorema da seguinte forma: “Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intersecta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro” (DEGENSZAJN *et al.*, 2016, p. 200). Em seguida, distinguem a hipótese e a tese deste teorema e fazem a sua demonstração de forma equivalente ao que fizemos em nossa seção 2.1.

Antes de demonstrar os critérios de semelhança, os autores afirmam (em uma nota ao professor) que, se ele julgar necessário, deve revisar os casos de congruência de triângulos. As demonstrações feitas para os três casos foram equivalentes ao que fizemos em nossa seção 2.1, mas os autores especificam cada uma das demonstrações detalhadamente.

Após essas demonstrações, os autores abordam ainda três consequências da semelhança de triângulos (a razão entre as áreas é k^2 ; se um segmento une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e é metade do terceiro lado; se, pelo ponto médio de um lado de um triângulo, traçarmos uma reta paralela a outro lado, ela encontrará o terceiro lado em seu ponto médio) e apresentam também as suas demonstrações, mas como não foram nossos objetos de estudos e não é nosso objetivo analisá-las.

L3 inicia o conteúdo de Triângulo Retângulo com a seguinte definição: “Todo triângulo retângulo, além do ângulo reto, possui dois ângulos (agudos) complementares” (DEGENSZAJN *et al.*, 2016, p. 208). Logo após mostra a figura de um triângulo retângulo e identifica seus elementos (catetos, hipotenusa e altura relativa à hipotenusa) e afirma, a partir de conclusões matematicamente formais, que os triângulos obtidos ao traçarmos a altura relativa à hipotenusa são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo inicial.

Para os autores apresentarem as relações métricas, inicialmente, eles identificam (em figuras) as projeções dos catetos sobre a hipotenusa em um triângulo retângulo. Logo após, o dividem (traçando a altura relativa à hipotenusa) e obtêm triângulos semelhantes. A partir dessas semelhanças eles mostram as relações métricas que existem nos triângulos retângulos. E, por fim, utilizando três das relações encontradas eles deduzem a relação do Teorema de Pitágoras. Exatamente como fizemos em nossa seção 2.2.

L3 mostra algumas aplicações notáveis do teorema de Pitágoras (dedução das fórmulas para calcular a diagonal de um quadrado e a altura do triângulo equilátero), e o enuncia da seguinte forma: “Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa” (DEGENSZAJN *et al.*, 2016, p. 210).

A demonstração do teorema de Pitágoras foi dada em uma nota intitulada “UM POUCO DE HISTÓRIA – Pitágoras de Samos”, onde os autores abordam inicialmente um pouco da história de Pitágoras e suas contribuições na área do raciocínio lógico dedutivo e, logo após, mostram um exemplo de demonstração do seu teorema que relaciona os lados de um triângulo retângulo.

A demonstração foi feita a partir da construção de um quadrado de lado $(a+b)$, dividindo-o ao meio e obtendo dois trapézios congruentes e, também, três triângulos pequenos que preenchem um destes trapézios. Dessa forma, existem duas maneiras de se calcular a área S destes trapézios (como metade da área do quadrado ou como a soma das áreas dos triângulos pequenos). Igualando e simplificando estas, encontramos a relação estabelecida pelo teorema de Pitágoras. (Os autores referenciaram essa demonstração a James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos).

A linguagem utilizada nesta coleção, mesmo simples, se baseou em argumentos matemáticos lógicos e propriedades matemáticas já estudadas pelo leitor (estudantes), ou seja, apresenta conceitos com encadeamento lógico. Procurou-se também diferenciar hipóteses de teses nas demonstrações, apesar de não ter definido esses conceitos. Este livro apresentou tanto provas pragmáticas (utilizando figuras como apoio para as demonstrações) como provas intelectuais (baseadas em propriedades matemáticas e relações entre essas propriedades).

Os autores também procuram envolver os alunos em suas explicações, lançando notas argumentativas, para que possam refletir acerca das explicações/demonstrações dadas, propiciando o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes. Também apresentou notas direcionadas aos professores com orientações de questionamentos para serem feitos aos estudantes, além de sugestões de atividade a serem feitas.

A coleção do L4 -Matemática para compreender o mundo, escrita por Kátia Smole e Maria Diniz (2016), trabalha esses conteúdos em seu décimo capítulo, intitulado “Trigonometria do triângulo retângulo”, onde logo de início traz uma nota para o professor estabelecendo os seguintes objetivos: “apresentar as razões trigonométricas no triângulo retângulo e resolver problemas de medições de distância inacessíveis (origem da Trigonometria na história da humanidade)” (SMOLE; DINIZ, 2016, p.232).

Na introdução do capítulo, as autoras trazem um texto que fala sobre a história das grandes navegações com o intuito de mostrar as origens da trigonometria na história da humanidade. Em seguida, trazem definições para a trigonometria, baseadas na origem da palavra. “A origem dessa palavra é grega: *trigonos* significa “triângulo” e *metrein* significa

“medir”” (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 232). Daí, afirmam que antes de iniciar o estudo da Trigonometria, irão apresentar o “essencial” do Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales.

Antes de comentar sobre o Teorema de Pitágoras, as autoras definem triângulo retângulo e os seus elementos (catetos, hipotenusa, ângulo reto, ângulos agudos e complementares). Como nota para o estudante, elas sugerem dois livros como obras que irão ajudá-lo a compreender melhor os assuntos trabalhados no decorrer do capítulo. Por sua vez, como nota ao professor, elas afirmam que a leitura será apenas um jeito lúdico de rever os conceitos estudados.

Ao apresentar o Teorema de Pitágoras, L4 traz a informação que ele foi demonstrado pela primeira vez na escola pitagórica, criada pelo matemático grego Pitágoras. Porém, não apresenta nenhum exemplo de demonstração, o apresentando apenas como sendo uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo que diz: “Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa” (SMOLE; DINIZ, 2016, p.235). Mais adiante, mostra uma figura e representa esta relação.

No tópico seguinte, utiliza a relação estabelecida pelo teorema para deduzir as fórmulas de calcular as medidas da diagonal de um quadrado e da altura de um triângulo equilátero. O único ponto em que se aproxima de mostrar aos estudantes exemplos de alguns resultados matemáticos. Para finalizar o assunto, traz uma nota no fim da página apresentando o Teorema de Pitágoras e sua recíproca, afirmando que os dois são válidos.

Ao iniciar a apresentação do Teorema de Tales, as autoras fazem referência a Tales, mostrando-o como “um dos primeiros matemáticos dos quais temos notícia” (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 236), e afirmam que é um teorema bastante importante para a Geometria. Em seguida, mostram uma figura ao lado contendo um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais e enunciam o teorema da seguinte maneira: “se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais r e s , então as medidas dos segmentos de r determinados pelo feixe são diretamente proporcionais aos comprimentos dos segmentos correspondentes de s ” (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 236).

Novamente, L4 não apresenta a demonstração do teorema, apenas uma propriedade geométrica relacionada à semelhança de triângulos, como uma consequência do teorema de Tales. Para isso, relembra a definição de triângulos semelhantes e exhibe a propriedade da seguinte forma: “dividindo um triângulo com uma reta paralela a qualquer um dos seus lados, os triângulos resultantes são semelhantes” (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 237).

Para finalizar os conteúdos que pretendíamos analisar, as autoras trazem como nota complementar uma história que descreve Tales e suas ações dentro do campo da Geometria. Com isso, podemos perceber que L4 não apresenta demonstrações matemáticas como sendo um dos seus objetivos de ensino/estudo. Também notamos que a linguagem utilizada é de fácil compreensão, havendo mais preocupação em simplificar os conteúdos para fazer com que os estudantes compreendam o básico para conseguir resolver os exercícios propostos nos capítulos, sem procurar desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo dos alunos.

Dessa forma, notamos que a linguagem muito simples e “direta” acaba deixando de abordar assuntos importantes dentro da matemática, como a dedução das fórmulas e demonstração de resultados matemáticos, perdendo a oportunidade de incentivar os estudantes a compreenderem o porquê de determinados resultados na Geometria e tornando o conhecimento matemático sistemático, apenas memorizando e reproduzindo exemplos de cálculos.

A coleção do L5 - Matemática: Interação e Tecnologia, escrita por Rodrigo D. Balestri (2016), traz os referidos conteúdos em seu último capítulo do volume um, intitulado: “Introdução a trigonometria”, apresentando, em seguida, questionamentos sobre relações entre a trigonometria e o desempenho das atividades de um engenheiro civil. Logo após, sugere que a professora recomende uma pesquisa aos alunos sobre profissões que estão relacionadas com a matemática.

Esta coleção, por sua vez, não apresenta os conteúdos de semelhança de triângulo e traz apenas o Teorema de Tales, o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Classifica como objetivos da unidade compreender e aplicar os teoremas que serão apresentados.

Na introdução ao Teorema de Tales o autor traz uma breve história sobre Tales de Mileto e as aplicações do seu teorema no cotidiano (da época em que ele viveu e atualmente). Para formalizar o teorema e iniciar a sua demonstração, o autor Balestri (2016, p. 244) o apresenta do seguinte modo: “Um feixe de retas paralelas determina, sobre as retas transversais, segmentos correspondentes com medidas proporcionais”. Em sua demonstração ele utiliza uma linguagem formal, mas simples, e traz ao lado notas explicativas com definições de elementos utilizados no decorrer da demonstração.

Balestri (2016) divide a demonstração em dois casos: O caso em que AB é congruente a BC e o caso em que não são congruentes (sendo que neste, só fará considerando que sejam segmentos comensuráveis, mas afirma que vale para segmentos incomensuráveis

também). Sua tese é que $AB/BC = DE/EF$ e as hipóteses são: Dadas três retas paralelas r , s e t , cortadas por retas transversais u e v , onde os pontos de intersecção da reta u com as retas r , s e t são A, B e C, e os pontos de intersecção da reta v com as retas r , s e t são D, E e F. Para mostrar o primeiro caso, ele utiliza propriedades estudadas anteriormente pelos alunos, como os casos de congruência de triângulos. Ao concluir a prova deste caso, utiliza-o como referência para mostrar o caso em que AB e BC não são congruentes, juntamente com a definição de segmentos comensuráveis.

Na introdução aos conteúdos sobre triângulo retângulo, o autor traz novamente uma breve história, agora falando sobre a utilização do Teorema de Pitágoras por Agrimensores, já no Antigo Egito e, atualmente, por Engenheiros. Ele traz também uma nota recuada à esquerda que comenta um pouco sobre Pitágoras e suas grandes contribuições às ciências.

Antes de demonstrar o Teorema de Pitágoras, Balestri (2016, p. 246) classifica triângulo retângulo como “todos os triângulos que possuem um ângulo interno reto”. Em seguida afirma que “a hipotenusa corresponde ao maior lado do triângulo retângulo, e cada um dos lados menores é chamado de cateto” (BALESTRI, 2016, p. 246).

Balestri (2016, p. 246) enuncia o Teorema de Pitágoras da seguinte maneira: “Segundo o Teorema de Pitágoras, em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa”. Em seguida demonstra-o e afirma que a recíproca também é válida, em forma de nota explicativa, recuada à direita.

A demonstração é feita por construção, em que, dados um quadrado de lado a e um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , podemos construir sobre cada lado deste quadrado um triângulo da forma descrita acima, obtendo assim, outro quadrado EFGH de lado $b+c$. Dessa forma, temos duas maneiras de calcular a área desse quadrado maior: somando as áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado maior ou simplesmente elevando o lado do quadrado maior ao quadrado. O próximo passo foi igualar as equações e obter a relação demonstrada por Pitágoras.

Em seguida, faz a apresentação das relações métricas no triângulo retângulo, onde utiliza o fato que dado um triângulo retângulo, podemos traçar a altura relativa à hipotenusa e obter três triângulos: o maior, dado inicialmente, e outros dois menores, obtidos a partir da divisão ao traçar a altura. Dessa forma, ele usa o fato que os triângulos são semelhantes pelos critérios de semelhança (estudados no ensino fundamental) para obter as relações métricas entre os lados, já que triângulos semelhantes possuem lados correspondentes proporcionais.

Dessa forma, Balestri (2016) mostra apenas três das seis relações métricas e passa as outras como exercícios propostos e pede ao professor que consulte as respostas das atividades na Assessoria Pedagógica (material de apoio para o professor que veio junto com o livro didático). No mesmo exercício, pede que demonstrem o Teorema de Pitágoras utilizando as relações métricas encontradas.

A partir dessa investigação, vimos que o L5 prioriza as aplicações da matemática, pois está sempre tentando relacioná-la com nosso cotidiano, mostrando aos alunos o quanto ela está presente em nossas vidas, a fim de contextualizar os conteúdos. Também apresenta algumas informações históricas, mas de forma rasa. A linguagem utilizada é simples, mas ainda assim, apresenta provas pragmáticas e provas intelectuais, em que utiliza o auxílio de figuras e também propriedades já vistas pelos alunos, o que mostra um pouco de encadeamento lógico em sua construção.

O livro não aborda todos os conteúdos que pretendíamos analisar, mas apresenta notas explicativas como suporte para o esclarecimento de algo que tenha ficado nas entrelinhas das demonstrações que se propôs a fazer. Percebemos também que o autor tentou envolver os alunos nas demonstrações das relações métricas, mesmo no final, deixando espaço para que eles também possam praticar tais demonstrações, o que ajuda a desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes.

Na coleção do L6 - #Contato Matemática, escrita por Joamir Souza e Jacqueline Garcia (2016), encontramos muitas semelhanças com a coleção L5, tanto na seleção/distribuição dos conteúdos, quanto nos exemplos de demonstrações apresentadas pelos autores. Neste livro temos um capítulo intitulado: “Trigonometria no triângulo”, onde os dois primeiros tópicos tratam sobre Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras.

Na introdução do capítulo encontramos um pequeno texto que comenta sobre acessibilidade e usa como exemplo a rampa de acesso, esclarecendo suas relações matemáticas com os triângulos retângulos. Ao introduzir o Teorema de Tales, os autores apresentam o matemático Tales de Mileto e algumas de suas contribuições para a Matemática, relacionando a resolução do problema de calcular a altura de uma pirâmide ao que chamamos hoje de Teorema de Tales. Antes de enunciar o teorema, eles definem um feixe de retas paralelas como “um conjunto de três ou mais retas contidas em um mesmo plano, paralelas duas a duas” (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 234).

Apresentam o teorema como a seguinte propriedade: “Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos

determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal” (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 234). A demonstração deste teorema é feita de maneira equivalente à demonstração do L5. Contudo, traz observações em notas explicativas apenas para o professor. Os alunos veem só a demonstração tal e qual está escrita.

Ao introduzir o Teorema de Pitágoras, os autores contam um pouco da história de Pitágoras e as suas contribuições a esse teorema que o homenageia. Explicam também que existem inúmeras maneiras de demonstrá-lo e que farão apenas uma. Enunciam o teorema da seguinte forma: “Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 241). A demonstração feita neste livro é equivalente à demonstração feita no L5.

Esta coleção, por sua vez, só apresenta dois dos nossos tópicos de análise. Suas demonstrações foram comentadas na descrição do L5. A linguagem utilizada é simples e objetiva, contudo, sentimos pouca interação com os estudantes, pois os autores não apresentam qualquer tópico de discussão extra e/ou nota explicativa e/ou questionamento direcionado aos alunos, mas apenas notas direcionadas ao professor com sugestões de atividades. Características que dificultam o processo de ensino-aprendizagem.

A coleção do L7 - Matemática – Paiva escrito por Manoel Paiva (2015), aborda os conteúdos de Semelhança de Triângulo e Triângulo Retângulo no 3º capítulo, intitulado: “Geometria plana: triângulos e proporcionalidade”. O autor inicia o capítulo com uma situação-problema que trabalha propriedades dos triângulos isósceles (conteúdo que será apresentado mais a frente). Em seguida, traz um texto contando um pouco sobre as origens da Geometria.

Ao iniciar os conteúdos, o autor contempla assuntos importantes para o nosso estudo, como definições e classificações de triângulos e de seus elementos. Antes de apresentar o Teorema de Tales, ele traz um exemplo de aplicações da proporcionalidade entre segmentos de retas e também comenta um pouco sobre o famoso matemático Tales de Mileto.

Para apresentar o teorema, o autor considera três retas paralelas cortadas por duas transversais e define segmentos correspondentes como sendo segmentos das transversais que possuem os extremos sobre as mesmas paralelas. Logo após, afirma que Tales demonstrou que a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes na outra transversal.

Para finalizar, o autor enuncia o teorema generalizado para mais de três paralelas: “Se três ou mais retas paralelas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre

dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal” (PAIVA, 2015, p. 75).

Antes de dar início ao conteúdo de semelhança de triângulos, o autor aborda semelhança entre figuras planas com exemplos de quadrados, retângulos e circunferências. Em seguida, informa que apesar do conceito intuitivo de semelhança ser muito importante, é necessário que esse conceito seja formalizado. Assim, apresenta a seguinte definição para triângulos semelhantes:

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro de modo que: I. ângulos com vértices correspondentes são congruentes; II. lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais (PAIVA, 2015, p. 77).

O autor apresenta também uma nota definindo, matematicamente, uma correspondência biunívoca. E, em seguida, apresenta os casos de semelhança de triângulos, como “qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a semelhança de dois triângulos” (PAIVA, 2015, p. 78).

L7 apresenta os casos de semelhança do seguinte modo:

Caso AA: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes. Caso LAL: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados, respectivamente, proporcionais; e são congruentes aos ângulos formados por esses lados. Caso LLL: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente, proporcionais (PAIVA, 2015, p. 78).

O autor não demonstra os casos de semelhança de triângulos, porém traz notas explicativas contendo informações sobre triângulos semelhantes (talvez com o intuito de reafirmar o que foi dito).

Mas, em seguida, apresenta uma breve demonstração de que a razão de semelhança, definida como “a razão entre dois lados correspondentes” pode ser obtida pela razão entre quaisquer dois segmentos correspondentes: alturas, medianas, bissetrizes, etc. Essa demonstração, por sua vez, não será especificada aqui, pois o nosso objetivo é analisar as demonstrações que foram sugeridas em nosso capítulo de estudo dos conteúdos em foco.

Ao iniciar o conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo, o autor caracteriza os elementos encontrados em um triângulo retângulo (catetos, hipotenusa, altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa) e enuncia as relações que irá encontrar nas demonstrações feitas em seguida. Para demonstrar, ele utiliza o fato que ao traçarmos a altura relativa à hipotenusa obtemos triângulos semelhantes ao primeiro e

semelhantes entre si e, dessas semelhanças saem as relações métricas (como foi feita em nossa seção 2.2).

Para deduzir a relação que se refere ao Teorema de Pitágoras, o autor utiliza as relações já encontradas anteriormente. Mas, em uma nota explicativa ele aborda um pouco da história do teorema e suas inúmeras demonstrações, além de apresentar uma delas (os dois casos apresentados foram feitos em nossa seção de estudos 2.2).

Apesar de trazer conceitos bem definidos (de forma objetiva e clara para os estudantes), L7 só apresenta as demonstrações das relações métricas nos triângulos retângulos e um exemplo de demonstração (como nota explicativa) para o Teorema de Pitágoras, fazendo o uso de provas pragmáticas e intelectuais. Apesar das notas explicativas sobre conceitos que talvez os estudantes não conheçam, percebemos que o autor não consegue aproximar os estudantes da linguagem mais formal, o que os ajudaria a argumentar/verificar/demonstrar fatos matemáticos.

A coleção L8 - Conexões com a Matemática, escrita por Fábio Martins (2016), apresenta em seu décimo capítulo os conteúdos que pretendemos analisar, intitulado: “A semelhança e os triângulos”. Ao iniciar o capítulo, o autor traz uma breve explanação histórica sobre Tales de Mileto e uma situação problema envolvendo o cálculo da altura de uma pirâmide. Ele afirma que os objetivos deste capítulo são: resolver situações-problema envolvendo os conteúdos estudados, além de identificar figuras planas semelhantes.

O autor aborda inicialmente o conceito de proporcionalidade entre segmentos e afirma que é a base para o estudo de semelhança de figuras. Em seguida, Martins (2016) define feixe de retas paralelas cortado por duas transversais como sendo retas coplanares (e paralelas entre si) intersectadas por duas retas que pertencem ao plano do feixe. Ele explora os seus elementos (pontos e segmentos correspondentes) e os define mostrando em uma figura de um feixe cortado por transversais. Afirma que esses segmentos correspondentes são proporcionais, por isso temos que as razões entre as medidas destes segmentos são correspondentes. Em uma nota explicativa, pede que os estudantes identifiquem os pares de segmentos correspondentes na figura apresentada.

O autor apresenta o Teorema Fundamental da Proporcionalidade da seguinte forma: “Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais” (MARTINS, 2016, p. 214). Ele apresenta uma demonstração para este, mas como não foi nosso objeto de estudo, não é nosso objetivo analisá-la.

O teorema de Tales foi enunciado da seguinte forma: “Os segmentos correspondentes determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais são proporcionais” (MARTINS, 2016, p. 216). Sua demonstração foi feita de forma intelectual, na qual o autor argumenta os fatos através de propriedades já estudadas pelos estudantes.

Ele mostra um feixe de três retas paralelas cortadas por duas transversais e, em seguida, traça uma terceira reta transversal (paralela a uma das transversais e que intercepte a outra transversal em um ponto), obtendo, assim, alguns triângulos e paralelogramos nesta figura. Daí, ele utiliza o teorema fundamental da proporcionalidade (demonstrado anteriormente) e usa também a propriedade dos paralelogramos (de possuírem lados opostos congruentes) para obter a relação que deseja encontrar para provar o teorema.

Em forma de nota, o autor afirma que “o teorema de Tales garante que a razão entre dois segmentos quaisquer de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal” (MARTINS, 2016, p. 216).

Ao iniciar o conteúdo de semelhança, o autor apresenta alguns exemplos de figuras e polígonos semelhantes e faz questionamentos aos estudantes do tipo: “Dois círculos são sempre semelhantes? E dois retângulos? Explique o que são polígonos congruentes. Desenhe dois quadrados, mostre que eles são semelhantes e encontre a razão de semelhança.” (MARTINS, 2016, p. 218-219). Anteriormente, define razão de semelhança como sendo a razão entre as medidas dos segmentos correspondentes.

Martins (2016, p. 221) afirma que “por serem polígonos, dois triângulos são semelhantes quando satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, quando têm os lados correspondentes proporcionais e os ângulos internos correspondentes congruentes”. E mostra em um exemplo, dois triângulos semelhantes e os elementos que encontramos neles. Em nota o autor aborda algumas explicações complementares.

Antes de demonstrar o teorema de Pitágoras, o autor faz uma breve contextualização histórica sobre os triângulos retângulos e suas aplicações (desde a Antiguidade até os dias atuais). Em nota, define os elementos deste tipo de triângulo (catetos e hipotenusa) e introduz a relação pitagórica. Em seguida, apresenta uma demonstração do teorema através de um *software* de Geometria (e sugere ao professor que seja feita, se possível, a utilização deste ou de algum outro *software* para demonstrar este fato).

O autor enuncia o teorema da seguinte forma: “Se um triângulo retângulo tem os catetos de medida b e c e a hipotenusa de medida a , então: $a^2 = b^2 + c^2$ ” (MARTINS, 2016,

p. 226). Baseada na área de figuras planas já conhecidas (triângulos e trapézios) e, com auxílio de figuras, ele mostra a relação estabelecida pelo Teorema de Pitágoras. Em nota, ele apresenta a recíproca do teorema e afirma que também é válida. Comenta somente para o professor que este fato pode ser deduzido pela lei dos cossenos, que será estudada no volume dois desta coleção.

O autor apresenta as Relações Métricas em Triângulos Retângulos em um tópico intitulado “A semelhança e o Teorema de Pitágoras”, no qual através das semelhanças de triângulos retângulos, ele mostra todas as relações que podemos obter, incluindo o teorema de Pitágoras (como fizemos na seção 2.2). Em nota para o aluno, o autor identifica as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Com isso, percebemos que essa coleção procura valorizar a conceituação matemática e, mesmo utilizando uma linguagem simples, ela apresenta conceitos com encadeamento lógico, fazendo a utilização de provas pragmáticas, mas também intelectuais, nas quais utiliza o auxílio de propriedades já definidas, figuras e até mesmo *softwares* como ferramentas para propiciar o desenvolvimento do conhecimento lógico/argumentativo dos alunos. Também faz a distinção das notas apresentadas para alunos e professores, trazendo o apoio necessário para cada um dos envolvidos no processo ensino-aprendizagem.

Analisadas todas as coleções de livros didáticos, temos embasamento suficiente para fazermos nossas considerações acerca destas, de forma mais generalizada, procurando responder questionamentos feitos no decorrer do caminho investigativo. Dessa forma, iniciaremos agora as considerações finais concedidas por esta pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletindo sobre a importância que o livro didático tem no processo de ensino e aprendizagem, decidimos realizar esta pesquisa com o objetivo de analisar como são apresentadas as demonstrações e os resultados matemáticos em alguns conteúdos de Geometria do Ensino Médio nas Coleções de livros de Matemática aprovadas pelo PNLD de 2018. Em geral, pretendíamos investigar a abordagem e a consistência dos conteúdos de Geometria através da argumentação lógico-dedutiva.

Com isso, formulamos algumas perguntas que nos levaram aos objetivos específicos, os quais retomamos a seguir:

- a) verificar quais são as indicações do PNLD (Ensino Médio) em relação às demonstrações de resultados matemáticos nos conteúdos de Geometria e o que os pesquisadores dizem a respeito dessas demonstrações;
- b) estudar as demonstrações matemáticas voltadas à Matemática escolar, feitas por educadores matemáticos, em alguns conteúdos de Geometria do Ensino Médio;
- c) investigar se a linguagem utilizada, mesmo simples, conserva a sua essência científica, ou seja, verificar se não ultrapassa a linha tênue que existe entre a simplificação e a vulgarização do conhecimento, levando em consideração a importância de incentivar a argumentação lógico-dedutiva dos estudantes.

Considerando a diversidade de conteúdos apresentados, reduzimos nosso objeto de estudo a conteúdos mais específicos. Foram eles:

- a) Semelhança de Triângulos: Razão de Semelhança, Teorema de Tales, Teorema Fundamental da Semelhança e os Casos (ou Critérios) de semelhança;
- b) Triângulo Retângulo: Relações Métricas e o Teorema de Pitágoras.

Utilizamos como principal referência na análise de dados, as indicações do PNLD (BRASIL, 2018), as demonstrações apresentadas em nosso segundo capítulo (baseadas no livro de Geometria Plana de Dolce e Pompeo (2005)) e as pesquisas que lemos em nosso referencial teórico, como por exemplo, os tipos de provas (pragmáticas e intelectuais) que Gravina (2001) descreveu, baseada nos estudos de Balacheff (1987) e os três componentes (conceituação, manipulação e aplicações) definidos por LIMA (1999).

A partir do referencial teórico acerca desta pesquisa e dos dados colhidos em nossa análise, faremos algumas considerações, as quais poderão ser utilizadas para contribuir com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Educação Básica.

Julgando ser o autor do livro didático um personagem de fundamental importância para que o aprendizado ocorra de maneira significativa, esperamos que ele tenha plena consciência de quais métodos de ensino deve-se utilizar em cada etapa escolar. Os livros que analisamos mostraram uma extrema preocupação: a simplificação dos conteúdos abordados. Aparentemente isto não é um problema (considerando o objetivo da transposição didática), mas em alguns casos essa simplificação omite passos fundamentais para o bom entendimento dos conteúdos estudados, o que acaba sendo prejudicial para o aprendizado dos estudantes.

Dito isto, vemos que a linguagem utilizada no geral foi simples, o que facilita a compreensão do leitor, mas como a preocupação em simplificação se mostra extrema na grande maioria das coleções, percebemos que pontos importantes como, por exemplo, a conceituação de conteúdos (argumentações lógicas, estudo de teoremas, demonstrações, etc.) e até mesmo alguns dos conteúdos deixaram de ser explorados. Notamos uma valorização maior entre manipulações e aplicações matemáticas, tornando o conhecimento sistemático, observando e reproduzindo cálculos matemáticos sem explicações mais aprofundadas. Percebemos, assim, que a maioria das coleções está negligenciando a linha tênue que existe entre a simplificação e a vulgarização do conhecimento.

Vale ressaltar que estas considerações são feitas de forma generalizada, levando em conta as interseções encontradas entre as coleções analisadas. Mas isso não significa que uma ou duas (como foi o caso) não tenham feito tais seleções de conteúdos/demonstrações da maneira como esperávamos que fossem feitas. Essas coleções apresentaram os tipos de provas que propomos (provas intelectuais e provas pragmáticas), assim como utilizaram conceitos com encadeamento lógico (utilizando conceitos já definidos), mostrando preocupação em diferenciar hipótese e tese em suas demonstrações, procurando incentivar o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes (envolvendo-os em suas explicações/argumentações), entre outros aspectos.

Percebemos que essas foram exceções e é aí que está o x da questão, pois isto deveria ser regra. Das oito coleções analisadas, apenas uma cumpriu todos os requisitos, e, também, apenas uma não apresentou alguma demonstração. O restante mesclou entre provas pragmáticas e intelectuais, apresentando conceitos com encadeamento lógico e, algumas

vezes, notas explicativas específicas para professores e alunos, mas de forma superficial, sem o devido rigor.

Concluímos que a realidade que desejamos está longe de se efetivar (ou se generalizar). Assim, deixamos aqui algumas observações necessárias para os professores na escolha e utilização do livro didático em sala de aula:

- a) primeiramente, analisar com todo o rigor as coleções sugeridas pelo PNLD e fazer uma boa escolha, visto que apesar de poucas, algumas coleções se apresentaram satisfatórias em relação aos critérios que investigamos nesta pesquisa;
- b) fazer, sempre que possível, a consulta de outras obras (mesmo já tendo escolhido a que os alunos irão utilizar), assim como outras fontes de pesquisas, para que seu campo de visão não fique restrito a apenas um determinado livro/opinião;
- c) não omitir as demonstrações presentes nos livros didáticos e buscar outras ferramentas (como por exemplo, *softwares* matemáticos), caso o livro não apresente tais sugestões para incentivar a interação dos estudantes;
- d) envolver e incentivar os alunos a participarem dessas explicações mais formais da Matemática, procurando desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo dos mesmos.

Sabemos que todas essas sugestões não irão se efetivar apenas com a boa vontade do educador, e sim com toda uma equipe (estrutura) escolar que o ajude a pôr em prática os pontos fundamentais no desenvolvimento matemático do educando.

Esta pesquisa contribuiu de forma positiva para a minha formação, enquanto pesquisadora e enquanto licencianda em Matemática, em diversos aspectos, pois o contato que tive com as coleções me fez desenvolver um olhar crítico em relação aos livros adotados nas escolas da Educação Básica. Conhecer o PNLD, utilizando como fonte de referência também as resenhas dos livros escritas por especialistas, nos acrescentou bastante conhecimento profissional, assim como nos fez aprender pontos fundamentais no processo de ensino e aprendizagem que devem ser desenvolvidos nos estudantes da Educação Básica.

Esperamos que a nossa pesquisa contribua de forma positiva para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem (para quem ousar conhecê-la) e de antemão, esta sinaliza perguntas que nos levam a pensar em futuras pesquisas sobre livros didáticos, como por exemplo:

- a) Quais coleções de livros didáticos estão sendo adotadas nas escolas e por quê?

b) Feita a escolha, como essas coleções estão sendo utilizadas em sala de aula? Os professores demonstram propriedades matemáticas ou fazem “vista grossa” para o rigor estabelecido em algumas coleções?

c) Por que as coleções que apresentam o devido rigor à Matemática escolar são exceções quando deveriam ser regras?

É fato que o livro didático é elemento fundamental em sala de aula, portanto, desejamos que este apresente todos os requisitos importantes durante o processo formativo dos estudantes. Salientamos que os responsáveis pelos livros didáticos que chegam as nossas salas de aula (de sua escrita à sua escolha) devem ter plena consciência de quais pontos são fundamentais para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra da melhor forma possível, pois, só assim, nossos estudantes terão uma formação matemática satisfatória.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. **Matemática: Interação e Tecnologia**. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**/Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o Ensino Médio; volume 2).

_____. Ministério da Educação. **Escolha do livro didático**/Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/pnld/index.php?option=com_content&view=article&id=index.php?option=com_content&view=article&id=13658>. Acesso em: 05 jun. 2018.

_____. Ministério da Educação. **PNLD 2018: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2017.

CHAVANTE, E. PRESTES, D. **Quadrante: Matemática**. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, L. R. Livro didático de Matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

_____. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DEGENSZAJN, D. *et al.* **Matemática: Ciência e Aplicações**. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2017.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 207f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63. Mar./Abr. 1995.

_____. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n.3, p. 20-29 Mai./Jun. 1995.

GONÇALVES, J. S.; LANDO, J. C. O ensino de Geometria, em escolas públicas, na cidade de Jequié – Bahia. **Revista Eventos Periódicos**, v.3, n.3, p. 363 – 389. Ago.– Dez. 2012.

KLING, M. **O fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, E. L. Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes no ensino da Matemática. **Revista do professor de Matemática**, 41, 1999.

LORENZONI, I. **Livro didático: 75 anos de história**. ABRELIVROS – Associação Brasileira de Editores de Livros Escolares. São Paulo: Midiamix. Disponível em: <<http://www.abrelivros.org.br/home/index.php/pnld/5164-livro-didatico--75-anos-de-historia>>. Acesso em: 04 de jun. 2018.

MARTINS, R. B. **Argumentação, prova e demonstração em geometria**: Análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Rio de Janeiro, 2012.

MENEZES, E. T. de; SANTOS, T. H. dos. **Verbetes transposição didática**. Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrazil. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: <<http://www.educabrazil.com.br/transposicao-didatica/>>. Acesso em: 04 de jun. 2018.

MIGUEL, A. BRITO; A. de. J. CARVALHO; D. L de. MENDES, I. A. **História da matemática em atividades didáticas**. 2 ed. rev. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)

PAIVA, M. **Matemática**: Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

PANIAGO, M. L. **“Livro” Didático**: a simplificação e a vulgarização do conhecimento. São Paulo, 2013.

PIASESKI, C. M. **A geometria no ensino fundamental**. Erechim, 2010.

QUEIROZ, J. C. S.; MELO, V. M. de. A. **A demonstração nos livros didáticos de Matemática na perspectiva dos conjuntos**. Anais IX EPBEM v. 1, 2016, ISSN 2317-0042.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. de. C. **Tópicos de história da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

_____. **Matemática**: para compreender o mundo. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato Matemática**. São Paulo: FTD, 2016.