UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

NATÁLIA MARIA CORDEIRO BARROSO

UM MODELO DE ENSINO DOS CONCEITOS DE CÁLCULO PARA OS CURSOS DE ENGENHARIA FUNDAMENTADO EM UMA EPISTEMOLOGIA HISTÓRICA E BASEADO NA METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA: VALIDAÇÃO POR MEIO DO CONCEITO DE INTEGRAL

Fortaleza-CE, Brasil
Junho de 2009

Universidade Federal do Ceará

Centro de Tecnologia

Departamento de Engenharia de Teleinformática

Programa de Pós Graduação em Engenharia de Teleinformática

TESE DE DOUTORADO

NATÁLIA MARIA CORDEIRO BARROSO

UM MODELO DE ENSINO DOS CONCEITOS DE CÁLCULO PARA OS CURSOS DE ENGENHARIA FUNDAMENTADO EM UMA EPISTEMOLOGIA HISTÓRICA E BASEADO NA METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA: VALIDAÇÃO POR MEIO DO CONCEITO DE INTEGRAL

ORIENTADOR:
PROF. DR. JOÃO CESAR MOURA MOTA

CO-ORIENTADOR:
PROF. DR. HERMÍNIO BORGES NETO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Teleinformática.

Fortaleza-CE, Brasil

Junho de 2009

Natália Maria Cordeiro Barroso

UM MODELO DE ENSINO DOS
CONCEITOS DE CÁLCULO PARA OS CURSOS DE ENGENHARIA
FUNDAMENTADO EM UMA EPISTEMOLOGIA HISTÓRICA E
BASEADO NA METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA:
VALIDAÇÃO POR MEIO DO CONCEITO DE INTEGRAL

Esta tese foi julgada adequada na defesa para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Teleinformática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará.

Banca Examinadora:

PROF. DR. JOÃO CESAR MOURA MOTA – ORIENTADOR

PROF. DR. HERMÍNIO BORGES NETO – CO-ORIENTADOR

PROFA. DRA. MARIA CLARA REZENDE FROTA

PROFA. DRA. TÂNIA MARIA MENDONÇA CAMPOS

PROF. DR. PAULO BARGUIL

PROF. DR. CHARLES CASIMIRO CAVALCANTE

PROF. DR. PAULO CESAR CORTEZ

Fortaleza-CE, junho de 2009

Ao Natalício (eternamente presente) e à Albinha,
pela capacidade de orientar com amor e sabedoria 10 projetos
distintos e simultâneos ao longo de suas vidas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de todos, a Deus por me ter carregado literalmente em seus braços, permitindo-me andar com meus próprios pés apenas quando teve a certeza de que, a partir dali, embora caindo, eu seria capaz de me levantar a tempo de continuar percorrendo o meu caminho.

No plano terrestre, devo esta tese à Bia e ao Thiago, por ficarem à frente me sinalizando a melhor direção, e aos professores Dr. José Marques Soares, cuja dedicação foi imprescindível para a conclusão desta tese, e Dr. João Cesar Moura Mota, cuja confiança e total apoio promoveram o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao prof. Dr. Hermínio Borges Neto, pelas sábias sugestões, ditas nos momentos oportunos.

Ao Davi, que, de maneira diferente, me impulsionou a chegar até aqui.

Aos meus sete irmãos, Natalício, Giovanni, Pacelli, Álcio, Carlos Magno, Jânio e Ádson, e duas irmãs, Eliana e Liliane, pelo incentivo presente em todas as fases da minha vida.

Ao Sr. Soares e à D. Helena, ao Rubens e à Izinha, pessoas exemplares que me têm dado apoio espiritual por meio de suas orações.

Ao Dr. João Clemente Pompeu e à Francimar Oliveira Pompeu, por terem lançado a esperança de realização desta tese.

À Zênia, pela sua disponibilidade junto a minha família.

À Dra. Fátima Lavor, por me ter acompanhado, ouvido e ajudado nesse percurso.

A toda a minha família e amigos, pela confiança e palavras de incentivo: Rubinho, Giovanna, Mateus, Sandra, Sônia, Marta, Lia, Lúcia, Lívia, dentre inumeráveis.

A todos os estudantes do curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática, alunos admiráveis, presentes em todas as etapas da construção deste trabalho.

RESUMO

Apesar de serem baseadas em conhecimentos considerados adquiridos, estatísticas indicam altos índices de reprovação e de abandono em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral do primeiro ano universitário de cursos de engenharia. Pesquisas em Educação Matemática procuram localizar os problemas e propor sugestões no sentido de minimizar estes índices, o que se constitui em uma necessidade premente, pois, devido à crescente complexidade dos problemas ligados à engenharia, estudos indicam que a base da sua formação deslocou-se para a Ciência e a Matemática, mostrando que a matemática não é apenas imprescindível para a formação do engenheiro, mas que o progresso da engenharia é dependente da compreensão de novos conteúdos matemáticos. Visando fortalecer o aprendizado da matemática dos novos alunos, especialmente nos cursos de Engenharia, propõe-se, nesta tese, um modelo de abordagem de ensino dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) que contempla tanto o seu aspecto de *ferramenta*, como elemento gerador das principais idéias do cálculo por meio de uma linguagem natural, quanto o de *objeto*, o qual permite resolver certas incoerências advindas do uso desta linguagem natural. Utilizando-se da metodologia da engenharia didática para a concepção, aplicação e análise de seqüências de ensino, fez-se uma construção, em sala de aula, da noção de integral pela ótica do conceito de medida em geometria, problematizada por meio de idéias que contribuíram para a sua evolução e significação. Os resultados obtidos com a aplicação destas sequências motivaram a concepção do modelo. O modelo proposto valoriza a introdução, em sala de aula, do ensino dos conceitos-chave de CDI, resgatando as idéias que contribuíram para a formação destes conceitos, tanto como uma forma de motivação para o seu aprendizado, quanto para fazer elos entre conhecimentos antigos e novos dos alunos. A pesquisa apóia-se sobre o estudo da gênese histórica dos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral adaptada ao contexto da sala de aula. Por meio da história, insere-se o aluno de primeiro ano em um universo de conhecimentos mais aproximados do saber científico, propondo-se quebras na rigidez do pensamento matemático adquirido ao longo da formação do aluno. Este modelo foi amadurecido através de estudos e experimentações realizadas em sala de aula nos anos de 2005, 2006 e 2008, observando, analisando e considerando, principalmente, a aceitação do aluno. Os principais aspectos e resultados das experimentações bem como a análise de seus resultados são apresentados, justificando a definição de cada etapa do modelo.

Palavras-chave: Matemática no Ensino Superior, Engenharia Didática, Didática da Matemática, Teoria da Dialética Ferramenta-Objeto e Jogo de Quadros, Sequência Fedathi.

ABSTRACT

Statistics indicate the high failure and abandon rate at the Differential and Integral Calculus disciplines of the first year engineering courses, although these disciplines are organized over the students' previous knowledge. Many researches in mathematical education try to identify the problems and make suggestions to minimize these rates. That's really necessary because various studies indicate that, nowadays, science and mathematics are the bases of the engineering education, what shows not only the mathematics importance, but that the engineering progress depends on more mathematics knowledge. Aiming to strengthen the first year students' mathematical learning, especially to the engineering courses, this thesis proposes a model to the teaching of the main differential and integral calculus concepts, which considers their tool status, like a creator of the main calculus ideas, by a natural language, and their object status, like a mathematical science formal element. By means of the didactic engineering methodology, used to organize, apply and analyze teaching sequences, the integral notion was constructed in classroom. It was considered by the view of the geometric measure theory. The ideas that contributed to its evolution and meaning were discussed with the students. The model was motivated by the application results of these teaching sequences. The model suggests that the main ideas that caused the development of the limit, continuity, derivative and integral concepts are discussed in the classroom. Its aim is to motivate these concepts learning and to make links between the students' old and new knowledge. The research leans on a historical genesis study of the calculus concepts and it is made an adaptation of this history to the classroom context. By the history, the first year student is immersed into a nearest knowledge of the mathematical science universe by means of ruptures in their rigid mathematical thoughts acquired during their school formation. The model was developed from the studies and classrooms experiences organized during the years of 2005, 2006 and 2008. The students' opinions and activities were often considered and analyzed. The main aspects and results of these experiences and an analysis of the results are presented here. Each model phase is also justified.

Key-words: Undergraduate Teaching of Mathematics, Didactic Engineering, Didactic of Mathematics, Tool-Object Dialectics Theory, Fedathi's Sequence.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

1.1 Contextualização e Problemática

O estudo de teorias, de métodos e de sistemas apropriados que assegurem uma transmissão de conhecimentos de forma estruturada é uma preocupação antiga das sociedades. As escolhas educativas são influenciadas pelas religiões, pela política, pela economia, pelas ciências e pelas técnicas, entre outros fatores. Essas escolhas influenciam, por sua vez, a relação mestre/aluno em sala de aula.

Nas ciências matemáticas, em especial, o próprio saber pode ainda sofrer influências da relação mestre/aluno. Como exemplo, cita-se a construção do conceito de integral que está embasada em um forte formalismo matemático, o qual foi desenvolvido em grande parte devido à necessidade de se transmitirem, sem ambigüidades, os conteúdos relacionados a este conceito. De maneira mais geral, Peiffer e Dahan – Dalmedico (1986) lembram que a obrigação de ensinar, imposta aos matemáticos do século XIX, foi uma das fontes do desenvolvimento do rigor em matemática.

Com o recente surgimento da Didática da Matemática (BROUSSEAU, 1986), propõem-se variadas abordagens de ensino das noções matemáticas respeitando-se as características próprias desta ciência e, ao mesmo tempo, os processos cognitivos do sujeito aprendiz. Nesta direção, são elaboradas pesquisas baseadas em engenharias didáticas (ARTIGUE, 1989), visando o ensino de conhecimentos matemáticos específicos.

Numa perspectiva não particularmente ligada à matemática, teorias como a de Piaget (PIAGET, 1971) e a de Ausubel (NOVAK, 2000) estudam a relação entre a estrutura cognitiva do aprendiz, considerando seus conhecimento prévios, e a relação desses com os novos conhecimentos. Ferramentas de modelagem de elementos dessa estrutura têm sido propostas, como os mapas conceituais (NOVAK, 2006), para relacionar de forma significativa os diversos conteúdos que foram ou devem ser assimilados.

Sendo o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), no contexto dos cursos de engenharia, o objeto de estudo desta tese, citam-se os trabalhos de Zuchi (2005), Praslon (2000), Bloch (2000), que tratam do ensino do conceito de limite, do conceito de derivada e dos problemas da transição ensino médio/universidade em disciplinas de matemática, respectivamente, como uma amostra da atenção que vem sendo dada, tanto em âmbito nacional quanto internacional, ao aprendizado destes conceitos no primeiro ano da universidade.

No Brasil, em particular, a disciplina de CDI está presente nos programas de primeiro ano em praticamente todos os cursos de graduação em engenharia. Ela serve de base para toda a matemática que permeia as demais disciplinas destes cursos.

Todo o conteúdo de CDI se apóia no conceito de função real e engloba quase todos os ramos da matemática estudados pelos alunos até o final do ensino médio, como a geometria euclidiana, a álgebra, a geometria analítica, a trigonometria, a teoria dos conjuntos, dentre outras.

Apesar de ser baseada em conhecimentos considerados adquiridos e de seu aprendizado ser determinante para o bom desempenho do aluno em um grande número de disciplinas da universidade, estatísticas indicam altos índices de reprovação e de abandono que ocorrem nessa disciplina. Um quadro da situação dos alunos da Universidade Federal do Ceará, UFC, pode ser encontrado em Barbosa (1994), e um mapa mais geral dos índices de reprovação na disciplina de CDI em diversos cursos de universidades brasileiras pode ser visto em Dall'Anese (2006).

Diversas são as causas apontadas: algumas relativas ao aluno, como as suas dificuldades em lidar com a transição ensino médio/ensino superior; outras relativas ao professor universitário, tido, muitas vezes, como rico em conhecimentos, mas pobre em metodologias de ensino; ou, ainda, relativas ao próprio conteúdo de CDI, considerado inadequado aos objetivos dos cursos de engenharia, tanto pelos alunos quanto por professores de outras disciplinas.

Pesquisas em Educação Matemática procuram localizar os problemas e propor soluções no sentido de minimizá-los. Como exemplo, cita-se o livro da professora Helena Noronha Cury intitulado "Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: Reflexões, Relatos e Propostas" (CURY, 2004).

Por outro lado, de acordo com o Relatório *Educating the Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to the New Century*, (NAE, 2005) devido à crescente complexidade dos problemas de engenharia, a base da sua formação deslocou-se para os fundamentos da Ciência e da Matemática. Este "alerta" deixa evidente que a matemática não é apenas imprescindível para a formação do engenheiro, mas que o progresso da engenharia é dependente da assimilação de novos conteúdos matemáticos. Portanto, tentar resolver o problema da matemática na engenharia não significa, como pensam alguns, limitar cada vez mais o seu ensino a um número mínimo de ferramentas matemáticas.

Inseridos neste contexto, departamentos de engenharia, a exemplo do Departamento de Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, DETI-UFC, pelo qual se realiza esta pesquisa, têm investido na formação de profissionais que comungam com estas idéias.

Expandindo a sala de aula para uma dimensão institucional, este trabalho de tese vem ao encontro de mudanças que estão sendo efetivadas por meio do projeto de Expansão e Reestruturação das Universidades Federais (REUNI). Com o objetivo de dar condições para ampliar o acesso e garantir a permanência dos estudantes na universidade, a execução do projeto REUNI, no âmbito da UFC, passa pela revisão do modelo acadêmico em vigor. Neste sentido, o Departamento de Engenharia de Teleinformática entrou neste processo realizando mudanças estruturais em sua grade curricular. Relativamente às disciplinas de matemática, as mudanças efetuadas foram articuladas com contribuição da pesquisa aqui apresentada e organizadas em documento elaborado conjuntamente por professores do DETI e do Departamento de Matemática. A proposta preliminar de reforma da matemática do Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática é apresentada no Anexo VI (CAMINHA, 2008).

De uma maneira geral, relativamente a conteúdos, enfocam-se, neste trabalho, o limite, a continuidade, a derivada e a integral, considerando-se a sua inserção no contexto do curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática (CGETI) da UFC. Experimentações foram realizadas envolvendo esses conceitos baseando-se no programa da disciplina de Cálculo Fundamental, ministrada no primeiro ano, no perfil dos alunos do CGETI e nos livros-texto propostos pelo curso.

Propõe-se, nesta tese, um modelo de abordagem de ensino dos conceitos de CDI que contemple tanto o seu aspecto de *ferramenta*, como elemento gerador das principais idéias do cálculo por meio de uma linguagem natural, quanto o de *objeto* (DOUADY, 1986), o qual permite resolver certas incoerências advindas do uso desta linguagem natural. O objetivo principal desta abordagem consiste em trabalhar sobre esses dois aspectos em sala de aula não de forma isolada, mas por meio de situações matemáticas que possibilitem a passagem de um aspecto ao outro. Destaca-se que, embora os conceitos de limite, continuidade e derivada estejam presentes, de forma imprescindível, em todas as fases deste trabalho, optou-se por se elaborar este modelo com base na construção do conceito de integral, por se tratar de um conceito para onde e de onde convergem as demais noções de CDI. Utilizou-se a metodologia da engenharia didática (ARTIGUE, 1989) para a concepção, aplicação e análise das seqüências de ensino. Nestas seqüências, a construção do conceito de integral é realizada pela ótica do conceito de medida em geometria e problematizada por meio de idéias que contribuíram para a sua evolução e significação.

Na próxima subseção, descrevem-se mais detalhadamente os objetivos desta pesquisa.

1.2 Objetivos

O principal objetivo desta tese consiste em propor um modelo para a introdução em sala de aula do ensino dos conceitos-chave de CDI, resgatando as idéias que contribuíram para a formação destes conceitos, tanto como uma forma de motivação para o seu aprendizado, quanto para fazer elos entre conhecimentos antigos e novos dos alunos. Para tanto, esta pesquisa apóia-se sobre o estudo da gênese histórica dos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral e propõe uma adaptação desta história ao contexto da sala de aula. Sugere-se também, neste modelo, a inclusão de tecnologia e de ferramentas computacionais como instrumento de apoio ao processo ensino-aprendizagem, abrangendo aí o importante papel desempenhado pela avaliação formativa (PERRENOUD, 1999), em que o instrumento de avaliação deixa de ser dedicado exclusivamente à medida do conhecimento e passa a atuar como ferramenta de apoio à aprendizagem.

Por meio da história, pretende-se inserir o aluno de primeiro ano de engenharia em um universo de conhecimentos mais aproximados do saber científico, propondo-se quebras na rigidez do pensamento matemático construído ao longo de sua formação, na qual se crê que objetos matemáticos são descobertos e estabelecidos magicamente, que com eles solucionam-se todos os problemas de matemática a eles relacionados e que todas as ferramentas matemáticas necessárias a tais soluções são ensináveis.

A seqüência limite, continuidade, derivada e integral representa, em geral, a ordem de apresentação destes conceitos nos livros de CDI mais adotados no Brasil. Constata-se, contudo, em textos de história da matemática (DAHAN-DALMEDICO e PEIFFER, 1986), não ser esta a ordem natural de sua evolução. O desenvolvimento do conceito de limite até a sua forma atual, envolvendo o infinito, é um processo indissociável da construção dos números reais e, portanto, do conceito de integral (quando estudada pela perspectiva de medida geométrica, por exemplo). Na verdade, a integral, se considerada em seus primórdios como independente do conceito de função real, propicia e exige o surgimento dos demais conceitos-chave de CDI.

Neste sentido, opta-se, neste trabalho, pela apresentação de um modelo de ensino baseado na construção do conceito de integral, no qual ele é abordado de forma mais abrangente. Abrangente significa dar enfoque tanto ao processo e aos fundamentos quanto às técnicas de integração, de tal maneira que seja possível transgredir algumas limitações relativas ao seu ensino, tais como as seguintes concepções formadas pelos alunos: "A integral sempre existe. Integrar é procurar uma primitiva. Para encontrá-la, basta saber escolher a melhor técnica".

Ser a integral o principal conteúdo de CDI por meio do qual se viabiliza esta pesquisa não implica em se descuidar do ensino dos demais conceitos-chave. Ocorre exatamente o contrário, a abordagem desses conceitos em sala de aula deve preparar o aluno para as sessões didáticas da fase de experimentação voltada para o ensino do conceito de integral. Ao mesmo tempo, a fase de experimentação deve fazer um resgate significativo desses conceitos na medida em que ela introduz a integral por meio de uma perspectiva histórica que procura atrelar a sua evolução aos conhecimentos prévios dos alunos relativos aos processos de limite, ao desvendamento de certos problemas de continuidade e de derivada, dentre outros. Na verdade, em vários momentos desta pesquisa, estes conceitos de CDI aparecem de forma indispensável.

1.3 Organização dos Capítulos

Este trabalho está dividido em oito capítulos. Após a introdução realizada neste primeiro capítulo, os demais se encontram distribuídos da seguinte forma:

O Capítulo 2 descreve a metodologia e o referencial teórico.

O ambiente da pesquisa, caracterizado por uma descrição do Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática, pelo perfil do aluno e por avaliações-diagnóstico realizadas para se conhecer o aluno, é descrito no Capítulo 3.

O Capítulo 4 conta uma história do conceito de integral e organiza uma fundamentação matemática deste conceito por meio de Redes de Petri.

No Capítulo 5, apresenta-se uma experimentação em sala de aula, a qual representa a forma como o conceito de limite está implicado nesta pesquisa.

A organização, a aplicação e a análise das sequências didáticas de 2005, 2006 e 2008 para a introdução do conceito de integral de Riemann estão concentradas no Capítulo 6.

Baseando-se nas experimentações apresentadas no capítulo anterior, propõe-se, no Capítulo 7, um modelo de ensino para a introdução dos conceitos principais de CDI nos cursos de engenharia.

Finaliza-se o texto da tese com o Capítulo 8 sobre as conclusões.

1.4 Contribuições da Tese

Registram-se nesta Seção as principais contribuições da tese:

- Um método de realimentação no processo de avaliação de conteúdos de matemática o qual é baseado na metodologia da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1989) e nos princípios da avaliação formativa. Esse método é apresentado de maneira detalhada em um artigo aceito para publicação no Boletim de Educação Matemática - BOLEMA em dezembro de 2009;

- Uma modelagem, em forma de fluxo de processos, da análise da integrabilidade de funções reais na qual estão envolvidas as integrais de Cauchy, de Riemann e de Lebesgue. Essa modelagem foi estruturada por meio de Redes de Petri Coloridas. Em cada etapa da análise, são relacionados nas redes os conhecimentos necessários para se passar a uma etapa posterior;

- Baseando-se na modelagem descrita no item anterior, propõe-se o uso de Redes de Petri Coloridas para a organização de conteúdos de ensino de noções matemáticas ou de conteúdos próprios da engenharia que aproveitem as características e propriedades dessas redes;

- Uma abordagem de ensino do conceito de limite na qual é feita uma conexão entre as definições intuitiva e formal por meio da construção de uma justificativa para a necessidade da definição formal. Essa abordagem está descrita no capítulo 4 e deu origem a um artigo publicado nos anais do III SIPEM, em 2006;

- Proposta de um modelo de ensino para a introdução dos conceitos-chave de CDI nos cursos de engenharia, na qual se sugere: a construção destes conceitos por meio de sua epistemologia histórica, com o objetivo de motivar a sua aprendizagem e de fazer relações significativas entre conhecimentos antigos e novos dos alunos; que o ensino de cada noção explore tanto os seus aspectos intuitivos quanto formais de forma a propor caminhos que liguem estes dois aspectos; o uso de uma ferramenta que propicie ao aluno realizar atividades de forma individual; a institucionalização dos novos conteúdos pelo professor; um controle do aprendizado por meio de avaliações e uma análise do ensino com o objetivo de corrigir eventuais dificuldades de aprendizagem detectadas durante a abordagem das noções e de realimentar o ensino em uma aplicação seguinte.

As contribuições anteriormente relacionadas foram detalhadas e deram origem a algumas das publicações decorrentes deste trabalho relacionadas a seguir:

- VANDEBROUCK, F. e BARROSO, N.: Des phénomènes d'instrumentation pointés dans l'utilisation de bases d'exercices en classe. In : Espace Mathématique Francophone (EMF). Théme : Instrumentations Technologiques dans l'Enseignement des Mathématiques. Sherbrooke. 2006 ;

- BARROSO, N.; MOTA, J.C.M.; BORGES NETO, H.; SOARES, J.: Limite: Definição Intuitiva *versus* Definição Formal. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). Águas de Lindóia, SP. 2006;

- BARROSO, SOARES, M.; MOTA, J.C.M.; BORGES NETO, H.: Uma Seqüência de Ensino para a Introdução do Conceito de Integral de Riemann. IX ENEM, Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, MG. 2007;

- SOARES, J.; BARROSO, N.; MOTA, J.C.M.; BORGES NETO, H.: Instrumentação computacional e realimentação no processo de avaliação para o ensino de matemática: o conhecimento de função real como estudo de caso. SBIE – Sociedade Brasileira de Informática Educativa. Fortaleza-CE. 2008.

Trabalhos aceitos para publicação:

- BARROSO, N.; SOARES, J.; MOTA, J.C.M; BORGES NETO, H.: Limite: Definição Intuitiva *versus* Definição Formal. Aceito como capítulo de livro organizado pelo Grupo de Trabalho em Educação Superior (GT-4). Previsão de publicação: Outubro de 2009.

- BARROSO, N.; SOARES, J.; MOTA, J.C.M.; BORGES NETO, H.: Instrumentação tecnológica e realimentação no processo de avaliação para o ensino de matemática na universidade: um método baseado na Engenharia Didática.
  Aceito para publicação na Edição número 34 do Boletim de Educação Matemática - BOLEMA, cuja distribuição está prevista para dezembro de 2009.

2 Metodologia e Referencial Teórico

2.1 Metodologia

Para elaborar um modelo de ensino dos conceitos de CDI para os cursos de engenharia, faz-se necessário mergulhar neste meio. Para isso, a pesquisa foi realizada em sala de aula com alunos do Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática (CGETI) da Universidade Federal do Ceará (UFC), matriculados na disciplina anual de Cálculo Fundamental de quatro créditos[1]. Neste ambiente, foram efetuadas, durante três anos, experimentações em sala de aula, em que foram propostas abordagens diversas dos conceitos de CDI, considerando sempre as intervenções dos alunos para o controle da forma e do conteúdo a ser ensinado. Os resultados dessas experimentações permitiram a adaptação gradativa dos objetivos definidos para a presente pesquisa, conduzindo-os de maneira mais precisa ao perfil do estudante do primeiro ano do CGETI.

Não sendo possível tudo se considerar, nem tudo se escrever em uma pesquisa, sendo necessário se fazer escolhas, privilegia-se neste trabalho o conceito de integral como conteúdo de referência para a concepção do modelo de ensino proposto. Esta opção deveu-se principalmente ao fato de se poder enxergar a integral como uma noção cuja evolução provocou o desenvolvimento das demais noções de CDI, sendo, portanto, sua história bastante representativa das idéias, dos problemas e dos fundamentos do cálculo.

Costumeiramente, o ensino do conceito de integral, nos livros de CDI, ocorre após o ensino dos conceitos de limite, continuidade e derivada. Esta ordem foi preservada pelo professor/pesquisador, responsável pela disciplina de Cálculo Fundamental ao longo das três experimentações. Contudo, no terceiro ano da experimentação, é realizado um ensino mais aprofundado desses conceitos, relativamente à abordagem dos livros texto de CDI (ver Capítulo 5), com o objetivo de

---

[1] A partir do ano de 2009, a disciplina de Cálculo Fundamental do CGETI passou de quatro para cinco créditos.

preparar o aluno para o aprendizado do conceito de integral, principal objeto matemático aqui tratado.

As experimentações foram viabilizadas em sala de aula por meio de seqüências de ensino cuja organização, observação e análise foram fundamentadas nas quatro fases da metodologia da Engenharia Didática (ED) (ARTIGUE, 1989). As fases da ED foram complementadas por teorias da didática da matemática: recorreu-se à Teoria da Dialética Ferramenta/Objeto e Jogos de Quadros de Régine Douady (DOUADY, 1986) para se fazer uma análise do ensino atual de CDI; baseou-se em princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (NOVAK, 2000) para a organização do material de ensino; apoiou-se na Sequência Fedathi (BORGES NETO e SANTANA, 2001) como orientação para a mediação do professor em sala de aula.

Percebendo-se algumas distorções entre o ensino dos conceitos de cálculo no primeiro ano dos cursos de engenharia e a sua apresentação em livros de análise (de ciências matemáticas), procurou-se elaborar um ensino de integral no sentido de minimizá-las, respeitando, contudo, o nível de conhecimento dos estudantes. Cada experimentação foi analisada e os seus resultados serviram de contribuição para a organização da experimentação seguinte, decorrendo, assim, um processo de realimentação, característico de uma ED. A realimentação possibilitou a adequação de um ensino mais aprofundado das noções de CDI.

Falar de um ensino mais aprofundado, neste contexto, refere-se a abordar os conceitos por uma perspectiva não apenas intuitiva, mas mais rigorosa e mais próxima do campo das idéias matemáticas sem, no entanto, se prender a um formalismo exacerbado e sem significado para o estudante aqui envolvido.

De uma maneira geral, a forma como os conceitos estão implicados em cada experimentação pode ser resumida como segue:

- Na primeira aplicação, em 2005, optou-se por uma abordagem intuitiva dos conceitos de CDI. Os conceitos de limite, continuidade e derivada foram introduzidos por meio de uma linguagem natural, tal qual aparecem em certos livros de CDI. Conseqüentemente, fez-se a escolha por uma introdução do conceito de integral de forma tradicional, iniciando-se pela definição de anti-derivada;
- Em 2006, foi feita uma primeira tentativa de introdução de uma linguagem mais rigorosa dos conceitos de CDI. A construção do conceito de integral foi realizada por meio de uma perspectiva histórica, na qual foram explorados

problemas que deram origem ao seu desenvolvimento e formação, caracterizados pelo viés do conceito de medida. O estudo histórico epistemológico do conceito de integral, os conhecimentos prévios dos estudantes, juntamente com suas intervenções em sala de aula, e uma análise da experimentação de 2005 determinaram as escolhas das situações. Introduziu-se também o uso de uma ferramenta computacional, o GeoGebra[2], para a realização de atividades individuais;

- Baseando-se nas análises das experimentações de 2005 e de 2006, em 2008, introduziu-se uma abordagem mais rigorosa dos conceitos de CDI, trabalhando-se com definições formais e com provas de teoremas. O aspecto intuitivo esteve sempre presente de maneira fundamental, caracterizando os conceitos em diversos contextos. Com relação ao conceito de integral, foram feitas escolhas semelhantes às de 2006, considerando-se, contudo, a forma na qual foi conduzido o ensino de limite, continuidade e derivada durante este ano de 2008.

Nestes três anos, foram feitas avaliações dos alunos relativas a cada conceito por meio do programa WIMS (WWW *Interactive Multpurpose Server*[3]), o qual possibilitou a resolução de um grande número de atividades tanto algorítmicas, ligadas às técnicas de limite, de derivação e de integração, quanto relativas a problemas mais gerais e, neste caso, mais difíceis. O uso desta ferramenta permitiu o rastreamento de atividades e o armazenamento de dados para posterior análise do comportamento do aluno.

A experiência com esse programa foi iniciada em um trabalho de pesquisa anterior (BARROSO, 2005), em que o mesmo foi utilizado com o objetivo de fazer um diagnóstico sobre os conhecimentos dos alunos do primeiro ano do CGETI e do primeiro ano do DEUG (*Diplôme d'Études Universitaires Générales*[4]) de ciências, da universidade de Évry, relativamente ao conceito de função real, em 2004 (ver seção 3.3). Analisando as estatísticas de atividades dos alunos na resolução de uma lista de exercícios sobre função real, foi possível identificar algumas dificuldades que eles tinham em colocar em funcionamento este conceito. Como, na época, o pesquisador não

---

[2] Programa disponível em: www.geogebra.org/cms/

[3] Programa disponível em: http://wims.auto.u-psud.fr/wims/

[4] Primeiro ciclo de estudos universitários das universidades francesas, com duração de dois anos. Equivale ao chamado ciclo básico das universidades brasileiras.

era professor destes alunos, ficou inviável de se descobrir, apenas pelos dados do WIMS, porque alguns exercícios, aparentemente simples, não tinham sido resolvidos por eles. Por esta razão, para se reaplicar a lista de exercícios no ano seguinte, 2005, agora apenas com os alunos do CGETI recém chegados à universidade, foram feitas modificações na lista, inserindo-se exercícios intermediários, mudando a ordem de outros, com o objetivo de tentar preencher estes saltos de informação.

Essa sistemática deu origem a um modelo de avaliação continuamente realimentado (SOARES *et al*., 2008), apoiado por uma ferramenta computacional, que passou a fazer parte integrante do ensino durante esses três anos. Esse modelo está descrito na seção 3.

Além disso, os resultados dessas avaliações contribuíram para se traçar um perfil dos alunos de primeiro ano do CGETI em seu ambiente de aprendizagem. Para se fazer um estudo mais completo desse estudante, descreve-se, no Capítulo 3, o meio no qual ele está inserido: o curso de Engenharia de Teleinformática.

2.2 Referencial teórico

2.2.1 A Engenharia Didática

O arcabouço desta pesquisa é a metodologia da Engenharia Didática (ED) proposta por Michelle Artigue em 1989.

O termo engenharia didática designa uma forma de trabalho didático cuja metodologia é comparável ao trabalho do engenheiro no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Neste sentido, a ED se constitui em uma metodologia da didática da matemática que considera as relações entre a teoria e a prática.

Dividida em quatro fases, *análises preliminares*, *análise a priori*, *experimentação* e *análise a posteriori*, a Engenharia Didática, como uma metodologia de pesquisa, pode ser caracterizada por um esquema experimental baseado sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino aplicadas em sala de aula. A engenharia didática, vista como motor da progressão didática (ARTIGUE,1989), pode ser utilizada tanto pelo pesquisador/educador, como instrumento de diversos tipos de investigação desse sistema bastante complexo que é a sala de aula, quanto pelo professor, como suporte para a elaboração de suas seqüências de ensino.

Um fator que distingue a ED de outras metodologias de pesquisa da didática reside em seu modo de validação essencialmente interno, fundado sobre a confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

Definem-se, a seguir, as fases de análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação. Esclarece-se que, embora seja esta uma divisão temporal do processo experimental da ED, uma pesquisa pode não seguir exatamente esta ordem.

2.2.1.1 Análises Preliminares

A fase de análises preliminares é dedicada ao estudo dos conteúdos matemáticos visados pela pesquisa. Atendendo sempre aos objetivos da investigação, geralmente, as análises preliminares incluem:

- uma análise epistemológica do saber em questão;
- uma análise do ensino usual e de seus efeitos;
- uma análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- uma análise do campo das restrições nas quais se situará a realização didática efetiva.

A enumeração das dimensões acima não implica que elas devam ser todas privilegiadas em uma ED. Algumas podem fazer parte das análises preliminares de forma implícita ou mesmo nem ser mencionadas. O pesquisador pode ainda considerar outras dimensões de seu próprio interesse.

Caracterizam-se como análises preliminares nesta pesquisa: um estudo da gênese histórica do conceito de integral, considerando problemas que contribuíram para a sua evolução, desde suas origens até a sua apresentação atual disponível em livros de CDI; e uma análise do ensino atual e de seus efeitos por meio dos livros de referência mais adotados no Brasil e com base na experiência de sala de aula.

2.2.1.2 Concepção e Análise *a Priori*

Segundo Artigue (1989), a fase de análise *a priori* se apóia em um quadro didático geral e nas análises preliminares e é na concepção que o pesquisador decide agir sobre certo número de variáveis do sistema de ensino, denominadas variáveis de comando, consideradas por ele de relevância para o problema em estudo.

Artigue distingue dois tipos de variáveis de comando: as variáveis macro-didáticas ou globais, relativas à organização global da ED; e as micro-didáticas ou locais, relativas à organização local da ED, ou seja, à organização de uma sessão ou de uma fase. Ambas podem ser variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático visado pelo ensino.

É sobre esse conjunto de variáveis que se inicia a análise *a priori* cujo objetivo é determinar, dentre as variáveis escolhidas, aquelas sobre as quais se pode exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão (PAIS, 2001). Para isto, a análise *a priori* deve se fundamentar em algumas hipóteses sobre as quais a validação estará, em princípio, indiretamente envolvida, visto que a validação só ocorre na quarta fase no momento da confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Neste sentido, a análise *a priori* é formada de uma parte preditiva e outra descritiva.

No âmbito deste trabalho, a concepção das seqüências de ensino, as escolhas didáticas e as previsões de interesse que serão legitimadas ou não no momento da experimentação estão indicadas nas seções que correspondem a esta fase.

2.2.1.3 Experimentação

Sobre a fase da experimentação, considerada uma fase clássica, Artigue (1989) não faz nenhuma sugestão. Deixa as escolhas a cargo do pesquisador.

Tendo por base a Sequencia Fedathi (BORGES NETO e SANTANA, 2001), em algumas sessões didáticas da experimentação, a abordagem do conceito de integral foi realizada por meio de problemas que desencadearam a sua evolução, dando maior ênfase ao processo de construção deste conceito, em detrimento de um ensino que valoriza apenas a obtenção de resultados corretos.

2.2.1.4 Análise *a Posteriori* e Validação

A análise *a posteriori* é feita sobre o conjunto dos dados recolhidos na experimentação. Consiste, em geral, em observações realizadas durante as sessões de ensino, mas também sobre as produções dos alunos efetuadas em classe ou fora da classe. Estes dados podem, contudo, ser completados por outros obtidos por meio da aplicação de metodologias externas tais como questionários, entrevistas individuais ou em grupos, etc.

Quanto à validação das hipóteses envolvidas na investigação, ela é caracterizada como um processo interno o qual é efetivado por meio da confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Sendo um processo interno, a validação em uma ED não se inclui nas validações realizadas por meio de estatísticas associadas a certas experimentações em classe.

Destaca-se que, nesta pesquisa, visa-se uma validação do tipo qualitativa baseada na interpretação das observações de sala de aula, das atividades escritas e na comparação do desempenho das turmas envolvidas.

Para finalizar, ressalta-se que, na organização geral desta pesquisa, a ED está envolvida em dois níveis: macro e micro-engenharia.

No nível de uma macro-engenharia, no que diz respeito a uma análise global do ensino dos conceitos de CDI e de sua influência sobre a aprendizagem do cálculo e sobre o conceito de integral, em particular, com o objetivo de construir um modelo de ensino para os conceitos em geral. Neste nível, trata-se de uma pesquisa de longa duração, de um contato permanente com a sala de aula, durante todo o ano, não se restringindo à aplicação de algumas seqüências, apenas. Segundo Artigue (1989), em um trabalho de macro-engenharia, uma análise *a priori* é praticamente incomunicável por extenso. Este fato ressalta a dificuldade em se descrever e se controlar uma macro-engenharia, o que é publicado representa, na realidade, algumas escolhas;

No nível de uma micro-engenharia, relativamente à organização das seqüências para o ensino do conceito de integral. Restrita a este conceito e a algumas sessões, torna-se mais fácil a implementação e a descrição da pesquisa. Em relação a este nível, serão identificadas, ao longo da tese, as diversas fases da ED relacionadas.

Embora todo o trabalho realizado tenha sido estruturado por meio da sistemática da ED, tanto a um nível macro quanto micro didático, salienta-se que não é feita uma correspondência exata entre as fases da ED e as etapas da pesquisa. São realizadas, na verdade, adequações que concorram para um melhor aproveitamento das investigações.

2.2.2 Dialética da Ferramenta/Objeto e Jogo de Quadros

A Teoria da Dialética Ferramenta/Objeto e Jogo de Quadros, desenvolvida por Régine Douady (DOUADY, 1986), se constitui em uma modelagem de um tipo de relação entre o ensino e a aprendizagem de matemática em um meio escolar. Ela apresenta algumas possibilidades de análise tanto de engenharias didáticas já elaboradas quanto das que ainda estão em fase de elaboração. Seu objetivo é o de determinar algumas condições nas quais os alunos sejam capazes de desenvolver seus conhecimentos e de colocá-los em funcionamento, adaptá-los e transformá-los para tratar de forma eficaz algumas situações problemáticas diferentes daquelas envolvidas em suas primeiras aprendizagens.

Para Régine Douady, a expressão *ter conhecimentos em matemática* se reveste de um duplo aspecto. Por um lado, trata-se de manifestar o conhecimento matemático por meio do aspecto funcional da matemática no qual suas noções e teoremas são usados como instrumentos para a resolução de problemas. Neste caso, fala-se do status de *ferramenta* da matemática que é engajada por alguém, em um dado momento, para resolver uma questão. Este funcionamento dá sentido à matemática ensinada. Por outro lado, trata-se de expressar o conhecimento matemático por meio da descrição de conceitos, de suas propriedades, das relações entre conceitos, de teoremas nos quais eles estejam envolvidos na demonstração. Neste caso, fala-se do status de *objeto* da matemática.

Alguns matemáticos inventam *objetos* matemáticos quando eles estão envolvidos na tarefa de fundamentar ou reorganizar algum ramo da matemática. Mas, para a grande maioria, a criação do saber se faz resolvendo problemas ou conjecturas nas quais a matemática está investida em seu papel de *ferramenta*, até que uma parte dela seja percebida como interessante para ser descontextualizada e trabalhada para se tornar um *objeto* do saber. Assim, se instala na criação matemática uma dialética ferramenta-objeto que permite o desencadeamento e o desenvolvimento de uma dialética antigo-novo.

Neste movimento de idéias, um motor realiza um papel essencial: a *mudança de quadros*. Novos quadros são criados quando uma quantidade suficiente de *objetos* novos, formando um corpo coerente e rico de propriedades, é produzida por meio da resolução de problemas. Um *quadro* é constituído dos *objetos* de um ramo da matemática envolvendo suas definições, propriedades, teoremas, relação entre os *objetos*. Distinguem-se os quadros numérico, algébrico, geométrico, analítico, dentre vários.

Uma *mudança de quadros* é um meio de se obter formulações diferentes de um problema. Segundo Douady, uma *mudança de quadros* permite que as dificuldades encontradas pelo aluno, ao trabalhar em certo quadro, possam ser acessadas de forma diferente em outro quadro, podendo, eventualmente, serem confrontadas.

Para uma apresentação mais completa desta teoria, indica-se o livro Educação Matemática – Uma Introdução (MACHADO, 1999).

Nesta pesquisa, verifica-se quanto o ensino atual das noções chave de CDI está comprometido com uma abordagem que considere essas noções tanto em seu status de *ferramenta* quanto de *objeto*, não de forma isolada, mas valorizando as inter-relações *ferramenta-objeto* e *objeto-ferramenta* existentes na formação dessas noções. Para isso, apresenta-se na Seção 6.3 uma análise de alguns livros de CDI mais comumente adotados em disciplinas de cálculo, correspondendo a uma parte das análises preliminares realizadas.

2.2.3 A Teoria da Aprendizagem Significativa

Teorias da aprendizagem provêem explicações para os mecanismos envolvidos nos processos de aprendizagem. Elas permitem agrupar os resultados de várias pesquisas e integrar numerosos princípios de aprendizagem. Destaca-se, contudo, que nenhuma teoria é capaz de, isoladamente, explicar tudo o que as pesquisas têm descoberto sobre a forma como se aprende. Elas tendem a se focalizar sobre alguns de seus aspectos específicos.

Dentre essas teorias, destacam-se as teorias cognitivistas que dão ênfase ao papel articulado dos processos mentais internos tais como pensar, memorizar, conhecer, resolver problemas. Os resultados de suas pesquisas conduzem a uma maior compreensão de como o ser humano pensa e aprende e têm contribuído, no âmbito educacional, com idéias sobre de que forma se pode melhor ajudar o outro a aprender (ORMROD, 2004).

Relativamente a explicações de como ocorre a aprendizagem cognitiva no contexto de uma sala de aula, cita-se, em especial, a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) (NOVAK, 2006) que é baseada na Psicologia cognitiva de David Ausubel (ORMROD, 2004). Com base na TAS, são organizados os conteúdos de integral da seqüência de ensino da ED proposta neste trabalho.

A aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes preexistentes na estrutura de conhecimentos de um aprendiz. Estes conceitos com os quais interage a nova informação são denominados por Ausubel de *conceitos subsunçores* ou, simplesmente, *subsunçores*.

Para Ausubel (PONTES, 2006), para que ocorra aprendizagem significativa pressupõe-se:

1) Disposição da parte do aluno em relacionar o material a ser aprendido de modo substantivo e não arbitrário em sua estrutura cognitiva. Portanto, para que a aprendizagem seja significativa, é necessário que haja interesse do aluno em aprender;
2) Presença de idéias relevantes na estrutura cognitiva do aluno. Segundo Ausubel (MOREIRA, 1999), o fator que mais influencia na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe;
3) Material potencialmente significativo, ou seja, o material a ser aprendido deve ser relacionável à estrutura cognitiva do aluno de forma substantiva e não arbitrária.

A organização do conteúdo das seqüências foi baseada nos dois últimos princípios, acima citados, da TAS:

- O estudo do perfil dos estudantes envolvidos na experimentação foi direcionado, principalmente, para uma investigação sobre os conhecimentos dos alunos, no sentido de preparar os novos conteúdos fazendo vínculos com tais conhecimentos;
- A idéia de se abordar os conceitos por uma perspectiva histórico-epistemológica tem por objetivo organizar os conteúdos de forma a torná-los mais significativos.

Com tais princípios, objetiva-se atingir o outro pressuposto da TAS: despertar o interesse do aluno para o aprendizado dos conceitos.

2.2.4 A Sequência Fedathi

A Sequencia Fedathi é uma proposta metodológica centrada no ensino de matemática. Esta concepção considera que os maiores problemas da educação matemática no Brasil estão vinculados mais a problemas de ensino do que de aprendizagem e, neste sentido, estão mais associados à formação do professor e a sua prática em sala de aula.

Os fundamentos desta teoria vêm sendo desenvolvidos desde a década de 1990 pelo grupo de pesquisa em educação matemática do Laboratório Multimeios[5] da Faculdade de Educação (FACED) da UFC. Mais detalhes, podem ser vistos em Borges Neto e Santana (2001). Faz-se, no entanto, nos próximos parágrafos uma apresentação resumida.

Para uma abordagem de ensino de conteúdos matemáticos em sala de aula, a Teoria Fedathi propõe uma seqüência didática denominada "Sequência Fedathi", uma metodologia de ensino que sugere que a sala de aula seja um laboratório de matemática, no qual o professor proporciona ao aluno assumir o papel de um cientista matemático.

Em uma aula experimental de química ou de física, o professor não manipula os instrumentos de trabalho pelo aluno. Sugere-se, assim, que em um laboratório de matemática o professor proponha problemas que estimulem o aluno a reproduzir a atividade de um matemático, incentivando-o a investigar, estabelecer conjecturas, construir estratégias de resolução e não, simplesmente, apresente os resultados prontos, advindos do seu próprio conhecimento e não dos conhecimentos do aluno. A função de mediação do professor é, portanto, fundamental, tanto na organização das sessões didáticas e na escolha de situações-problema adequadas ao patamar de conhecimentos dos alunos, quanto em proporcionar um ambiente de sala de aula que seja propício a interações e a discussões, onde o aluno possa expor suas idéias e soluções.

A Sequência Fedathi está estruturada em quatro etapas: tomada de posição, maturação, solução e prova. De acordo com Rocha (2008), estas etapas são definidas como a seguir.

Tomada de Posição

Em uma primeira etapa da seqüência, o professor expõe um problema em sala de aula, o qual deve estabelecer elos entre os conhecimentos prévios dos alunos e o conteúdo que ele pretende ensinar.

Observa-se que parte desta etapa antecede o momento da sala de aula, quando o professor trabalha na escolha das situações-problema e na organização da sessão didática.

[5] Página do Laboratório Multimeios: www.multimeios.ufc.br

Debruçamento

Neste momento da sessão didática, o professor deve se aproximar dos alunos por meio de discussões, procurando identificar, em suas manifestações, estratégias de resolução do problema e incentivando-os a apresentar suas soluções. O professor deve também estar atento, nesta etapa, para perceber as possíveis dificuldades dos alunos em compreender o problema em questão.

Solução

A etapa denominada solução representa a exposição, por algum aluno, de alguma estratégia de resolução do problema que foi desenvolvida por ele sozinho ou em grupo. O professor deve convidar o aluno a apresentar a sua solução. Para isso, é necessário que o ambiente de sala de aula seja construído para dar segurança ao aluno, que o favoreça a superar o seu medo de errar, seus anseios e bloqueios (ROCHA, 2008).

Prova

Neste momento, o professor efetua uma validação matemática de alguma solução do problema. Ele determina as condições em que ocorrerá a formalização dos argumentos utilizados nos níveis anteriores.

Ressalta-se que esse tipo de prática se diferencia em demasiado de uma abordagem de ensino tradicional, na qual o professor tem, em geral, uma atitude imediatista: expõe o problema e o resolve em seguida, não deixa tempo para que os estudantes reflitam e nem procura ouvir o que eles têm a dizer.

Nesta tese, são relatadas diversas sessões didáticas, nas quais se ressalta a importância de o professor ouvir o aluno e de incentivá-lo a se manifestar. Destaca-se, em particular, que na primeira sessão da sequência de ensino do conceito de integral, que trata da gênese deste conceito, as fases da Sequência Fedathi foram contempladas por meio da apresentação de diversos problemas de medida em geometria (ver Capítulo 6). Pautando-se na filosofia da seqüência, foi dada especial atenção às intervenções dos alunos cujas análises conduziram a modificações na preparação da seqüência seguinte.

O próximo Capítulo descreve o ambiente no qual foi realizada esta pesquisa; apresenta algumas informações sobre o perfil do aluno do CGETI; e relata avaliações que foram realizadas anualmente por meio de um programa computacional com os alunos recém ingressos do CGETI, com o objetivo de se fazer um diagnóstico sobre o nível de seus conhecimentos relativamente ao conceito de função real.

3 O Ambiente da Pesquisa

3.1 Introdução

O campo científico da didática da matemática se encontra no cruzamento de diversos outros campos: matemática, epistemologia, lingüística, psicologia, sociologia, história, ciências da educação, dentre outros. Uma pesquisa em didática da matemática pode, portanto, se apoiar em metodologias com características típicas de pesquisas em ciências humanas. Dentre estas, destaca-se a pesquisa-ação a qual é uma forma de pesquisa aplicada que tem por objetivo compreender e intervir em certo meio social.

A sistemática desta tese é baseada na metodologia da engenharia didática (ver Capítulo 2) que é considerada um tipo de pesquisa-ação da didática da matemática. O seu ambiente de experimentação é a sala de aula, constituída pela relação professor-saber-aluno, denominada comumente de triângulo didático. Tratando-se de uma pesquisa-ação, que visa agir sobre o sistema sala de aula, conhecer apenas o saber não é suficiente, como crêem alguns. É imprescindível traçar o perfil do aluno, conhecê-lo como sujeito-aprendiz, inserido em seu ambiente universitário.

Com este objetivo, descreve-se neste capítulo o curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática (CGETI) da Universidade Federal do Ceará (UFC), ambiente do qual faz parte o estudante envolvido nesta pesquisa e apresentam-se algumas características relacionadas ao perfil esperado do profissional engenheiro de teleinformática formado pela UFC.

Ainda com o objetivo de conhecer o aluno, foram realizadas avaliações-diagnóstico por meio de um programa de computador para verificar os seus conhecimentos sobre o conceito de função real – noção fundamental para a compreensão dos conceitos de CDI. De 2004 a 2008, excetuando 2007, após cada aplicação, foi feita uma análise dos resultados a qual serviu de parâmetro para a preparação da avaliação do ano seguinte. Este processo originou uma proposta de um método de avaliação continuamente realimentado para o ensino de matemática, baseado na engenharia didática, que é também descrito neste Capítulo. O programa adotado foi o

WIMS, o qual passou a ser usado corriqueiramente para propor avaliações em sala de aula durante todo o ano.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: primeiro, faz-se uma descrição do CGETI; em seguida, algumas características do aluno do primeiro ano do CGETI são delineadas; e, por último, descreve-se o procedimento de aplicação das avaliações-diagnóstico e apresenta-se o método de avaliação continuamente realimentado, juntamente com a ferramenta computacional utilizada.

3.2 O Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática (CGETI)

Constatando-se, na atualidade, as diversas interseções entre áreas de conhecimentos tidas como independentes e, mais do que isso, uma convergência de tecnologias, foi gerada a área de Engenharia de Teleinformática, a qual é constituída pela fusão entre as áreas de Telecomunicações e de Informática.

Em 2003, por iniciativa de um grupo de professores da Universidade Federal do Ceará (UFC), foi criado o Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática (CGETI), integrando-se ao Centro de Tecnologia da UFC. Logo no ano seguinte, em março de 2004, ocorreu o primeiro concurso vestibular, no qual ingressaram 40 alunos.

De acordo com a Proposta de Criação do CGETI, organizada sob a responsabilidade do Prof. Carlos Pimentel de Sousa (PIMENTEL, 2008), o curso tem por objetivo geral formar engenheiros de teleinformática com uma sólida e consistente formação profissional técnica e científica que seja habilitado a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas afins, considerando seus aspectos políticos, sócio-econômicos, ambientais e culturais, com visão ética e humanística em atendimento às necessidades da sociedade.

Alcançados estes objetivos gerais, espera-se que o profissional engenheiro de teleinformática tenha um perfil que, dentre outros, capacite-o a:

- planejar, conceber, especificar, projetar e implementar sistemas de comunicações e sistemas de computação, transmissão de voz, dados e imagem, bem como modelar e dimensionar os canais físicos de comunicação;

- analisar projetos, oferecer consultoria técnica, orientação técnica, supervisionar e coordenar estudos e projetos de sistemas de comunicações e computação;
- desenvolver habilidades para acompanhar o acelerado desenvolvimento tecnológico da área de teleinformática;
- propor soluções inovadoras que permitam maior qualidade dos produtos e serviços em teleinformática.

De acordo com a fundamentação do curso, para poder exercer tantas atividades (quanto as enumeradas acima) e atuar em áreas onde a complexidade, a quantidade e a qualidade da informação estão em constante crescimento, é necessária uma sólida formação multidisciplinar. A Física, a Matemática, e a Ciência e a Tecnologia da Informação são os pilares de sua formação científico-tecnológica (PIMENTEL, 2008).

Observa-se que foi assumido no parágrafo acima o papel fundamental da matemática no contexto do CGETI.

Quanto a sua inserção institucional, a concepção inicial do curso constava de duas disciplinas anuais específicas de matemática: o Cálculo Fundamental e a Matemática Aplicada à Engenharia, constituídos de 4 e de 3 créditos, respectivamente.

Embora já seja esta uma proposta bastante ousada para as disciplinas de matemática, diferenciada dos demais cursos de graduação em Engenharia, o Departamento de Engenharia de Teleinformática (DETI) vem participando de reuniões locais, de colóquios nacionais e internacionais com o objetivo de fazer uma melhor adequação dos conteúdos de matemática e de favorecer a relação ensino/aprendizagem/avaliação (EAA) desta ciência no contexto da Engenharia de Teleinformática.

Nestes cinco primeiros anos de existência do CGETI, foram também realizadas experiências, como a desta pesquisa, e discussões com diferentes professores de Matemática e de Engenharia, preocupados e comprometidos com a melhoria da relação EAA, que culminaram com uma nova proposta de conteúdo e de carga horária para as disciplinas de matemática do CGETI.

Para o primeiro ano, em especial, a disciplina de Cálculo Fundamental passou de quatro para cinco créditos e foi acrescentada ainda a disciplina de Álgebra também com cinco créditos. Além disso, foi incluído um diferencial ao ensino dessas disciplinas: um estudo dirigido semanal, com acompanhamento de instrutor e presença obrigatória do alunado. Esta mudança passou a ser implementada no primeiro semestre de 2009 do

CGETI, tendo sido aprovada em 2008 no contexto da reformulação deste curso de graduação (PIMENTEL, 2008).

O CGETI foi, na verdade, submetido a uma reforma institucional mais abrangente. A partir do vestibular realizado no final do ano de 2008, o curso passou a oferecer duas turmas: uma diurna, com 60 vagas, e uma noturna, com 40 vagas. Em ambas as turmas, o aluno tem a possibilidade de obter o diploma de Engenharia de Teleinformática com ênfase em Engenharia de Telecomunicações ou em Engenharia de Computação.

3.3 Avaliações-diagnóstico e um método de realimentação no processo de avaliação para o ensino de matemática

Esta pesquisa tem por objetivo principal propor uma abordagem de ensino das noções principais de CDI no primeiro ano dos cursos de engenharia. Para tanto, é imprescindível considerar-se a quantidade de conhecimento acumulado dos alunos, logo na entrada da universidade, como fator que pode ser determinante para o seu desempenho na disciplina de matemática.

Pesquisadores comprometidos com o ensino de CDI concordam que uma sólida concepção sobre função real é parte indispensável dos conhecimentos prévios dos alunos, recém chegados à universidade, para o aprendizado dos conceitos de cálculo (HAREL e DUBINSKY, 1992). Compartilhando desta idéia, foram aplicadas avaliações-diagnóstico para verificar o nível de conhecimento dos alunos de primeiro ano do CGETI relativamente ao conceito de função real.

A identificação, a partir da análise dos resultados, de certas dificuldades dos alunos para colocar em funcionamento o conceito de função real conduziu a um planejamento do ensino de CDI com o objetivo inicial de sanar tais dificuldades, facilitando, com isso, a compreensão das noções básicas de cálculo.

As avaliações foram organizadas no programa WIMS e aplicadas nos anos de 2004, 2005, 2006 e 2008. Os resultados de cada avaliação serviram de parâmetro para a elaboração da avaliação seguinte. Este procedimento e a integração do WIMS ao ensino como ferramenta de avaliação resultaram na elaboração de um processo de avaliação, com apoio de uma ferramenta computacional, continuamente realimentado, o qual é descrito nesta seção.

Concentram-se, nas Subseções que se seguem: a motivação original para a organização das avaliações-diagnóstico; um relato da primeira avaliação realizada em sala de aula, desde sua concepção até a sua aplicação; uma apresentação do programa computacional WIMS no qual são elaboradas as avaliações; uma discussão sobre a análise da experimentação e algumas conclusões parciais; o método proposto, com um detalhamento de suas fases; e, para encerrar, as conclusões e perspectivas.

3.3.1 O problema da aprendizagem da matemática no primeiro ano universitário

De um modo geral, assinala-se um grande número de reprovações de alunos nas disciplinas de matemática do primeiro ano das universidades brasileiras, como constatado através de pesquisas como Barbosa (1994) e Cury (2004). O baixo desempenho não é restrito aos que têm um histórico escolar considerado “ruim”, mas atinge também aqueles que, antes de ingressar na universidade, eram considerados bons alunos.

Diversos são os fatores apontados como causas para essa difícil transição ensino médio/ensino superior: fatores econômicos, psicológicos, cognitivos, pedagógicos, didáticos, conceitos mal formados, etc. Este problema não é exclusivo do Brasil. Registros indicam problemas semelhantes na passagem do ensino médio para o superior pelos estudantes da França, como apresentado por Praslon (2000). Baixo desempenho, perda de motivação, alto índice de reprovação e de abandono nas disciplinas de matemática do primeiro ano são considerados como conseqüências do desnível liceu/universidade ao qual é submetido o estudante francês.

Visando a análise deste problema, foi elaborada uma avaliação-diagnóstico sobre a noção de função real, levando-se em consideração critérios de classificação estudados em Didática da Matemática cujos fundamentos podem ser vistos em Brousseau (1986).

Dada a importância de se ter um conhecimento mais abrangente sobre o conceito de função real para a apreensão das noções de cálculo, o não domínio desse conceito pelo aluno pode ser um empecilho para o seu aprendizado de CDI. Por este motivo, optou-se por se verificar na avaliação as possíveis dificuldades dos alunos em colocar em funcionamento o conceito de função real na resolução de exercícios, os quais foram elaborados no programa WIMS.

A fundamentação teórica, a especificação da problemática e da metodologia empregada e a maneira como um programa de computador auxiliou o desenvolvimento desta experiência são apresentadas em seguida.

3.3.2 Fundamentação teórica

Destaca-se que se decidiu separar uma parte da fundamentação teórica desta seção, em vez de apresentá-la juntamente com as demais, no Capítulo 2, por ela estar associada de forma específica ao contexto da avaliação e não, de forma direta, à construção de um conceito.

Os exercícios integrantes da avaliação foram organizados e classificados por nível de dificuldade, segundo um critério proposto por Aline Robert (1998).

De acordo com Robert, os conhecimentos empregados na resolução de um exercício podem ser divididos em três níveis: nível **simples/isolado**, em que um exercício é considerado simples se os conhecimentos a serem utilizados são bem familiares ao aluno e é dito isolado se um só conhecimento antigo está envolvido em sua resolução; nível **mobilizável,** no qual os conhecimentos empregados na resolução de um exercício podem ser identificados em seu enunciado e são suficientes para resolvê-lo, mesmo que algumas adaptações ao contexto particular do enunciado sejam necessárias; e nível **disponível**, em que o aluno deve procurar sozinho em seus conhecimentos o que é pertinente para a resolução do exercício.

Com o objetivo de formular questões que envolvem conhecimentos de função real que correspondem a cada um dos três níveis acima citados, recorreu-se à teoria da dialética Ferramenta/Objeto e Jogo de Quadros da autoria de Régine Douady (1986). Segundo Douady, durante o seu processo de formação, um conceito matemático pode assumir dois status: o de *ferramenta*, quando está sendo usado como um instrumento para a resolução de um problema, ou o de *objeto*, quando questões teóricas a ele relacionadas são tratadas, tais como sua definição, suas propriedades, teoremas que o envolvem, entre outros aspectos que o particularizam.

Nessa teoria, um **quadro** é constituído pelos objetos de um ramo da matemática, como, por exemplo, o quadro geométrico, o algébrico ou o numérico, dentre outros, e um **jogo de quadros** se constitui em um meio de obterem-se formulações diferentes de um mesmo problema, remetendo a novas interpretações do problema inicial em diversos quadros (ver mais detalhes no Capítulo 2).

Com o suporte da teoria da dialética ferramenta/objeto e jogo de quadros, de Douady, e pautando-se nos critérios de classificação de um exercício, propostos por Robert, os exercícios da avaliação foram organizados em ordem progressiva de dificuldade e os seus enunciados foram formulados em quadros variados, nos quais o conceito de função real ora assume o status de ferramenta, ora o de objeto. A Figura 3-1 mostra as possibilidades de enquadramento de um exercício sob a perspectiva dos critérios utilizados.

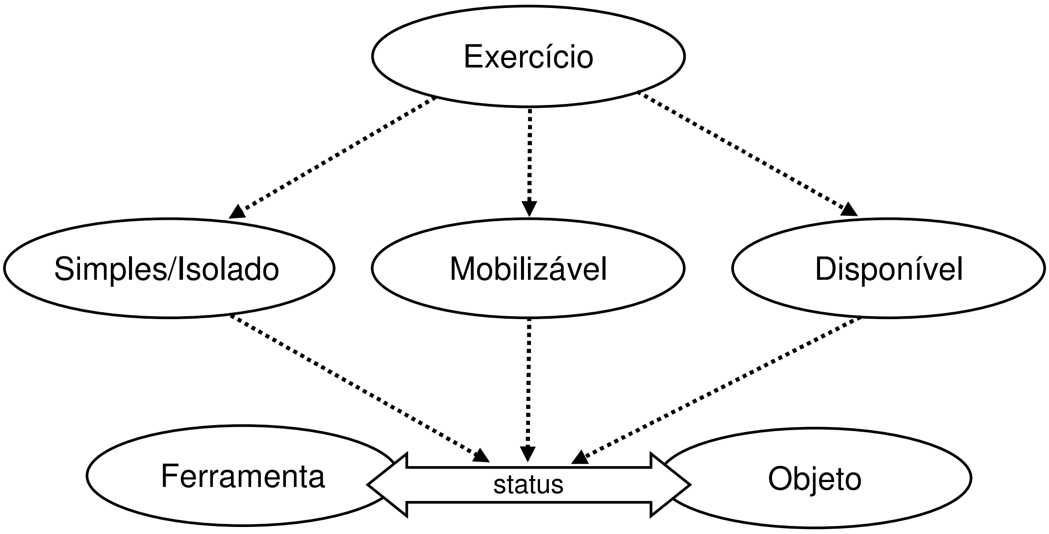


Figura 3-1. Classificações e contextualizações possíveis para um exercício.

3.3.3 Problemática e metodologia

O objetivo da avaliação é saber até que nível o estudante é capaz de adaptar seus conhecimentos antigos combinados a seus conhecimentos novos para resolver os problemas propostos. Os estudantes conseguem resolver apenas exercícios de resolução imediata do nível simples/isolado ou eles são capazes de adaptar seus conhecimentos para encontrar soluções de problemas que se encontram no nível mobilizável ou no nível disponível?

O conteúdo dos exercícios envolve conhecimentos adquiridos no Ensino Médio, considerados conhecimentos antigos para esses alunos, mesclados a conhecimentos adquiridos recentemente na universidade, considerados conhecimentos novos. A ordenação dos exercícios sugere um aumento gradativo no nível de dificuldade ao passar de um exercício a outro, dificuldade definida pela experiência empírica e pela metodologia descrita na seção anterior.

Na análise da avaliação, verifica-se até que nível os alunos do primeiro ano são capazes de adaptar seus conhecimentos na resolução desses exercícios sobre a noção de função real. Inicialmente, duas experimentações foram realizadas no ano de 2004: a primeira com uma classe de estudantes de primeiro ano da *Université d'Evry*, na França, e a segunda no Brasil, com uma classe de estudantes do primeiro ano do curso de graduação em Engenharia de Teleinformática (CGETI) da Universidade Federal do Ceará (UFC). Nos anos seguintes, 2005, 2006 e 2008, após análises e modificações sucessivas, mais três aplicações foram feitas com alunos do primeiro ano do CGETI/UFC.

Embora não fizesse parte dos objetivos originais do trabalho, foram verificadas contribuições e limitações advindas da utilização de um programa de computador no estudo dos traços das atividades dos alunos. O interesse principal recai, particularmente, nas informações extraídas dos registros armazenados pelo programa. Tais registros não seriam facilmente observáveis a partir de avaliações escritas tradicionais.

Através da instrumentação computacional, além da possibilidade de análise de dados e verificação de estatísticas, apresenta-se como um elemento de substancial valor, para um professor acostumado a práticas convencionais, a facilidade de elaboração, modificação e execução de novas avaliações. Esta facilidade, aliada à velocidade para realizar adaptações e re-aplicar avaliações, torna-se um elemento motivador para que o professor experimente novas abordagens e ensaios. Note que as próprias avaliações, em forma de listas de exercícios interativas, podem ser gravadas e re-utilizadas a qualquer momento por qualquer professor, o que potencializa a relação inter-classes e, por que não dizer, interdisciplinar entre docentes.

Este contexto, inicialmente secundário no trabalho original, constitui um elemento de base para o método de realimentação no processo de avaliação apoiado por ferramentas computacionais proposto neste capítulo. Embora diversos instrumentos computacionais possam ser utilizados para esse propósito, as experiências realizadas se apoiaram no uso da ferramenta WIMS, apresentada na próxima seção.

3.3.4 Programa Computacional de Apoio: WIMS

Para estudar o desempenho dos alunos, utilizou-se um programa interativo que oferece um banco de questões, bem como recursos para a criação de novos exercícios: o WIMS

- WWW *Interactive Multipurpose Server*[6], um programa livre que pode ser acessado através de qualquer navegador web na internet. O WIMS permite o emprego de questões bastante diversificadas cujos enunciados não são comumente explorados em salas de aulas tradicionais. Além disso, os dados do enunciado de um mesmo exercício são modificados a cada interação, dificultando ao aluno copiar o resultado obtido pelo colega ao lado ou descobrir por tentativa e erro a resposta correta.

As avaliações no WIMS são organizadas em *folhas de trabalho*, contendo, cada uma, um conjunto de exercícios. Essas folhas de trabalho são disponibilizadas ao aluno a partir de classes publicadas em um servidor Web. Para acessá-la, os alunos devem ser previamente cadastrados e receber uma senha de acesso.

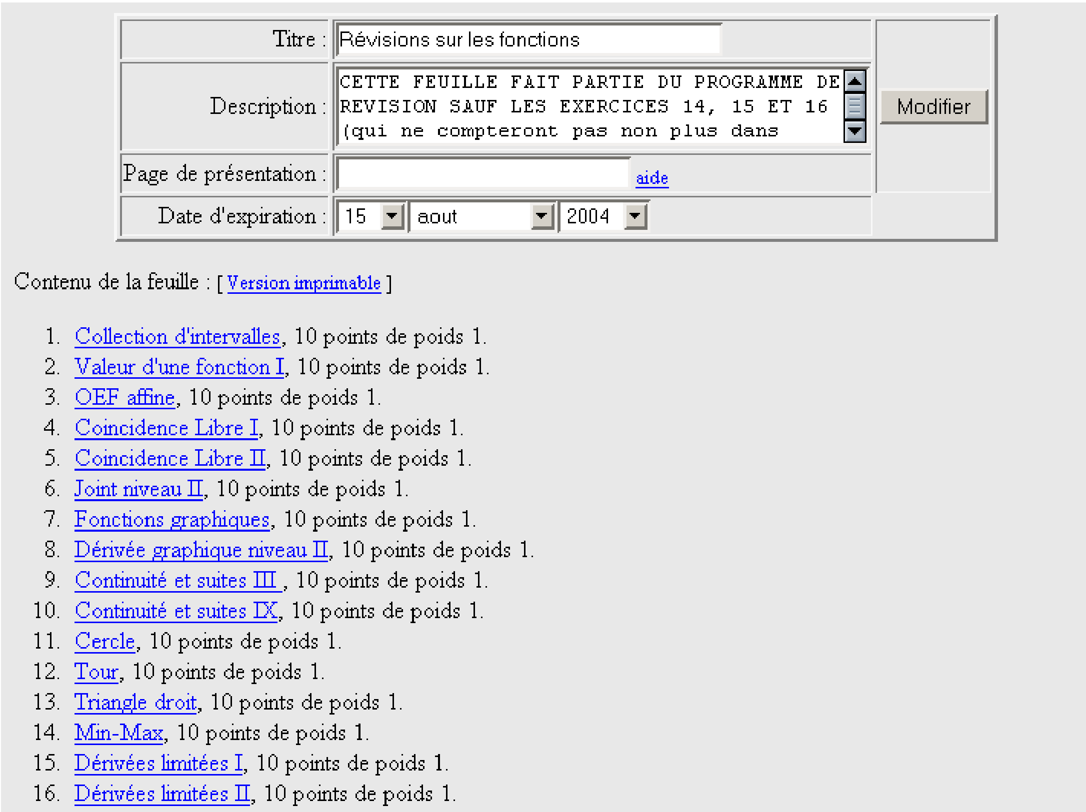


Figura 3-2. Folha de exercício criada para a avaliação de função real.

Para a primeira experimentação, foi criada uma única folha de trabalho contendo dezesseis exercícios, sendo quatorze escolhidos entre os disponíveis no banco de questões da plataforma e dois elaborados com a utilização dos recursos de edição do programa. Os exercícios foram organizados de maneira a seguir uma ordem crescente de nível de dificuldade, do mais simples ao que necessita de um maior número de

[6] http://wims.auto.u-psud.fr/wims/

adaptações para ser resolvido, critério estabelecido de acordo com a fundamentação teórica apresentada anteriormente e pela experiência da equipe de pesquisadores. Na Figura 3-2, mostra-se a folha de exercícios criada, tal como ela foi apresentada no WIMS aos alunos da França. Para facilitar a sua utilização pelos alunos do Brasil, ela foi traduzida para o inglês, por se tratar de um idioma melhor dominado por eles do que o idioma francês e, também, pelo fato de muitos dos exercícios utilizados possuírem versão registrada em inglês no WIMS. Ressalta-se que, antes de cada nova experimentação, as atividades realizadas pelos alunos na experimentação anterior eram analisadas, provocando, naturalmente, alterações na folha de exercícios. Para as aplicações que se seguiram, exercícios intermediários foram acrescentados e a ordem de alguns deles foi alterada, já baseada na experimentação anterior.

No ambiente WIMS, para resolver um exercício da folha de trabalho, o aluno deve clicar sobre o *hyperlink* com o nome da questão. Seu enunciado e os campos necessários a sua resolução são apresentados no navegador Web, permitindo a sua resolução de maneira interativa e apresentando o resultado após a submissão da resposta, o que permite ao aluno um *feedback* instantâneo. Um exemplo é apresentado na Figura 3-3. É importante destacar que o programa permite o uso de gráficos animados e que tal recurso possibilita a elaboração de enunciados que seriam de difícil implementação em avaliações tradicionais.

O WIMS oferece diversas modalidades de interação para que o aluno responda um exercício, podendo ser uma resposta de múltipla escolha, o preenchimento de uma expressão algébrica ou de um valor numérico, sendo ainda possível elaborar exercícios mais complexos, contendo um encadeamento em várias etapas até a conclusão da questão.

A primeira das avaliações, cuja folha de exercícios é apresentada na Figura 3-2, foi então aplicada a duas classes de primeiro ano: uma do DEUG (*Diplôme d'Études Universitaires Générales*, correspondente à estrutura de ensino universitário francês em seus dois primeiros anos, vigente até 2004) Scientifique da *Université d'Évry*, França, e a outra do primeiro ano do curso de graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará - UFC. Os traços das atividades individuais dos estudantes foram registrados pelo programa e utilizados na realização da análise dos resultados da experimentação. A maneira como estes registros são efetuados é apresentada em seguida.

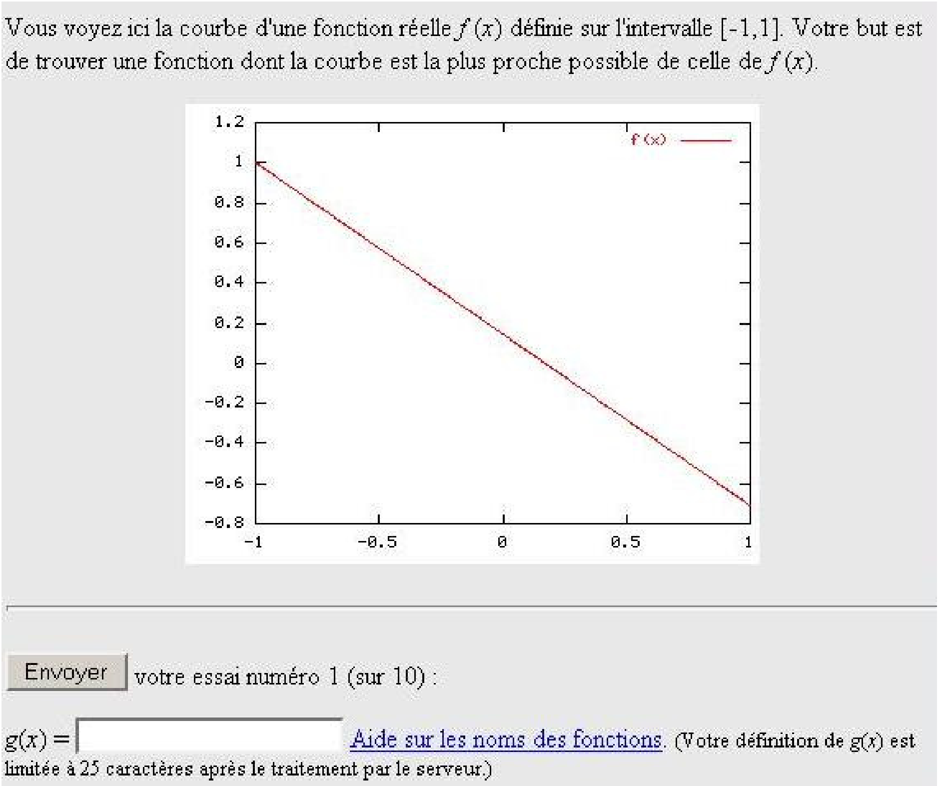


Figura 3-3. Exemplo de exercício apresentado pelo WIMS.

3.3.5 Registro de atividades

Ao término de um exercício, o WIMS atribui uma nota que varia entre 0 e 10, segundo o grau de sucesso do aluno na resolução da questão. É ainda possível efetuar diversas tentativas de resolução de um exercício sem que as notas obtidas sejam consideradas na média final, permitindo ao aluno refletir sobre a solução antes da execução de maneira definitiva. A nota final atribuída pelo WIMS a um exercício é parametrizada pelo professor no momento da preparação da folha. Pode ser estabelecido um tipo de dificuldade percentual caso o aluno refaça uma questão após um erro. Contudo, isto permite a eventual recuperação de notas baixas, no caso de o aluno descobrir ou se lembrar de como resolver corretamente uma questão após um fracasso.

Outros dados quantitativos são também registrados pelo programa como o número de tentativas, as notas parciais obtidas (além da média final) e o tempo gasto pelo aluno para resolver uma questão.

Statistiques d'activité

Feuille 1. Révisions sur les fonctions (Durée théorique 74 min.)

Exercice	points requis	Totaux				moyen/score	
		new	score	points	durée	points	durée
1. Collection d'intervalles	10	333	306	2840	62	9.3	0.2
2. Valeur d'une fonction I	10	277	249	2200	46	8.8	0.2
3. OEF affine	10	511	494	4010	102	8.1	0.2
4. Coincidence Libre I	10	326	97	592	453	6.1	4.7
5. Coincidence Libre II	10	70	12	41	94	3.4	7.8
6. Joint niveau II	10	233	136	800	271	5.9	2
7. Fonctions graphiques	10	179	119	815	183	6.9	1.5
8. Dérivée graphique niveau II	10	136	72	354	176	4.9	2.5
9. Continuité et suites III	10	323	267	1681	283	6.3	1.1
10. Continuité et suites IX	10	173	136	580	94	4.3	0.7
11. Cercle	10	218	150	854	282	5.7	1.9
12. Tour	10	145	91	459	204	5	2.2
13. Triangle droit	10	89	59	350	132	5.9	2.2
14. Min-Max	10	45	13	0	45	0	3.5
15. Dérivées limitées I	10	72	34	30	52	0.9	1.5
16. Dérivées limitées II	10	30	21	0	12	0	0.6
Somme	160	3160	2256	15606	2491	-	-

Figura 3-4. Estatísticas globais.

Os dados para a análise das atividades dos estudantes podem ser apresentados de maneira global, como mostra a Figura 3-4, ou individual, como mostra a Figura 3-5. Nesta última, os dados correspondem a uma parte do registro de atividades de um aluno no dia 10/02/2008 de 15:20:07 às 15:23:29 sobre o exercício 2 da folha de trabalho.

Na coluna "*Etat*", as menções "*new*" e "*renew*" significam a execução (ou re-execução) de uma questão. A menção "*score*" significa que uma resposta foi submetida ao WIMS, apresentando a sua nota. A menção "*noscore*" indica que a nota obtida não foi contabilizada para a média final, isto é, a atividade do aluno sobre o exercício foi considerada como um treinamento.

```
Date      Heure     feuille exercice  Etat   Score    Etat d'enregistrement
20080210 15:20:07    1       2         new                noscore
20080210 15:20:12    1       2         score   10         noscore
20080210 15:21:14    1       2         renew              noscore
20080210 15:21:18    1       2         score   10         noscore
20080210 15:22:20    1       2         renew              noscore
20080210 15:23:25    1       2         new
20080210 15:23:29    1       2         score   10
```

Figura 3-5. Um trecho dos traços de atividades realizadas por um aluno.

Descrevem-se, na próxima seção, a primeira avaliação-diagnóstico, de 2004, usando o WIMS e a forma como a análise participou da preparação da avaliação seguinte, de 2005.

3.3.6 Preparação, aplicação e análise da primeira avaliação-diagnóstico

Antes da avaliação com os alunos, uma análise *a priori* dos exercícios foi efetuada para identificar os possíveis conhecimentos e procedimentos que os alunos poderiam empregar em sua resolução. Com base nessa análise, os exercícios foram classificados quanto ao nível de dificuldade.

Esta análise permitiu justificar ou compreender melhor o desempenho e os procedimentos realizados pelos alunos bem como seus conhecimentos. Entretanto, a ausência de registros escritos do desenvolvimento se constitui em uma limitação para a execução da análise dos resultados. Apesar da previsão feita sobre os prováveis caminhos que poderiam ser seguidos pelo aluno à procura de uma solução, não se pode saber exatamente quais procedimentos foram escolhidos para a resolução de um problema. Por outro lado, esta dificuldade pode ser parcialmente contornada utilizando as estatísticas e os registros de atividades gravadas pelo WIMS.

Embora uma avaliação de um pequeno grupo de questões em duas classes de alunos pareça uma experiência bastante simples, o volume de dados registrados pelo programa WIMS pode ser extremamente grande (no caso da primeira experimentação, chegou a aproximadamente 9000 linhas). Estes recursos não seriam viáveis ou, no mínimo, dificilmente obtidos a partir de avaliações escritas.

Para se realizar a análise destes dados, os exercícios foram agrupados em função do tipo de entrada requerida para as respostas no programa WIMS. Entre outros dados importantes, foram utilizados, por exemplo, o tempo empregado na resolução de um exercício e o número de tentativas. A análise descritiva destes dados conduziu a reflexões inicialmente inesperadas, que não seriam possíveis a partir de uma prova convencional. Por exemplo:

- o tempo empregado pelo aluno no desenvolvimento de um exercício e o número de tentativas para resolvê-lo são fortes indicativos do grau de dificuldade encontrado na busca de uma solução;

- em um exercício de resolução imediata, a alternância entre erros e acertos pode indicar que o aluno não sabe realmente resolvê-lo;
- a progressão das notas obtidas por um aluno na resolução de um exercício é um indicativo de que ele conseguiu, após várias tentativas, adaptar seus conhecimentos na resolução do exercício.

A seguir, usa-se o exercício 5, Coincidence Libre II, da folha de exercícios da Figura 3-2, para representar uma amostra de como os exercícios foram analisados previamente, como os resultados de cada exercício foram agrupados e de que forma foi realizada a análise dos resultados desta experimentação. Em seguida, expõe-se brevemente a forma como a análise dos resultados foi implicada no ensino do ano seguinte e na elaboração da próxima avaliação.

<u>Análise Preliminar do Exercício 5</u>

Este exercício apresenta o gráfico de uma função $f(x)$ definida no intervalo $[-1,1]$. O seu objetivo é determinar a fórmula de uma função $g(x)$ cujo gráfico é o mais próximo possível do gráfico de $f(x)$. O ideal, na verdade, é encontrar a fórmula de $f(x)$.

O aluno tem direito de fazer nove tentativas. Para cada fórmula que ele digita no espaço reservado para $g(x)$, o programa faz o seu gráfico no mesmo par de eixos do gráfico de $f(x)$. Assim, o aluno pode medir a distância entre a sua resposta e a resposta ideal.

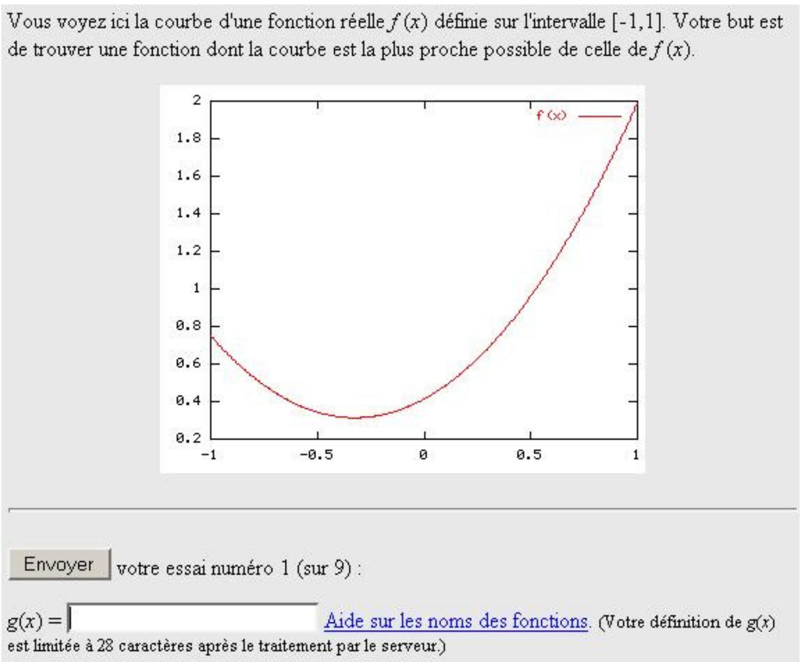


Figura 3-6. Exercício do WIMS sobre relação entre função e gráfico.

Observa-se que, neste problema, trabalha-se com o conceito de função em seu status de *objeto*, pois a sua resolução é restrita ao campo da matemática e coloca em evidência propriedades características deste conceito: a relação entre representação geométrica e representação algébrica.

Não se trata de um exercício de resolução imediata. Na verdade, ele é considerado um exercício do nível *disponível*, já que a sua resolução é dividida em etapas e o seu enunciado não oferece pistas de como resolvê-lo, deixando a busca de uma solução completamente a cargo do aluno.

Destacam-se dois prováveis procedimentos de resolução deste exercício pelos alunos:

1. Imaginar que a curva é o gráfico de uma parábola do segundo grau. Neste caso, encontrar três pontos sobre a curva, substituí-los na fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$ e resolver um sistema de três equações e três incógnitas, *a*, *b* e *c*.

Para a resolução do sistema, pode-se ativar a função "*solucionadora de sistemas de equações*", constante no WIMS.

Observa-se que não é tão imediato de se encontrar estes pontos já que os eixos coordenados não estão representados explicitamente na figura.

2. Fatorar a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma $f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)$, descobrir no gráfico um valor aproximado para x_1 e x_2, os zeros de $f(x)$, escolher um ponto qualquer sobre a curva, substituí-los em $f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)$ para determinar *a*.

Resultados

São apresentados, na Tabela 3-1, os resultados relativos à resolução feita pelos 24 alunos do CGETI que participaram da avaliação em 2004.

Tabela 3-1. Notas do exercício 5 – Avaliação 2004 (UFC).

Exercício	Quantidade de alunos por intervalo de notas				
	[0,3]	]3,6]	]6,8]	]8,10]	Nenhuma tentativa
5	3	10	2	2	7

Apesar de os conteúdos necessários para a resolução deste exercício serem bastante familiares aos alunos, foi neste exercício que eles obtiveram as piores notas e que houve o maior número de abstinência relativamente às demais questões.

Outro dado importante que mede a dificuldade deste exercício é a média das notas da sala e o tempo médio empregado em sua resolução:

Tabela 3-2. Média Geral e Tempo Médio do Exercício 5 – Avaliação 2004 (UFC).

Exercício	**Média**	
	Notas	**Tempo (min)**
5	4,5	12,4

Análise dos Resultados

Pelos resultados, pode-se supor que este exercício foi considerado bastante difícil pelos alunos. É claro que não se trata de uma questão simples/isolada, é necessário ter conhecimentos disponíveis para encontrar uma solução. Contudo, é surpreendente constatar que uma grande porcentagem (28%) de alunos sequer tentou resolvê-la, mesmo sendo um enunciado familiar a todos.

Podia-se supor que este resultado ruim tivesse ocorrido devido ao fato de os eixos coordenados não aparecerem explicitamente na figura. Porém, na questão anterior, que tinha o mesmo enunciado que esta, mas se tratava do gráfico de uma reta, a média foi 6,5, o tempo médio de resolução foi de 9 min. e apenas um aluno não tentou resolvê-la, ou seja, o deslocamento dos eixos coordenados não impediu que os alunos tentassem resolver a questão.

Para reforçar a dificuldade deste exercício, destaca-se que os alunos franceses tiveram um desempenho pior. Dos 23 alunos participantes, apenas um obteve uma nota no intervalo]*6*,*8*], que foi 7,3 – e ele levou 22 min. para encontrar a solução – , dois em]*3*,*6*], um em [*0*,*3*] e os demais, 19, nem tentaram resolvê-la.

Colocam-se, em seguida, algumas suposições sobre o que pode tê-los impedido de conseguir resolver o exercício:

- o sistema de três equações e três incógnitas foi o maior fator de dificuldade, caso eles tenham associado à curva um polinômio de grau dois;
- eles perceberam que seria necessário muito trabalho para resolvê-la, que havia muitas etapas a cumprir, por isto preferiram renunciar, ou;
- eles não sabiam sequer por onde começar.

Não foi possível saber os verdadeiros fatores de dificuldade na resolução deste exercício, pois as estatísticas do WIMS não fornecem elementos suficientes para se chegar a esta resposta. Além disso, não houve contato com estes alunos após a sessão de experimentação.

Com o objetivo de apresentar a forma como os resultados globais e individuais desta experimentação foram agrupados, representa-se, na Tabela 3-3, uma amostra geral das notas dos alunos da UFC, de 2004, por exercício e por ordem decrescente de média final.

Tabela 3-4. Alunos por ordem decrescente de notas (2004) – UFC.

Al.	Questões													Qtd.	Note
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
24														12	9,44
5														10	8,92
14														8	8,86
6														8	8,65
18														10	8,61
20														7	8,59
3														11	8,54
11														10	8,47
16														8	8,42
1														9	8,12
9														8	7,95
17														6	7,78
12														6	7,24
4														7	6,59
7														7	6,50
8														7	6,40
19														6	6,26
10														5	5,98
15														6	5,94
13														5	5,84
22														7	5,81
21														6	5,06
23														3	4,09
2														4	3,07

- O exercício 4 foi considerado correto para notas acima de 7.
- O exercício 5 foi considerado correto para notas acima de 6.

Legenda utilizada:

Exercício respondido corretamente

Exercício não respondido ou respondido incorretamente

Exercícios nos quais as notas se alternam:

Exercícios 1, 2, 3 e 10 – alternância entre 0 e 10 ;
Exercícios 6 e 7 – alternância entre 0 e 5 ;
Exercícios 8 – alternância entre 0, 1,1 e 5,6 ;
Exercícios 9 – alternância entre 0 e 4,4

Da Tabela 3-4, podem ser extraídos os seguintes resultados, dentre outros não apresentados:

- uma grande concentração de respostas corretas sobre as quatro primeiras questões e sobre as três últimas;
- o mau desempenho sobre a quinta questão, que foi considerada como respondida corretamente por apenas quatro alunos;
- elevada quantidade de alternância de notas nos exercícios 8 e 9.

Conclusões:

Como foram feitas apenas suposições, a partir dos registros de atividades do WIMS, sobre o que impediu os alunos de buscar solução para certas questões, como a questão 5, concluiu-se ser necessário, para uma nova aplicação, elaborar exercícios com etapas intermediárias para se tentar localizar as dificuldades.

Globalmente, os estudantes investiram mais na resolução de exercícios algorítmicos. Observou-se, a partir dos registros do WIMS, que o aparecimento de uma simples etapa, ou de uma fase de adaptação de conhecimentos, levou alguns à desistência de resolver o exercício.

A Experimentação de 2005

A partir da análise dos resultados de 2004, foram feitas modificações na folha de exercícios para a aplicação em 2005, dentre elas, destacam-se: houve uma troca na ordem de alguns exercícios; foram acrescentados exercícios com etapas intermediárias que pudessem facilitar a resolução de outros. Tentou-se, assim, particionar um exercício para se obter certa precisão sobre o ponto de dificuldade do aluno.

Com respeito ao exercício 5, na aplicação de 2005, acrescentou-se antes dele um exercício cujo enunciado relacionava, de forma explícita, o gráfico de uma curva a uma função do segundo grau. Pretendia-se, desta maneira, verificar se a dificuldade estava mais associada a esta situação, caso contrário, seria necessário se fazer outra hipótese e se modificar de novo a lista para uma próxima aplicação.

Denota-se que, embora a reaplicação seja feita em outra turma – não podendo se descartar, por isso, a possibilidade de se obterem resultados completamente distintos de um ano ao outro – existe certa homogeneidade nos conhecimentos dos alunos, pois eles são, em geral, preparados pelas escolas locais com o objetivo principal de se submeter a uma seleção do tipo vestibular.

Com respeito ao ensino do ano de 2005, procurou-se, em momentos convenientes, propor situações que pudessem levar a uma superação das dificuldades encontradas na análise dos resultados da aplicação de 2004. Em relação ao exercício 5, em particular, constatou-se, por meio do cálculo algébrico de certos limites em sala de aula, que a fatoração $f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)$ não é um conhecimento bem estabelecido por estes alunos. Logo, pode ter sido realmente um dos fatores que impediram a resolução do exercício 5.

Esse processo de preparação-aplicação-análise-modificação-reaplicação levou à criação de um método de avaliação baseado na engenharia didática, o qual é descrito nas subseções seguintes.

3.3.7 Justificativa para a proposta do método de avaliação

Face aos novos elementos de reflexão oriundos destas avaliações, destacam-se alguns pontos positivos e negativos considerados relevantes:

- Em geral, para um professor de matemática habituado aos métodos tradicionais de ensino, ao introduzir em suas práticas o uso de recursos tecnológicos, é de extrema importância, não só o apoio, mas a participação efetiva de profissionais de Tecnologia de Informação (TI), haja visto ser grande o número de conhecimentos adicionais necessários à elaboração, à disponibilidade e à manipulação de informações eletronicamente registradas. Na ausência destes, a resistência e a falta de inclusão digital do professor podem ser impeditivas para a realização de tal intento, como lembra Rocha (2008). Ao longo deste trabalho de pesquisa, essa necessidade manifestou-se diversas vezes, desde a compreensão e operação da ferramenta até a edição e cadastramento de questões indisponíveis na base de dados;
- Existe uma forte tendência do professor em considerar que as modificações ou as adaptações sobre os materiais avaliados são de difícil implementação, mesmo quando não é realmente o caso. Isto o leva a tentar fazer tais adaptações externamente ao programa, ou mesmo a renunciar a determinadas partes da avaliação, retornando aos poucos à prática tradicional. Por isso, as avaliações devem ser concebidas desde o início com características dinâmicas, permitindo uma contínua realimentação do processo e sua constante atualização;
- Nas avaliações realizadas, deparou-se freqüentemente com a falta de um histórico do registro escrito do raciocínio do aluno, não podendo determinar-se qual dentre os caminhos supostos na análise *a priori* foi trilhado para resolver uma questão, ou se ainda o aluno optou por uma solução não documentada. A inexistência do

desenvolvimento escrito das atividades dos alunos implica na necessidade de maior segmentação das questões propostas, de maneira a permitir uma melhor identificação dos pontos de facilidade ou dificuldade dos alunos. Neste caso, vê-se que o esforço necessário à elaboração passa a ser maior enquanto que a atividade de correção passa a ser fácil, já que é realizada, pelo menos na sua maior parte, por uma ferramenta automatizada;

- Mesmo após uma cuidadosa elaboração, pode haver necessidade de interações adaptativas durante a avaliação. As avaliações, em especial as de caráter formativo, devem estar abertas às interações professor-aluno e aluno-aluno, e tais ocorrências devem ser registradas a fim de auxiliar no processo de análise e realimentação do processo avaliativo;
- Se a avaliação tem um caráter diagnóstico, objetivando compreender um fenômeno ou fato recorrente, é necessário que ela se reproduza o maior número de vezes possível, cobrindo uma grande quantidade de pessoas, para que as conclusões sejam consistentes. Cada avaliação pode e deve contribuir para o aprimoramento da avaliação subseqüente.

Esses pontos levaram a uma reflexão sobre a necessidade de uma metodologia que possa ser empregada na elaboração/execução de avaliações que valorizem aspectos diagnósticos, formativos e, eventualmente, somativos. Esta metodologia é apresentada na próxima seção.

3.3.8 Proposição de um método de avaliação continuamente realimentado

As experimentações realizadas com o programa WIMS levaram a uma intensa reflexão sobre a prática avaliativa. O processo cíclico de experimentações, aqui apresentado por meio das avaliações, conduziu à idéia de se fazer uma adaptação de algumas fases da Engenharia Didática (ED) ao contexto da avaliação (para maiores detalhes ver Capítulo 2).

Compartilhando da opinião de Douady (1987), segundo a qual a ED se constitui em um instrumento privilegiado para se considerar a complexidade da sala de aula, propõe-se nesta seção uma adaptação desta metodologia ao contexto da avaliação, explorando, em especial, suas funções diagnóstico e formativa, apoiando-se no uso de instrumentação tecnológica. Ressalta-se, porém, que não é feita uma correspondência isomórfica entre as fases da ED e as do método proposto que concerne, exclusivamente, a situações de avaliação.

3.3.9 As fases do método de avaliação continuamente realimentado (ACR)

A Figura 3-7 apresenta de maneira esquemática a estrutura geral do método ora proposto, cujas etapas são apresentadas em seguida.

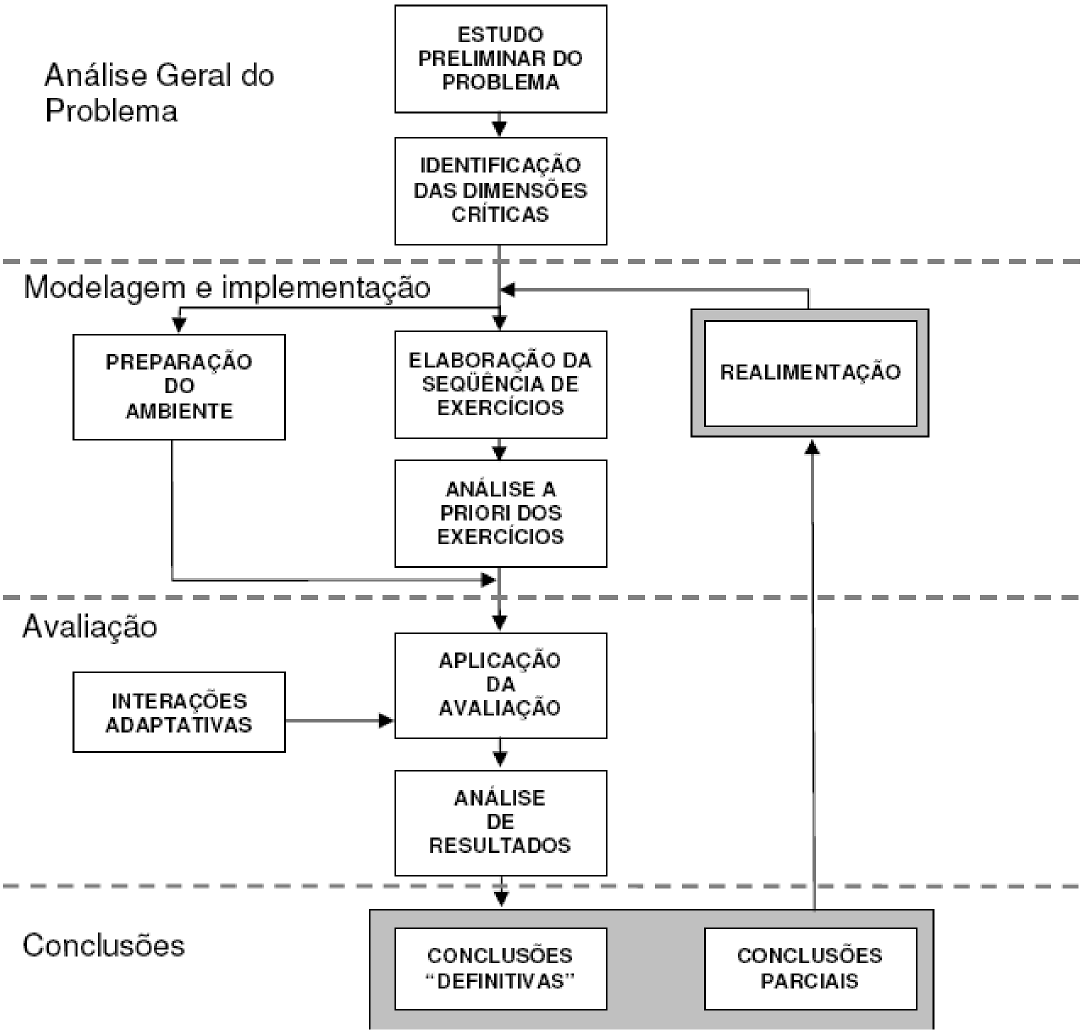


Figura 3-7. Fases e atividades constituintes do processo de avaliação.

Fase de Análise Geral do Problema

Nesta fase, são realizados o estudo preliminar do problema e a identificação das dimensões críticas que definem o conjunto de hipóteses sobre as dificuldades relacionadas ao assunto tratado. Entende-se por dimensões críticas as dificuldades registradas pelos alunos e as hipóteses sobre os motivos que originam tais dificuldades no contexto do processo ensino-aprendizagem. Podem ser consideradas dimensões críticas, por exemplo, o não cumprimento, no ano anterior, do programa considerado como pré-requisito para o conteúdo que se pretende trabalhar, ou a falta de maturidade ou de assimilação prévia de conceitos indispensáveis. Tais dimensões não podem ser simplesmente negligenciadas pelo professor. Nesta pesquisa, em especial, foram analisados os programas de ensino médio e de primeiro ano universitário no que concerne o conceito de função real e determinados os pontos de reconhecida dificuldade, com base na experiência dos professores envolvidos, que devem ser considerados na avaliação.

Fase de Modelagem e Implementação

Esta fase envolve inicialmente a elaboração da seqüência de questões, normalmente, organizada em ordem crescente de nível de dificuldade.

É neste momento que a fundamentação teórica utilizada nesse trabalho é valorizada, quando, na escolha dos exercícios, consideram-se enunciados que conduzem à solução de problemas nos quais a noção visada assume o status de ferramenta ou de objeto; ao mesmo tempo em que, a partir dessas escolhas, abrangem-se os níveis de dificuldade simples/isolado, mobilizável e disponível. Trabalha-se igualmente a contextualização, aplicando-se o jogo de quadros com o objetivo de elaborar enunciados que não sejam familiares aos alunos participantes da avaliação, o que os força a adaptar ao novo contexto seus conhecimentos relativos à noção visada.

Outra importante ação desta fase é a preparação do ambiente de execução da avaliação, que envolve a escolha das ferramentas de trabalho, a definição eventual das pessoas envolvidas entre técnicos, avaliadores e avaliados, o local da avaliação, o tipo de máquina e material utilizado, entre outros elementos complementares. Além das atividades iniciais, outra atividade, posterior à conclusão de avaliações anteriores, pode intervir nesta etapa, motivando uma realimentação capaz de modificar, enriquecer ou mesmo corrigir eventuais problemas detectados. Finalmente, uma análise *a priori* deve ser efetuada a fim de identificar os possíveis conhecimentos e procedimentos que os alunos poderão empregar na resolução dos problemas.

<u>Fase de Avaliação</u>

Na fase de avaliação são feitos a aplicação da avaliação e o registro de atividades, com eventuais interações adaptativas, nas quais são realizadas ações que venham a complementar ou auxiliar a avaliação em pontos não previstos. Tais interações devem ser registradas de alguma maneira. A análise de resultados é então realizada a partir dos dados registrados pela aplicação da avaliação e eventualmente das interações adaptativas.

<u>Fase de Conclusões</u>

Finalmente, após a apresentação dos resultados e das análises, são registradas as conclusões, podendo ser consideradas "definitivas"[7], quando o volume de informações se revelar suficiente quantitativa e qualitativamente, ou parciais, quando forem obtidas através de informações incompletas ou verificadas através de tendências, necessitando obrigatoriamente de reavaliações.

As conclusões realimentam o processo de avaliação, podendo-se retrabalhar a reclassificação dos níveis dos exercícios e o jogo de quadros. Em uma próxima aplicação, podem ser eliminadas ou inseridas novas questões ou, ainda, proceder-se à fragmentação de exercícios, visando à identificação mais precisa do tipo de dificuldade ou limitação encontrada pelo aluno. Note-se que a instrumentação computacional é de grande ajuda, pois, além de fornecer registros históricos para análise, facilita o reaproveitamento de todas as estruturas de avaliações anteriores, permitindo correções e adaptações apenas onde necessárias. Assim, as conclusões geram elementos de entrada para a fase de modelagem e implementação.

No método proposto, a realimentação atribui uma característica cíclica ao processo, em que a avaliação anterior, na perspectiva de Luckesi (1998), subsidia decisões a respeito da aprendizagem dos educandos e funciona como elemento regulador da próxima avaliação. Aliando-se aos princípios de Hoffmman (1998), defende-se ainda a realização e retomada de atividades de avaliação freqüentes e

[7] Colocou-se aqui a palavra entre aspas para indicar uma menor rigidez em seu significado, visto que uma conclusão pode muitas vezes ser repensada e modificada.

sucessivas, pois, a ação avaliativa, enquanto mediação, não se caracteriza como um momento do processo educativo, mas é integrante e implícita a todo processo. Pretende-se, desta maneira, garantir a qualidade na construção do conhecimento.

3.3.10 Discussões sobre a Validação na ED e no método ACR

Na ED, a fase de validação se caracteriza por ser um processo realizado por meio da confrontação entre as fases de análise *a priori* e de análise *a posteriori*. Observe-se que a validação, com os mesmos propósitos da ED, está inserida na Fase de Conclusão do método ACR. Entretanto, as conclusões do método proposto são enriquecidas com outros elementos históricos de confrontação, como avaliações realizadas em outras ocasiões com o mesmo grupo ou mesmo com grupos diferentes.

É importante mencionar que, na ED, Artigue (1989) destaca que o professor está pouco presente na análise *a priori* e que este afastamento possui razões históricas relativas ao desenvolvimento da pesquisa didática, influenciada pelas teorias construtivistas do conhecimento. Artigue afirma ainda que, na teoria didática, o professor ocupa sempre uma posição marginal e que, como ele não é convenientemente considerado, os fenômenos didáticos nos quais ele está implicado tendem a ser percebidos como ruídos. No método ACR, o professor é envolvido desde a concepção da experimentação e pode inferir sobre o aproveitamento e aprendizado do aluno a partir da análise do seu comportamento de maneira não necessariamente dependente da análise *a priori*. Em outras palavras, as conclusões não são exclusivamente obtidas pela confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*. Assim, as hipóteses podem ser validadas ou não de diversas maneiras: pela inspeção de avaliações, pela manifestação espontânea dos alunos, através de indagações explícitas do professor, entre outras possibilidades. Além disso, considerando a transversalidade de alguns conteúdos matemáticos, pode-se apreciar o desenvolvimento do aluno em outras disciplinas do mesmo curso que utilizem determinados conteúdos matemáticos. Neste último caso, é obrigatória a implicação dos professores de diferentes disciplinas, o que não é trivial.

3.3.11 Conclusões sobre o método e perspectivas

Destacam-se aqui alguns aspectos relacionados à prática avaliativa e aos benefícios e limitações da inserção de recursos tecnológicos para a interação e registro de atividades com fins de avaliação, os quais foram deduzidos a partir das experimentações e análises descritas nesta seção:

- O envolvimento do profissional de tecnologia da informação para dar suporte à elaboração de avaliações manifesta-se não só como forma de dar sustentação à transição de metodologias de ensino tradicionais, mas como uma necessidade real, considerando a interdisciplinaridade cada vez mais presente nas práticas modernas de ensino e aprendizagem. O ensino e a avaliação presencial podem, desta maneira, adquirir características de trabalho cooperativo, em contraposição a sua característica habitualmente individual;
- A realimentação na prática da avaliação deve ser considerada desde o momento de sua concepção, não só com a perspectiva de contínua reciclagem, mas também facilitando correções e adaptações em um ambiente inerentemente dinâmico envolvendo alunos, professores e domínio de estudo. Desta maneira, pode-se tratar o processo de avaliação com propósitos formativos, permitindo orientar o trabalho do professor na identificação das deficiências de conhecimento do aluno com o objetivo de perseguir um melhor aprendizado;
- O tradicional tempo necessário para a correção de um volumoso número de provas, temido por qualquer professor, pode ser diminuído com o auxílio de programas automatizados. Por outro lado, para uma avaliação eficaz, o tempo de elaboração de avaliações deve ser significativamente aumentado, exigindo possivelmente a colaboração de outros profissionais;
- A elaboração de provas que envolvem um alto nível de interatividade com o aluno permite que as avaliações contribuam de maneira efetiva para o raciocínio e o conseqüente aprendizado do aluno, em contraste com o tradicional objetivo classificatório das avaliações. Nesta perspectiva, o número de avaliações pode e deve ser aumentado, visto que elas passam a ser elementos ativos do processo de aprendizagem. Ainda neste contexto, a postura freqüentemente passiva dos professores no momento das avaliações pode ser reconsiderada, sendo possivelmente necessárias interações adaptativas no decorrer de avaliações, o que permite corrigir eventuais equívocos ou erros de projeto, ou ainda contribuir positivamente para o desenrolar das avaliações;
- Os registros de avaliações armazenados, incluindo os de turmas anteriores ou concomitantes, podem fornecer importantes subsídios para re-dimensionar os

processos de ensino e aprendizagem, auxiliando na compreensão do comportamento do estudante e na construção de novas estratégias. Outra questão importante é o favorecimento da colaboração entre docentes, devido à possibilidade de disponibilizar e compartilhar exercícios e avaliações através de ferramentas como o WIMS;

- Fazem-se necessárias discussões e reflexões sobre a postura do professor ao intermediar sessões de avaliações para os seus alunos. Por esta razão, nas atividades futuras, introduzir-se-á uma ação de mediação pedagógica para o desempenho das atividades, minorando algumas dificuldades que surgem e que são relatadas neste trabalho. Para isso, pretende-se adaptar às sessões de avaliação, o modelo de mediação proposto na Sequência Fedathi (BORGES NETO e SANTANA, 2001) que é indicado para a abordagem de um problema de matemática em sala de aula.

O método proposto, simples em sua essência, não pretende esgotar o assunto, mas organizar o início de um conjunto de novas experimentações que valorizem as avaliações apoiadas em ferramentas computacionais como parte integrante do processo de aquisição de conhecimentos.

Conhecendo, neste Capítulo, um pouco sobre os sujeitos desta pesquisa e o ambiente do qual eles participam, apresenta-se, no Capítulo seguinte, uma fundamentação histórico-epistemológica e puramente matemática do conceito de integral – objeto de aprendizagem destes alunos, por meio do qual se edifica o modelo proposto de ensino.

4 História e Fundamentação Científica da Integral

Sabe-se que o conceito de um objeto matemático não se reduz a uma definição (D'AMORE, 2005). Envolve todo um contexto de situações criadoras de significados. Em muitos casos, a definição de uma noção só é consolidada após séculos (ou milênios) de trabalho intelectual realizado sobre tal noção. Com respeito ao conceito de integral, ele se constitui em um objeto matemático rico em significados e aplicações, cuja origem remonta à época de Arquimedes, séc. III, a.C. (SHENITZER e STEPRANS, 1994), mas cuja definição foi, historicamente, consolidada por Riemann no séc. XIX[8]. Na verdade, o conceito de integral continua a se expandir, devido, principalmente, à necessidade teórica de se elaborar definições mais abrangentes, como a Integral de Lebesgue, no início do séc. XX, e outros tipos de integrais.

O estudante brasileiro é levado a pensar que o seu primeiro contato com a noção de integral de Riemann[9] se inicia na universidade. Porém, já nos primeiros anos de escola, o conceito de integral vem sendo construído por ocasião, dentre outros, do ensino do conceito de medida de comprimentos.

Com a prática de ensino, constata-se a grande dificuldade dos estudantes de primeiro ano universitário em apreender este conceito. No início do segundo ano, a representação que a maioria deles tem sobre a noção de integral está associada, em geral, ao cálculo da integral indefinida de um polinômio. Ou seja, a integral é reduzida a uma ferramenta para o cálculo de uma primitiva.

Para se ter uma visão mais geral do significado do conceito de integral e da sua inserção no contexto escolar/universitário, apresenta-se neste Capítulo uma breve história de sua origem e evolução. Esta história foi, também, modelada de maneira a fundamentar matematicamente noções e processos envolvidos em sua formação. Para isso, adotaram-se como ferramenta de modelagem as Redes de Petri (MURATA, 1989), as quais, além de possibilitarem uma visualização gráfica e hierarquizada dos processos e de suas relações, permitem ressaltar as pré e pós-condições para a execução de cada

[8] Riemann está representando aqui alguns de seus contemporâneos como Cauchy, Darboux, etc.

[9] Considera-se, neste texto, a integral de Riemann como a integral definida de uma função real, limitada, em um intervalo fechado.

um deles e fazer simulações e análises do modelo construído. Este estudo foi determinante para a escolha das situações didáticas implicadas na fase de experimentação.

Denota-se que o estudo do conceito de integral, apresentado neste Capítulo, corresponde a uma parte das escolhas feitas para a fase das análises preliminares relativas ao conteúdo. Esta fase será completada por meio de uma análise do ensino atual realizada na Seção 6.3.

Este Capítulo tem a seguinte organização: inicialmente, conta-se uma breve história do conceito de integral; para melhor facilitar a leitura e compreensão das redes de Petri aqui apresentadas, definem-se redes de Petri e faz-se uma descrição de seu funcionamento; uma reflexão sobre o uso das redes de Petri como um modelo para a organização de conteúdos para o ensino é realizada; apresentam-se as definições das integrais de Cauchy, de Riemann e de Lebesgue que foram escolhidas para a modelagem; propõe-se, em seguida, uma modelagem das condições de integrabilidade de funções reais por redes de Petri; aproveita-se também para se fazer uma comparação entre RPs e mapas conceituais (NOVAK, 2006); e, por último, apresentam-se algumas conclusões.

4.1 Uma Breve História do conceito de Integral

Conceitos matemáticos podem surgir a partir da resolução de problemas rotineiros e bem contextualizados ou a partir de situações de interesse "apenas" matemático. Dentre estes, alguns levaram milênios para ser elaborados, passaram por mentes brilhantes e continuam, até hoje, a sofrer transformações para atender às necessidades de uma comunidade científica. O conceito de integral, em particular, constitui-se em um exemplo que participou, e que ainda participa, da resolução de problemas rotineiros e que evoluiu, e continua evoluindo, para níveis de abstração que ainda não foram alcançados pelas ciências aplicadas.

Pode-se considerar que o gérmen para a elaboração do conceito de integral tem suas raízes na necessidade primitiva de medir e de construir medidas.

Começando pela medida de um objeto geométrico bastante intuitivo, o segmento, a idéia de medir o seu comprimento é natural. Contudo, ao se impor o fator precisão como condição, essa medida pode ser até mesmo impossível.

Por outro lado, convencionando-se um tamanho como uma unidade de medida de comprimento, o problema de construir medidas de múltiplos fracionários da unidade tornou-se “trivial” após séculos de trabalho e de teoremas como o de Thales.

Durante muito tempo não se cogitava sobre a existência de um comprimento que não fosse uma fração da unidade até que, por ironia do destino, o Teorema de Pitágoras apresentou uma medida que não era fracionária (SINGH, 1998). Mesmo assim, esta medida era construtível. E como lidar com as medidas não-construtíveis como $\sqrt[3]{2}$? Como aceitar as não-construtíveis, mas transcendentes como π?

Por outro lado, estimando-se que medir um comprimento é medir um intervalo da reta, sabe-se, hoje, que ao se considerar, por exemplo, o intervalo $[0,1]$ como unidade de medida e se estabelecer uma função para medir subconjuntos da reta, existem subconjuntos que não podem ser medidos por meio desta função. Cita-se, como exemplo, o conjunto de Vitali (ROYDEN, 1971).

Ao mesmo tempo, o homem precisava medir e construir medidas de porções do plano, do espaço, etc. O que, na verdade, representa o “outro lado da mesma medida” de segmentos.

De forma mais geral, na Geometria Euclidiana, dado um objeto geométrico *A*, com certa medida, procura-se construir outro objeto geométrico *B* que tenha a mesma medida de *A*. Provou-se (STWEART, 2004), contudo, ser impossível tal construção quando grandezas não construtíveis estão implicadas neste processo. Como exemplo, citam-se os famosos problemas gregos da quadratura do círculo e da duplicação do cubo.

Com a chegada da Geometria Analítica, alguns objetos geométricos passaram a ser representados por equações que, em alguns casos, são funções. Esta nova apresentação permitiu uma extensão da medida a uma classe maior de objetos.

No plano, se a região puder ser delimitada por curvas representadas por funções contínuas definidas em intervalos fechados, a integral de Cauchy (1789-1857) (e de vários outros matemáticos) representa uma maneira precisa de se medir tal região.

Ainda no século XIX, o matemático Riemann (1826-1866) (e outros imprescindíveis) envolvido com a determinação da convergência de séries de Fourier, cujos coeficientes são dados por integrais de funções, desenvolveu uma teoria de integração caracterizada pelo estudo da convergência das somas superiores e das somas inferiores. Tal teoria, conhecida por integração de Riemann, permitiu a extensão do conceito de medida a porções menos comportadas do plano.

No início do século XX, Lebesgue provou que medidas de determinadas porções do plano pela Integral de Riemann são possíveis de ser realizadas se, e somente se, as funções envolvidas forem contínuas em quase toda parte (ou seja, descontínuas apenas em um subconjunto de medida nula no intervalo de definição da função) (RUDIN, 1976). Com o intuito de aplicar o conceito de integral a uma classe maior de funções, Lebesgue elaborou uma teoria de integração que é uma extensão da integral de Riemann. Para isso, ele considerou partições de um intervalo que contivesse o conjunto imagem da função, em vez de partições do domínio, e estendeu a definição de medida de um intervalo para a medida de subconjuntos incomuns da reta.

A integral de Lebesgue, sendo mais geral, é mais complicada do que a de Riemann, entretanto, além de permitir a integração de uma classe maior de funções, alguns problemas relativos à convergência de seqüências de funções integráveis podem ser resolvidos por meio da sua aplicação.

Noções mais gerais de integral foram introduzidas por Denjoy e Perron, em 1912 e em 1914, respectivamente, e por Henstock e Kurzweil, em meados do século vinte. Na perspectiva de generalizações, esta história não termina por aqui, segue inspirada pelo "pensamento matemático que pode ser caracterizado como uma aspiração ao completo" (BACHELARD, 1934).

Essa história, contada em uma linguagem imprecisa e de maneira extremamente resumida, além disso, vista por um determinado ângulo, o das medidas, pode ser recontada de forma mais abrangente e completa usando linguagens formais. Pretende-se, assim, recontar a história acima na próxima subseção, por meio das redes de Petri. Isso é feito com o objetivo de fundamentar cientificamente algumas idéias matemáticas imperceptíveis em uma linguagem natural e, além disso, de concentrar de maneira lógica e em um pequeno ambiente quase todo o estudo relativo ao conteúdo de integral realizado pelo professor/pesquisador para munir-se de um conhecimento que o permitisse melhor conduzir esta pesquisa.

Para facilitar a compreensão das redes de Petri apresentadas, descrevem-se, primeiramente, as redes de Petri e as suas principais propriedades.

4.2 Definição de Redes de Petri (RPs) (para a Fundamentação Matemática do Conceito e do Cálculo de Integral)

Propostas por Carl Adam Petri (1962), as redes de Petri (RP) constituem-se em uma ferramenta matemática e gráfica de uso geral. Elas permitem modelar o comportamento de sistemas dinâmicos a eventos discretos, descrever as relações existentes entre condições e eventos e visualisar propriedades tais como paralelismo, sincronização e compartilhamento de recursos.

Uma rede de Petri pode ser definida formalmente como uma quíntupla RP = (P, T, A, W, M_0), em que:

- P = $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares;
- T = $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é um conjunto finito de transições;
- $A \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ é um conjunto finito de arcos;
- $W : A \rightarrow \{1, 2, \ldots\}$ é a função peso associada aos arcos;
- $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots\}$ é a marcação inicial.

As RPs são representadas graficamente por um grafo bi-partido consistindo de dois conjuntos distintos de nós denominados lugares e transições e um conjunto de arcos com pesos associados, nos quais:

- lugares são representados graficamente por um círculo;
- transições são representadas graficamente por um seguimento de reta ou um retângulo;
- arcos orientados e ponderados conectam lugares a transições e transições a lugares.

Uma RP modela os estados de um sistema e suas mudanças. Esses estados são modelados pela adição de *fichas* aos lugares da RP. A uma determinada distribuição de fichas, denomina-se *marcação* da RP.

Na Figura 4-1, é apresentada uma RP especificando-se todos os seus elementos:

- P = $\{p_1, p_2, p_3\}$;
- T = $\{a, b, c\}$;
- A = {(p1, a), (a, p2), (a, p3), (p2, b), (p3, c), (b, p1), (c, p1)};
- W = {[(p1, a), 1], [(a, p2), 1], [(a, p3), 1], [(p2, b), 1], [(p3, c), 1], [(b, p1), 1], [(c, p1), 1]};
- M_0 = {(p1, 1), (p2, 0), (p3, 0)}

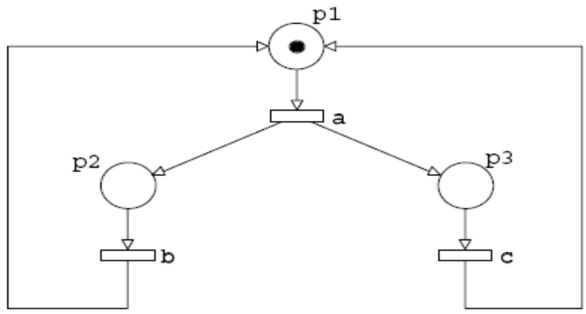


Figura 4-1. Rede de Petri Ordinária com três lugares e três transições.

Os lugares conectados a uma transição no sentido lugar-transição são denominados de lugar de entrada daquela transição. Os lugares conectados a uma transição no sentido transição-lugar são denominados de lugares de saída daquela transição. Por exemplo, na RP apresentada na Figura 4-1, o lugar p_2 é lugar de saída e de entrada das transições *a* e *b*, respectivamente.

A marcação de uma RP, em um dado instante, modela o estado da RP ou, mais precisamente, representa o **estado** do sistema modelado pela RP.

Em uma marcação, cada lugar contém um número inteiro (positivo ou nulo) de *fichas*. O número de fichas em um determinado lugar p_i será denotado por $M(p_i)$ ou simplesmente M_i.

A dinâmica de um sistema, ou suas mudanças de estado, é modelada em redes de Petri pela geração ou eliminação de fichas na rede.

Se a marcação define o estado da RP, a mudança de estado corresponde a uma evolução da marcação e essa evolução se produz pelo *disparo* das transições, o qual obedece à seguinte regra:

- Uma transição é dita habilitada ou sensibilizada se cada um de seus lugares de entrada contém um número de fichas maior ou igual ao peso do arco que o conecta à transição;
- Uma transição habilitada pode ou não disparar;
- Ao disparar, fichas são removidas de cada lugar de entrada da transição disparada e fichas são acrescentadas aos seus lugares de saída. A quantidade de fichas removidas e acrescentadas depende do peso do arco.

Observa-se que, na Figura 4-1, a transição *a* está habilitada, pois p_1 é o único lugar de entrada de *a*, existe uma ficha em p_1 e o peso do arco que liga p_1 a *a* é igual a 1.

Na Figura 4-2, é apresentada a nova marcação da rede após o disparo de *a*. Neste caso, uma ficha foi retirada de p_1, uma ficha foi acrescentada a p_2 e uma ficha foi acrescentada a p_3, pois é esse o peso dos arcos que ligam, respectivamente *a* a p_2 e a p_3.

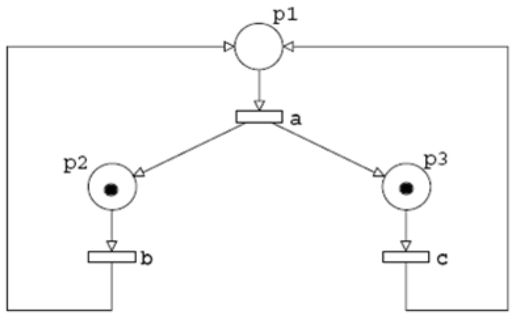


Figura 4-2. Rede de Petri Ordinária da Figura 4-1 após disparo da transição *a*.

Como pode ser visto pela Figura 4-2, uma nova marcação, resultante do disparo de uma transição, representa o novo estado do sistema modelado. Vale lembrar que o disparo de uma transição é uma ação atômica (disparo instantâneo). A nova marcação da rede é $M_1 = \{(p1, 0), (p2, 1), (p3, 1)\}$ ou, simplesmente, $M_1 = (0\ 1\ 1)$.

As RPs oferecem ferramentas de análise que podem revelar informações importantes sobre a estrutura e o seu comportamento dinâmico do sistema modelado por ela. Entretanto, devido ao baixo poder de representação de uma ficha, a modelagem de sistemas complexos pode gerar diagramas grandes e de difícil leitura. Para lidar com esse tipo de restrição, conceberam-se as RPs de Alto Nível (RPA), que tornam os modelos menores e de mais fácil visualização e análise em relação às RPs. Para isso, as fichas armazenadas em lugares recebem um tipo de dado (cor), podendo representar estruturas mais complexas, como listas (estruturas de dados com múltiplos elementos) e registros (elementos de dados compostos por outros elementos). Uma linguagem de programação é associada à rede, permitindo customizar o controle dos disparos das transições, realizar operações nas informações das fichas removidas e atuar na geração de informações dos lugares de entrada. Também podem ser construídas subredes, formando modelos hierárquicos, potencializando a segmentação e contextualização de partes da estrutura global da rede.

Dentre as redes de alto nível, destacam-se as redes de Petri coloridas (RPC), que são atualmente as mais usadas no mundo e foram, por isso, empregadas no presente trabalho (JENSEN, 1997).

As redes de Petri coloridas (RPC) são formadas por uma 9-tupla que pode ser representada por RPC = (P, T, A, Σ, V, C, G, E, I), em que:

- P é um conjunto finito de lugares.
- T é um conjunto finito de transições.
- A é um conjunto de arcos direcionados ligando lugares a transições e transições a lugares.
- Σ é um conjunto finito de conjuntos de cores não vazio.
- V é um conjunto finito de variáveis do tipo Σ.
- C é a função que atribui um conjunto de cores a cada lugar da rede.
- G é a função que atribui uma guarda a cada transição da rede.
- E é a função que atribui uma expressão a cada arco da rede.
- I é a função de inicialização que atribui uma marcação inicial aos lugares.

Neste trabalho é utilizada uma ferramenta automatizada, para modelagem e análise de RPC, denominada *CPNTools*[10], que é gratuita para instituições educacionais e de pesquisa.

4.3 Uso de RPs para a Modelagem de Processos Matemáticos

As RPs, embora criadas com o objetivo de modelar sistemas a eventos discretos, podem ser usadas para modelar seqüências de ações ou atividades de qualquer natureza. Como exemplo, cita-se o emprego de RPs como ferramenta de apoio à modelagem de processos de negócios, mais precisamente, como tecnologia de gerenciamento *workflow* (PÁDUA *et al.*, 2004; AALST, 1998). Outros exemplos dizem respeito a sua utilização como ferramenta de modelagem de processos ligados ao ensino e à aprendizagem (PARK e KIM, 2008).

No âmbito deste trabalho, a motivação de modelar por redes de Petri surgiu originalmente do fato de ser a matemática, segundo Russel (2007), uma ciência que se confunde com a lógica. Neste sentido, sendo os eventos relacionados em uma RP de maneira lógica, percebeu-se que as suas propriedades podem ser satisfatoriamente aproveitadas para a representação de conceitos e de processos matemáticos.

Relativamente ao modelo apresentado neste Capítulo, observa-se que as fichas definidas em suas redes contêm estruturas que armazenam os atributos significativos

[10] Disponível em: http://wiki.daimi.au.dk/cpntools/_home.wiki

selecionados para o problema em estudo. Várias "cores" podem ser adotadas para os lugares da rede ou pode-se trabalhar com apenas uma. A convenção para a representação da ficha deve ser especificada de maneira não ambígua, indicando o significado de cada campo da estrutura utilizada.

As transições representam as operações, que podem ser definidas em um alto nível de abstração, quando, em geral, podem ser desdobradas em sub-redes, detalhando uma operação contextualizada dentro de um sub-processo.

É importante notar que a modelagem aqui realizada não se trata de um tutorial para a resolução de um problema e nem do desenvolvimento de sua solução em si. O objetivo é oferecer um suporte estrutural no qual, de maneira especial, os professores e, eventualmente, os alunos, possam visualizar, em diversos níveis de abstração, devido à hierarquização da rede, os conceitos necessários para o desenvolvimento de seu planejamento didático.

Destaca-se, especialmente, em um planejamento didático, a elaboração do material de ensino. Segundo Ausubel (MOREIRA, 1999), uma das condições para a ocorrência de aprendizado é que ele seja organizado de forma *potencialmente significativa* para o aluno, sendo as novas idéias expostas de maneira não arbitrária e de tal forma que a sua natureza possua significação lógica para poder se relacionar a idéias que estão dentro do domínio da capacidade humana de aprendizagem (PONTES, 2006). Neste caso, o conteúdo e a organização do material a ensinar devem ser vinculados aos conhecimentos prévios dos alunos aos quais ele se dirige. Para ressaltar essa condição para a aprendizagem, no modelo proposto, os conhecimentos necessários à execução de uma operação são representados por quadrados coloridos, em forma de legenda, nas proximidades da transição que representa essa operação (ver Figura 4-4 e Figura 4-5). As informações associadas às legendas podem servir de orientação ao professor sobre quais conhecimentos prévios deve ter o aluno para compreender o que vai ser ensinado.

Delineadas algumas características das redes, propõe-se, na seção 4.5, um modelo em Redes de Petri Coloridas para analisar a integrabilidade de funções. Representam-se, de maneira lógica e significativa, diversas conexões entre as integrais de Cauchy, de Riemann e de Lebesgue. Ressalta-se que, normalmente, estas integrais são ensinadas separadamente, em disciplinas distintas, e nesta ordem. O interesse reside em visualizar a integrabilidade pela perspectiva da generalização, dificilmente alcançada por meio de um ensino fragmentado. Antes de passar ao modelo, entretanto, apresentam-se na próxima seção as definições matemáticas das integrais de Cauchy, de Riemann e Lebesgue.

4.4 Definições das Integrais de Cauchy, de Riemann e de Lebesgue

As definições de cada uma das integrais de Cauchy, de Riemann e de Lebesgue assumem aparências variadas, porém, equivalentes, em diversos livros de matemática. A escolha por uma ou outra apresentação da definição se deve, por vezes, a uma melhor adaptação ao contexto matemático no qual se está trabalhando.

Como exemplo, apresentam-se dois formatos de definições para a integral de Riemann constantes nos livros do Rudin (1976) e do Royden (1971).

<u>Definição do do livro do Rudin</u>

Seja f uma função real, limitada e definida em um intervalo $[a,b]$. *Correspondente a cada partição P de* $[a,b]$*, denota-se:*

$$M_i = \sup f(x),\ x_{i-1} \le x \le x_i \quad e \quad m_i = \inf f(x),\ x_{i-1} \le x \le x_i$$

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad e \quad L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

e definem-se as integrais superior e inferior de f, respectivamente, por:

$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf U(P,f) \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} f dx = \sup L(P,f)$$

onde o inf e o sup são calculados sobre todas as partições P de $[a,b]$.

Se as integrais superior e inferior forem iguais diz-se que f é Riemann integrável em $[a,b]$ *e denota-se este valor comum por*

$$\int_a^b f\,dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

o qual é a integral de Riemann de f em [a,b].

<u>Definição do Royden</u>

Para alguma subdivisão de $[a,b]$ e algum conjunto de constantes c_i, *uma função escada* φ *definida em* $[a,b]$ *tem a seguinte forma:*

$$\varphi(x) = c_i,\ \ \xi_{i-1} < x < \xi_i$$

Sua integral é definida por: $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi_i - \xi_{i-1})$

Neste caso, definem-se as integrais superior e inferior de f, respectivamente, por:

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf \int_a^b \varphi(x)\,dx\text{, para toda função escada } \varphi(x) \geq f(x)$$

e

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup \int_a^b \varphi(x)\,dx\text{, para toda função escada } f(x) \geq \varphi(x).$$

Caso as integrais superior e inferior sejam iguais, diz-se que f é Riemann integrável e que o valor comum é igual à integral de Riemann de f em [*a,b*].

Na dimensão na qual é realizada esta pesquisa, escolheram-se definições compatíveis com o nível de conhecimentos dos alunos envolvidos, cujos elementos formadores da definição pudessem ser manipulados por eles. Procurou-se, contudo, não entrar em contradição com o campo da ciência matemática e nem se afastar do saber tradicionalmente ensinado nas disciplinas de CDI de primeiro ano da universidade.

Normalmente, é a seguinte definição de integral, denominada integral definida, que é encontrada em livros texto de CDI mais adotados (ver seção 6.3):

<u>Definição extraída do livro do Leithold (1994)</u>

Se f é definida em um intervalo fechado [*a,b*], *então a integral definida de f, de a até b, denotada por* $\int_a^b f(x)\,dx$, *é dada por*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x\text{, se o limite existir}$$

onde Δ *representa uma partição do intervalo* [*a,b*] *e* ξ_i *um número de cada subintervalo da partição.*

O inconveniente desta definição está ligado ao fato de envolver todas as partições do intervalo [*a,b*] e todas as possíveis escolhas para os números $\xi_i \in [a,b]$. Além disso, este limite não tem a mesma conotação do limite de uma função real ensinado anteriormente na disciplina de CDI. Questões relacionadas à existência da integral tornam-se, também, difíceis de ser representadas e interpretadas no nível de conhecimentos dos alunos de primeiro ano.

Por esses motivos, optou-se por se viabilizar o estudo da integral (fazendo adaptações ao ensino) por meio das somas superior e inferior de Riemann. Para a modelagem do processo de análise da integrabilidade por redes de Petri, descrita neste Capítulo, escolheram-se os elementos descritos a seguir.

Inicialmente, definiram-se as aqui denominadas somas inferior e superior de Cauchy, que são, na verdade, uma adaptação das somas de Riemann para o caso de funções contínuas.

<u>Definição de Somas de Cauchy</u>

Sejam $f:[a,b]\rightarrow R$ *uma função contínua e P uma partição do intervalo* $[a,b]$*. As somas de Cauchy superior* S_P *e inferior* s_P *de f relativas à partição P são definidas por:*

$$S_P=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta_i x \quad e \quad s_P=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta_i x$$

onde n representa o número de sub-intervalos da partição, M_i *e* m_i *representam, respectivamente, o Valor Máximo Absoluto (VMA) e o valor mínimo absoluto (vma) de f em cada subintervalo i da partição P.*

Remarca-se que, nas condições acima, a existência de S_P e de s_P está garantida pelo Teorema do Valor Extremo (TVE) (ou de *Weierstrass*), cujo ensino é parte integrante de, praticamente, toda disciplina de CDI de primeiro ano.

<u>Definição de Integral de Cauchy</u>

Seja (P_n) *uma sequência de partições de um intervalo* $[a,b]$*, na qual* $\|P_n\|\rightarrow 0$*. A integral de Cauchy de f em* $[a,b]$*, denotada por* $\int_a^b f(x)\,dx$*, é definida por:*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\rightarrow+\infty}S_{P_n} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\rightarrow+\infty}s_{P_n}.$$

Observa-se que esta definição: envolve limite de sequências de números reais; possibilita o cálculo de valores aproximados para a integral; os elementos envolvidos podem ser interpretados em vários quadros matemáticos; e permite uma passagem mais natural na direção de uma generalização desse conceito, alcançada por meio da definição de integral de Riemann.

Definição de Somas de Riemann

Sejam $f:[a,b]\to R$ *uma função limitada e P uma partição do intervalo* [*a,b*]. *As somas de Riemann superior* S_P *e inferior* s_P *de f relativas à partição P são definidas por:*

$$S_P=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i x \qquad e \qquad s_P=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i x$$

onde n representa o número de sub-intervalos da partição, M_i *e* m_i *representam, respectivamente, os valores supremo e ínfimo de f em cada subintervalo i da partição P.*

Remarca-se que a existência das somas de Riemann está garantida pelo fato de ser *f* limitada.

Definição de Integral de Riemann

Sejam (P_n) *uma sequência de partições de um intervalo* [*a,b*], *na qual* $\|P_n\|\to 0$, *e* $f:[a,b]\to R$ *uma função limitada. As integrais superior e inferior de f são denotadas por* $\overline{\int_a^b} f dx$ *e* $\underline{\int_a^b} f dx$, *respectivamente, e definidas por:*

$$\overline{\int_a^b} f dx=\lim_{n\to+\infty} S_{P_n} \qquad e \qquad \underline{\int_a^b} f dx=\lim_{n\to+\infty} s_{P_n},$$

onde S_{P_n} *e* s_{P_n} *representam as somas de Riemann superior e inferior de f relativas à partição* P_n.

Caso as integrais superior e inferior sejam iguais, diz-se que f é Riemann integrável e que o seu valor comum é igual à integral de Riemann de f em [*a,b*].

Na definição da integral de Riemann, estão envolvidas noções mais gerais, relativamente à integral de Cauchy – portanto, mais abstratas –, tais como função limitada, supremos e ínfimos.

Um nível ainda mais elevado de generalização da noção de integral pode ser alcançado por meio da definição da integral de Lebesgue. Embora, ela não tenha sido discutida com os alunos, algumas questões levantadas em sala de aula relativas à medida de um subconjunto do plano, a não existência da integral de Riemann, por exemplo, conduziram a uma indagação sobre a possibilidade de existência de um processo de integração mais abrangente.

Na modelagem do processo de análise da integrabilidade, considerou-se a definição da integral de Lebesgue enunciada a seguir (dentre outras) e extraída do livro do Royden (1971).

Antes de se enunciar essa definição, definem-se função característica e função simples.

<u>Função Característica</u>

Uma função é dita característica quando assume o valor "um" em um subconjunto mensurável e zero fora dele.

<u>Função Simples</u>

Uma função é dita simples quando pode ser representada por uma combinação linear de funções características.

<u>Definição da Integral de Lebesgue</u>

Se f é uma função mensurável, limitada e definida em um conjunto mensurável E, define-se a integral de Lebesgue de f sobre E por

$$\int_E f(x)\,dx = \inf \int_E \psi(x)\,dx, \textit{ para toda função simples } \psi \geq f .$$

Observa-se que vários conceitos novos estão presentes nesta definição, tais como, função mensurável, conjunto mensurável, função simples e, de forma não explícita, função característica. Além disso, lendo apenas estas linhas não é possível de se perceber nenhuma relação entre as integrais de Riemann e de Lebesgue de uma função $f:[a,b] \to R$, nem de visualizar o processo de integração de Lebesgue relacionado ao cálculo de medidas de imagens inversas de intervalos cuja união contém o conjunto imagem de *f*.

4.5 Representação da Análise da Integrabilidade por RPs Coloridas

Nesta seção, apresenta-se uma conexão de um conjunto de informações dispersas em vários textos de livros ou artigos concernentes à construção do conceito de integral. A formação deste conceito é considerada pelo viés da análise da integrabilidade das funções reais relativamente às integrais de Cauchy, de Riemann e de Lebesgue.

Observa-se que um primeiro curso de integral deixa no aluno, em geral, a *certeza* de que todas as funções são não apenas integráveis à Riemann, mas têm primitivas. Logo, assumindo o lugar de um aluno de primeiro ano, analisar a integrabilidade de uma função parece desnecessário. Isto ocorre porque, de um modo geral, a representação que se tem de uma função é a de que ela é não apenas contínua, mas suave em todos os pontos, portanto, integrável. Porém, no universo das funções reais, a quantidade de funções suaves é muito inferior à de funções descontínuas em todos os pontos de seu domínio (CHEN e SMITH, 2008), que, neste caso, não são integráveis à Riemann. Este fato, contrário à intuição, já justifica a necessidade de se fazer tal análise.

Na modelagem da integrabilidade ora proposta, parte-se de uma função f real e limitada, definida em um intervalo fechado da reta, ou seja:

$$f \in \mathfrak{F}, \text{ onde } \mathfrak{F} = \{g : [a,b] \to R;\ g \text{ é limitada}\}$$

Em princípio, não é feita nenhuma outra restrição sobre f. Pretende-se integrar f, caso seja possível, por Cauchy, por Riemann ou por Lebesgue. Para isso, à medida que f vai percorrendo a rede, uma análise de suas propriedades, relativas a sua continuidade, é realizada para indicar o melhor caminho a seguir.

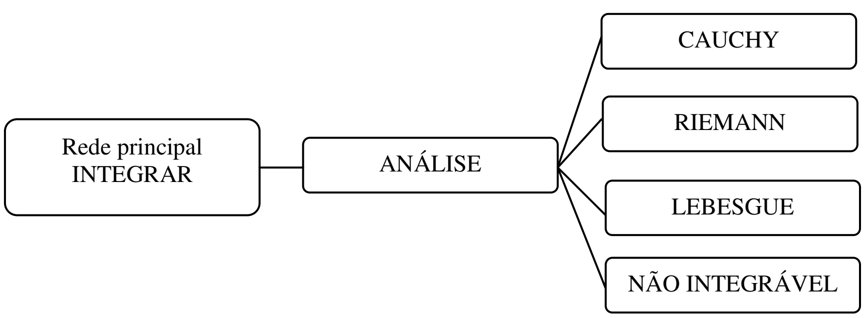


Figura 4-3 – Hierarquia das Sub-Redes representativas do Processo de Análise da Integrabilidade.

Um modelo hierárquico foi construído para representar o conjunto de etapas constituintes do processo de análise da integrabilidade de uma função *f* real. A Figura 4-3 apresenta de maneira esquemática a hierarquia das sub-redes que compõem o modelo.

Na RP, são considerados, portanto, três processos de integração de uma função: integração por Cauchy, por Riemann ou por Lebesgue.

A Rede Principal é apresentada na Figura 4-4, onde se pode ter uma idéia geral dos passos realizados da análise à resolução da Integral de uma função *f*.

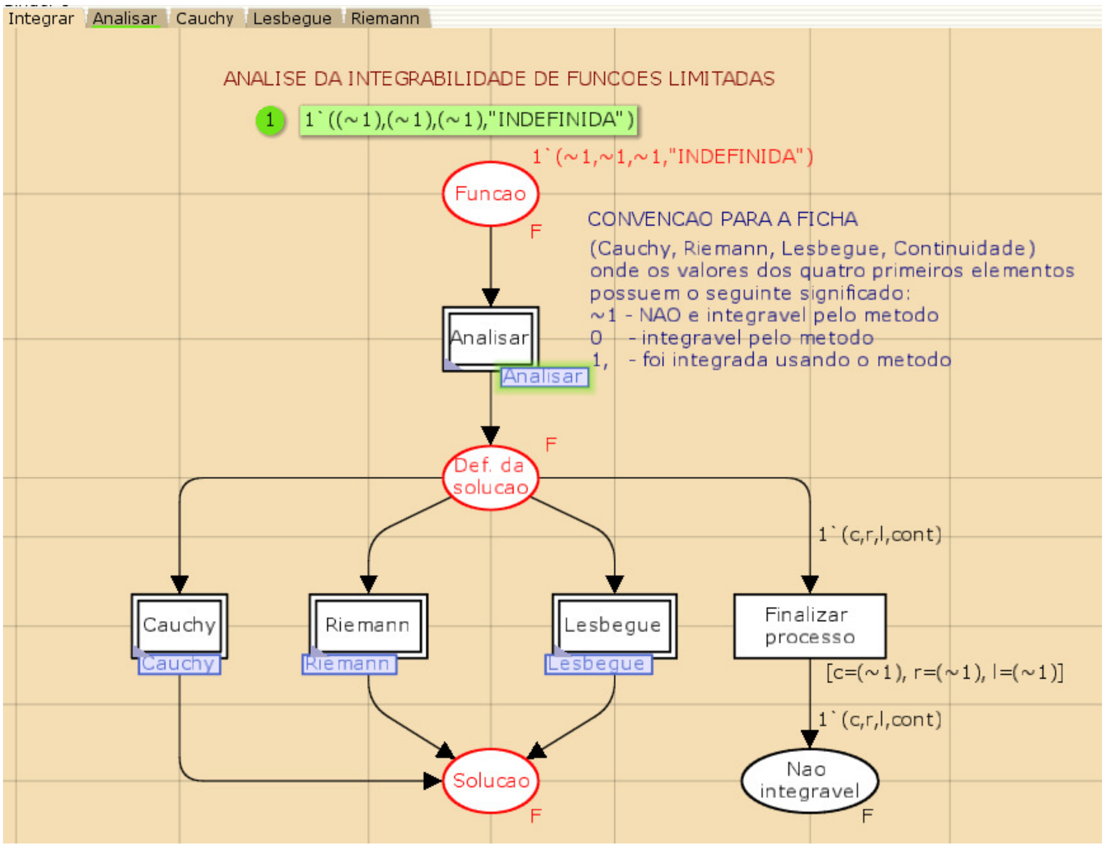


Figura 4-4. Rede Principal apresentando a hierarquia que contém a análise da integrabilidade e o cálculo das integrais.

Na RP da Figura 4-4, ao passar pela *transição Analisar*, a função é submetida a uma análise de propriedades que vão de condições mais restritivas, como a continuidade, a condições mais gerais, como a mensurabilidade. São condições que permitem a integração por Cauchy (C), por Riemann (R), por Lebesgue (L) ou por nenhum deles. Neste processo, a noção de integral vai se estendendo a uma definição mais geral e, ao mesmo tempo, de menor compreensão.

Todas as transições da Rede principal apresentada na Figura 4-4, exceto a transição nomeada "Finalizar processo" são chamadas de **transições de substituição**. Representada por um retângulo de moldura dupla, uma transição de substituição indica que o processo a ela associado é modelado em uma sub-rede, portanto, representado independentemente. No modelo proposto, as quatro sub-redes são modeladas para descrever as etapas necessárias para: verificar a integrabilidade da função (transição "Analisar"), integrar *f* por Cauchy, integrar *f* por Riemann e integrar *f* por Lesbegue.

A sub-rede apresentada na Figura 4-5, relativa à transição de substituição "Analisar" da Figura 4-4, representa a execução da análise da função *f*.

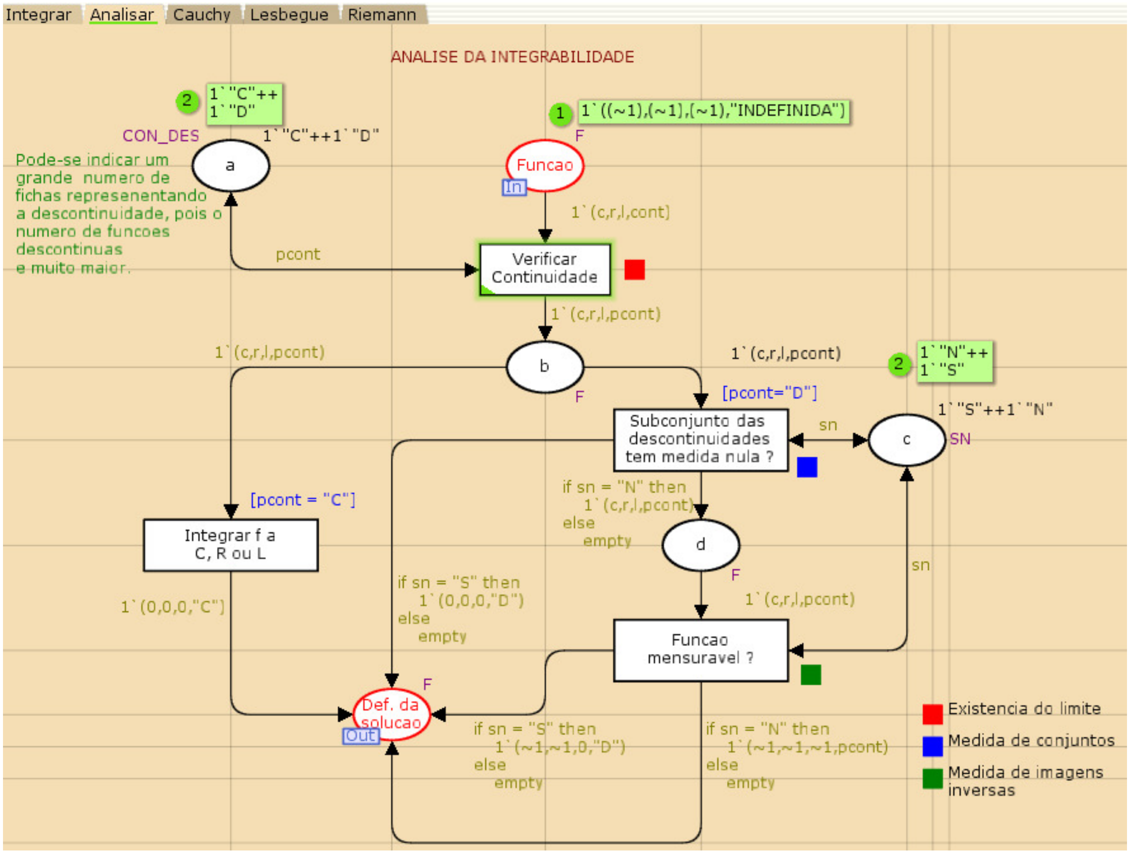


Figura 4-5. Sub-rede apresentando os passos para a análise da integrabilidade.

Do conjunto $\mathfrak{F}$, retira-se, de maneira aleatória, uma função *f*, representando a escolha arbitrária de uma função num conjunto infinito de possibilidades. Na abstração aqui utilizada, esta função visita vários lugares da rede que são interligados por caminhos, em que cada caminho é representado por uma transição. Em cada transição à qual *f* é submetida, é realizada a análise de alguma condição que indicará qual ou quais os lugares ela deve visitar para que possa ser integrada.

A ficha que representa a função *f* que percorre a rede possui uma estrutura composta de quatro campos: três campos de valor inteiro e uma string de caracteres. Os três primeiros campos representam, respectivamente, a possibilidade de a função ser integrada por Cauchy, Riemann e Lesbegue. Para isso, convencionou-se o seguinte significado para os valores desses campos:

- **(~1)** – a função ainda não foi analisada para este método;
- **(0)** – a função foi analisada para este método, podendo ser integrada por ele;
- **(1)** – a função foi analisada para este método e verificou-se que não é possível ser integrada por ele.

O quarto e último campo representativo da função *f* em análise indica se a mesma é contínua ou não, podendo assumir os valores "INDEFINIDA", se ainda não foi verificada, "C", quando se trata de uma função contínua, ou "D", caso seja uma função descontínua.

Enfatiza-se que, no lugar inicial, chamado de "Função" na rede da Figura 4-3, as únicas condições impostas à função *f* são que ela seja limitada e definida em um intervalo fechado e limitado da reta.

Ao sair deste lugar, *f* segue um caminho que a leva a uma sub-rede na qual é feita uma análise da sua continuidade. Usando a extensão proposta para representar os conhecimentos envolvidos em cada parte do processo, o ícone (quadrado vermelho) na transição "Verificar Continuidade" indica, conforme o texto associado na legenda, a necessidade de conhecimentos sobre existência do limite. Verificada a continuidade de *f*:

- Caso *f* seja contínua, ela passa por uma transição que informa que ela pode ser integrada por C, R ou L, indicando Cauchy, Riemann e Lesbegue. Escolhe-se um destes métodos, integra-se *f* e o processo termina para esta função e, subindo na hierarquia da rede, retorna-se à rede ilustrada na Figura 4-4.
- Caso contrário, *f* passa por uma transição que faz uma análise do seu tipo de descontinuidade ("Subconjunto das descontinuidades tem medida nula?"). Para isso, o ícone azul indica a necessidade de conhecimentos sobre medidas de subconjuntos da reta. A saída dessa transição é condicional, como mostram as instruções escritas nos seus arcos de saída. Tais condições verificam:

- Se *f* for contínua em quase todo ponto (qtp), quer dizer, se o conjunto de seus pontos de descontinuidade tem medida nula, ela pode ser integrada por R ou L. Neste caso, remonta-se a ao nível superior da rede, onde escolhe-se o método, integra-se a função e o processo termina.
- Caso contrário, ela vai para o lugar "d" guardando a informação sobre a sua descontinuidade qtp. Na subrede da Figura 4-5, essa condição é simulada aleatoriamente pela retirada de uma das fichas do lugar "c". Do lugar "d", *f* percorre uma transição que faz uma análise da sua mensurabilidade. Para essa verificação, é necessário o conhecimento sobre medida de imagens inversas de intervalos, como indica o ícone verde associado à transição "Função Mensurável?". A análise para essa transição procede da seguinte maneira:
  - Sendo *f* mensurável, garante-se a sua integrabilidade por L e, novamente, remonta-se ao nível superior da hierarquia, integra-se a função e acaba o processo.
  - Caso contrário, *f* não pode ser integrada por C, por R e nem por L. Tais informações são configuradas na ficha e, no nível superior da hierarquia da rede, finaliza-se o processo para *f*.

Note-se que na RP da Figura 4-5, está estruturada a forma como o conceito de integral foi evoluindo a partir de noções mais básicas (porém, não tão simples), como a de continuidade, a noções mais gerais, como a de mensurabilidade. Além disso, é possível extrair da rede alguns resultados importantes como:

"Se $f \in \mathfrak{F}$ for contínua, então *f* é integrável a C, R e L."

"Se $f \in \mathfrak{F}$ for descontínua qtp, porém, mensurável, então *f* é integrável à Lebesgue."

Destes dois resultados, pode-se questionar, por exemplo, sobre a veracidade de suas recíprocas ou, ainda, se funções contínuas são necessariamente mensuráveis. E assim, grande parte da teoria vai sendo construída à medida que se transita pela RP.

Representa-se, na Figura 4-4, a sub-rede na qual se processa uma integração de uma função usando Cauchy. Optou-se por apresentar aqui apenas este procedimento, e não R ou L, por ser a integral de Cauchy a mais conhecida. Ela é, em geral, a única integral a ser, pelo menos parcialmente, abordada em uma primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (BARROSO *et al.*, 2007).

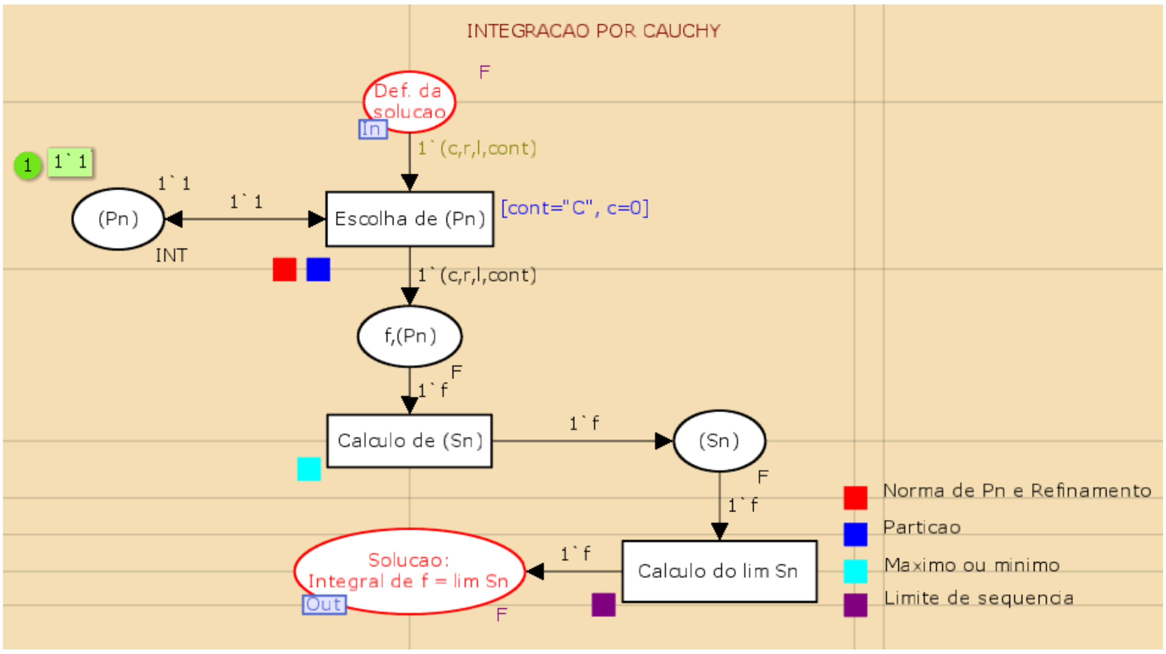


Figura 4-6. Rede representativa da Resolução por Cauchy.

Destaca-se que, embora haja uma grande concentração de informação nas redes expostas, a modelagem ora apresentada pode ser vista como uma representação sintética, mas sem ambigüidades, do estudo histórico-epistemológico-científico sobre o conceito de integral que foi realizado para dar suporte matemático a esta pesquisa.

4.6 Redes de Petri x Mapas Conceituais

Devido as suas características gráficas e esquemáticas, a linguagem proposta nesta pesquisa para o uso de Redes de Petri em contextos educacionais relaciona-se em alguns aspectos aos Mapas Conceituais (MPs), outra ferramenta bastante usada no meio educacional para representar conceitos, não apenas matemáticos, e suas associações. Faz-se necessário, portanto, uma comparação conceitual entre RPs e MPs.

Os MPs são apropriados para organizar e representar conhecimentos através de uma linguagem simples (Novak, 2006). Em um mapa conceitual, os conceitos são colocados em caixas elípticas ou retangulares que, quando relacionados entre si, são conectados por segmentos. Quando necessário, pode-se descrever textualmente essa relação. No entanto, as funcionalidades representadas nas caixas têm caráter temporal constante.

Diferentemente dos Mapas Conceituais, uma RP pode ser usada também para modelar sistemas dinâmicos, percebendo-se de maneira não ambígua as pré e pós-condições associadas a uma transição. A cada instante, as fichas depositadas nos lugares da rede determinam o estado do sistema, o que não é representável usando mapas conceituais. Em um mapa conceitual, as conexões não indicam caminhos, mas associações lógicas entre conceitos, que podem ser representadas diferentemente para cada indivíduo em função da sua estrutura cognitiva.

Portanto, a organização de certas noções por meio de RP se torna importante quando propriedades da RP, por exemplo, conflito, tomada de decisão, dinâmica, podem ser identificadas com as funcionalidades do processo de construção do conteúdo envolvido.

Enquanto os mapas conceituais objetivam representar a estrutura cognitiva do indivíduo e a maneira como o mesmo inter-relaciona os conceitos adquiridos, as RPs, da forma como se propõe neste trabalho, fazem a abstração das operações necessárias aos processos de construção ou de resolução de problemas matemáticos. São evidenciados os momentos de aplicação dessas operações e, eventualmente, a presença de abordagens alternativas ou a existência de subproblemas. Para cada operação, registram-se os requisitos, em termos de conhecimentos, necessários a sua realização. Não se trata, portanto, de um modelo da estrutura cognitiva de aprendizes, embora possa ser utilizado como organizadores prévios para facilitar a associação lógica entre conteúdos.

Deve-se deixar claro que a breve comparação feita aqui não tem por intuito minimizar a importância do uso de mapas conceituais no ensino/aprendizado, mas de oferecer ao professor outra alternativa de ferramenta de apoio que, em determinados contextos, pode levar a resultados mais eficazes.

4.7 Conclusões

Segundo D'Amore (2005), um conceito está permanentemente em fase de construção e, nesta construção, encontra-se a parte mais problemática e mais rica de seu significado. No contexto da sala de aula, elaborar a construção de uma noção não trivial quanto a de integral não se constitui, portanto, em uma tarefa fácil. Entretanto, o domínio do conteúdo por parte do professor corresponde a um dos pressupostos para que esta tarefa seja bem cumprida. De acordo com Pais (2001), quando um sujeito passa a ter um domínio sobre um determinado saber, é possível desencadear uma ação mais transformadora, geradora de novos saberes. Saber não é, contudo, suficiente, é preciso ouvir, interagir. Neste sentido, nas diversas sessões didáticas desta pesquisa, na medida em que os conteúdos de CDI introduzidos em sala de aula iam abrindo portas para que os alunos fizessem questionamentos mais abrangentes e, por vezes, inesperados, foi surgindo a necessidade de se recorrer a um conhecimento matemático mais generalizado, adaptando-o sempre a situações que fossem mais compreensíveis para o aluno.

Além de ouvir, interagir e conhecer, é importante registrar de maneira mais sistemática o saber visado para o ensino. Este fato justifica a modelagem por redes de Petri realizada neste trabalho.

Uma quantidade muito grande e imprescindível de informações sobre o conceito de integral está organizada nas RPs deste trabalho. Para tanto, foram feitas pesquisas em livros que tratam de conteúdos de CDI, de análise real, de teoria da medida, de história da matemática, dentre outros. Observa-se também, nas redes apresentadas neste Capítulo, que a organização dos conteúdos carrega em si uma forma de raciocinar sobre os objetos matemáticos que é tipicamente inerente ao campo de conhecimentos da matemática. Percorrendo, por exemplo, a RP da Figura 4-5, podem-se enunciar os seguintes teoremas avançados da teoria de integração:

Se $f:[a,b]\rightarrow R$ *é uma função limitada e mensurável então f é integrável à Lebesgue.*

Se $f:[a,b]\rightarrow R$ *é uma função limitada e contínua qtp então f é mensurável.*

Proposições desse nível guiaram a pesquisa no momento da concepção das seqüências de ensino, pois transportam informações que dão pistas sobre as origens do conceito de integral e os prováveis obstáculos motivadores de uma busca por uma generalização deste conceito. Para relacionar a situações que fizessem elos com os conhecimentos dos alunos, elaborou-se uma abordagem para a sala de aula que considerasse a medida de segmentos como uma das idéias geradoras do conceito de integral, evoluindo com a descoberta de novos números, passando pela invenção de diversos ramos da matemática até alcançar o nível de abstração de um conjunto plano, limitado e não-mensurável.

Com o intuito de contribuir, de uma maneira mais geral, com uma sistemática que auxilie o professor na organização de conteúdos complexos, tais como os conceitos de cálculo, interligando-os de forma matematicamente coerente e tornando-os mais acessíveis ao professor, propõe-se a introdução de Redes de Petri como uma ferramenta de organização de material de ensino, considerando-se suas características dinâmicas e a forma como conteúdos podem ser organizados em uma rede. Todavia, é bastante provável que, sozinho, o professor de matemática não consiga realizar todos os passos para a sua implementação, pois, para se elaborar a modelagem deste trabalho, contou-se com a participação de um profissional de informática, de um matemático, de um especialista em RP, de um profissional de Educação Matemática e, para dar sentido à pesquisa, de um professor atuando em sala de aula.

O modelo por RP proposto refere-se a conteúdos matemáticos. Porém, sendo esta pesquisa realizada no âmbito da engenharia e sendo ferramentas de modelagem, tais como as redes de Petri, bastante familiares aos engenheiros, a sua utilização pelo professor-engenheiro para a organização de seu material de ensino em disciplinas específicas da engenharia seria de mais fácil implementação e também ensejaria um aporte significativo no caso de conteúdos que, da mesma forma que em matemática, pudessem se beneficiar das propriedades das RPs.

Apresentado, neste Capítulo, um resumo do estudo realizado sobre integral, conceito sobre o qual foi construído o modelo de ensino aqui proposto, relata-se, na seção seguinte, uma seqüência de ensino do conceito de limite, representando a forma como este conceito está implicado nesta pesquisa.

5 O Conceito de Limite no Contexto desta Pesquisa

5.1 *Introdução*

Embora o principal objeto matemático implicado nesta pesquisa seja a noção de integral, tem sido reforçada ao longo de todo este texto a imbricação desta noção com os demais conceitos-chave de CDI. Tem-se enfatizado ainda que o ensino das outras noções, na ordem em que é geralmente estruturado, deve preparar o terreno para o ensino do conceito de integral.

Foi na disciplina de Cálculo Fundamental, durante o ensino do conceito de limite, que surgiu a necessidade de se propor uma abordagem dos conceitos de CDI que fizesse uma interligação entre as linguagens intuitiva e formal, estendendo-se a todos os conceitos.

A curiosidade dos alunos e a inquietação recorrente, tanto em 2005 quanto em 2006, com a presença dos épsilons e deltas nos livros de CDI levaram a se refletir sobre a possibilidade de incorporar, não de forma isolada, um pouco de rigor ao ensino de CDI. Considerando a maturidade intelectual desses alunos e planejando o ensino com base em seus conhecimentos prévios, resolveu-se implementar esta idéia. A primeira tentativa foi feita por meio do ensino do conceito de limite, testando a capacidade do aluno em aceitar e compreender essa linguagem.

Relata-se nesta seção uma experimentação sobre limite, realizada em 2006, com o objetivo de fazer o aluno atentar para a necessidade de sua definição formal, na medida em que as definições intuitivas apresentadas, embora cada vez mais abrangentes, eram percebidamente restritivas. Neste ano, ocorreu no ensino uma leve mistura entre rigor e intuição, a qual já fez parte da preparação para a aplicação das seqüências didáticas relativas ao conceito de integral.

Essa experimentação sobre limite foi reaplicada em 2008 com modificações decorrentes da análise da experimentação de 2006. Desta vez, a linguagem formal foi integrada ao ensino.

Enfatiza-se ser indispensável ouvir os alunos. Embora em 2005 tenha sido realizado um ensino basicamente intuitivo, em todos estes três anos em sala de aula, eles cobraram uma justificativa para a existência de tal definição de limite, tão complexa e incompreensível, mas presente. Alguns queriam apenas um bom motivo para se livrar do peso de estudá-la, outros se sentiam enganados ao se fingir que ela não existia. Foi também esta uma das razões que motivaram a busca por um caminho matemático conectando as duas definições.

5.2 Limite: Definição Intuitiva versus Definição Formal

Semelhantemente ao ensino de integral, em geral, no Brasil, é na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), do primeiro ano de universidade, que o estudante tem pela primeira vez conhecimento da noção de limite. A disciplina de CDI pode ser caracterizada pelo estudo de propriedades de funções reais ligadas aos processos de limite e pelo fato de seu conteúdo apoiar-se sobre quase todo o saber escolar ensinado aos alunos até então.

Segundo Cornu (1991), o conceito de limite é uma noção particularmente difícil, que envolve raciocínio típico de matemática avançada. Como fundamento para a teoria das aproximações, da continuidade, do Cálculo Diferencial e Integral, ele ocupa uma posição central que permeia toda a análise matemática.

A definição formal de limite, tal qual se encontra hoje nos livros de análise real e em alguns livros de CDI, usando épsilons e deltas, é conseqüência de mais de um século de tentativas e erros, e expressa, em pouquíssimas palavras, o resultado de um esforço persistente para formular este conceito sobre uma base matemática aceitável (COURANT, 1978). Todo este empenho para elaborar uma definição precisa para o conceito de limite, dando-lhe assim o status de *objeto* (DOUADY, 1986) do saber matemático, reside, em grande parte, na necessidade de transmiti-lo e de manipulá-lo matematicamente de forma coerente e sem ambigüidades.

Devido à complexidade do conceito de limite, da dificuldade em apreendê-lo e, certamente, em ensiná-lo é que, em geral, os livros de CDI apóiam-se sobre abordagens intuitivas, que utilizam uma linguagem natural em sua construção. Percorrendo a história do limite, desde os paradoxos de Zenon, no século V a.C., até Cauchy, no século XIX, considerado por muitos o primeiro matemático a apresentar uma boa idéia para uma definição formal de limite (KLEINER, 1989), constata-se que, apesar de a construção desse conceito estar arraigada a uma linguagem natural, existe uma discrepância entre a idéia intuitiva e a linguagem formal (COURANT, 1978) utilizada em sua definição. Logo, a sua origem pode justificar, em parte, o tratamento apenas intuitivo de limite presente em alguns livros.

Discutem-se aqui alguns pontos relevantes do problema do ensino/aprendizado do conceito de limite ora apoiado sobre uma abordagem intuitiva, ora sobre a sua definição formal. Essa análise tem como motivação o fato de ser possível para um aluno obter excelente desempenho na disciplina de CDI, ser capaz de resolver praticamente todos os exercícios propostos pelo livro texto, sem, no entanto, entender o conceito de limite, de onde derivam todas as definições principais do Cálculo. Além disso, tanto em 2005 quanto em 2006, houve várias manifestações de alunos incomodados ou curiosos relativamente à presença dos épsilons e deltas nos livros de cálculo. Portanto, este trabalho é, de certa forma, uma reivindicação do aluno.

Apresentadas as motivações deste Capítulo, a seção 5.3 resume a problemática aqui tratada; a seção 5.4 apresenta os procedimentos metodológicos utilizados; uma análise das dificuldades das abordagens formal e intuitiva é feita na seção 5.5; na seção 5.6, faz-se uma crítica sobre a abordagem do conceito de limite presente em dois livros de CDI; um relato de uma experimentação de ensino deste conceito em sala de aula é realizado na seção 5.7; a seção 5.8 discute a relação verdadeira entre aprendizado e bom desempenho no que se refere ao conceito de limite; as conclusões são apresentadas na seção 5.9; por fim, na seção 5.10, relata-se uma reaplicação desta seqüência em 2008.

5.3 Definição Formal ou Definição Intuitiva?

A problemática desta seção é centrada em questões que são freqüentemente levantadas, entre professores ou alunos de CDI, relativas à *definição formal* e à *definição intuitiva* (definição utilizando a linguagem natural) de limite ou questionamentos que surgiram com a prática de vários anos de ensino dessa disciplina em cursos de graduação. Seguem-se algumas destas questões.

Por que recorrer ao formalismo (tão complexo, do ponto de vista da aprendizagem) se, em geral, os objetivos constantes nos programas das disciplinas de CDI podem ser alcançados contornando-o? Por conseguinte, como resolver as prováveis ambigüidades, frutos de possíveis imprecisões, que podem surgir devido ao uso apenas da linguagem intuitiva em sala de aula?

Que suporte tem o professor brasileiro de CDI para construir juntamente com seus alunos o conceito formal de limite? Sua formação como professor de matemática, os livros de referência, a atual política educacional brasileira são fatores que têm contribuído para que o professor encontre soluções para problemas desta natureza que surgem em seu ensino?

Qual a implicação de uma abordagem intuitiva do conceito de limite no desempenho do aluno na disciplina de CDI e no aprendizado e sedimentação de seus conteúdos?

Na seção seguinte, são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados para investigar as dificuldades de um ensino apenas formal ou apenas intuitivo do conceito de limite e para justificar a necessidade de uma reflexão sobre a abordagem empregada pelos livros para o seu estudo.

5.4 Procedimentos Metodológicos

Além de elementos recolhidos ao longo dos anos em sala de aula durante a aplicação de disciplinas de matemática de primeiro ano da universidade, foram analisados alguns pontos relativos ao conceito de limite encontrado em dois livros texto freqüentemente adotados para o ensino de CDI no Brasil (ver seção 5.6). Adicionalmente, foi realizada uma experimentação com 37 alunos do primeiro ano do curso de graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, UFC.

A experimentação consistiu em trabalhar o conceito de limite de maneira intuitiva durante dez horas-aula, seguindo-se de uma investigação, em que, apresentada a definição formal de limite, pedia-se ao aluno para expressar por escrito a sua compreensão sobre esse conceito.

É relevante ressaltar que esses estudantes faziam parte de um grupo recém ingresso no bastante concorrido curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática da UFC. Tais alunos obtiveram um bom desempenho na prova de Matemática do concurso vestibular (ver Capítulo 3).

5.5 Dificuldades de uma Abordagem Intuitiva e Dificuldades de uma Abordagem Formal

Segundo Douady (1986), uma grande parte do saber matemático é criada por meio da resolução de problemas, por meio de conjecturas, dentro de situações bem contextualizadas nas quais a matemática assume seu papel de ferramenta. Quando esse saber é considerado de interesse da comunidade científica, ele é descontextualizado, despersonalizado para ser transmitido e re-trabalhado por outros. Isto significa que o surgimento de uma noção matemática pode também estar vinculado à necessidade de criar-se uma ferramenta, em algum momento da história, para a resolução de algum problema real, que pode, posteriormente, desligar-se do ciclo histórico que a criou para assumir um papel bem definido de objeto do saber científico.

Muito antes de assumir seu status de *objeto* formalizado do saber matemático, a *idéia de limite* foi utilizada como uma ferramenta na resolução de diversos problemas, em épocas e contextos diferentes, como o método da exaustão empregado por Eudoxo e Arquimedes, a.C., no cálculo de áreas. Newton utilizou também, no século XVII, a idéia de limite como uma aproximação para o cálculo de retas tangentes e de velocidades.

Segundo Legrand (2000) e de acordo com a Sequência Fedathi (2001), para que um aluno aprenda matemática de forma efetiva, ele deve tornar-se temporariamente um matemático e a sala de aula deve atuar como uma comunidade científica. Portanto, para que o aluno aprenda um conceito matemático como o de limite, por exemplo, é necessário que ele seja construído considerando-se a intuição, os erros, as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos em sua elaboração. Assim, para encontrar significação em um conceito matemático, é preciso, em muitos casos, vivenciar as condições experimentais nas quais ele foi formulado.

A linguagem natural empregada em alguns livros de CDI para abordar o conceito de limite tem por objetivo, provavelmente, torná-lo mais próximo das idéias que lhe deram origem. Porém, um ensino apoiado em uma abordagem apenas intuitiva desse conceito caracteriza-se como um *ensino realizado por metáforas* (BLOCH, 2000), que restringe o contexto no qual o conceito é trabalhado e onde todos os exemplos considerados têm uma determinada propriedade, o que dificulta a apresentação de contra-exemplos. Por exemplo, é comum o aluno "acreditar" que se a é um ponto de acumulação do domínio de uma função f, a não existência do limite de f em a está condicionada ao fato de os ***limites laterais existirem***, mas serem diferentes. Embora alguns livros de CDI apresentem um ou dois contra-exemplos da não existência de limites laterais, como o limite de $f(x) = sen(1/x)$ em *0*, a maneira pela qual o conteúdo é apresentado impede o aluno de atribuir um significado adequado ao conceito de limite e, conseqüentemente, de perceber os contra-exemplos que são termômetros de aprendizado.

5.6 Análise da Abordagem do Conceito de Limite em Alguns Livros

Nesta seção, são apresentados e analisados alguns dos pontos da abordagem do conceito de limite dos livros de CDI *Finney et al.* (2004) e *Leithold* (1986), os quais foram também discutidos em sala de aula com os estudantes de Engenharia de Teleinformática.

O livro Finney *et al.* apresenta a seguinte definição intuitiva para o conceito de limite no infinito:

Diz-se que *f(x)* tem o limite *L* quando *x* tende ao infinito (mais infinito) e escreve-se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se, à medida que *x* se distancia da origem no sentido positivo, *f*(*x*) fica cada vez mais próximo de *L*.

A seguir, Finney *et al.* faz o cálculo do limite $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, que se adapta perfeitamente a essa definição. Na página seguinte do livro, enuncia as regras para o cálculo do limite de uma função quando *x* tende a **+**∞ ou a **-**∞ e, nessa mesma página, calcula, usando estas regras, o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \frac{5}{3}$$

Ao lado deste cálculo, Finney *et al.* (2004) apresenta o gráfico de $f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$, ilustrado na Figura 5-1.

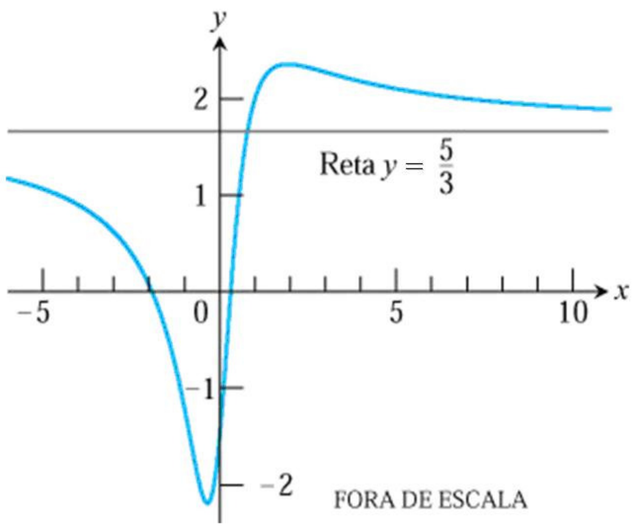


Figura 5-1. Gráfico extraído de Finney *et al.* (2004).

Essa *mudança de quadros* (do *quadro algébrico* para o *quadro gráfico*), que é sem dúvida enriquecedora do ensino, participa como uma forma de validação da aplicação das regras de cálculo. Porém, observa-se que o gráfico de *f(x)*, na Figura 5-1, representa uma situação que contraria a definição de limite no infinito apresentada por Finney *et al*. Assim, algebricamente, o limite de *f(x)* no infinito pode ser calculado, logo existe, mas esse limite não é um limite no infinito porque contraria a definição: observa-se que, no intervalo do domínio de *f* entre $x = 1$ e $x =$ *abscissa onde f assume seu valor máximo*, enquanto *x* se afasta da origem no sentido positivo, *f*(*x*) também se afasta do limite *5/3*.

Tal situação pode ser criadora de obstáculos, para a obtenção do conhecimento científico de limite, que dificilmente são percebidos pelo professor ou pelo aluno.

Quanto ao livro do Leithold, ele não se arrisca a descrever definições intuitivas e procura não apresentar contradições em seu texto. Quando descreve informalmente de um conceito, enfatiza que é apenas uma idéia.

Para introduzir a noção de limite de uma função em um ponto, vale-se de um exemplo numérico no qual elabora uma tabela onde o aluno percebe que à medida que a variável independente "tende" a um valor fixo, a imagem da função também "tende" a um valor fixo. A seguir, utiliza a linguagem de epsilons e deltas adaptada ao caso particular deste exemplo e escreve logo depois a definição formal de limite. Tenta "traduzir em palavras" essa definição antes de resolver alguns exercícios nos quais ela é utilizada para demonstrar a existência do limite.

Ressalta-se que o livro de Leithold, após apresentar a definição de limite, que já é extremamente difícil de ser compreendida, aplica-a imediatamente, como se fosse natural, na resolução de exercícios.

O que se observa nessa abordagem do livro do Leithold (1994) é que, embora o autor procure ser mais preciso em relação à definição de limite, o trabalho de construção para a aquisição da concepção fundamental desta noção não é realizado. Fica inteiramente a cargo do professor, que o adota como livro texto, fazê-lo ou ignorá-lo, e, neste último caso, apoiando-se apenas nas idéias intuitivas.

5.7 A Prática em Sala de Aula

As situações expostas acima refletem bem a dificuldade de construção, pelo ensino, do processo de aquisição do conceito de limite, seja ele através de uma linguagem natural ou através de uma linguagem formal. De fato, para ensinar este conceito, não se pode abdicar nem da linguagem natural nem da linguagem formal. A maior dificuldade, contudo, está na existência de um grande abismo entre elas, fazendo-se necessária e fundamental a elaboração de uma conexão lógica.

A fim de exibir a dificuldade do estudante em fazer uma relação entre as duas linguagens, uma experiência realizada em um curso regular de CDI, planejada e aplicada pelo próprio professor da disciplina, é relatada a seguir.

Definições intuitivas de limites encontradas em vários livros texto e exemplos de limites que não são enquadrados por essas definições foram apresentados, gerando muita discussão em sala de aula.

O cerne da experimentação consistiu em:

- Apresentar e discutir em sala de aula uma definição intuitiva de limite extraída de algum livro-texto;
- Em seguida, representar graficamente e algebricamente um exemplo claro de limite de uma função que não se enquadrava nessa definição intuitiva;
- Neste caso, os alunos eram impelidos a estender a definição de limite com o objetivo de contemplar esse exemplo;
- Encontrada, pela classe, uma definição mais abrangente, apresentava-se um novo exemplo que não era atendido por esta definição;
- Novamente, os alunos tinham que estender a definição de limite para que esse novo exemplo fosse satisfeito por ela;
- O processo parava quando não se conseguia mais estender a definição, de maneira natural, a algum exemplo apresentado pelo professor;
- Neste momento, o professor "vendia" a necessidade de uma definição que abrangesse todos os casos, o que desembocava em uma definição formal.

Embora o conteúdo das aulas tenha se apoiado sobre idéias intuitivas, procurou-se não entrar em contradição e buscar sempre resolver conflitos tais como o exposto no exemplo acima extraído do livro Finney *et al.* (2004). Em algumas situações, foi empregada a noção de intervalo como vizinhança de um número real para dar a idéia de proximidade de um ponto. Porém, não se recorreu ao formalismo.

Ao final da décima aula sobre limite, foi entregue a cada aluno uma folha contendo a definição formal de limite de uma função em um ponto e foi pedido a eles que expressassem de alguma maneira, por gráficos, por exemplos numéricos, através da linguagem natural, etc., o que eles entendiam por essa definição. A folha continha o seguinte enunciado:

"Seja f uma função real definida em um intervalo aberto contendo x_0, mas não necessariamente em x_0. O limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é igual L, $L \in R$, se, e somente se, dado um $\varepsilon \succ 0$ existe um $\delta \succ 0$ tal que

$$se\ 0 \prec \left|x - x_0\right| \prec \delta\ então\ 0 \prec \left|f(x) - L\right| \prec \varepsilon\text{"}$$

Após uma semana, as folhas foram recolhidas e todos os alunos as tinham respondido. Algumas respostas dos alunos são apresentadas a seguir:

- Quando $x \to x_0$ o δ fica menor e diminui também o ε. Quanto mais próximo de x_0 o x estiver, o δ vai diminuindo e o ε tende a zero;
- Quanto menor for a diferença entre x e x_0 ($0 \prec \left|x - x_0\right| \prec \delta$) menor será a diferença entre $f(x)$ e L ($0 \prec \left|f(x) - L\right| \prec \varepsilon$);
- Para cada variação no valor de δ, existe uma variação no valor de ε tal que...;
- Para cada valor de δ, mantendo o valor de x no intervalo (x_0- δ, x_0+δ) e $x \neq x_0$, fazemos com que os valores de $f(x)$ se mantenham no intervalo (L-ε, L+ε).

Nota-se que os alunos tentaram resgatar a definição intuitiva a partir da definição formal. Naturalmente, nenhum aluno foi capaz de perceber que entre a definição formal e a definição intuitiva existe uma inversão do processo de aproximação. Na definição formal, não é a variável independente que produz uma aproximação da imagem da função ao limite. De fato, é o grau de aproximação (ao limite) desejado que impõe à variável independente uma condição de limitação a um intervalo.

5.8 Aprendizagem versus Bom Desempenho

O conceito de limite é ensinado, normalmente, nas primeiras aulas dos cursos de CDI. Após um primeiro contato, formal ou intuitivo, a noção de limite é explorada de forma utilitária, como uma *ferramenta* para a resolução de problemas, ou de forma operacional, algébrica ou graficamente.

Ao longo do curso, o conceito de limite parece desaparecer pouco a pouco. No final, entre aplicações e operações, perde-se quase completamente o seu elo com as novas definições, como no caso da derivada e da integral que são exemplos particulares de limites. Para a maioria dos alunos, a derivada é, por exemplo, o coeficiente angular de uma reta tangente ou uma taxa de variação instantânea (GODOY, 2004). Já o conceito de integral é, em geral, compreendido pelo aluno como a área de uma região plana limitada por curvas.

Embora alguns livros de referência, como o do Leithold (1986), continuem, até o último capítulo, usando a definição de limite para provar teoremas, seus exercícios resolvidos e propostos dão ênfase à resolução de problemas geométricos ou aplicados à Física ou à Economia, por exemplo.

Sendo o trabalho de *conceitualização* (trabalho de construção de um conceito) do limite bastante custoso e não estando presente nos livros de CDI, é possível que o professor tente pular o trabalho necessário para que o aluno o compreenda. Porém, sendo ensinado apenas de forma intuitiva e utilitária, seu conceito se confunde com o seu status de *ferramenta*. Com isso, seu status de *objeto, capaz de desvendar alguns de seus aspectos enganosos* (como dito por Poincaré ao referir-se às definições formais de derivada e continuidade), não é, praticamente, assumido.

Portanto, para que o aluno obtenha um excelente desempenho na disciplina de CDI em relação ao conteúdo de limite, é suficiente que ele saiba resolver operações que o envolvam e saiba aplicá-lo a alguns contextos específicos. No entanto, uma maneira de medir o aprendizado de um determinado conceito está vinculada à capacidade do aluno em adaptar seus conhecimentos na resolução de problemas nos quais este conceito possa ocorrer tanto como status de *ferramenta* quanto como status de *objeto.*

A partir dessas observações, induz-se a questionar se o aluno que obteve um bom desempenho no curso de CDI também atingiu um bom índice de aprendizado do conceito de limite.

5.9 Conclusão

Inicialmente, é necessário esclarecer que neste trabalho particular sobre o conceito de limite não se tem por objetivo apontar ou sugerir a existência de falhas nos livros adotados para o ensino de CDI, mas ressaltar as dificuldades encontradas pelos alunos devido à falta de precisão da linguagem natural e à complexidade da linguagem formal no tratamento do conceito de limite. A escolha dos livros Finney *et al.* e Leithold está essencialmente ligada a sua freqüente adoção na disciplina de CDI de diversos cursos universitários.

Adicionalmente, não é se defende que o aprendizado deva ou possa ser realizado sem eventuais erros ou incoerências. Em um primeiro momento, deseja-se ir ao encontro da visão de Artigue (1993) que defende que o aprendizado deve ser construído sob um ensino que respeite a epistemologia do campo e que seja, ao mesmo tempo, acessível ao aluno, dando-lhe possibilidades de superar os eventuais obstáculos que surgirem.

A análise exposta pretende, entretanto, desvendar o real significado do modelo de ensino de CDI praticado no Brasil. Se, por um lado, o objetivo da disciplina de CDI é estabelecer o primeiro contato do aluno com a noção de limite e suas aplicações, explorando-o como uma *ferramenta* na resolução de problemas, enunciar a definição formal de limite e realizar demonstrações de alguns teoremas que a envolvam pode torná-la, ao mesmo tempo, incompreensível e desnecessária, devendo, portanto, ser colocado em questão tal procedimento. Esta reflexão toma por base o fato de que pode não ser de interesse para a maioria dos cursos de graduação que o aluno trabalhe com o conceito de limite em seu status formal de *objeto*.

Por outro lado, se é objetivo final do ensino de CDI que o aluno trabalhe o conceito de limite em seu status de *objeto*, deve-se reportar à afirmação de Tall (1991), que diz que o conhecimento humano começa com ações em seu ambiente, algumas das quais se tornam repetitivas, sendo, mais tarde, concebidas como objetos manipulados por processos mentais de alta abstração. Neste caso, se no curso de CDI o aluno **não conseguir adquirir conhecimentos suficientes** para manipular o conceito de limite como um *objeto* (em seu nível mais abstrato), pode-se concluir que uma das etapas do processo de aprendizado desse conceito não é alcançada por ele. Refletindo sobre esta situação, sente-se a necessidade de adotar novas estratégias no sentido de minimizar as dificuldades encontradas pelos professores/alunos de CDI no ensino/aprendizagem desse conceito, cabendo aos profissionais de Educação Matemática a responsabilidade de defini-las.

Como exemplo de teoria que pode beneficiar tanto o trabalho do pesquisador quanto a prática do professor na abordagem de conteúdos complexos como o de limite, cita-se a Sequência Fedathi (BORGES NETO e SANTANA, 2001). Seu modelo pode ser usado de forma complementar à aplicação de uma engenharia didática em sua fase de experimentação em sala de aula, ou diretamente pelo professor, como mediador do processo de aprendizagem do aluno.

5.10 Reaplicação em 2008

Avaliando os resultados obtidos na experimentação acima relatada, identificando a capacidade de aceitação e o interesse do aluno em se integrar a uma proposta de abordagem diferenciada das encontradas nos livros habituais e, além disso, tendo por objetivo mergulhá-lo em um ensino que procura fazer elos entre as idéias que deram origem ao nascimento das principais noções do CDI até a sua apresentação atual, pronta e acabada, fez-se, em 2008, uma construção do conceito de limite por meio da qual se chegou a sua definição formal em sala de aula.

Apoiou-se em um processo semelhante ao da experimentação de 2006: enunciar definições intuitivas cada vez mais gerais até se deparar com a definição formal como a "única" capaz de contemplar todos os casos considerados. Diferentemente de 2006, desta vez, a definição formal de limite foi integrada ao ensino.

A principal justificativa para se trabalhar com tal definição foi aliada à perspectiva de generalização e ao problema de, em 2006, o professor/pesquisador ter-se deparado com certas questões básicas impossíveis de serem explicadas aos alunos por meio apenas de uma linguagem natural. Além disso, esta abordagem de limite marcou o início da preparação do ensino do conceito de integral, construído sobre a idéia de proximidade entre as somas de Riemann inferiores e superiores.

O fato de os alunos estarem, já no início do ano letivo, se familiarizando com as noções de cota superior/inferior, vizinhança de um ponto na reta, supremo/ínfimo, elemento maximal/minimal e com a linguagem dos épsilons e deltas por meio de desigualdades, por ocasião do ensino de limite, favoreceu o ensino e o aprendizado da definição de integral.

Essa facilidade foi constatada por meio da comparação entre as observações de sala de aula e entre as soluções da folha de exercícios sobre integral aplicada em 2006 e em 2008. Existe uma diferença muito grande entre as turmas tanto na qualidade da linguagem matemática, quanto na quantidade de exercícios resolvidos e resolvidos corretamente (ver Capítulo 6). A folha de exercícios e uma cópia de algumas resoluções realizadas pelos alunos de 2006 e de 2008 encontram-se nos anexos.

No próximo Capítulo, descrevem-se as seqüências de ensino do conceito de integral, considerando-se o ensino do conceito de limite como elemento fundamental na preparação das seqüências.

6 Organização, Aplicação e Análise das Seqüências Didáticas para a Construção do Conceito de Integral de Riemann

6.1 Introdução

O objetivo desta pesquisa é propor um modelo de ensino dos conceitos de CDI, para os cursos de engenharia, que seja comprometido com as idéias intuitivas e com o rigor, interligados, porém, de forma significativa.

Para se averiguar a viabilidade deste modelo de ensino, optou-se pela elaboração, aplicação e observação de seqüências didáticas envolvendo o conceito de integral de Riemann.

Denomina-se, neste trabalho, seqüência de ensino ou seqüência didática ao conjunto de sessões, com uma duração fixa, realizadas em sala de aula para o ensino de determinado conteúdo. Nestes termos, foram executadas três seqüências de ensino do conceito de integral nos anos de 2005, 2006 e 2008. A análise de cada seqüência embasou a elaboração da seqüência seguinte. Procuraram-se interpretar, principalmente, as intervenções dos alunos para se fazer hipóteses sobre como melhorar a próxima abordagem.

A engenharia didática norteou a elaboração das seqüências. As fases da ED relacionadas a estas seqüências foram fundamentadas em diversas teorias da educação. A teoria da Dialética Ferramenta/objeto e Jogos de Quadros de R. Douady (1986) propiciou uma análise das propostas atuais de ensino a partir dos textos didáticos de referência. O estudo, a escolha e a organização dos saberes envolvidos na construção do conceito de integral foram orientados pela Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de David Ausubel (NOVAK, 2000). Para alcançar os objetivos da TAS, optou-se por uma abordagem inicialmente histórica que acompanha o desenvolvimento da integral por meio de problemas do quotidiano ou de questionamentos puramente matemáticos

Para a fase da *experimentação*, a ED (ARTIGUE, 1989) não indica nenhuma estratégia de trabalho a ser realizado em sala de aula. Desta forma, em alguns momentos de sua aplicação, seguiu-se o modelo proposto pela Sequência Fedathi (BORGES

NETO e SANTANA, 2001) a qual salienta a importância da mediação do professor para o aprendizado em matemática.

Nas análises das experimentações de 2005 e de 2006, foram encontradas relevantes falhas, provenientes do ensino, que comprometeram a seqüência de integral destes anos, mas que foram determinantes para a realimentação da ED e sua reaplicação em 2008, após algumas correções. Finalmente, analisando os resultados de 2008, chegou-se à conclusão do modelo proposto, que é formalizado no Capítulo 7.

Descrevem-se, neste Capítulo, a concepção, a experimentação e uma análise dos resultados da seqüência didática relacionada ao ensino do conceito de integral aplicada em 2008. Inicialmente, apresentam-se algumas influências do estudo epistemológico sobre a organização da seqüência e uma análise do ensino atual, também determinante para a concepção da seqüência. Em seguida, descreve-se a elaboração da seqüência e destaca-se o que será analisado na experimentação. Após, relata-se o momento da experimentação e faz-se, por último, uma análise dos resultados.

As seqüências de 2005 e de 2006 serão relatadas de forma sucinta, porém, elas serão mencionadas freqüentemente no texto por servirem de referência para a concepção da seqüência de 2008.

Este Capítulo está dividido nas seguintes sessões: a seção 6.2 refere-se a algumas implicações de um estudo mais completo do conceito de integral (descrito no Capítulo 4) sobre a elaboração das seqüências; complementando a análise do ensino do conceito de limite por meio de livros texto, feita nesta seção, na seção 6.3, estende-se esta análise ao ensino de cálculo em geral; as seqüências de 2005 e de 2006 são relatadas nas seções 6.4 e 6.5, respectivamente; com o objetivo de realimentar a seqüência de 2008, são feitas observações e análises da seqüência de 2006 na seção 6.6; as seções 6.7 e 6.8 justificam a opção por um programa computacional e por uma abordagem histórico-epistemológica, respectivamente; finalmente, relatam-se as quatro sessões da seqüência de 2008 e faz-se um quadro-resumo das seções, em 6.9 e 6.10, respectivamente.

6.2 Implicações de um Estudo Mais Completo sobre a Organização da Seqüência

Foi apresentada no Capítulo 4 uma amostra do estudo realizado sobre o conceito de integral, tanto pelo ponto de vista histórico-epistemológico quanto por meio de uma fundamentação teórico-matemática. Sobre este estudo, foram organizados os conteúdos das sessões de ensino.

Ao se pesquisar a integral pela perspectiva da noção de medida geométrica, fez-se um apanhado histórico, estimando-se tanto datas, nomes e fatos, quanto, e principalmente, idéias e problemas que contribuíram para o desenvolvimento e formação desta noção. Construiu-se, para o ensino, uma gênese artificial deste conceito, caracterizando sua origem na necessidade de realizar medidas de segmentos até a sua evolução para a forma atual, presente nos livros didáticos das disciplinas de CDI (ver seção 6.3) e, até mesmo, a sua apresentação em livros mais avançados de análise (HAWKINS, 2002). Em todos os níveis dos estudos abrangidos, refletiu-se sobre uma adequação do conteúdo aos conhecimentos do estudante que participou da edificação desta ED.

A opção de realizar um estudo aprofundado das noções de CDI para alunos cujos conhecimentos são basicamente os adquiridos no ensino médio pode ser justificada já na análise dos resultados da primeira experimentação, em 2005, em que o professor/pesquisador se deparou com perguntas de alunos sem respostas nos livros de CDI ou mesmo, como na experimentação de 2006, em livros de um primeiro curso de análise real. Além disso, o domínio do conteúdo a um nível mais geral do que o que se ensina ao aluno deixou o professor em uma posição mais confortável, preparando-o tanto para responder ou mesmo saber onde procurar respostas a perguntas inesperadas quanto para elaborar um ensino mais fundamentado no saber matemático em questão e não apenas em técnicas ou apenas no formalismo.

De uma maneira mais geral, este estudo aponta para a necessidade de melhor munir o professor de ensino superior que embora tenha, no Brasil, uma posição privilegiada, não está, comumente, inserido em um meio de cultura matemática e tem, muitas vezes, os livros como maior fonte de referência (SILVA, 2004).

Na próxima seção, faz-se uma análise do ensino atual por meio de livros de CDI, na qual ficam visíveis certas diferenças entre o saber de referência e o saber a ensinar de cálculo.

6.3 Uma Análise do Ensino Atual

É impossível saber exatamente o que se passa em salas de aula de disciplinas de CDI. É possível, entretanto, se levantar hipóteses prováveis a partir da experiência de ensino e de livros indicados em diversas bibliografias de programas dessa disciplina disponibilizadas na internet por várias universidades brasileiras.

O que se quer dimensionar relativamente ao ensino de CDI diz respeito à ênfase dada a uma abordagem das suas principais noções por meio de suas características como *ferramenta* ou *objeto.* Também, pretende-se verificar se são indicados caminhos que possibilitem tanto ao professor, em seu ensino, quanto ao aluno, em sua aprendizagem, de passar de uma dimensão operacional (*ferramenta*) a uma dimensão de generalização (*objeto*) das noções, partindo sempre do nível de conhecimentos dos estudantes. Observa-se, também, em que os textos dos livros de referência entram em contradição com a apresentação do saber científico matemático.

Numa pesquisa realizada no Google (http://www.google.com), encontram-se, em número bastante significativo, indicações para a adoção em cursos de engenharia de livros de CDI dos seguintes autores: Leithold (1994), Stewart (2001), Finney et al (2004), Anton (2007), Simmons (1987) , Swokowski (1994), Guidorizzi (2001) (mais indicado como leitura complementar), Apostol (1967) (recomendado para fundamentar a teoria), dentre outros. Serão analisados três livros, dentre estes, os quais são adotados nos cursos de engenharia da UFC.

O livro de Swokowski (1994), cuja leitura é bastante apreciada pelos estudantes, desenvolve todo o seu conteúdo, relativamente aos conceitos principais, por meio de definições intuitivas. Limita-se a escrever as definições formais, as quais são inteiramente irrelevantes para a compreensão do texto do livro e para a resolução de seus exercícios. Desta maneira, alguns teoremas de cálculo servem apenas como regras cujo funcionamento é aceito por “convencimento” ou são enunciados como o resumo de alguma regularidade observada em exemplos de exercícios por ele resolvidos. Seguindo-se o ensino pelo Swokowski, ele se torna bastante algorítmico, pois, em vários tópicos do livro, após cada apresentação de conteúdos, são resolvidos vários exercícios utilizando o assunto ensinado e, por fim, ele elabora um quadro-resumo enumerando as etapas que devem ser cumpridas pelo aluno para a resolução de exercícios semelhantes, os quais são propostos em seguida. Atualmente, embora ainda adotado, ele não se encontra mais disponível para a venda em livrarias brasileiras.

O livro de Finney *et al.* (2004), do qual já se falou na experimentação sobre limite (Capítulo 5), também usa uma abordagem semelhante à de Swokowski: apóia-se em definições intuitivas, denominadas por ele de “definições informais”; enuncia algumas definições formais de maneira informativa; elabora quadros com uma ordenação de "passos estratégicos para resolver problemas" (frase extraída do próprio livro do Finney); após enunciar teoremas, escreve frases como "agora veremos como aplicá-lo" ou "veremos exemplos de seu uso na resolução de exercícios". Sendo de uma recente edição, disponibiliza recursos on-line tanto para professores quanto para alunos[11]. Os seus exercícios propostos reúnem um número muito grande de aplicações em diversas áreas: Física, Química, Biologia, Engenharia, etc. Fato que reforça o status de *ferramenta* assumido pelos conceitos em sua abordagem.

Fazem-se, por último, algumas observações sobre o livro do Leithold. Como já foi comentado no Capítulo 5, embora seja evidente a intenção do autor em construir um texto que não contrarie os fundamentos da Análise, a sua abordagem de ensino também é direcionada para o aprendizado dos conceitos como *ferramentas* matemáticas. Na verdade, o livro do Leithold parece ser constituído de dois livros disjuntos, um de Análise e um de Cálculo. Ele enuncia as definições formais, resolve exercícios utilizando-as, demonstra um grande número de teoremas decorrentes das definições e propõe provas de alguns teoremas como exercícios. Paralelamente, desenvolve um texto baseado em uma linguagem natural e voltado para a aplicação a contextos principalmente de geometria, física e economia. Entretanto, neste texto, ressalta que as idéias intuitivas não são demonstrações. Este livro representa uma tentativa de juntar em um mesmo nível de ensino os conceitos de CDI sob as perspectivas da intuição e do formalismo. O problema se encontra na falta de interseção entre as duas abordagens, na falta de caminhos matemáticos que liguem os conceitos vistos sob as duas perspectivas. Isto também pode ser observado nos exercícios propostos. Na maioria deles, os conceitos servem de *ferramentas* e os poucos nos quais eles aparecem como *objetos* matemáticos não influenciam no desempenho do aluno caso ele opte por não resolvê-los. Mesmo assim, a presença do formalismo incomoda.

Seguindo a abordagem intuitiva de alguns destes livros, pode-se concluir que o ensino dos conceitos de CDI está direcionado para a sua aplicação a contextos específicos. O aluno aprende, em geral, a utilizá-los como *ferramentas* na resolução de um campo bem delimitado de problemas. Algumas idéias responsáveis pelo surgimento dos conceitos são, por vezes, diluídas no texto e parece que o cálculo sempre teve aquele formato, que a sua construção seguiu a ordem lógica e cronológica dos livros. O aluno não desconfia da dificuldade e nem do tempo empregado em sua formação.

[11] Material disponível em: www.aw.com/thomas_br

Assim, são ensinados modelos prontos, com um enfoque reducionista que não permite generalizações. Além disso, embasando-se o ensino apenas em definições intuitivas, os fundamentos matemáticos ficam comprometidos. Cita-se, como exemplo, a definição de continuidade constante nos livros do Leithold (1994) e do Finney *et al*. (2004):

Dizemos que a função f é contínua em um número "a" se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) *Existe* $f(a)$;

(ii) *Existe* $\lim_{x \to a} f(x)$;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se uma, ou mais, destas três condições não for verificada em "a", dizemos que a função f é descontínua em "a".

O livro do Thomas usa apenas o item (iii) acima para definir o conceito de continuidade *em um ponto interior "a" do domínio de uma função f.* Após, acrescenta:

Observe que "a" não precisa pertencer ao domínio de f.

Por estas definições, uma função que não esteja definida apenas em um único número real é descontínua neste número. Atende-se, deste modo, à percepção visual de continuidade, de caminhar sobre a curva do gráfico sem sair dela. Contudo, tal definição acaba se tornando problemática por não ser equivalente às que constam nos textos de análise. Conseqüentemente, o seu ensino termina por não *respeitar a epistemologia deste campo* (ARTIGUE, 1993). Talvez, por esta razão, a continuidade conste em livros de CDI como um detalhe, sem que lhe seja dado o seu verdadeiro valor como conceito gerador de idéias que podem levar o aluno a enxergar além do que pode ser visto. Um exemplo clássico, contrário à intuição, é o de uma função descontínua em todos os pontos de um intervalo. Uma função deste tipo pode abrir caminhos para a generalização do conceito de integral dentro do nível de conhecimentos dos alunos do primeiro ano. Outro exemplo interessante é o de uma função escada, bastante usada apenas como modelo de função descontínua em um conjunto de pontos isolados, porém, pouco explorada como exemplo de função integrável em um intervalo, desprovida de primitivas.

Não foi por acaso que se escolheu aqui a continuidade para exemplificar sobre o tratamento apenas intuitivo dado por certos livros aos conceitos de CDI. Em 2006 e em 2008, alguns estudantes indagaram sobre os motivos desta diferença com respeito à definição de continuidade e sobre as conseqüências para o seu aprendizado. Já na experimentação de 2005, realizada por meio de uma abordagem tradicionalmente intuitiva, um aluno fez outro questionamento interessante cuja resposta pode ser dada por meio do exemplo de uma função escada. Ele perguntou se toda função tem primitiva.

Relativamente ao conceito de integral, principal objeto matemático deste Capítulo, os livros iniciam o seu ensino, em geral, a partir da definição de anti-derivada. Logo em seguida, algumas técnicas de integração são consideradas. O cálculo de uma área aparece em um Capítulo posterior como uma aplicação da integral e do Teorema Fundamental do Cálculo. O processo de integração é pouco explorado e não são discutidas questões sobre a existência da integral ou sobre a possibilidade de não haver técnicas para se encontrar uma primitiva ou mesmo sobre a não existência de primitivas.

De uma maneira geral, na apresentação dos conteúdos de CDI, existe um forte apelo à representação e à interpretação dos conceitos no quadro numérico, por meio de tabelas, no quadro algébrico, por meio de equações, e no quadro gráfico, por meio de curvas. Freqüentemente, o recurso a um ou mais destes quadros determina a única forma de se validar definições, propriedades e teoremas. Quando o quadro analítico é considerado neste contexto, tratando os conceitos de CDI como objetos definidos rigorosamente por meio de uma linguagem formal, ele participa do ensino de forma isolada e artificial. O ideal seria inseri-lo de forma complementar aos demais quadros, procurando preencher os saltos de conteúdos e sanear algumas incoerências resultantes de uma linguagem natural.

Ressalta-se que esta breve análise dos livros de CDI não tem por intuito tirar o mérito desses autores, os quais ousaram, cada um dentro de sua ótica, abordagens que pudessem contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos de cálculo: o Swokowski procura aproximar os conceitos a objetos mais reais; o Finney *et al.* contém um campo muito variado de aplicações; o Leithold pretende um ensino mais completo e tenta torná-lo acessível.

Reitera-se que a análise do ensino atual, aqui apresentada por meio de livros de referência, reporta-se à fase das análises preliminares de uma ED relativamente ao conteúdo a ensinar.

A seqüência de 2005, apresentada na próxima seção, representa um modelo de ensino que corresponde à análise realizada.

6.4 A Seqüência em 2005

O ano de 2005 marcou o início da preparação da ED e a sua primeira aplicação.

Excetuando uma análise dos resultados de uma lista de exercícios sobre função real resolvida no WIMS pelos alunos do primeiro ano ingressos em 2004 e reaplicada no início do ano de 2005 (ver Capítulo 3), pouco se sabia sobre o perfil dos estudantes do CGETI. Portanto, optou-se por uma abordagem intuitiva, mais segura, dos conceitos de CDI. Os conceitos de limite, continuidade e derivada foram introduzidos por meio de uma linguagem natural, tal qual aparecem nos livros analisados na seção anterior. As aulas se deram de forma tradicional, com quadro e pincel como materiais de apoio.

Entretanto, logo no início do ano letivo, durante o ensino do conceito de limite, alguns alunos interrogaram sobre a ausência da linguagem formal.

Percebeu-se ainda, durante todo o ano, o interesse do aluno por questões fundamentais, tais como o exemplo seguinte: utilizando-se de teoremas de cálculo, provou-se que a função tangente é uma bijeção do intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ em *R*. Um aluno, surpreso, ponderou:

Professora, no ensino médio, eu aprendi que esta bijeção existe, mas agora estou achando que ela não é possível porque o intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *tem menos números do que R.*

Normalmente, não se encontra uma explicação para esta controvérsia em nenhum livro de CDI.

Quanto ao conceito de integral, pretendia-se dar mais ênfase ao processo de integração, procurando dar sentido a sua definição, sem se prender, contudo, a nenhum rigor matemático.

Como na maioria dos livros de CDI, introduziu-se esse conceito por meio da noção de anti-derivada. Para o ensino da integral de Riemann (na verdade, limitou-se à integral de Cauchy), tentou-se utilizar um recurso diferenciado, a máquina de calcular, e dar certa ênfase ao seu processo de formação. Após uma apresentação expositiva, na qual foram feitos, no quadro, vários desenhos de uma mesma região plana limitada por curvas, em que a região ia sendo progressivamente preenchida por retângulos de mesma base e de alturas variadas, solicitou-se que os alunos calculassem as somas de Riemann relativas às partições correspondentes. Nenhum deles se dispôs a assumir tal tarefa, embora tivessem levado calculadora, a pedido do professor.

Ainda nesta sessão, um aluno mostrou resistência ao aprendizado deste processo de integração de Riemann, considerando-o desnecessário. Ele fez a seguinte argumentação:

Porque a senhora não ensina logo a fórmula, professora? Fica muito mais fácil!

Este comentário merece uma reflexão. Talvez o aluno tivesse mesmo razão. Já que ele estava inserido em um contexto de ensino no qual se valorizavam as aplicações e os resultados, não se justificava a preocupação com o processo de formação deste conceito.

Uma análise do ensino de 2005 e, em particular, da forma em que foi abordado o conceito de integral, orientou o professor/pesquisador a propor, em 2006, um ensino um pouco mais diferenciado, visando dar sentido ao aprendizado do conceito de integral, principalmente.

6.5 O Ensino e a Seqüência em 2006

Motivado por se praticar um ensino mais significativo e fundamentado no saber matemático comparado ao de 2005, relatou-se, no Capítulo 5, uma experimentação de ensino do conceito de limite realizada no começo do ano letivo de 2006. Nesta experimentação, o aluno já estava sendo preparado para a seqüência do conceito de integral.

Além de se ter dado maior ênfase à formação dos conceitos, neste ano, investiu-se em um ensino mais rigoroso, com provas de teoremas e fazendo o ensino avançar na direção de uma generalização, por meio de exemplos contrários aos sentidos, denominados, por vezes, de exemplos patológicos. A maioria destes exemplos estava atrelada a algum tipo de descontinuidade - conceito, como já foi dito anteriormente, problemático por não corresponder exatamente ao definido pelo saber matemático. Este fato, aliás, chamou a atenção de alguns alunos em 2006 que cobraram uma justificativa para tal incoerência.

Fala-se pouco, neste trabalho, sobre a derivada. Explica-se. A derivada é um conceito bastante vinculado ao campo das aplicações, sendo explorada por esta abordagem na disciplina de Fundamentos da Física, antes mesmo de ser ensinada em Cálculo Fundamental. Tanto em 2005 quanto em 2006, percebeu-se o desinteresse dos alunos pelo aprendizado deste conceito. Segundo eles, já o tinham aprendido na disciplina de física. Associou-se, assim, à falta de motivação dos alunos o fato de a derivada ser inicialmente ensinada como uma *ferramenta* e, só depois, veicular-se a sua definição matemática, o que despertaria o aluno para o aprendizado de um conhecimento novo.

Com respeito à integral, planejou-se uma seqüência didática para a construção do seu aprendizado em sala de aula, fundamentada em sua origem histórica, vinculada à busca de solução para a medida de regiões do plano – questão crucial que está na base do cálculo integral (COURANT, 1969; BOYER, 1996). Pretendia-se, desta maneira, associar o conceito de integral aos conhecimentos antigos dos alunos (adquiridos antes da chegada à universidade) sobre medidas de segmentos e de regiões planas.

A seqüência foi aplicada no segundo semestre do período letivo de 2006, por ocasião da introdução do conceito de Integral na disciplina de Cálculo Fundamental. Trinta estudantes regulares de primeiro ano do CGETI participaram da experimentação.

A seqüência previa que os alunos fossem confrontados com problemas de cálculo de um valor aproximado para a medida de subconjuntos do plano cartesiano por meio das somas de Riemann. Eles tinham que verificar, também, que, pelas somas de Riemann, não é possível medir todos os subconjuntos do plano, dentre outros problemas. Objetivava-se que, assim, eles pudessem adquirir conhecimentos mais significativos sobre o conceito de integral e que o reconhecessem não apenas como uma particularidade do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) que, na verdade, só se aplica a um número restrito de casos.

Diferentemente do ano anterior, deu-se ênfase ao processo de integração por meio das somas de Riemann, e a noção de anti-derivada só surgiu posteriormente, na prova de um caso particular do TFC.

A análise da seqüência de 2005 indicou a necessidade de se inserir no ensino algum meio que permitisse o aprendizado da integral de Riemann através da sua construção de forma significativa. Daí, a introdução do seu ensino através de uma abordagem histórico-epistemológica, considerando-a como uma evolução do conceito de medida.

Visto que, em 2005, os alunos se recusaram a tomar para si a responsabilidade de resolver a tarefa proposta em sala de aula sobre somas de Riemann – utilizando uma calculadora como instrumento – em 2006, decidiu-se aderir ao uso de um programa computacional como forma de instigar o aluno a se colocar em uma situação de aprendizagem.

A seqüência foi aplicada em três sessões de duas horas cada. Na primeira sessão, foram apresentadas as origens históricas do conceito de integral com o objetivo de despertar a curiosidade e o interesse dos alunos, levando-os a fazer conexões eventuais com conhecimentos que foram adquiridos anteriormente, de maneira mecânica, como é o caso da área do círculo. Foram também introduzidas nesta sessão noções fundamentais relacionadas à definição da integral de Riemann tais como partição e somas de Riemann. Os recursos utilizados para a sua apresentação foram transparências eletrônicas, pincel e quadro convencionais. A sessão foi filmada, o que permitiu uma melhor análise do comportamento dos alunos e o registro das suas intervenções. Não houve, contudo, controle escrito sobre o que foi apreendido pelo aluno.

Na segunda sessão, o aluno foi levado, por intermédio de um programa de computador, o GeoGebra, a melhor se familiarizar com o conceito de integral por meio da execução de um conjunto de exercícios práticos (ver Anexo I), sem exposições predefinidas e sem demonstrações controladas pelo professor. Parte dos exercícios foi enviada eletronicamente para o professor, outra parte foi resolvida em casa e devolvida na aula seguinte.

Três estudantes do Laboratório de Pesquisa Multimeios da UFC (HTTP://www.multimeios.ufc.br) participaram das duas primeiras sessões para observar o envolvimento dos estudantes na realização das tarefas, seu comportamento e o do professor ao aplicar a seqüência.

Somente na terceira sessão, quando o aluno já possuía noções sobre o conceito de integral de maneira informal, foi realizada uma *institucionalização* (BROUSSEAU, 1998) dos conteúdos trabalhados nas fases anteriores, ou seja, o professor mostrou para os alunos que os conhecimentos construídos já faziam parte de um saber científico.

6.6 Observações e Análise da Seqüência de 2006

Da experimentação de 2005 para a de 2006, verificou-se uma grande evolução em relação ao comprometimento dos alunos com o aprendizado dos conteúdos.

Por meio desta seqüência, foi possível de se constatar que os conhecimentos prévios dos alunos relativamente ao conceito de medida geométrica podem ser considerados como formados por um conjunto de informações isoladas e que o seu aprendizado se deu, de certa forma, mecanicamente. Registram-se algumas situações que contribuíram para se chegar a tais conclusões:

- Discutiu-se, na primeira sessão, sobre o problema aparentemente simples de se realizar medidas de comprimentos. De forma unânime, a classe chegou à conclusão que para se medir um segmento basta se convencionar uma unidade de medida. No início da sessão, porém, um aluno se queixou: "*não acredito que a gente vá voltar para o jardim*". Passou-se em seguida, como se fosse natural, para a medida de uma região plana. Foi desenhada uma figura irregular no quadro e se perguntou como eles fariam para medi-la. Ninguém deu nenhuma pista de como fazê-lo. Com isso, fez-se uma pergunta mais elementar: Qual a área do quadrado de lado um? Todos responderam quase em uníssono: um. Ao se perguntar o porquê, ninguém soube responder. Dois alunos arriscaram: "*é um porque sempre foi assim e pronto*" e "*foi a tia que ensinou que era um*". Na lista de exercícios (constante no Anexo I) da segunda sessão, foi pedido para os alunos calcularem um valor aproximado para a área de uma região situada abaixo do eixo das abscissas. Muitos deles deram como resultado um número negativo. Outros atribuíram o valor nulo para a área de uma região simétrica em relação à origem.

Por outro lado, percebeu-se o engajamento dos alunos na experimentação. Alguns deles chegaram a levantar questões interessantes concernentes aos fundamentos da teoria da medida, tais como:

- Pra que fazer o cálculo dos dois tipos de somas, superior e inferior, se no final o resultado é o mesmo?
- Porque a área de uma região formada pela união de duas regiões disjuntas é igual à soma das áreas de cada uma delas?
- Em casa, eles tiveram que fazer o cálculo da integral de Riemann da função de Dirichlet, $D(x)$ (ver na lista de exercícios do Anexo I). Alguns conseguiram concluir que esta função não é integrável à Riemann. Um dos alunos acrescentou: *Se a "região" entre o gráfico da função $D(x)$ e o eixo x está contida em um quadrado de lado um, como se faz para calcular sua "área" se não é possível pela integral de Riemann?*

Do ponto de vista da dinâmica de sala de aula, a aplicação da seqüência proposta mostrou vantagens comparativas à praticada no ano anterior para alunos do mesmo curso, na mesma instituição e pelo mesmo professor. Na ocasião, após uma apresentação expositiva, com a elaboração de vários gráficos, pediu-se aos alunos para calcular as somas de Riemann relativas a algumas partições, tarefa à qual nenhum deles se dispôs a realizar, nem com o auxílio de máquinas de calcular. Já na atual seqüência, onde os exercícios práticos fizeram parte natural do desenrolar da aula, os alunos realizaram, sem relutância, as atividades planejadas com o programa GeoGebra. Pode-se supor que o fato de ter sido estabelecido, com antecedência, o papel de cada um na aplicação da seqüência contribuiu para a mudança de postura dos alunos. Observou-se também que eles tomaram inteiramente para si as atividades e poucas vezes recorreram ao professor.

Dentre as diferenças apontadas entre as seqüências de 2005 e de 2006, duas representaram um avanço na busca de uma melhor qualidade de ensino: o uso de um programa e uma abordagem baseada na epistemologia histórica da integral. Nas próximas seções, 6.7 e 6.8, descrevem-se o programa utilizado nas experimentações, justificando o uso deste recurso, e as implicações de uma abordagem histórico-epistemológica. O conteúdo destas duas seções corresponde a uma parte das escolhas didáticas relativa à fase de concepção e de análise *a priori* da ED.

6.7 Opção por um Programa Computacional

Vários estudos indicam que alguns estudantes podem melhorar o resultado de seu aprendizado por meio de atividades realizadas em ambientes computacionais adaptados para este fim (BORGES NETO e SANTANA, 2000; ARTIGUE, 2002; DUBINSKY e TALL, 1991). A dinâmica da utilização de um programa de computador pode motivar o estudante a experimentar, a buscar estratégias para a resolução de problemas de matemática, a procurar contra-exemplos, a fazer conjecturas.

No caso específico do ensino/aprendizado do conceito de integral, o uso de uma ferramenta é extremamente adequado, pois, em geral, ao introduzir este conceito, o professor (e não o aluno) começa com quadro e pincel, sozinho, elaborando vários gráficos de uma mesma região limitada por curvas e subdividida em retângulos. Como na criação de um desenho animado, ele representa a mesma região preenchida por um maior número de retângulos e assim os gráficos vão se sucedendo, enquanto a classe apenas acompanha a passagem do filme em câmera muito lenta. Poder-se-ia propor ao professor fazer uma apresentação apenas por transparências para evitar este "desperdício" de tempo e de trabalho manual. Porém, além de, neste caso, ele já levar as construções prontas, *tudo acontece tão rápido que o aluno não consegue acompanhar os detalhes de uma aula assim*[12].

Por isso, para a realização da segunda fase da seqüência, propôs-se o programa GeoGebra, um *software* de Geometria Dinâmica, livre, que pode ser instalado em qualquer computador ou acessado a qualquer momento pela Internet pelo endereço www.geogebra.at. Por apresentar uma interface simples e de fácil utilização pelo usuário, o GeoGebra pode contribuir para facilitar o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos de uma maneira mais uniforme por meio da vinculação e da interligação entre os aspectos algébricos e geométricos utilizando, para isto, a dinamicidade nas transformações gráficas realizadas pelo próprio usuário.

Usando o programa GeoGebra para resolver situações/problema propostas pelo professor para o aprendizado do conceito de integral, o próprio estudante elabora gráficos, partições, realiza cálculos de somas inferiores e de somas superiores, representa-as graficamente por meio do programa, enfim, experimenta, investiga. O processo é dinâmico e o estudante não espera, ele faz acontecer.

Pretende-se dar a oportunidade ao estudante de fazer, ele próprio, a construção de seu conhecimento no tema, favorecido pela disponibilização de recursos computacionais, ágeis e potentes, o que se traduz em uma forte interação científica do estudante com o conteúdo.

Para se trabalhar com a noção de Integral, o programa GeoGebra oferece a possibilidade de visualização dos retângulos relacionados com as somas superiores ou inferiores de uma função, além de efetuar o cálculo destas somas. Para isso, dada uma função $f(x)$ e informado o intervalo $[a, b]$ de integração, bem como o número n desejado de subdivisões deste intervalo, podem-se calcular a soma inferior e a soma superior desta partição a partir do uso dos comandos específicos no campo de entrada de dados: SomaInferior[f,a,b,n] e SomaSuperior[f,a,b,n]. Além disso, os retângulos relacionados são representados graficamente. Apresenta-se na Figura 6-1 uma ilustração, feita no GeoGebra, dos conteúdos envolvidos no cálculo de uma soma inferior relativa à função $f(x) = x^2+1$ no intervalo $[0,4]$.

[12] Comentário de um grupo de alunos que declararam preferir o quadro e o pincel às transparências.

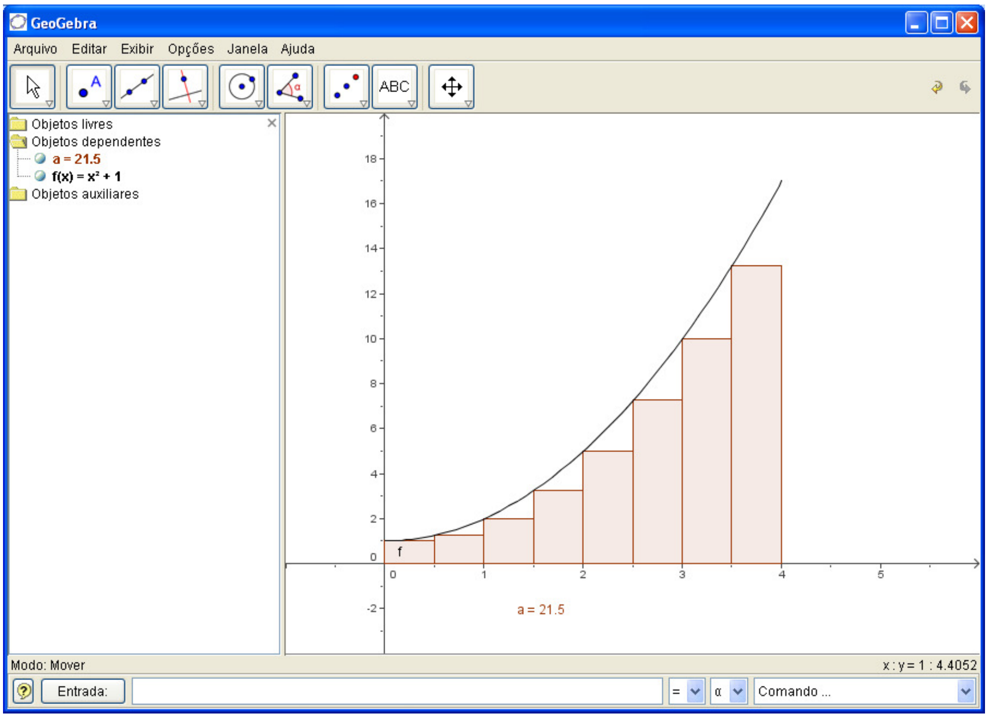


Figura 6-1. Soma Inferior da função $f(x) = x^2+1$ no intervalo [0,4], subdividido em oito subintervalos de comprimentos iguais.

Pode-se também utilizar o comando Integral[f,a,b] diretamente no campo de entrada de dados e visualizar os resultados algébricos e geométricos em suas respectivas janelas de apresentação.

6.8 *Porque Epistemologia e História?*

A história de um conceito matemático não se limita a uma descrição de acontecimentos e a uma enumeração de datas e nomes que participam do seu desenvolvimento. Ela deve determinar também, segundo Dorier (2000), as condições que favoreceram a sua formação, buscando uma coerência lógica por meio de problemas e noções envolvidas nas etapas de seu desenvolvimento. É nesta característica da história que se insere um questionamento epistemológico sobre a origem do conceito, com o objetivo de conhecer os processos pelos quais o objeto matemático em estudo se formou e se desenvolveu e, mais geralmente, conhecer as características das atividades matemáticas implicadas.

A necessidade de se dominar a história da formação dos conceitos científicos com o objetivo de melhor compreendê-los já era preconizada por alguns cientistas antigos. Como exemplo, citam-se dois textos extraídos dos livros *La connaissance et l'erreur* e *La Méchanique*, escritos pelo físico-filósofo austríaco Ernst Mach, nos quais ele se refere à história como meio de se atingir um nível mais completo de conhecimentos:

> *Uma idéia se torna bem mais fundamentada quando se conhecem os motivos que conduziram ao seu aparecimento e o caminho por meio do qual ela foi concebida. Apenas uma parte de seu significado pode ser retirada da ligação lógica que é feita com os conhecimentos antigos, mais familiares* (MACH, 1908).

> *O estudo histórico dos processos de desenvolvimento de uma ciência é indispensável, caso não se queira que o conjunto dos princípios que ela reuniu se degenere pouco a pouco em um sistema de verdades adquiridas do qual só se compreende a metade, ou mesmo, que se degenere inteiramente em um sistema de puros prejulgamentos* (MACH, 1904).

A abordagem histórico-epistemológica proposta neste trabalho tem como objetivo principal dar uma historicidade aos conceitos de CDI os quais aparecem nos textos matemáticos de forma pronta e acabada, descontextualizada. Busca-se resgatar tanto nomes, fatos e datas envolvidos em sua formação ao longo do tempo, quanto desvendar problemas e processos matemáticos que participaram do seu desenvolvimento. Tenta-se, desta maneira, contemplar princípios básicos da Teoria da Aprendizagem Significativa relativos à elaboração de um material potencialmente significativo relacionável à estrutura cognitiva do aluno de forma substantiva e não arbitrária.

Ao se atrelar o ensino dos conceitos de CDI, em sala de aula, a uma perspectiva histórico-epistemológica, pretende-se também conscientizar o aluno sobre os obstáculos enfrentados pelos cientistas durante a sua construção, desmistificando a idéia de que a matemática é produzida de forma mágica, o que desconsidera todo o trabalho árduo de diversas gerações. Espera-se extrair um maior significado destes conceitos na medida em que é feita uma retrospectiva da atividade matemática envolvida em sua evolução, de sua origem até a sua forma atual presente nos livros de referência. Neste percurso, procura-se fazer vínculos entre os conteúdos a ensinar e os conhecimentos prévios dos alunos.

Além disso, nesta pesquisa, o estudo realizado pela perspectiva da epistemologia histórica tornou exposta a disparidade existente entre os textos de CDI elaborados para o ensino e aqueles elaborados por meio de uma fundamentação matemática rigorosa. O que conduziu o trabalho a adequações no ensino que tentasse não contrariar o campo das idéias matemáticas e que, ao mesmo tempo, não se distanciasse dos conhecimentos dos alunos.

Baseando-se nas análises da seqüência de 2006, mantendo o GeoGebra e inserindo-se mais epistemologia e história, relata-se, na próxima seção, a seqüência de 2008.

6.9 A Seqüência em 2008

6.9.1 Motivações para Ajustes na Seqüência e Escolhas Didáticas

A análise dos resultados da seqüência de 2006 (ver seção 6.6) foi determinante para a preparação da seqüência de 2008, propondo-se modificações no sentido de provocar uma maior flexibilidade com respeito à abordagem do conteúdo. Esta análise deixou evidente relevantes falhas, provenientes das escolhas feitas, que comprometeram de alguma maneira o ensino de integral daquele ano. Dentre elas, destacam-se:

- Esperava-se que o pouco de rigor introduzido ao ensino em 2006 fosse suficiente para promover um aprendizado mais abrangente do conceito de integral. Constatou-se, porém, que o fato de não ter sido incorporada de forma mais sistemática uma linguagem formal, incluindo provas de teoremas pertinentes e questões de ordem analítica, impediu, em vários momentos, uma maior inserção no campo das idéias puramente matemáticas, que tornariam o ensino mais consistente. Não foi possível, por exemplo, definir o limite das somas de Riemann de forma precisa, reduzindo-se o seu ensino ao convencimento por meio de representações gráficas;
- Embora durante a sessão sobre a história do conceito de integral os alunos tenham participado com freqüentes intervenções, verificou-se, por intermédio da filmagem, que a aula acabou se tornando mais informativa. Alguns problemas históricos relativos ao conceito de medida, determinantes para a descoberta dos números reais, não foram discutidos matematicamente. O caso da

irracionalidade do número $\sqrt{2}$, por exemplo, foi apresentado como um fato histórico, sem se questionar sobre a veracidade matemática desta descoberta.

Outras situações ocorridas em sala de aula indicaram que os alunos, na verdade, não dispunham de alguns conhecimentos básicos considerados adquiridos em séries anteriores. Por exemplo, a dificuldade em identificar a medida como um valor numérico, relativo e não negativo, associado a objetos geométricos, independentemente de sua dimensão - comprimento, área ou volume -, sugeriu que a seqüência deveria também dar oportunidade ao aluno de retraçar o caminho de seu aprendizado, corrigindo eventuais conceitos mal formulados durante a sua formação escolar anterior.

Com base nessas análises, reconstruiu-se, em 2008, a seqüência didática para o ensino de integral. Para isso, também foram aportadas modificações no ensino dos demais conceitos de CDI, consideradas neste trabalho como parte das escolhas didáticas globais que influenciaram na preparação geral da seqüência, tais como:

- Embora, em 2008, o professor tenha continuado a adotar os livros de CDI analisados na seção 6.3, ele recomendou e pautou o seu ensino sobre livros de cálculo com uma linguagem mais rigorosa, como o Apostol (APOSTOL, 1967), e de introdução à Análise, como o do Elon (LIMA, 2007), para fundamentar a teoria.
- Logo na seção 5.10, apresentou-se uma reaplicação, em 2008, com modificações, da experimentação de limite ocorrida em 2006. Desta vez, porém, a sua definição formal passou a fazer parte integrante do ensino. Não com o objetivo de provar casos particulares, óbvios, mas visando familiarizar o aluno com a linguagem dos épsilons e deltas, a qual, muitas vezes, se constitui na única forma de se explicar certos resultados. Além disso, uma das dificuldades do ensino da integral em 2006 deveu-se à falta de domínio dessa linguagem pelos alunos;
- Por meio da história do cálculo e da própria experiência de ensino, verificou-se a importância da continuidade como conceito gerador de exemplos responsáveis pela queda de algumas crenças que perduraram durante décadas no meio matemático. Alguns destes exemplos, como a função de Dirichlet, foram discutidos em sala de aula com o objetivo de causar desequilíbrios (PIAGET, 1971) nos conhecimentos bem acomodados dos alunos, principalmente relativos à integral;

- Já se tinha tentado, tanto em 2005 quanto em 2006, introduzir o conceito de derivada por meio de uma de suas aplicações. Como visto na seção 6.5, os resultados não foram bons, pois os alunos já tinham trabalhado com a derivada como uma ferramenta na disciplina de Física Fundamental que é ministrada paralelamente à de Cálculo Fundamental. Em 2008, iniciou-se o seu ensino por meio de sua definição formal. Após, consideraram-se as diversas representações deste conceito como casos particulares, tais como taxa de variação e retas tangentes. Desta vez, o aluno demonstrou maior interesse e dedicação, pois esta abordagem trazia um conhecimento novo.

De uma maneira geral, durante todo o ano, procurou-se entrelaçar as linguagens natural e formal, alternando-se entre o significado e o rigor, considerados interdependentes e não dissociados.

Enumeram-se, a seguir, as principais escolhas didáticas consideradas como locais, por estarem diretamente relacionadas à preparação de cada sessão didática da fase de experimentação da seqüência de 2008 sobre o ensino da integral e faz-se uma previsão sobre de que maneira elas podem interferir nos resultados da aplicação, em busca de uma melhor qualidade de ensino:

- Abordagem histórico-epistemológica, não apenas informativa, do conceito de integral com ênfase nos problemas de medida que contribuíram para a evolução da integral. Objetivo: tornar o ensino de integral mais significativo, contextualizado, fazendo vínculos com conhecimentos antigos dos alunos;
- Ensino do conceito de integral por meio de uma definição mais rigorosa, mais geral (ver seção 6.9). Objetivo: levantar questões sobre certas concepções falsas relacionadas ao conceito de integral, as quais não podem ser viabilizadas por meio de uma definição apenas intuitiva, tais como a existência da integral e integrar = calcular primitiva;
- Continuar com o programa GeoGebra para a sessão de familiarização com os novos conhecimentos. Objetivo: repetir o que aconteceu na seqüência de 2006 em que o aluno tomou para si a responsabilidade da resolução da lista de exercícios.

Observa-se que estas escolhas, com as respectivas previsões, correspondem à fase de concepção e de análise *a priori* da seqüência de 2008.

Resumidamente: o ensino em 2008 foi centralizado nos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral, em suas definições, propriedades, investigando as diversas relações entre eles.

6.9.2 Relato das Sessões Didáticas de 2008

Dentro deste quadro, redimensionou-se a seqüência de ensino para a construção do conceito de integral. Desta vez, ela foi aplicada em quatro sessões, uma a mais em relação ao ano anterior. 41 alunos do primeiro ano do CGETI participaram da seqüência que foi realizada no segundo semestre do ano de 2008. Descrevem-se, em seguida, as quatro aplicações.

6.9.2.1 Primeira Sessão: História do Conceito de Integral

Durante o ano de 2007 foi realizado um estudo histórico-epistemológico mais consistente do conceito de integral por meio dos livros de história da matemática referenciados no Capítulo 4. Associado a este estudo, realizou-se uma pesquisa mais minuciosa em livros de cálculo e de análise, indicados na seção 6.3, para se fundamentar o desenvolvimento deste conceito em teorias matemáticas. A partir deste estudo, elaborou-se uma gênese artificial (ARTIGUE, 1990) do conceito de integral, para o ensino, na qual ele foi investigado pela perspectiva da medida geométrica. A história foi contada por meio da linguagem introduzida no ensino em 2008 e o conteúdo foi abordado através de problemas que marcaram a evolução deste conceito. Tais problemas, ressalta-se, foram relacionados aos conhecimentos dos alunos adquiridos principalmente no ensino médio.

Como em 2006, a sessão foi realizada em sala de aula, usando projeção de slides, quadro e pincel. Não houve filmagem, mas os alunos receberam uma lista de questões (Anexo III) sobre o conteúdo da sessão, para ser respondida e devolvida na aula seguinte.

Semelhantemente a 2006, discutiu-se, inicialmente, sobre problemas de medir e de se construir medidas de segmentos que promoveram a descoberta de certos números.

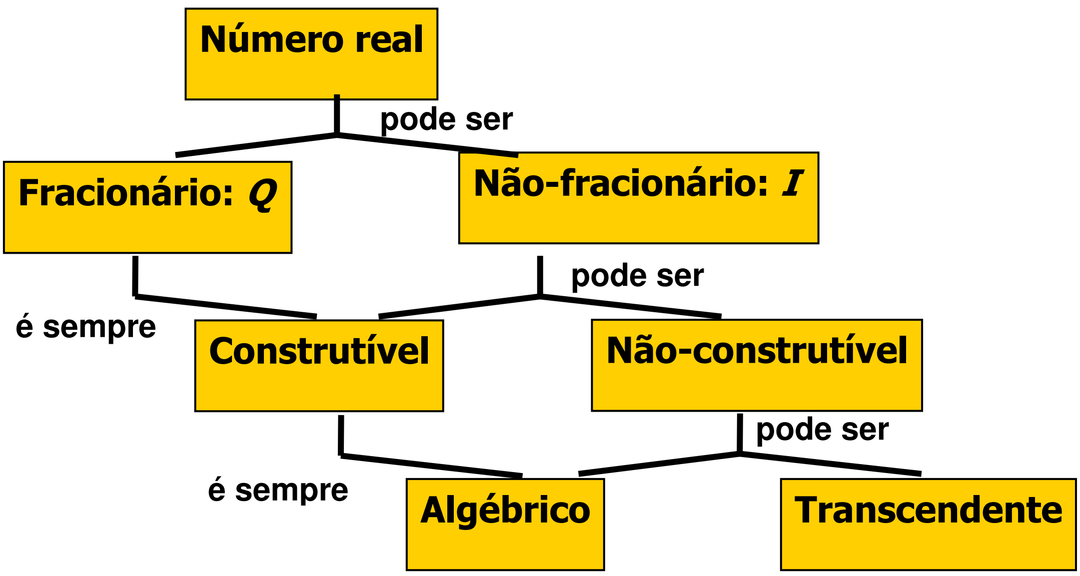
Nessa sessão, os alunos cobraram justificativas para determinados resultados matemáticos, dentre os quais, alguns já tinham sido até mesmo incorporados aos seus conhecimentos de forma dogmática. A justificativa para alguns dos resultados foi dada nessa sessão, pelo professor, ou em aulas posteriores pelos alunos, quando alcançável por seus conhecimentos. Dentre estes resultados, citam-se:

- Por que o $\sqrt{2}$ é irracional?
- Por que em qualquer intervalo, por menor que ele seja, tem sempre um número racional e um irracional?
- O π e o "e" não são números? São aproximações?

É importante destacar que estes resultados representaram, em algum momento da história, um exemplo contrário ao saber matemático que era estabelecido na época e que eles demonstram servir, ainda hoje, de contra-exemplo a alguns *obstáculos epistemológicos*[13] (BROUSSEAU, 1986) originados pelo ensino.

Fatos, nomes e datas contextualizaram os problemas, tais como, a descoberta do primeiro número irracional, $\sqrt{2}$, por um discípulo da escola de Pitágoras, no século VI a.C. (SINGH, 1998).

Chegou-se a falar sobre os números algébricos e os transcendentes, sem entrar em detalhes, apenas definindo e colocando alguns exemplos. A Figura 6-2 abaixo mostra um mapa representativo do que foi estudado com respeito à relação entre número e medida. Ele foi discutido com os alunos nesta sessão:



[13] Um obstáculo epistemológico é um conhecimento que pode ser considerado verdadeiro em certo domínio, mas que se revela falso ou inadequado em um domínio novo ou mais amplo.

Figura 6-2. Mapa representativo da relação entre número e medida.

Os alunos associaram a medida de segmentos à escolha de uma unidade de medida de comprimento. Contudo, como em 2006, eles não apresentaram sugestões de como medir uma região plana irregular desenhada no quadro. Apenas um aluno apresentou uma solução. Ele disse que faria uma peça cilíndrica, de algum material mais pesado do que a água, com área da base idêntica à figura plana desenhada no quadro e altura igual a alguma unidade de medida de comprimento. Mergulharia a peça em um recipiente completamente cheio de água e mediria o volume da água derramada, que, neste caso, seria igual à área da região.

Não houve também, como em 2006, nenhuma justificativa para a medida da área do quadrado de lado um.

Para fixar a propriedade de relatividade de uma medida geométrica, pediu-se, nas questões propostas para casa, que eles determinassem fórmulas para as áreas de algumas figuras planas, se a área do quadrado de lado um fosse considerada igual a dois.

Foram deduzidas facilmente fórmulas para a medida de diversas figuras planas – retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio. Ao se perguntar sobre a área do círculo, todos sabiam como calculá-la, mas ninguém sabia dizer a origem da sua fórmula. Neste momento, introduziu-se o método da exaustão relacionando-o a Eudoxo e a Arquimedes no tempo e no espaço. Um dos problemas da lista de exercícios consistia em deduzir a fórmula da área do círculo. Os alunos pediram uma pista de como resolvê-lo.

Outro problema que causou bastante discussão foi sobre a área de um quadrado do qual foi retirado um número finito de segmentos de retas paralelos a um dos lados. Eles responderam que a área não se alteraria porque a área de cada segmento que foi retirado é nula. Ao se aumentar para um número infinito, eles deram a mesma resposta com a mesma justificativa. Porém, o professor lembrou a eles que um quadrado é formado pela união de um número infinito de segmentos de áreas nulas, mas sua área é não nula. Este problema foi discutido mais detalhadamente na quarta sessão.

Ao se passar para o plano cartesiano, pediu-se uma sugestão para o cálculo da área de uma região limitada pelo gráfico de uma função não negativa, pelo eixo das abscissas e por duas retas paralelas ao eixo das ordenadas. Alguns deram a idéia de preencher a região com trapézios inscritos. Neste caso, a área da região poderia ser aproximada pela soma das áreas dos trapézios. Quando o professor sugeriu dividir a região em retângulos, eles reagiram argumentando não ser esta a melhor maneira, pois o trapézio dava "claramente" uma melhor aproximação para a medida. Aproveitou-se para se introduzir a integral de Cauchy para funções contínuas e apresentar uma justificativa para a escolha dos retângulos. A partir daí, passou-se a considerar funções que podiam assumir tanto valores positivos quanto negativos.

No final da aula, um aluno destacou:

> *Professora, percebi que muitos ramos da matemática tiveram que ser desenvolvidos até se chegar a esta integral de Cauchy.*

Por último, merece destaque um comentário bastante interessante feito por um aluno no decorrer da aula:

> *Quer dizer que tudo o que a gente estuda em matemática é impossível, não faz parte do mundo real. Até a medida exata de um comprimento inteiro* (ele quis dizer relativa a um número natural) *é feita por aproximação.*

A intenção desta sessão foi de preparar os conhecimentos dos alunos para semear, na sessão seguinte, noções mais rigorosas vinculadas à definição de integral de Riemann.

6.9.2.2 <u>Segunda Sessão</u>: Noções Envolvidas na Definição da Integral de Riemann

Não demorou muito tempo para se perceber que o rigor não poderia ser introduzido no raciocínio, sem antes se introduzirem as definições.
L´Intuition et la Logique em Mathématiques
H. Poincaré (*1907*)

Esta seção apresenta uma das principais escolhas didáticas que foram feitas com o objetivo de interferir no ensino atual (analisado na seção 6.3) em busca de uma melhor compreensão da integral. Tal escolha refere-se à definição da integral de Riemann (escrita logo abaixo), considerada de forma mais abrangente do que a de Cauchy (para funções contínuas), pois se estende a funções descontínuas e permite se cogitar sobre a não existência da integral.

O objetivo desta sessão foi definir, por meio das somas de Riemann, uma integral um pouco mais geral do que a integral de Cauchy para funções contínuas, esperando-se que a aquisição deste conhecimento pelo aluno permita que:

- Em determinadas situações, o seu significado seja vinculado ao processo de integração e não, apenas, às técnicas;
- Ele identifique, em certos problemas, a possibilidade de se calcular valores aproximados para a integral com um erro menor do que qualquer número dado;
- Ele compreenda que o processo de integração não é aplicável a qualquer função;
- A solução de um problema de integração não seja reduzida, por ele, à determinação de uma primitiva, a qual nem mesmo existe para a maioria das funções.

Para tanto, construiu-se, nesta sessão, a seguinte definição de integral:

Uma função $f:[a,b]\to R$, **limitada, é Riemann Integrável sss** $\lim_{\|P_i\|\to 0} S_{P_i} = \lim_{\|P_i\|\to 0} s_{P_i}$, **onde (*$P_i$*) é uma seqüência de partições tais que *P_{i+1}* é um refinamento de *P_i* e cujas normas tendem a zero. Neste caso, o valor comum do limite é igual à integral de *f* em** $[a,b]$**, que pode ser representada por** $\int_a^b f(x)dx$.

No início, os alunos se assustaram com a definição. Após se fazer uma leitura, eles foram se acalmando e citando as seguintes noções e símbolos desconhecidos, os quais foram definidos e situados no contexto do ensino: função limitada, partição, norma, S_{P_i} e s_{P_i}. Recorreu-se aos quadros gráfico, numérico e analítico e a exemplos familiares aos alunos para se representar essas noções.

As somas superiores e inferiores, S_{P_i} e s_{P_i}, respectivamente, foram definidas, primeiramente, para o conjunto das funções $f:[a,b]\to R$, **limitadas**, que assumem **valor mínimo absoluto** (**vma**) e **Valor Máximo Absoluto** (**VMA**) em qualquer subintervalo fechado de $[a,b]$. Observa-se que este conjunto contém o conjunto das funções contínuas e tem interseção não vazia com o conjunto das funções descontínuas.

Os alunos tiveram que responder e justificar respostas a várias questões, fundamentais para a compreensão e construção da definição de integral, tais como:

- Qual a relação entre S_P e s_P? Justifique a sua tese!
- Seja $f:[a,b]\to R$ tal que $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$. Prove que $m(b-a) \le s_P \le S_P \le M(b-a)$, para toda partição P do intervalo $[a,b]$.
- Se Q é mais fina do que P, qual a relação entre S_P e S_Q e entre s_P e s_Q? Prove sua tese!
- Considere uma seqüência de refinamentos de uma partição P, $P \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots$, tal que $\|P_i\| \to 0$. O $\lim\limits_{\|P_i\|\to 0} S_{P_i}$ e o $\lim\limits_{\|P_i\|\to 0} s_{P_i}$ existem? Justifique!

Foram feitas interpretações para somas de Riemann (e para os seus limites) de funções cujas imagens assumem valores apenas não negativos, ou apenas não positivos ou tanto positivos quanto negativos.

Definiram-se a integral superior e a inferior e, finalmente, a integral de Riemann.

Observa-se que, até o final desta sessão, não foi feita nenhuma alusão à relação entre derivada e integral e nem sobre a existência de primitivas.

Nesta sessão, as perguntas dos alunos foram mais ligadas a dificuldades em compreender as noções novas.

Para a sessão seguinte, previram-se atividades para que os alunos se familiarizassem com os novos conteúdos e os colocassem em funcionamento, sozinhos, por meio de questões que propiciassem a sua apreensão.

6.9.2.3 <u>Terceira Sessão</u>: Atividades para Colocar em Funcionamento as Novas Noções

Na terceira sessão, os estudantes realizaram atividades individuais utilizando o programa GeoGebra. Foi estabelecido um prazo de aproximadamente 15 minutos para que eles se familiarizassem com o programa por meio de uma lista de atividades direcionadas para este fim. Pelo que se pode observar, nenhum estudante teve dificuldades em trabalhar com o GeoGebra.

Cada estudante recebeu uma folha de exercícios (ver no Anexo I) que foram resolvidos individualmente utilizando o programa. Contudo, foram permitidas discussões entre eles. Quanto ao professor, ele fez o papel de orientador, não se manifestou de forma coletiva e interagiu com o aluno, a propósito das questões, apenas quando solicitado e procurou não interferir com respostas diretas. Pois, um dos objetivos desta sessão foi observar se os estudantes eram capazes, de forma autônoma, de usar os conteúdos explorados na sessão anterior para resolver problemas relacionados ao conceito de integral.

Nas atividades propostas, o aluno foi confrontado com situações-problema bem contextualizadas. Foram deixados inteiramente ao seu encargo o cálculo das somas de Riemann e a resposta a questões elaboradas com o intuito de familiarizá-lo com certas noções envolvidas na definição do conceito de integral.

A folha de exercícios foi dividida em três partes:

- A **Parte I** consta apenas de exercícios técnicos para o aluno se familiarizar com os comandos do programa;
- A **Parte II** é constituída de cinco exercícios. Nos três primeiros, os alunos devem fazer associações entre as noções abordadas na sessão anterior – partição, vma, VMA, somas de Riemann, valores aproximados, por um erro inferior a certo número dado, para área de regiões – e os gráficos de uma função não negativa, outra não positiva e outra cujo gráfico é simétrico em relação à origem. Nos exercícios 2 e 3, o estudante é confrontado com um problema no qual a integral é negativa e outro no qual ela é nula, respectivamente. No exercício 4, o programa deve ser usado como uma calculadora para encontrar o valor exato da integral. A solução destes exercícios foi enviada eletronicamente para o e-mail do professor.

  O exercício II.5 solicita a determinação da integral da função de Dirichlet $D(x)$, uma função cuja integral não existe. Trata-se, portanto, de um problema que foge ao senso comum e que já tinha sido discutido na primeira sessão.
- Por último, a **parte III** envolve a construção de um corolário do TFC, no qual etapas envolvendo o Teorema do Valor Médio (TVM) devem ser preenchidas para que se possa perceber a relação entre a derivada e a integral, ao mesmo tempo em que são sugeridas associações gráficas para se representar cada etapa.

  As respostas desses exercícios foram entregues na seção seguinte.

Deve-se observar que, excetuando a função de Dirichlet $D(x)$, as funções envolvidas nos exercícios são contínuas nos intervalos considerados.

6.9.2.4 Quarta Sessão: Institucionalização dos Conteúdos

Em um quarto momento, os conteúdos relacionados com a construção da integral, trabalhados nas sessões anteriores, foram institucionalizados.

Embora a institucionalização seja um processo pelo qual o professor mostre aos alunos que os conhecimentos construídos fazem parte de um saber científico (BROUSSEAU, 1986), para o desenvolvimento desta sessão, foi fundamental a participação dos alunos. O fato de a maioria deles (33 dentre os 41 participantes) ter resolvido a folha de exercícios da sessão anterior contribuiu para a interatividade desta sessão, na qual eles aproveitaram para, em momentos oportunos, discutir sobre conteúdos que foram mal compreendidos e que dificultaram a resolução de alguns exercícios.

Por exemplo, no exercício 2 da parte II da lista de exercícios, pediu-se uma justificativa para o fato de os retângulos relativos às somas superiores estarem inscritos na região. Alguns alunos disseram ter tido bastante dificuldade para responder esta questão. Provavelmente, isto se deveu ao fato de a maioria dos gráficos feitos em sala de aula ou presentes nos livros de CDI para a introdução do conceito de integral de Riemann se encontrar acima do eixo das abscissas. Com isso, os retângulos associados às somas superiores circunscrevem a região, o que faz com que a palavra superior seja, possivelmente, associada a esta representação.

Na institucionalização, procurou-se trabalhar com o conceito de integral em um nível mais geral, elevando-o à condição de *objeto* ao qual estão associadas todas as representações desenvolvidas nas sessões, nos diversos quadros matemáticos. Sempre considerando, contudo, os conhecimentos dos alunos.

Destaca-se a importância, para esta sessão de institucionalização, do ensino deste ano, no qual foi dada ênfase aos conceitos, as suas propriedades e a diversos teoremas a eles relacionados tais como o Teorema do Valor Extremo (TVE), o Teorema do Valor Intermediário (TVI), Teorema do Valor Médio (TVM), o Teorema da Fronteira, dentre outros, desenvolvendo-se tanto provas, quanto explorando suas aplicações.

6.10 Quadro-Resumo das Experimentações

A Figura 6-3 faz uma apresentação das etapas das três experimentações realizadas sobre o conceito de integral, enfatizando as mudanças que ocorreram entre aplicações sucessivas como resultado da realimentação obtida a partir da análise da experimentação anterior.

Representa-se, em linhas gerais, a sistemática utilizada para a composição das experimentações, a qual é baseada na metodologia da Engenharia Didática adaptada ao contexto desta pesquisa e constituída das etapas de preparação, aplicação, análise e realimentação para o planejamento da experimentação seguinte.

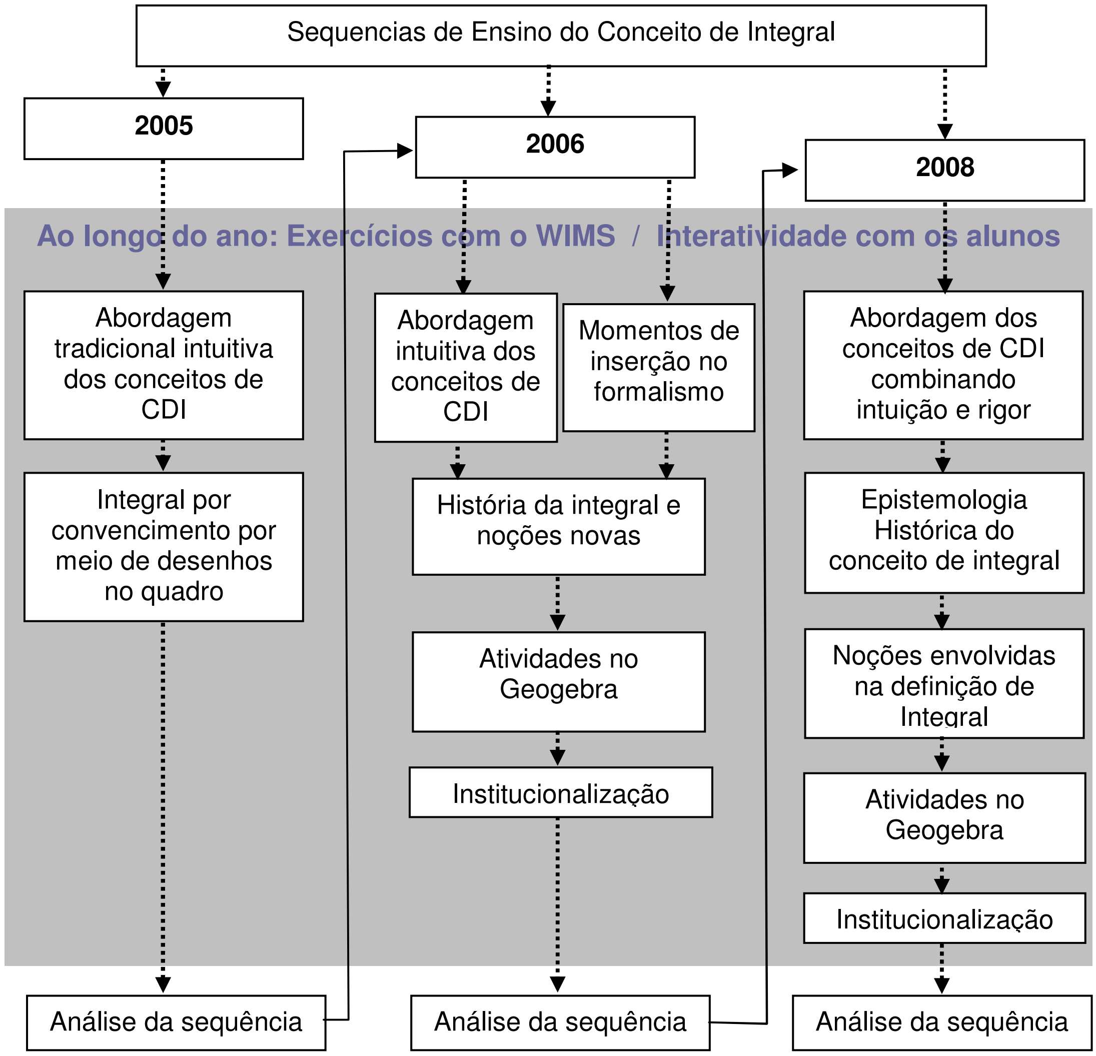


Figura 6-3. Quadro-resumo das sequências didáticas de 2005, 2006 e 2008.

Observa-se que algumas escolhas didáticas foram mantidas durante os três anos, tais como o incentivo à participação do aluno e a realização de avaliações com o programa WIMS, representados na Figura 6-3 pelo retângulo sombreado. Entretanto, de um ano ao outro, as sequências foram sendo alteradas.

Começando, em 2005, por um ensino eminentemente intuitivo, entretanto, próximo ao ensino tradicional, constataram-se a falta de comprometimento do aluno na resolução de atividades em sala de aula – elaboradas com o objetivo de levá-lo a colocar em funcionamento noções envolvidas com o aprendizado do conceito de integral – e a falta de interesse pelo aprendizado do processo de integração, demonstrado pela pressa de se aprender apenas as técnicas. Um ponto positivo foi o incentivo à participação em sala de aula.

A análise destes resultados levou a uma realimentação (representado na Figura 6-3 pela seta longa e cheia) da sequência de 2006, propondo-se modificações tais como a inclusão de atividades realizadas em um programa e uma abordagem histórico-epistemológica do conceito de integral com ênfase no seu processo de formação por meio do conceito de medida. Visava-se um ensino mais geral e mais rigoroso do conceito de integral. Embora os resultados desta experimentação tenham sido melhores do que os de 2005, não foi possível alcançar o nível de generalização almejado, além disso, a abordagem histórico-epistemológica ficou mais restrita à história. Um ponto bastante positivo foi devido ao uso de um programa para a resolução de atividades, o que causou uma notável mudança no comportamento do aluno. Neste momento, eles assumiram a responsabilidade pelo seu aprendizado.

Novamente, a análise dos resultados da experimentação de 2006 conduziu a uma realimentação da sequência de 2008. Manteve-se o uso de um programa e o incentivo à participação do aluno. Continuou-se também com a abordagem histórica, porém, foi necessário um estudo epistemológico mais completo do conceito de integral e um embasamento matemático mais teórico deste conceito. Além disso, a análise dos resultados de 2006 indicou a necessidade de um ensino mais rigoroso dos demais conceitos de CDI para se conseguir realizar um ensino mais geral do conceito de integral. Acrescentou-se ainda uma sessão didática em relação a 2006.

A análise dos resultados de 2008 deve gerar modificações para uma próxima aplicação. E, assim, continua o processo...

6.11 Resultados e Análises da Seqüência de 2008

Os resultados analisados são relativos às observações em sala de aula e às produções escritas dos alunos efetuadas após a primeira e após a terceira sessões de 2008.

Em um âmbito mais geral, as análises visam uma verificação do quanto foi possível o desenvolvimento de um ensino mais rigoroso do conceito de integral para, com isso, estender-se este modelo de ensino aos demais conceitos. Caso contrário, o que mais se deve fazer para atingi-lo.

Faz-se também uma análise comparativa entre as experimentações de 2006 e de 2008 por meio da lista de exercícios, realizada na segunda sessão de 2006 e na terceira de 2008, para se averiguar as diferenças e os avanços, caso existam, na qualidade da linguagem matemática advinda com as modificações ocorridas no ensino.

Destaca-se que as análises realizadas visam uma validação de ordem qualitativa, baseada na observação e interpretação e não na comparação estatística do desempenho das turmas, dando-se maior relevância ao contexto. Este tipo de validação é típico da engenharia didática (ARTIGUE, 1989). De acordo com Freitas et al. (1996), uma análise qualitativa valoriza a novidade, o interesse, o tema, aspectos que permanecem na esfera do subjetivo. Para Martins e Bógus (2004), análises qualitativas produzem explicações contextuais para um pequeno número de casos com uma ênfase no significado do fenômeno, buscando uma compreensão particular para aquilo que estuda. Os dados de tal análise são ricos em descrições de pessoas, situações, acontecimentos, vivências. O pesquisador substitui as correlações estatísticas pelas descrições e as conexões causais objetivas pelas interpretações.

6.12 Observações e Análise das Sessões de 2008

Esta seção é reservada à análise das atividades didáticas escalonadas em quatro sessões descritas a seguir.

6.12.1 Primeira Sessão

Por meio das intervenções dos alunos, identificaram-se, na primeira sessão, a incompreensão de alguns conceitos considerados conhecimentos antigos e a má formação ou o aprendizado mecânico de outros, tais como o significado do número real *Pi*, representado pelo símbolo π, a área do quadrado, o cálculo da área do círculo, o que é número irracional.

Observa-se, contudo, que noções como estas são ferramentas de trabalho destes alunos, as quais eles sabem muito bem manipular, como se constatou durante todo o ano. Portanto, essas manifestações talvez sejam indicativas de um ensino que foi direcionado apenas para o “aprender como funciona”.

Sobre algumas noções abordadas, foi possível ao aluno resgatar um significado original que tinha sido perdido ou ampliar o seu significado, como observado durante a aula e proferido por alguns deles na resposta à primeira pergunta da lista desta sessão:

Na aula de hoje, você teve que reformular algum conhecimento antigo seu? Qual(is)?

- *Sim. O tratamento de medidas “reais”* (ele quis dizer da realidade concreta) *relacionadas com medidas irracionais*.

Com respeito a esta resposta, verificou-se que durante a aula alguns alunos ficaram surpresos por perceberem que uma medida realizada por instrumentos não é exata e que a idéia de medida exata é um conceito da mente.

- *Não. Apenas que existem infinitos maiores que outros infinitos.*

- *Sim. Tendo um retângulo em gráfico f(x)* (aqui, ele está se referindo a uma função constante)*, ao tirar um segmento correspondente a um x, a área não se altera (* $x \in$ *ao intervalo que contém o retângulo* (ele quis dizer que *x* pertence ao domínio da função)*).*

Estas duas respostas estão relacionadas ao momento em que se perguntou aos alunos sobre a medida de um quadrado, do plano euclidiano, do qual é retirado um número finito de segmentos ou um número infinito deles. Depois, levou-se esta mesma idéia para o plano cartesiano.

- *Sim. Foi possível fazer uma revisão sobre alguns conceitos básicos (como a definição de área que, embora fácil, acaba fugindo à memória) e o que seriam números construtíveis, não construtíveis, algébricos, transcendentes.*

- *Sim. O conceito da área do quadrado. Eu pensava que a área do quadrado de lado um era um, por causa de algum cálculo e não de uma convenção.*

- *Sim, por exemplo, a questão da medida de algo, pois se precisa de uma referência de medição.*

- *Sim. O conceito de área e o conceito de medição.*

Estas quatro respostas são bastante representativas da dificuldade manifestada em classe sobre a noção matemática de medida de uma região.

Por fim, sobre esta questão, um aluno se expressou da seguinte forma:

Na aula pudemos reviver conhecimentos antigos, muitos deles obtidos no ensino fundamental do período escolar. Entre eles os assuntos de conjuntos, figuras planas, sendo abordado desde a sua natureza (desenho com régua e compasso) até o cálculo de sua área.

Encontram-se, no Anexo IV, algumas cópias das respostas manuscritas dos alunos.

Quanto ao conteúdo desta primeira sessão, sentiu-se a necessidade de um tempo maior em sala de aula para melhor explorar um entrosamento da classe com esta história. Além disso, faltou uma maior inserção da história no meio das demais sessões. Outra questão que escapou, provavelmente devido à restrição de tempo, foi uma discussão com os alunos, em uma sessão seguinte, sobre a análise das suas respostas a esta lista.

6.12.2 Terceira Sessão

Estando os conteúdos e a forma da segunda e da quarta sessões estreitamente relacionados, optou-se por se fazerem as análises destas sessões em conjunto após a análise da terceira sessão.

Ocorreu, nesta sessão, o que Brousseau (1986) denomina de *devolução* e define como sendo o ato pelo qual o professor consegue transferir para o aluno a responsabilidade por uma situação de aprendizagem ou de um problema. Metaforicamente falando, significa que o aluno entrou no jogo.

Esta confirmação se deu no momento da aplicação da seqüência, na qual foi observado o empenho do aluno na resolução dos exercícios. Além disso, todos os 33 alunos presentes enviaram por e-mail os exercícios resolvidos no GeoGebra. Mostra-se, na Figura 6-4, uma cópia das várias etapas de resolução do exercício II.3 enviada por um deles.

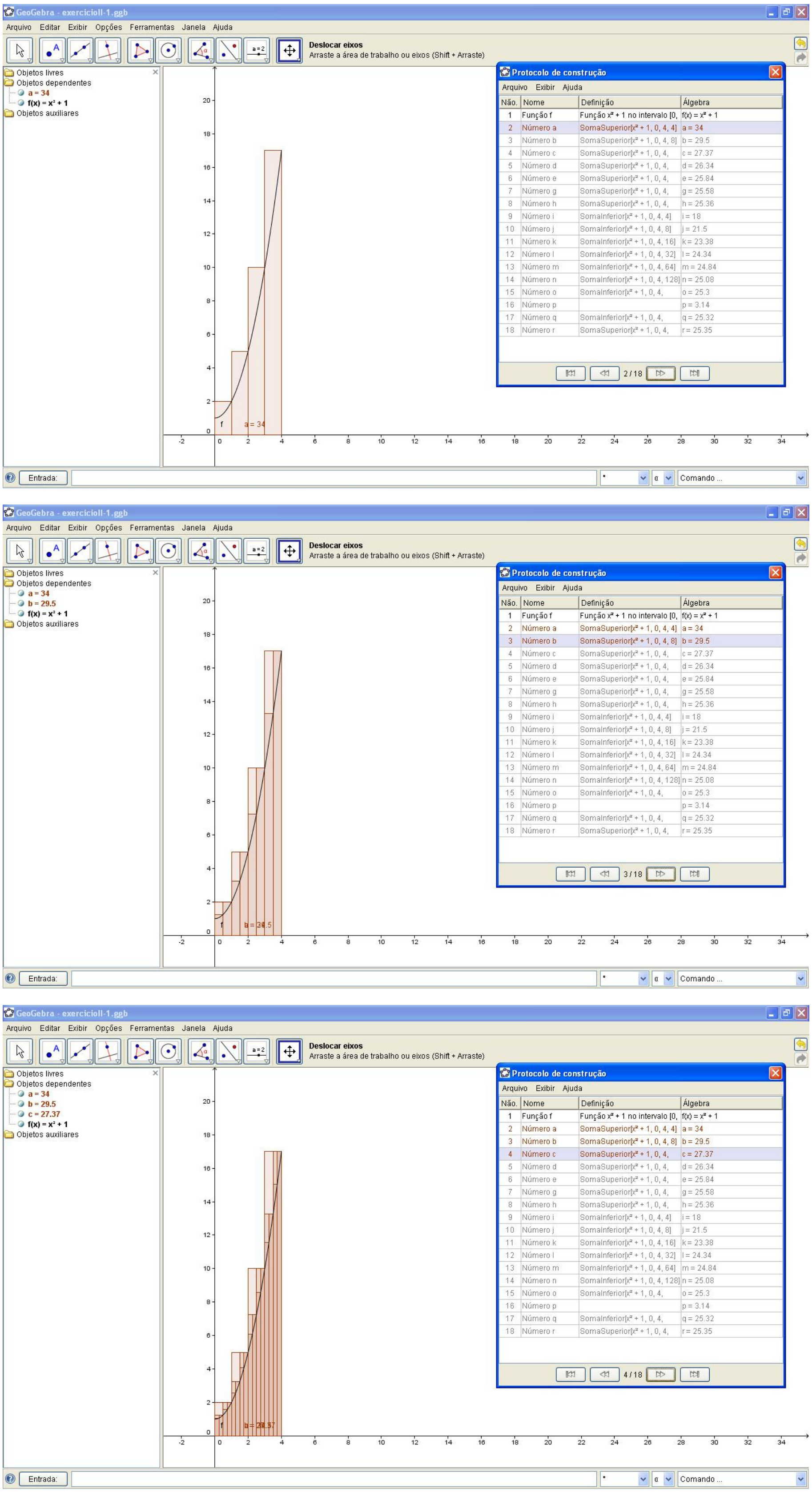


Figura 6-4. Representação da soma superior por retângulos.

Da lista de exercícios recebida dos alunos, foi feita uma análise mais detalhada das respostas ao exercício II.5, a função de Dirichlet, e ao problema III, uma prova de um caso particular do Teorema Fundamental do Cálculo. Sobre as demais questões, mais vinculadas à representação e à interpretação gráfica das somas de Riemann, são feitas considerações mais gerais. Dos 33 alunos que receberam a lista, 31 devolveram-na resolvida na aula seguinte.

Verifica-se, nesta análise, a capacidade de os estudantes adaptarem os conhecimentos adquiridos durante todo o ano mesclados aos conhecimentos mais recentes, aprendidos durante estas três sessões, para a resolução:

- De um exercício cuja função envolvida possui propriedades atípicas, a função de Dirichlet (Exercício II.5), a qual foi colocada com o intuito de apresentar uma limitação ao processo de integração e como uma abertura para a introdução de processos mais gerais. No enfoque dado em sala de aula, este processo mais geral pode advir como solução ao problema, bastante pertinente, levantado pelo aluno em 2006 e destacado na Seção 6.6: *e agora, como se faz pra medir?*
- De outro, Exercício III, dividido em etapas, cuja resolução exige o uso de uma linguagem mais rigorosa, por meio da qual eles têm que colocar em funcionamento alguns resultados ensinados ao longo do ano, como o TVE, o TVI e o Teorema da Fronteira ou do Confronto (TC) (ou, ainda, dito do Sanduíche).

Enunciam-se, em seguida, estes dois exercícios e apresentam-se resultados e análises das respostas dos alunos.

<u>Exercício II.5</u>

Para a função de Dirichlet, $D(x)$:

$$D(x)=\begin{cases}1, & se \quad x \quad for \quad racional\\ 0, & se \quad x \quad for \quad irracional\end{cases}$$

a) Determine S_n e s_n, no intervalo $[0, 3]$, para $n=3, 6, 9, 10^8$;

b) Qual a área do subconjunto $C=\{(x,y); 0\le x\le 3 \quad e \quad 0\le y\le D(x)\}$?

c) Calcule $\int_0^3 D(x)dx$.

Este exercício foi resolvido por 23 dos 31 alunos que entregaram a lista.

Respostas de alguns alunos:

a) Este item foi resolvido pelos alunos aplicando diretamente as definições de somas de Riemann resultando em $S_n = 3$ e $s_n = 0$.

b) Destacam-se algumas respostas a este item:

b1. *Valores racionais não formam área, logo a área é zero.*

b2. *A área de C é nula, pois é um conjunto de retas.*

b3. *Como o conjunto C é constituído apenas por linhas, a área fica igual a sua área. Logo, a área é igual a zero.*

Muitos responderam que a área era zero, mas não explicaram o porquê. Outros deram respostas semelhantes a estas.

c) Neste item, as respostas mais típicas foram:

c1. *Não pode ser calculada usando Riemann, pois os limites de "cima" e de "baixo" são diferentes.*

c2. $\int_0^3 D(x)dx$ = Área, $\int_0^3 D(x)dx = 0$ (este aluno tinha respondido que a área de C é zero).

c3. *Como* $\lim_{n\to+\infty} s_n \neq \lim_{n\to+\infty} S_n$, *não podemos calcular* $\int_0^3 D(x)dx$.

Análises das respostas:

De uma maneira geral, sobressai-se, nestas respostas, uma adaptação à forma como os conteúdos foram introduzidos nas duas primeiras sessões e a problemas que foram discutidos durante todo o ano.

- O item b1 se refere a uma discussão mantida durante todo o ano sobre tamanho (cardinalidade) de conjuntos, a qual aconteceu também durante a aplicação da seqüência. Na primeira sessão, caracterizou-se a medida dos racionais do intervalo [*0,1*] como zero, conseqüentemente, a dos irracionais como um. Provavelmente, o aluno usou aqui esta idéia para chegar a esta conclusão.

Ressalta-se que esta propriedade foi provada por um dos alunos em uma aula posterior à aplicação da seqüência.

- b2 e b3 se referem à propriedade de que sendo C formado pela união disjunta de conjuntos que têm cada um deles medida nula, então C tem também medida nula. Tal propriedade não é válida para uma união qualquer de conjuntos. Porém, já tinha sido considerada por eles, como relatado na primeira sessão, como uma propriedade extensível a qualquer união disjunta, o que é intuitivo, embora falso.

- Em c1, é feita, provavelmente, uma associação entre somas de Riemann e suas representações por retângulos.
- Em c2, o aluno faz uma associação direta entre área e integral.
- O aluno usa uma linguagem mais matemática em c3.

Estas respostas são bastante ricas em significados. Analisando-as, pode-se conduzir o ensino para questões fundamentais ligadas às propriedades dos números reais que são determinantes para uma melhor compreensão dos conceitos de CDI, como indicam b1 e b2.

Ele pode preparar também o ensino no sentido de destacar a definição de integral de Riemann de suas representações geométricas, pois, é comum o aluno identificar o objeto matemático integral a sua representação por meio da subdivisão em retângulos de uma região do plano cartesiano, como em c1 e c2, ou por meio do cálculo de uma primitiva.

<u>Exercício III</u>:

Integral de Riemann de uma função derivada que é contínua: $\int_a^b F'(x)dx$

a) Considere uma função $\boldsymbol{F} : [a,b] \to R$ **derivável** e tal que a sua derivada ***F'(x)*** seja **contínua** em $[a,b]$;

Obs: Para ajudá-lo a visualizar, esboce o gráfico de uma função como F.

b) Divida o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$;

c) Note que $F(b)\text{-}F(a) = F(x_1)\text{-}F(a)+F(x_2)\text{-}F(x_1)+....+F(b)\text{-}F(x_{n-1})$, logo

$$F(b)\text{-}F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Obs: Em seu gráfico, cada termo dessa soma corresponde, geometricamente, a que?

d) Como F tem derivada em $[a,b]$, use o **TVM** em cada subintervalo i para reescrever cada parcela do somatório acima (use o TVM em um intervalo e depois generalize);

Obs: Fazendo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta_i y = y_i - y_{i-1} = F(x_i) - F(x_{i-1})$, note que, pelo TVM, $\Delta_i y = F'(c_i).\Delta_i x$. Observe, em um gráfico hipotético de *F'*, o que representa $\Delta_i y = F'(c_i).\Delta_i x$.

e) Agora, use a continuidade de *F'* para relacionar *F(b)-F(a)* com s_n e S_n relativas à *F'*;

f) Sabendo que toda função contínua é integrável, use o teorema do confronto para determinar o valor da $\int_a^b F'(x)dx$.

Apresentação de Resultados

15 estudantes entregaram todos os itens desta questão resolvidos. Porém, apenas 9 deram respostas distintas. Dentre os 16 estudantes restantes, alguns comentaram apenas os dois primeiros itens e outros não responderam nenhum item. Não houve respostas incorretas.

Uma cópia de três resoluções distintas deste exercício encontra-se no Anexo V.

Os resultados aqui apresentados são relativos às resoluções dos 9 alunos que apresentaram respostas diferenciadas, nas quais:

- Os alunos fizeram gráficos distintos para fazer um gancho entre o conteúdo da questão e os seus conhecimentos;
- Eles usaram corretamente o TVM no item *d*, o TVE no item *e*, o TC no item *f*;
- Apoiaram-se em uma linguagem matematicamente correta, por meio de símbolos, e utilizaram bem as noções introduzidas nas sessões anteriores, tais como somas de Riemann e partição.

Análise

Por ser, como o próprio nome já diz, um teorema que representou um marco para o desenvolvimento dos conceitos de CDI, foi elaborada no enunciado do problema III uma adaptação do TFC ao contexto de ensino ministrado durante o ano de 2008. Tinha-se por objetivo tornar a sua prova acessível e significativa para os alunos submetidos a este ensino sem se distanciar, contudo, do campo da matemática.

Alguns livros de cálculo adotados como referência não provam o TFC, apenas apresentam uma interpretação geométrica e uma explicação do seu resultado, como o

Finney et al. Outros, como o do Leithold, fazem uma prova que não utiliza diretamente as somas de Riemann e sim a noção de anti-derivada.

Provas do TFC encontradas em certos livros de análise, como Lima, 2000, também não usam, diretamente, as somas de Riemann. Outros, como Lima, 1982, supõem no enunciado que *F'* é integrável e não necessariamente contínua – o que dificulta a prova do teorema por usar definições mais gerais tais como supremos e ínfimos.

Em uma aula posterior à quarta sessão, perguntou-se aos alunos se eles tinham usado apenas os seus conhecimentos para resolver este exercício. Eles disseram ter procurado algumas provas do TFC e feito adequações para a resolução das suas etapas.

Diante do que foi exposto nos parágrafos acima, pode-se concluir que uma porcentagem significativa dos alunos participantes da experimentação, em torno de 30%, conseguiu adaptar corretamente seus conhecimentos, juntamente com o conteúdo que foi pesquisado por eles, para encontrar uma solução para o Problema III.

<u>Exercícios II.1 ao II.3</u>

Faz-se uma análise dos resultados do item *e* do exercício II.1 e do item *f* dos exercícios II.1, II.2 e II.3, nos quais estão envolvidas uma função não negativa, $f(x) = x^2+1$, uma não positiva, $f(x) = x^2 - 9$, e uma simétrica em relação à origem dos eixos coordenados, $f(x) = sen(x)$, nos intervalos definidos em cada exercício. Verificaram-se, nesta análise:

a) Se os estudantes foram capazes de encontrar valores aproximados para integrais por meio das somas superiores e das somas inferiores, sendo ambas imprescindíveis;
b) Qual a associação que os estudantes fizeram entre área entre curvas e integral.

Os demais itens não foram considerados por serem atividades que tratam de familiarizar os alunos com a as noções introduzidas nas sessões anteriores.

<u>Resultados</u>

Item II.1.*e*: Encontre um valor aproximado para a área da região em destaque e para $\int_0^3 f(x)dx$, considerando um erro inferior a 0,03.

Item *f* (II.1, II.2, II.3): Qual a relação entre a área desta região e a integral?

Resultados

Item II.1.*e*:

Valendo-se do cálculo das somas superiores e das somas inferiores, quase todos os estudantes conseguiram apresentar um valor aproximado, inferior a um erro dado, para o cálculo da integral da função não negativa (neste caso, igual a um valor aproximado para a área) da seguinte forma: realizaram cálculo de somas superiores, S_n, e de somas inferiores, s_n, para vários valores de n, até que a diferença entre as somas fosse inferior ao erro dado. Escolheram um número entre S_n e s_n para o valor da integral (e da área) pedido.

Item *f*:

- Para fazer uma relação entre área e integral, tratando-se da função $f(x) = x^2+1$ que assume valores apenas não negativos: 15 estudantes associaram a área ao módulo da integral, 11 associaram a área ao valor da integral e cinco não responderam;
- Para fazer uma relação entre área e integral, tratando-se da função $f(x) = x^2 - 9$, que assume valores apenas não positivos no intervalo indicado: 21 estudantes associaram o valor da área ao módulo da integral ou ao valor simétrico da integral, 5 não responderam e 5 disseram ser a integral igual à área, neste caso, atribuíram um valor negativo à área;
- Quanto à função que assume tanto valores negativos quanto positivos, 13 estudantes disseram que multiplicariam por dois o valor da área da região acima do eixo das abscissas ou somariam os módulos das integrais, 5 não responderam e 13 alunos atribuíram o valor zero à área, dizendo ser a área igual à integral ou ao módulo da integral.

Análise

Observa-se uma confusão na relação área/integral. De certa forma, natural, devido ao recente ensino de tal conteúdo.

Entretanto, outros fatores ligados a uma má formação de certos conhecimentos antigos dificultaram, provavelmente, a compreensão dessa relação. Destaca-se, por exemplo, que aproximadamente 42% dos estudantes, mais precisamente 13 dentre eles, fizeram uma associação mecânica entre área e módulo da integral ou entre área e integral atribuindo o valor zero à área de uma região que contém um quadrado, como a região do exercício II.3, sem, sequer, perceber a contradição entre o valor numérico e o objeto por eles representado.

Analisaram-se também as diferenças no comportamento dos alunos entre a primeira sessão, na qual o ensino/aprendizado é mediado pelo professor usando quadro, pincel e slides, e a terceira sessão, na qual o computador passa a ser o recurso determinante no processo de ensino/aprendizagem. Como já foi dito antes, houve um total compromisso do aluno com a resolução dos exercícios.

6.12.3 Segunda e Quarta Sessões

Existe uma relação estreita entre estas sessões, tanto na forma quanto no conteúdo. Na segunda, foram definidas, de forma isolada, noções básicas, preparando o aluno para o ensino da definição de integral. Na quarta, houve uma aula mais expositiva, considerando as noções introduzidas na segunda sessão não de forma individual, mas como conceitos integrantes da definição de integral. Procedeu-se a uma institucionalização dos conhecimentos que já tinham sido colocados em funcionamento, pelos alunos, de maneira parcial, nas outras sessões. Em ambas as sessões, utilizaram-se quadro e pincel, apenas.

Nas duas sessões, não houve produção escrita dos alunos. Mas, em ambas, a interatividade dos alunos demonstrou o seu comprometimento com o aprendizado: na segunda, com o objetivo de entender as novas noções; na quarta, com discussões sobre as dúvidas que eles tiveram na resolução da lista da terceira sessão e com perguntas relativas à definição de integral e à relação área/integral.

Ressalva-se, contudo, que os resultados e análises da terceira sessão estão diretamente atrelados à segunda, pois os alunos colocaram em funcionamento, dentro das atividades propostas, as noções introduzidas na segunda; à quarta sessão, vinculam-se todas as outras.

6.13 Sequências: 2006 x 2008

Faz-se, nesta seção, um paralelo entre as seqüências de 2006 e de 2008, ressaltando-se modificações efetuadas que levaram a resultados diferenciados entre os dois anos de aplicação da seqüência. Representam-se as sessões por 2006-i e 2008-i, onde i = 1,2,3 ou 4 indica a ordem da sessão:

- Em 2008, foi acrescentada uma sessão em relação a 2006, tendo esta constado de apenas três sessões. Os conteúdos abordados na sessão que foi acrescentada em 2008, sobre noções fundamentais para o ensino da definição de integral, tinham sido introduzidos em 2006-1 junto com a história do conceito de integral. Portanto, em 2008, mais tempo foi disponibilizado para a história deste conceito e para a introdução das novas noções;
- Exerceu-se certo controle sobre a compreensão dos alunos relativamente à sessão 2008-1, história do conceito de integral. Eles receberam uma lista de questões, relacionadas ao tema da sessão, para ser devolvida na sessão seguinte. O que não ocorreu em 2006-1;
- Em 2006, houve uma tentativa de abordar o conceito de integral de forma mais precisa, mas faltou ao ensino uma linguagem que permitisse a comunicação aos alunos dos conteúdos necessários. Por esta razão, integraram-se os épsilons e deltas ao ensino de 2008, o que se refletiu sobre uma abordagem um pouco mais geral do conceito de integral. Para isso, fez-se necessária a indicação de livros de referência que dão ao cálculo um tratamento mais rigoroso, como o Apostol, além dos livros de CDI já citados na Seção 6.3;
- A história do conceito de integral abordada na sessão 2008-1 foi fundamentada em um estudo histórico, epistemológico e matemático mais completo realizado durante o ano de 2007, o qual possibilitou que esta história fosse contada menos superficialmente em relação a 2006-1.
- Foram realizadas modificações na lista da sessão 2006-2, do GeoGebra, para adaptá-la ao ensino de 2008.

6.14 Validação e Conclusões Gerais das Seqüências

Fazendo-se uma leitura das seqüências de 2005, 2006 e 2008 apresentadas nesta pesquisa, verifica-se uma evolução gradativa da construção do conceito de integral em direção a uma abordagem que tenta fazer uma aproximação entre as idéias intuitivas, vinculadas a representações dos conceitos, e os objetos matemáticos abstratos, ambos imprescindíveis para o aprendizado desta ciência.

Na visão de Aline Robert (1992), não se pode testar diretamente se a aplicação de um determinado ensino foi responsável pela evolução do aprendizado. Muitas variáveis não controláveis pelo *milieu*[14] (BROUSSEAU, 1986) podem estar coincidentemente associadas aos bons resultados, tais como o próprio perfil favorável do aluno ou alguma motivação profissional ocasional. Por outro lado, a Teoria Fedathi (BORGES NETO e SANTANA, 2001) considera que os problemas de aprendizagem da matemática no Brasil estão mais vinculados ao ensino, à prática do professor e a sua formação. Para completar, de acordo com Gattuso (2001), as escolhas didáticas feitas pelo professor provocam diferentes atividades e, com isso, diferentes aprendizagens.

Baseando-se nestas informações não se pode desconsiderar a influência, sobre a aprendizagem, da adoção de um sistema investigativo, como a engenharia didática, em sala de aula. Por meio das fases da ED, foi feito aqui um estudo, aplicação, controle do conteúdo e uma realimentação do ensino do conceito de integral no contexto da pesquisa. Portanto, podem-se atribuir também a esta prática as evidentes diferenças entre as seqüências. Destacando-se, mais precisamente:

- A partir de observações em sala de aula, com respeito às intervenções dos alunos, descritas na Seção 6.12, identificou-se uma abordagem da história do conceito de integral mais fundamentada no campo das idéias matemáticas e menos, apenas, informativa;
- Por meio da análise dos registros escritos dos alunos, presente na Seção 6.12, constatou-se um avanço na aquisição de uma linguagem mais rigorosa, a qual permitiu um ensino mais geral do conceito de integral;
- Outro fator responsável por uma mudança foi colocar os alunos de frente para o computador. O comportamento deles foi inteiramente diferente daquele passivo do ano de 2005. A adoção de um programa computacional adequado ao ensino transferiu para o aluno a responsabilidade por uma parte do seu aprendizado em sala de aula, ocorrendo o fenômeno denominado por Brousseau (1986) de *devolução*;
- A possibilidade de se ter um maior controle sobre o ensino/aprendizagem ao se recorrer ao processo de realimentação: analisando resultados e propondo adaptações.

[14] *Milieu* pode ser definido como um dispositivo que se coloca para funcionar quando uma pessoa quer ensinar um conhecimento ou controlar a sua aquisição. Ele é constituído pelas peças de um jogo, ou uma prova, um problema, ou mesmo um exercício, etc, e pelas regras de interação do aprendiz com este dispositivo.

Durante todo o texto desta tese, tem-se a preocupação de mostrar o enriquecimento de um ensino que se apóia em um processo que permite uma renovação das escolhas didáticas e da prática em sala de aula. No sentido de dar ênfase ao processo de realimentação, apontam-se dificuldades ocorridas na seqüência de 2008 e sugerem-se ajustes para uma próxima aplicação:

- A gênese artificial do conceito de integral considerada pela ótica da medida em geometria, embora tenha propiciado ao aluno fazer uma reflexão e, ao mesmo tempo, uma correção de algumas de suas concepções errôneas com respeito ao conceito de medida, acabou por limitar o conceito de integral a interpretações geométricas. Em uma próxima aplicação, seria interessante conectar a integral a outras representações, como a noção de trabalho em Física ou a problemas específicos da engenharia, e de infiltrar a sua epistemologia histórica nas demais sessões;
- Devido a restrições de tempo, de cumprimento de programa, o questionário entregue aos alunos na sessão 2008-1 e devolvido por eles na sessão seguinte não foi analisado com antecedência. Sugere-se que, em uma próxima aplicação, aproveite-se a análise para corrigir, durante as aulas seguintes, a formação de falsas concepções que transpareceram nas respostas dos alunos;
- Apesar de, em 2008, se ter introduzido uma definição mais geral de integral de Riemann (em relação a 2006), não foi possível de se alcançar o índice de generalização desejado, o qual se estende às funções descontínuas em pontos isolados. Pois, seria necessário um ensino mais completo de supremos, ínfimos e seqüências numéricas, porém, não havia mais tempo para abordá-los. Neste caso, optou-se por uma definição intermediária entre o cálculo e a análise (ver Seção 6.9).

Por último, enfatiza-se que o objetivo da seqüência não é que o aluno adquira o conceito de integral em apenas quatro sessões, mas sedimentar conhecimentos introdutórios que possam servir de alicerce para o aprendizado de outros conceitos, seguramente mais complexos, que serão explorados consecutivamente.

7 O Modelo de Ensino para a Introdução dos Conceitos Principais de CDI nos Cursos de Engenharia

A história contada no Capítulo 4 mostra que as noções fundamentais de CDI têm origem milenar, mas foram se desenvolvendo lentamente no cenário matemático, embora tenham sido objetos de estudo de grandes cientistas. Tal fato reforça a complexidade destas noções.

Naturalmente, esta complexidade se reflete em seu ensino e aprendizagem. O limite, a continuidade, a derivada e a integral não podem ser traduzidos em poucas linhas, em um desenho, em um gráfico ou em uma simples fórmula.

Os livros de CDI reservam um capítulo para cada noção (exceto a continuidade que consta como um detalhe do limite), apresentam suas definições formais e concentram a maior parte do seu texto em suas definições intuitivas e em teoremas voltados para operações algébricas com os conceitos, como soma, produto, radiciação. Os exercícios visam o aprendizado de técnicas e resolução de problemas semelhantes aos exercícios resolvidos, nos quais são ensinadas as etapas que o aluno deve cumprir para chegar ao resultado desejado.

Pesquisas, já citadas (conforme Capítulo 5), mostram que com este ensino os alunos, em geral, não conseguem apreender as características mais fundamentais dos conceitos, porém, isto não impede que alguns consigam obter nota máxima na disciplina de cálculo.

Não se indica aqui que o ensino de cálculo deva se lançar cegamente na direção de tudo demonstrar, tudo tornar coerente e desprezar a força dos algoritmos matemáticos, mas sim de se exercer uma vigilância epistemológica no sentido de não se afastar do campo científico matemático.

Com este intuito, propõe-se um modelo de ensino das noções de CDI para os cursos de engenharia que valorize os seus status tanto de *ferramenta* quanto de *objeto*, que considere as implicações entre estes aspectos, trabalhando com rigor e intuição de maneira significativa, sempre se adequando aos conhecimentos dos alunos. Descreve-se em seguida o modelo dividido em cinco fases interdependentes (o que não significa cinco sessões), representadas esquematicamente na Figura 7-1 e apresentadas nas próximas subseções.

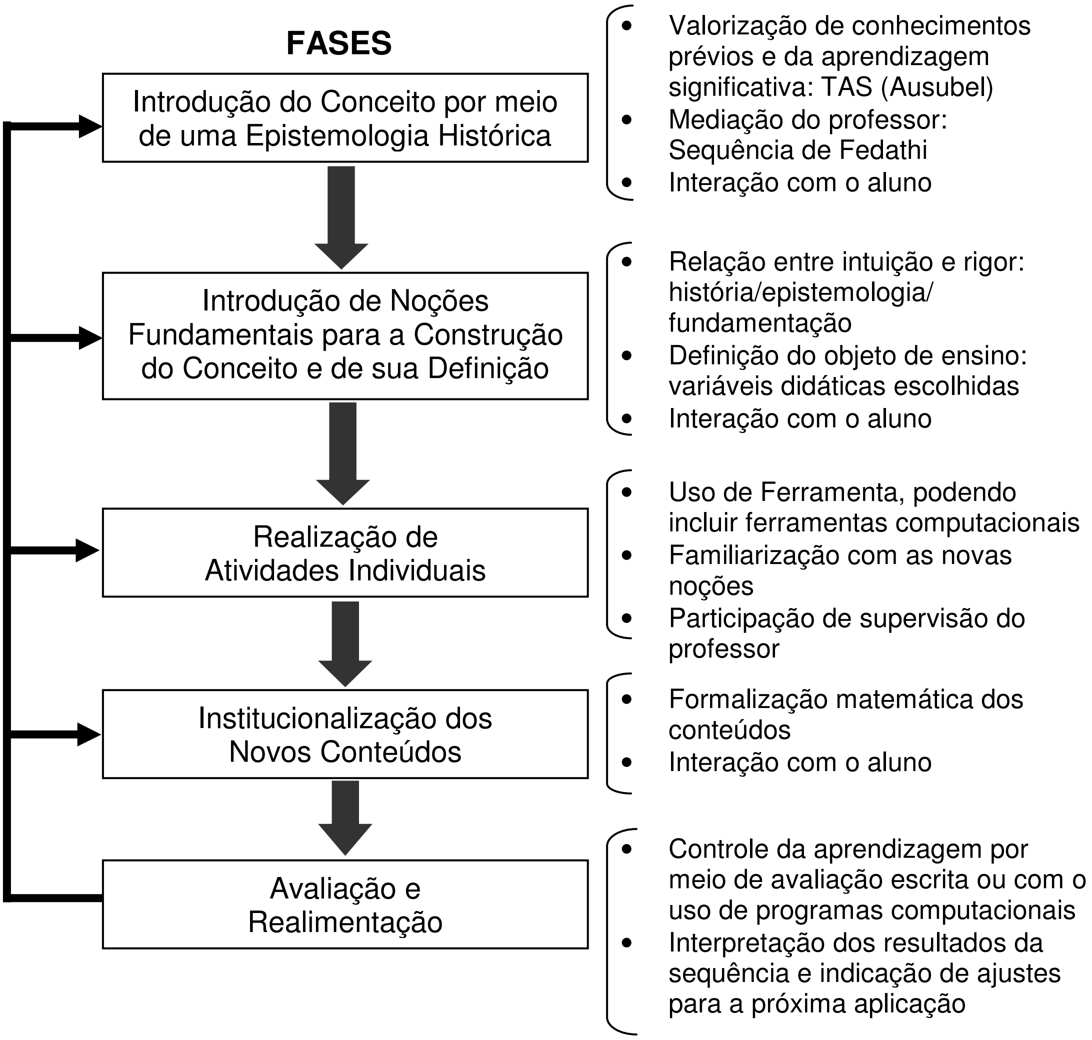


Figura 7-1. Fases do Modelo de Ensino dos Conceitos de CDI.

7.1 <u>Primeira Fase</u>: Introdução do Conceito por Meio de uma Epistemologia Histórica

O ensino de uma noção matemática pode ser iniciado pelo final de sua história: sua definição, propriedades e aplicações bem determinadas. Mas aí ficam as perguntas: De onde surgiu esta idéia? Pra que inventaram isto? Quem foi que pensou sobre este assunto? E como ele conseguiu tal façanha? Faz muito tempo? Em que época mesmo?

Habituados a um aprendizado dogmático da matemática, estas questões podem nem mesmo “passar pela cabeça do aluno”. Este fato foi constatado em diversas sessões didáticas relatadas nesta tese (ver Capítulo 6).

Difíceis de serem respondidas, mas possíveis de serem justificadas, sugere-se que em uma primeira fase do ensino de cada conceito de cálculo seja realizada uma abordagem que suscite no aluno este tipo de questionamento, sendo, assim, construída uma história permeada de datas, nomes e acontecimentos que marcaram a formação do conceito. As idéias matemáticas presentes nesta história, descobertas por meio de um estudo epistemológico do conceito, são caracterizadas por situações-problema que favoreceram o seu nascimento e evolução. São estas situações, escolhidas pelo professor, que devem fazer o aluno, nesta fase, confrontar-se com atividades matemáticas geradoras de significados (ver Teoria da Aprendizagem Signigicativa no Capítulo 2).

Nessa fase, é fundamental interagir com o aluno, incentivar a sua participação, ouvir as suas sugestões sobre a resolução das situações propostas, as quais devem ser escolhidas com o objetivo de fazer vínculos com os seus conhecimentos prévios.

Ressalta-se que não se trata de uma mera exposição, mas de se colocar a classe em um “clima” de atividade matemática. Para tanto, sugere-se que a atitude de mediação do professor seja baseada nas etapas da Sequência Fedathi (ROCHA, 2008).

Objetivos e Justificativa

O objetivo desta fase é dar uma historicidade aos conceitos, localizá-los no tempo e no espaço, para conscientizar o aluno das dificuldades de sua formação. A história pode ainda causar no aluno uma redescoberta do significado original, às vezes perdido, de algumas noções já conhecidas (como constatado no Capítulo 6). Pretende-se assim uma abordagem construtiva e, portanto, diferenciada do ensino habitual o qual apresenta as noções matemáticas de maneira pronta e acabada.

A inclusão de um estudo epistemológico visa promover o ensino por meio de problemas que contribuíram, no decorrer da história, para o avanço e formação do conceito e, também, colocar em evidência, de forma significativa, a necessidade da noção de rigor, a qual aparece desprovida de sentido na maioria dos textos de cálculo.

Observa-se que um estudo histórico-epistemológico dá subsídios para a preparação de todas as demais fases do modelo.

Para tanto, é necessário o compromisso do educador, responsável pela disciplina, com um estudo efetivo da evolução e da constituição histórica do saber matemático em questão, o qual pode ser aprimorado ao longo de vários anos em que a disciplina é ministrada.

7.2 <u>Segunda Fase</u>: Noções Fundamentais para a Construção do Conceito e de sua Definição

Propõe-se que na segunda fase sejam definidas e caracterizadas noções matemáticas básicas relacionadas à construção do conceito em questão e que o seu ensino explore tanto os seus aspectos intuitivos, geradores de significados, quanto os seus aspectos formais, que lhe dão coerência no campo matemático. A epistemologia exerce, neste momento, o papel fundamental de indicar caminhos matemáticos que liguem estes dois aspectos.

As variáveis didáticas relativas ao conteúdo (definição, teoremas envolvidos, aplicações, dentre outros) devem ser escolhidas, em conteúdo e forma, com base no nível de conhecimentos dos alunos.

Objetivos e Justificativa

Os conceitos matemáticos do cálculo são particularmente complicados e as suas definições formais são de difícil manipulação. Na verdade, a história conta que os fundamentos matemáticos dessas noções só ocorreram após séculos de sua utilização e a epistemologia demonstra que o funcionamento de suas definições formais acontece em um sentido contrário às formulações espontâneas dos alunos (ARTIGUE, 1993).

Dada esta distância entre intuição e rigor, um dos objetivos desta fase é dar continuidade à construção do conceito (iniciada na fase anterior) por meio de processos matemáticos que façam ligações entre estes dois aspectos presentes em sua formação. Para isto, por um lado, pode-se apoiar o seu ensino em diversos registros de representações, presentes em vários quadros matemáticos, tais como o numérico, o gráfico, o algébrico. Por outro lado, o ensino deve ser conduzido no sentido de levar o aluno a perceber que nenhuma dessas representações é capaz de caracterizá-lo plenamente (sempre considerando o nível de conhecimentos dos alunos).

A necessidade de se trabalhar com rigor e intuição de forma associada se justifica pelo fato de ambas serem indispensáveis para a aquisição de um conceito matemático. A intuição leva rapidamente à conquista de conhecimentos – precários e incertos. Porém, o rigor pode trazer a certeza dos resultados, mas decepciona, muitas vezes, a intuição e a imaginação (POINCARÉ, 1907).

7.3 Terceira Fase: Atividades Individuais

A terceira fase integra uma etapa importante da aprendizagem: a realização de atividades individuais (de preferência), com o auxílio de um programa computacional, nas quais as noções novas introduzidas na fase anterior sirvam como meio de solução dos exercícios propostos.

O papel do professor se restringe aqui à organização e ao acompanhamento das atividades, deixando que o aluno, sozinho ou por meio de discussões com os colegas, consiga adaptar seus conhecimentos na busca de soluções para os exercícios propostos.

Objetivos e Justificativa

Essa fase tem por objetivo que o aluno se familiarize com as novas noções, colocando-as em funcionamento por meio da resolução de problemas restritos a contextos particulares e também de problemas mais gerais, nos quais assumem um lugar como objetos do saber matemático.

Visando que o aluno investigue, levante hipótese, faça conjecturas, de forma individual, sobre as diversas representações do conceito que está sendo ensinado, sugere-se que, nesta fase, seja adotada uma ferramenta computacional adequada por intermédio da qual sejam realizadas atividades programadas pelo professor. A opção pelo uso de um programa pode ser justificada a partir da própria experiência de sala de aula em que se observou o papel do computador como meio de transferir para o aluno a responsabilidade pela resolução de tarefas.

7.4 Quarta Fase: Institucionalização dos Novos Conteúdos

O professor estabelece, nesta fase, os novos conhecimentos como elementos integrantes de um saber matemático bem constituído. Definições mais gerais, propriedades, teoremas e concepções consideradas indispensáveis para a apreensão do conceito são formulados, provados e discutidos de acordo com a necessidade do meio no qual está inserido o ensino.

Ressalta-se que não ocorre aqui o ponto final da construção do conceito. Pelo contrário, as fases do modelo tratam de uma primeira interação entre o aprendiz e o objeto de aprendizagem e esta fase condensa o que foi ensinado anteriormente. O conhecimento continua a ser elaborado ao longo do ano por meio de experiências que vão agregando ao conceito novas representações, aplicações e generalizações.

Objetivos e Justificativa

O objetivo desta fase é estabelecer, para o aluno, a consistência do que está sendo ensinado, abordando o conceito de forma mais geral, destacando-o dos seus registros representacionais que, nesta fase, são considerados e ressaltados como modelos do objeto de ensino.

É importante que seja feita uma análise das atividades realizadas na sessão anterior com o objetivo de aproveitar para discutir e corrigir, no momento da institucionalização, possíveis falhas de compreensão das noções trabalhadas e detectadas por meio desta análise.

Realçada por Brousseau (1986), a institucionalização é considerada uma etapa indispensável do ensino que pode ser justificada pelo fato de o aprendiz não conseguir espontaneamente identificar, classificar e incorporar o conhecimento que deve ser aprendido. Ressalta-se que, tradicionalmente, esta fase ocorre no início do processo de ensino de algum conteúdo.

7.5 Quinta Fase: Avaliação e Realimentação

Após as quatro primeiras fases, deve ser feita uma avaliação do aprendizado do aluno por meio da interpretação de uma coleta de dados tanto quantitativos, quanto qualitativos. Esta fase representa uma forma de se ter um controle, um retorno sobre o que foi aprendido. Da análise de seus resultados, dependem a preparação do ensino que se segue e a inserção de ajustes para uma próxima aplicação do modelo.

Objetivos e Justificativa

Esta avaliação consiste em dar subsídios ao professor para que ele possa ter um controle sobre o que foi ou não aprendido. Caso se conclua que o ensino não foi suficientemente eficaz, uma interpretação dos resultados pode indicar que mudanças devem ser feitas tanto em uma próxima aplicação da seqüência, quanto no decorrer do ano letivo, no sentido de se assegurar um melhor resultado.

Define-se, assim, um processo cíclico, dinâmico e transformador, cujos passos são realimentados por meio de uma análise crítica dos resultados, com o objetivo de melhor adequar o ensino na busca de um aprendizado mais completo.

7.6 Onde está a engenharia?

Se algumas leis constantes regem a distribuição do calor nos corpos sólidos,
quais são as expressões matemáticas destas leis?
E por quais análises pode se deduzir destas expressões a solução completa das questões principais?
Teoria Analítica do Calor: Discurso Preliminar.
J. Fourier (1822)

A história da humanidade é constituída, de certa forma, pela história da engenharia. Camp (1993) lembra que a civilização, como a conhecemos hoje, deve sua existência aos engenheiros. São pessoas que, durante séculos, aprenderam a explorar as propriedades da matéria e as fontes de energia em benefício da humanidade. Por meio de um esforço racional e organizado com o objetivo de usar o mundo material que nos cerca, os engenheiros projetaram uma enorme quantidade de conforto e conveniências que marcam a diferença entre a vida atual e a de nossos ancestrais há milhares de anos.

Contudo, da antiguidade até o surgimento do método científico, nos séculos XVI e XVII, as invenções e a tecnologia avançaram com certa lentidão (CAMP, 1993). A estruturação do conhecimento por meio de investigações científicas, pelas quais se acreditava ter um controle do mundo natural regido por leis universais e imutáveis, causou grande impacto no desenvolvimento das ciências e, consequentemente, da engenharia – atrelada às ciências em geral.

Embora, durante muito tempo, a engenharia tenha sido associada apenas a atividades práticas, foi se tornando necessária uma maior ênfase em um estilo mais analítico que considerasse aspectos científicos e, em especial, a matemática como forma de expressão. Já na década de 1920, o *Wickenden Report* (famoso estudo sobre educação para engenharia) (NAE, 2005) apontava para uma formação menos prática e mais teórica, com ênfase em matemática e ciência.

Hoje, o relatório *Educating the Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to the New Century* (NAE, 2005) adverte que a base da educação em engenharia deslocou-se para os fundamentos da Ciência e da Matemática.

Na verdade, em diversas ocasiões da história, os papéis de matemático e de engenheiro se (con)fundem. Arquimedes (287-212 a.C.), por exemplo, é considerado o maior matemático da antiguidade. Matemático ou engenheiro? Sobre suas invenções, verdadeiras “engenhocas”, considerava-as “diversões para se brincar de geometria” (EDWARDS, 1979), as quais ele expunha por meio de modelos matemáticos.

Com a crescente complexidade da tecnologia, os modelos passam a exigir uma representação por meio de uma matemática cada vez mais avançada. Observa-se, também, em uma escala mais elevada, que os propósitos da matemática coincidem, muitas vezes, com os das ciências ditas aplicadas, não existindo quase fronteira entre conhecimentos: inventa-se um objeto matemático que pode servir de ferramenta aplicável a contextos específicos da engenharia, por exemplo; por outro lado, ao se descobrir uma ferramenta, ela pode dar origem a toda uma teoria “puramente” matemática, às vezes, não alcançável pelas ciências aplicadas.

Esta inversão de papéis pode ainda ocorrer em diversas fases da resolução de um problema de engenharia no qual seja necessário analisar uma situação, modelá-la em uma linguagem matemática, encontrar pelo menos uma solução matemática e, enfim, convertê-la para a realidade da Engenharia.

A evolução da profissão do engenheiro conta, portanto, não com um empobrecimento de um ensino de matemática, mas com um enriquecimento deste ensino à luz de teorias matemáticas cada vez mais avançadas (DUJET, 2008). A inserção neste ensino é marcada, na universidade, pelas disciplinas de matemática de primeiro ano, em particular, pelo aprendizado dos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral.

Neste sentido, este trabalho de tese foi construído com o objetivo de fortalecer o ensino dos conceitos de CDI para o estudante de engenharia em geral, e, em particular, para aquele do CGETI, considerando a necessidade de aquisição de uma linguagem matemática mais completa, fundamental para a compreensão de outras ciências das quais depende a engenharia; considerando a necessidade de desenvolvimento de um raciocínio lógico-dedutivo para o bom desempenho desta profissão; e, acima de tudo, nada poderia ter sido feito, ou estaria apenas no plano das idéias, sem a imersão do aluno de Engenharia de Teleinformática, cujo perfil é aqui considerado como modelo para os demais cursos de engenharia da UFC.

8 Conclusões e Perspectivas

A intuição não pode nos dar o rigor, nem mesmo a certeza.
Isto tem sido reconhecido cada vez mais.
Por exemplo: nós sabemos que existem funções contínuas desprovidas de derivadas.
Nada é mais chocante para a intuição do que esta proposição que nos é imposta pela lógica.
L'Intuition et la Logique en Mathématiques
H. Poincaré (1907)

Visava-se, inicialmente, nesta tese, abordar apenas o conceito de integral de maneira mais abrangente, dando ênfase ao processo de integração e às idéias matemáticas que contribuíram para a sua formação, apoiando-se em uma linguagem rigorosa e não apenas intuitiva.

A escolha desta noção deveu-se ao fato de, por um lado, ser a integral um conceito que participa da edificação de diversos campos da engenharia, como, eletricidade e magnetismo, sinais e sistemas, circuitos elétricos e eletrônicos, mecânica dos fluidos, dentre outros; por outro lado, embasando-se em uma perspectiva histórico-epistemológica, a integral pode ser vista como conceito gerador do Cálculo Diferencial e Integral, a partir do qual se originam os conceitos de limite, continuidade e derivada. Portanto, o seu ensino pode congregar o ensino desses conceitos.

Observa-se, contudo, que em todos os livros de CDI e de análise citados nesta pesquisa (ver seção 6.3), exceto o Apostol (1967), a integral é o último conceito de cálculo a ser ensinado e que o seu aprendizado é inteiramente dependente do aprendizado das demais noções. Seguindo esta ordem em sala de aula, ficou evidente que, para se construir um ensino do conceito de integral que engendrasse no aluno questionamentos relacionados a sua fundamentação matemática – os quais permitem uma ruptura com certas leis constantes em sua formação escolar – seria necessário considerar o cálculo, não como uma colcha de retalhos, mas como um organismo cujo bom funcionamento depende de mudanças em toda a sua estrutura. Para acontecer, portanto, uma mudança efetiva no ensino/aprendizado do conceito de integral, seria imperioso mexer em todos os conceitos.

Na verdade, nos três anos em sala de aula de Cálculo Fundamental no CGETI, cobranças por um ensino mais rigoroso foram feitas pelos próprios alunos desde o início do ano letivo. Não seria adequado, porém, fazer um curso de análise (formal) para um público cujos conhecimentos prévios não estavam preparados para acolhê-lo. Optou-se, então, por se construir um modelo de ensino de CDI que fosse mais flexível, no sentido de se fazer, ao longo de todo o ano, relações lógicas e significativas entre intuição e rigor. Para isso, foram trazidas para a sala de aula a história e a epistemologia, como elementos norteadores deste intento.

A inserção em um ensino diferenciado foi feita com cuidado. Realizando estudos, experimentando, observando, analisando e considerando, principalmente, a aceitação do aluno. As abordagens de ensino adotadas em 2005, 2006 e 2008 apresentaram características de uma evolução gradativa na direção de uma melhor fundamentação matemática e culminaram com a elaboração de um modelo de ensino para os conceitos-chave de CDI.

O objetivo principal a ser alcançado com a aplicação do modelo consiste na organização de um ensino dos conceitos de cálculo pautado, não apenas na intuição, mas também em uma fundamentação lógico-matemática. Reitera-se que ele deve ser alicerçado sobre os conhecimentos pré-existentes dos alunos.

O modelo foi concebido a partir das experimentações realizadas em sala de aula e motivado pela cobrança dos alunos por uma explicação para a presença dos épsilons e deltas, principalmente.

Ensinar, contudo, as linguagens intuitiva e formal, de forma isolada, como fazem certos livros de cálculo, levaria a um aprendizado mecânico, na maioria das vezes desestimulante, e não a um aprendizado que conjugasse as duas linguagens e propiciasse ao estudante fazer associações significativas entre elas. Para tanto, seria necessário descobrir caminhos matemáticos que as interligassem. Não em um nível qualquer de abstração, mas, de acordo com a orientação da Teoria da Aprendizagem Significativa, por meio de conteúdos que fizessem vínculos com os conhecimentos prévios dos alunos.

Qual a melhor forma de alcançar este objetivo, senão investigando os motivos e as condições que proporcionaram uma formalização dos conceitos de CDI? Além disso, como saber quais idéias matemáticas deram origem a esta linguagem tão complexa? A abordagem histórico-epistemológica sugerida no modelo demonstrou ser uma solução eficaz para se encontrar respostas para estes questionamentos.

Nas sequências de ensino do conceito de integral, optou-se por se retomarem, em sala de aula, alguns elos entre a versão atual deste conceito e as suas origens históricas mais antigas vinculadas à evolução do conceito de medida geométrica. Com isso, constatou-se, na experimentação, que os alunos refizeram o caminho de seus conhecimentos relacionados ao conceito de medida geométrica e aproveitaram para corrigir algumas concepções mal formuladas e justificar outras que constavam em seus conhecimentos como informações verídicas, sem que eles soubessem o porquê.

Um estudo histórico-epistemológico dos conceitos de cálculo seria suficiente para explicar para os alunos a presença da linguagem formal. Para que, então, adotar um ensino mais rigoroso? Baseando-se na hipótese de Douady que considera que aprender um conceito matemático refere-se a conseguir trabalhar com ele em atividades nas quais ele pode estar implicado tanto em seu aspecto de *ferramenta* (em um nível de aplicação), quanto de *objeto* (no nível do rigor) do saber matemático, viu-se a necessidade de incorporar certo rigor (considerando o nível de conhecimentos dos alunos) ao ensino.

Por si só, esta hipótese já justificaria a adoção de um ensino mais formal. Entretanto, na própria sala de aula sentiu-se a falta de uma maior fundamentação matemática para a abordagem dos conceitos de CDI. Pois, foram registrados, em 2006, vários questionamentos dos alunos que não foram devidamente esclarecidos por falta de uma linguagem matemática acessível a eles.

Por este motivo, construiu-se um ensino, em 2008, com intuição e mais rigor, o que resultou em um aproveitamento maior, pelos alunos, da sequência de ensino do conceito de integral. Este resultado foi constatado pelo tipo de intervenção dos alunos relacionado a uma busca frequente por uma confirmação matemática para as suas dúvidas e pelo uso de uma linguagem mais formal em suas produções escritas. Na verdade, este ensino causou uma sensível mudança na postura dos alunos ao longo de todo o ano comparado com os anos anteriores. Mesmo no ensino de conteúdos mais técnicos, eles não aceitavam apenas uma explicação. Ao se ensinar, por exemplo, a técnica de integração por frações parciais, faz-se, normalmente, uma decomposição da função racional, a ser integrada, em uma soma de frações parciais mais simples. Todos os livros de cálculo citados nesta tese ensinam apenas o algoritmo para se proceder a esta decomposição. Os alunos exigiram que fosse comprovada a validade do algoritmo.

Outra mudança que ocorreu no ensino deveu-se à realização de atividades por meio de uma ferramenta computacional em um laboratório de informática. A diferença efetiva de comportamento do aluno entre os anos de 2005 e de 2006, quando da introdução do programa GeoGebra em uma sessão da sequência – passando de uma postura passiva ao total comprometimento com a resolução das atividades propostas – induziu ao uso do programa GeoGebra no ano de 2008. A experiência foi novamente positiva. Todos os alunos presentes no laboratório, tanto em 2006 quanto em 2008, realizaram atividades de investigação com o programa, as quais foram enviadas para o e-mail do professor.

Devido a estes bons resultados, para a fase da realização de atividades, sugeriu-se que fosse incorporado ao modelo o uso de uma ferramenta computacional adequada. Esclarece-se que a referência feita a "bons resultados" não está associada a número de erros ou de acertos na resolução das atividades, mas ao comportamento ativo e investigativo do aluno por meio do programa, o qual foi comprovado em sala de aula e pelos arquivos enviados por e-mail. Portanto, a opção por um programa foi também decorrente do fato de o pesquisador estar imerso em um ambiente de ensino.

Para se viabilizar o modelo e provocar uma mudança no ensino, é imprescindível que o professor também passe por uma mudança de comportamento, tanto relativamente à organização do seu ensino, quanto a sua prática em sala de aula. Neste último caso, a Sequência Fedathi se contrapõe ao modelo tradicional – no qual o professor fala, ou apenas escreve, e o aluno ouve e copia – propondo que o aluno também seja ouvido, que haja interação. Ouvindo os alunos, certas dificuldades dos estudantes com os conteúdos vêm à tona, dando pistas para que o professor reorganize o ensino no sentido de levar o aluno a superar tais dificuldades. O professor assume verdadeiramente uma postura de educador.

Além disso, os quatro passos da sequência pretendem que, em uma abordagem por meio de problemas, as soluções sejam construídas pela classe, distinguindo-se da prática mais comum: propor o problema e resolvê-lo imediatamente. Observa-se que não é tão simples para o professor mudar de comportamento. Mudar de atitude em sala de aula não se resume às quatro paredes, exige mais conhecimento para dar maior segurança no momento de interagir com o aluno. Para adotar o modelo aqui proposto, o professor tem que investir em um estudo mais consistente dos conceitos de CDI, estendendo sua leitura a livros de análise, tanto de nível básico quanto avançado, de teorias da medida, de história/epistemologia, dentre tantos. Com isso, o professor pode alcançar maior flexibilidade de raciocínio, contribuindo para que ele consiga fazer melhores adaptações do conteúdo ao nível de conhecimentos dos alunos, tanto nos momentos de interação quanto de apresentação.

Outra mudança importante proposta no modelo está ligada ao momento da apresentação formal dos conteúdos. Tradicionalmente, o ensino se inicia pela descrição do objeto matemático a ensinar, relatando-se sua definição e enumerando suas principais propriedades, considerando-o, desta forma, como elemento de um saber matemático já constituído – por outros, mas não pelo aluno. No modelo, este momento, denominado por Brousseau (1986) de *Institucionalização*, acontece apenas no final. Esta inversão é bem característica da atividade matemática relativa ao processo de formação de um conceito. Na verdade, uma análise epistemológica mostra que os problemas relacionados à fundamentação teórica das noções matemáticas não ocorrem em primeiro lugar. No cálculo, em particular, seus fundamentos só foram estabelecidos após séculos de sua utilização (DAHAN-DALMEDICO e PEIFFER, 1986). Portanto, o modelo sugere a construção do conceito em sala de aula, começando por suas origens até a sua forma atual, como objeto do saber matemático. Deseja-se seguir assim a ordem natural de formação de um conceito matemático. No entanto, a relação custo *versus* benefício é favorecida no domínio do tempo ao se fazer uso dos recursos de informática, permitindo, desta forma, ser previsto cumprir o conteúdo programático da disciplina dentro do período letivo regular de sua realização.

Uma medida da aprendizagem do aluno por meio da aplicação de uma avaliação escrita ou pelo uso de um programa está prevista no modelo. Na verdade, a verificação do ensino-aprendizagem do aluno como forma de acompanhar a sua evolução é um processo presente em todas as suas etapas, sendo representado pelas observações das interações dos alunos e análise de atividades escritas ou eletrônicas que são propostas. Na aplicação da sequência de 2008, por exemplo, algumas intervenções dos alunos deixaram expostas as suas dificuldades em compreender certos conteúdos e, até mesmo, uma falta de flexibilidade no raciocínio matemático advindo, provavelmente, de sua formação. Pôde-se avaliar o aluno por meio destas manifestações, as quais estavam representando o estado de seus conhecimentos. Com isso, foram propostas situações com o objetivo, não de rotular o aluno por meio de uma nota, mas de causar alterações neste estado.

Finalmente, o modelo não é estático, cada aplicação deve ser analisada para que sejam propostos ajustes e adequações, realimentando uma próxima experimentação. Além disso, não se trata de um algoritmo perfeitamente controlável, mas depende, de maneira fundamental, de um ambiente cujo bom funcionamento está sujeito à relação professor/saber/aluno, considerada particularmente complexa.

De qualquer maneira, constatou-se ser possível interferir neste ambiente de sala de aula para se obterem melhores resultados na relação ensino-aprendizado-avaliação. Para que este resultado não se constitua em uma iniciativa isolada de um departamento, é necessário, contudo, o compromisso dos professores, dos departamentos de engenharia, do Centro de Tecnologia e da própria UFC.

Bibliografia

1. AALST, W.: The application of Petri nets to workflow management. The Journal of Circuits, Systems and Computers. Vol. 8. No 1. PP 1-53. 1998;
2. ANTON, H.: Cálculo: Um Novo Horizonte. Vol 1. Porto Alegre. Bookman. 2007;
3. APOSTOL, T.: Calculus: One-Variable with an Introduction to Linear Algebra. 2a. ed. Vol 1. John Willey & Sons. New York. 1967;
4. ARTIGUE, Michèle. Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, Vol. 9.3., 281-308, 1989;
5. ______. Épistémologie et Didactique. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 10/2.3. 241-286. 1990;
6. ______. *Analysis*. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Press. 167-198, 1991;
7. ______. *Enseignement de l'analyse et fonctions de référence*. Repères IREM, vol. 11, 115-139, 1993;
8. ______. Learning Mathematics in a CAS Environment: the Genesis of a reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. International Journal of Computer for Mathematical Learning. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, Vol. 7, 245-274, 2002;
9. BACHELARD, G.: Le nouvel sprit scientifique. Ed. Quadrige/PUF. França. 1934;
10. BARBOSA, G.: Raciocínio Lógico Formal e Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: O Caso da Universidade Federal do Ceará, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação – FACED, Fortaleza. (1994);
11. BARROSO, N.: Le concept de fonction chez les élèves de première année. Diplôme d'Études Avancés (DEA), Université Paris VI. 2005;
12. BARROSO, N. et al. Uma Seqüência de Ensino para a Introdução do Conceito de Integral de Riemann. IX ENEM, Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, MG. 2007;

13. BLOCH, I.: *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. 2000. Tese doutorado. Université de Bordeaux 1. Bordeaux;
14. BORGES NETO, H.; SANTANA, R.: O Uso da Interface Computacional no Ensino de Matemática: Limites e Possibilidades do Computador quando o Assunto é Demonstração. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Santos, 2000. XXIII CNMAC;
15. BORGES NETO, H.; SANTANA, R. *Fundamentos Epistemológicos da Teoria de Fedathi no Ensino de Matemática*. XV EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste: Educação, Desenvolvimento Humano e Cidadania. Vol. Único. Junho 2001. São Luís (MA). p. 594- 607;
16. BOYER, C.: História da Matemática. Editora Edgard Blücher. 2a. Edição. 1996;
17. BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, Vol 7.2, p. 33-115, 1986;
18. ______ La Théorie des Situations Didactiques. Interactions Didactiques. Génève. 1998. Disponível em http://www.math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf . Último acesso: 12/04/09;
19. CAMINHA, A.; BARROSO, N.; MOTA, J. C. M.: Proposta preliminar de reforma das disciplinas de matemática de primeiro e segundo anos do Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática. CT/UFC. Setembro de 2008;
20. CAMP, L.: The Ancient Engineers. Barnes & Noble Books. 1993;
21. CHEN, J. e SMITH, S.: Pi Mu Epsilon Journal. Vol. 12. No. 8. pp. 449-454. 2008. Disponível em http://www.sju.edu/~smith/Current_Courses/continuitysetsrev.pdf (Último Acesso em 12/04/2009)
22. CORNU, B. *Limits*. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Press.1991, p. 153-166;
23. COURANT, R.; ROBBINS, H. *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. New York. Oxford University Press. 1978;
24. CURY, H. : Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores. Porto Alegre: EDIPUCRS. 2004;

25. DAHAN-DALMEDICO, A. e PEIFFER, J. Une histoire des mathématiques : Routes et dédales. França. Éditions du Seuil. 1986;
26. DALL'ANESE, C. : Argumentos e Metáforas Conceituais para a Taxa de Variação. Tese de doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2006;
27. D'AMORE, B. Epistemologia e Didática da Matemática. São Paulo. Editora Escrituras. 2005;
28. DORIER, L. : Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur L'Algèbre Linéaire – Perspectives Théoriques sur leurs Interactions. In: Les Cahiers du Laboratoire Leibniz. No. 12. Grenoble. 2000;
29. DOUADY, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 7/2. 1986. p. 5-31
30. ______ : L'ingénierie didactique un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe. In : Actes de Congrès PME XI. Montréal. pp. 222-228. 1987;
31. DUBINSKY, E., TALL, D.: Advanced Mathematical Thinking and the Computer. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Press. p. 231-243. 1991;
32. DUJET, C.: Les mathématiques pour l'Ingénieur, M²Real Publications, 2008. Disponível em http://www.m2real.org/spip.php?article1&lang=pt_br. Último acesso em 12/04/2009.
33. DUVAL, Raymond. Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et Registres. In: Séminaire de Recherche de Diplôme Staf, Technologie de formation et apprentissage (TECFA), Lille, 2003;
34. EDWARDS, C.: The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag. Nova York. 1979;
35. FINNEY, R. et al. Cálculo George B. Thomas. São Paulo, vol. 1, Pearson-Addison Wesley, 2004;
36. FOURIER, J.: Théorie Analytique de La Chaleur: Discours Préliminaire. Firmin Didot, Père and Fils. Paris. 1822. Disponível em: http://www.gabay.com/sources/Liste_Fiche.asp?CV=96 Último acesso em: 18/04/09.
37. FREITAS, H., CUNHA Jr. e MOSCAROLA, J. Pelo Resgate de Alguns Princípios da Análise de Conteúdo: aplicação prática qualitativa em marketing.

Angra dos Reis – RJ: Anais do 20º ENANPAD, ANPAD, Marketing, 23-25 setembro, 1996, p. 467-487;

38. GATUSO, L.: Fait-on ce qu'on pense quand on enseigne des matehématiques? Ed. Bande Didactique. Canadá. 2007;
39. GeoGebra. Disponível em www.geogebra.org/cms/;
40. GODOY, L. F. *Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem*. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. SP;
41. GUIDORIZZI, H.: Um curso de Cálculo. Vols 1 e 2. Rio de Janeiro. LTC. 2001;
42. HAREL, G., DUBINSKY, E.: The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes. EUA. 1992;
43. HAWKINS, T.: Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development. 2a. edição. AMS Chelsea Publishing. Providence, Rhode Island. 2002;
44. HOFFMANN, J.: Pontos e Contrapontos: do pensar ao agir em avaliação. Porto Alegre: Mediação. 1998;
45. JENSEN, K.: Coloured Petri Nets. Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use. Vol 1. Springer-Verlag. 2a. Edição. 1997;
46. KLEINER, I. *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey.* The College Mathematics Journal. Vol. 20. nº 4. Setembro de 1989. p. 282-300;
47. LEGRAND, M. *Scientific Debate in Mathematics Course*. La lettre de la preuve. Nov./Dez. 2000. http://www-didactique.imag.fr
48. LEITHOLD, L.: Cálculo com geometria analítica. São Paulo, vol. 1, 3ª ed, Ed. Harbra, 1994;
49. LIMA, E. Curso de Análise. Vol. 1. 4ª Ed. Projeto Euclides. Publicação IMPA. São Paulo. 1982;
50. ______: Análise Real: Funções de Uma Variável. Vol. 1. 9ª Edição. Coleção Matemática Universitária. IMPA. 2007;
51. LUCKESI, C. : Verificação ou avaliação: o que pratica a escola?, Publicação: Série Idéias n. 8. São Paulo: FDE, pp.71-80. 1998;
52. MACH, E: La mécanique, exposé historique et critique de son dévelopment. Paris. Hermann. 1904. Apud: LECOURT, D.: La philosophie des sciences. Presses Universitaires de France. Paris. 2001;
53. ______: La connaissance et l'erreur. Ed. Flammarion. Paris, 1908. Disponível na internet em: www.vigdor.com/titres/machConaisanceEtErreur.html

54. MACHADO, S.(ORG.): Educação Matemática-Uma Introdução. EDUC. SP. 1999;
55. MARTINS, M., BÓGUS, C. Considerações sobre a Metodologia Qualitativa como Recurso para o Estudo das Ações de Humanização em Saúde. In: Saúde e Sociedade, Vol. 13, Num. 3. São Paulo. Sept./Dez. 2004;
56. MOREIRA, M.: Teorias da Aprendizagem. São Paulo: EPU. 1999;
57. MURATA, T.: Petri Nets: Properties, analysis and applications. Proceedings of the IEEE. Vol. 77. No 4. pp 541-580. 1989;
58. NAE - National Academy of Engineering (Org.): *Educating the Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to the New Century*. Committee on the Engineering of 2020. 2005;
59. NOVAK, J.: Meaningful Learning: The essential factor for conceptual change in Limited or Inappropriate Propositional Hierarchies (LIPHs) leading to empowerment of learners. III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa. Peniche. 2000;
60. NOVAK, J. D.; CAÑAS, A. J. The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct Them, Technical Report IHMC CmapTools 2006-01, Florida Institute for Human and Machine Cognition, 2006, Disponível em http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf
61. ORMROD, J.: Human Learning. 4a. ed. Pearson Prentice Hall. EUA. 2004;
62. PÁDUA, S., SILVA, A., PORTO, A. e INAMASU, R.: O potencial das redes de Petri em modelagem e análise de processos de negócios. Gestão & Produção. Vol. 11. No 1. São Carlos. 2004;
63. PAIS, L. C.: Didática da Matemática: Uma Análise da Influência Francesa. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2ª ed. Belo Horizonte. 2001;
64. PARK, S.; KIM, Y.: Applying Petri Nets to Model Customized Learning and Cooperative Learning with Competence. International Journal of Computer Science and Network Security. Vol. 8. No 2. 2008;
65. PERRENOUD, P.: Avaliação – da excelência à regulação das aprendizagens – entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed Editora. 1999;
66. PIAJET, J.: A epistemologia genética. Petrópolis. Vozes. 1971;
67. PIMENTEL, C.: Proposta de atualização do Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática. CT/UFC. Setembro de 2008;
68. POINCARÉ, H.: Intuition and Logic in Mathematics. 1907. Disponível em:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Poincare_Intuition.html Último acesso em 16/04/09;

69. PONTES, J.: Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel : Pergunta e Respostas. Série-Estudos – Periódicos do Mestrado em Educação da UCDB. Campo Grande/MS. No. 21. P. 117-130. 2006;
70. PRASLON, F. *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. 2000. Tese. Université de Paris 7. Paris;
71. ROBERT, Aline. Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques. In : Recherches en Didactique des Mathématiques. Paris, vol. 12, nº 1, 1992, pp. 33-58;
72. ______. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. Paris, vol. 18, nº 2, 1998, p. 139-190 ;
73. ROCHA, E.: Tecnologias Digitais e Ensino de Matemática: Compreender para Realizar, Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Ceará. 2008;
74. ROYDEN, H.: Real Analysis. Prentice Hall. 1971;
75. RUDIN, W.: Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill. New York. 1976;
76. SHENITZER, A.; STEPRANS, J. The Evolution of Integration. In: The American Mathematical Monthly. Ontário, vol. 101, nº 1, 1994, pp. 66-72;
77. SILVA, C.: A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica. São Paulo, 2004. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo;
78. SIMMONS, G.: Cálculo com Geometria Analítica. Vol 1. McGraw-Hill, São Paulo. 1987;
79. SINGH, S.: O Último Teorema de Fermat. Rio de Janeiro. Ed. Record. 1998;
80. SOARES, J.; BARROSO, N.; MOTA, J.; BORGES NETO, H.: Instrumentação computacional e realimentação no processo de avaliação para o ensino de matemática: o conhecimento de função real como estudo de caso. SBIE – Sociedade Brasileira de Informática Educativa. Fortaleza-CE. 2008;
81. STEWART, I.: Galois Theory. 3ª ed. EUA. Chapman & Hall/CRC. 2004;

82. STEWART, J.: Cálculo. Vol I. 4a. edição. Editora Pioneira Thomson Learning. São Paulo. 2001;
83. SWOKOWSKI, E.: Cálculo com Geometria Analítica. Vol 1. 2a. edição. Makron Books. São Paulo. 1994;
84. TALL, D.; DUBINSKY, E. *Advanced Mathematical Thinking and the Computer*. Dordrecht. Editora David Tall. 1991, p. 231-243;
85. WIMS - WWW Interactive Multipurpose Server. Disponível em: http://wims.auto.u-psud.fr/wims/
86. ZUCHI, I.: A Abordagem do Conceito de Limite via Seqüência Didática: Do Ambiente Lápis Papel ao Ambiente Computacional. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina. 2005.

ANEXO I

Atividades no GeoGebra

Atividades no GeoGebra

I) **Familiarização** com o programa GeoGebra:

d) Escolha um navegador e digite: www.geogebra.at

e) Clique sobre: *Iniciar GeoGebra*, depois sobre *GeoGebra WebStart*, selecione *Abrir com* sobre a janelinha e clique em *Ok*

f) **FUNÇÃO**: Na nova janela, onde tem *Entrada* digite ***função[x^2, -3, 3]*** e, no teclado, clique em ***entrar***. O programa fará o gráfico da função $f(x)=x^2$ no intervalo *[-3,3]*. Note que, no lado esquerdo da janela, abaixo de ***Objetos dependentes***, aparece a fórmula da função que você digitou;

g) Para exercitar, repita o exercício anterior para outras funções em outros intervalos.

h) **SomaInferior:** Faça o **gráfico de** $f(x)=x^2$ e depois calcule sua **soma inferior** no intervalo **[0,3]** para uma partição com **6 subintervalos** de comprimentos iguais digitando em *Entrada* o comando: ***SomaSuperior[x^2, 0, 3, 6].*** Note que abaixo de *Objetos dependentes* aparecerá o parâmetro ***a=6.88*** que é exatamente igual à soma das áreas dos retângulos inscritos.

i) Repita o item e) para a **SomaSuperior** e para outras funções em outros intervalos.

II) **Para entregar:**

1. Para a função $f(x) = x^2+1$:

a) Fazer o seu gráfico no intervalo $[0,4]$;

b) Calcular suas somas superiores e suas somas inferiores no intervalo $[0,4]$, para P_n, em que $n=4, 8, 16, 32, 64, 128, 1024$ indica o número de subintervalos da partição. Em cada partição, considere os **subintervalos com comprimentos iguais**.

Escreva os resultados em forma de seqüência: s_n para as somas inferiores e S_n para as superiores;

Obs: Uma **PARTIÇÃO** de um intervalo $[a,b]$ pode ser considerada como uma subdivisão deste intervalo em n subintervalos da forma $[a,t_1]\cup[t_1,t_2]\cup...\cup[t_{n-1},b]$.

c) Para a partição P_4, identifique cada t_i e os pontos dos subintervalos nos quais são calculadas as alturas dos retângulos;

d) Sendo $f(x)$ contínua em $[a,b]$, então $\lim_{n\to\infty} S_n$ e $\lim_{n\to\infty} s_n$ existem e são iguais. Qual interpretação geométrica você atribui a este valor comum?

e) Determine um valor aproximado para esse limite cuja diferença entre este valor e o valor real seja inferior a 0,05;

f) Encontre um valor aproximado para $\int_0^4 f(x)dx$. Indique o erro entre o valor real e o valor que você encontrou.

2. Agora considere $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$ e:

a) Faça o seu gráfico neste intervalo;

b) Calcule suas somas superiores e suas somas inferiores no intervalo $[0,3]$, para P_n, em que $n=4, 8, 16, 32, 64, 128, 1024$ indica o número de subintervalos da partição. Em cada partição, os subintervalos têm comprimentos iguais.

c) Porque os retângulos de S_n estão no interior da região e não "*circunscritos*", como no caso anterior?

d) Porque S_n e s_n são negativas?

e) Encontre um valor aproximado para a área da região em destaque e para $\int_0^3 f(x)dx$, considerando um erro inferior a 0,03.

f) Qual a relação entre a área desta região e a integral?

3. Repita os exercícios 1 e 2 para $f(x) = sen(x)$ entre $[-\pi,\pi]$.

- Comece com ***n=2*** e explique porque, para esta subdivisão, a região abaixo do eixo x não foi preenchida por retângulos.

4. Use o comando integral[f(x), a, b] para encontrar o valor exato da integral das funções dos exercícios 1, 2 e 3.

5. Para a função de Dirichlet, $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \quad for \quad racional \\ 0, & se \quad x \quad for \quad irracional \end{cases}$$

j) Determine S_n e s_n, no intervalo $[0, 3]$, para $n=3, 6, 9, 10^8$;

k) Qual a área do subconjunto $C = \{(x,y); 0 \le x \le 3 \quad e \quad 0 \le y \le D(x)\}$?

l) Calcule $\int_0^3 D(x)dx$.

III) Problema: Cálculo da $\int_a^b F'(x)dx$

m) Considere uma função $\boldsymbol{F} : [a,b] \to R$ **derivável** e tal que a sua derivada ***F'(x)*** seja **contínua** em $[a,b]$;

Obs: Para ajudá-lo a visualizar, esboce o gráfico de uma função como F.

n) Divida o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$;

o) Note que $F(b)-F(a) = F(x_1)-F(a)+F(x_2)-F(x_1)+....+F(b)-F(x_{n-1})$, logo

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Obs: Em seu gráfico, cada termo dessa soma corresponde, geometricamente, a que?

p) Como F tem derivada em $[a,b]$, use o **TVM** em cada subintervalo i para reescrever cada parcela do somatório acima (use o TVM em um intervalo e depois generalize);

Obs: Fazendo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta_i y = y_i - y_{i-1} = F(x_i) - F(x_{i-1})$, note que, pelo TVM, $\Delta_i y = F'(c_i).\Delta_i x$. Observe, em um gráfico hipotético de F', o que representa $\Delta_i y = F'(c_i).\Delta_i x$.

q) Agora, use a continuidade de F' para relacionar $F(b)-F(a)$ com s_n e S_n relativas à F';

r) Sabendo que toda função contínua é integrável, use o teorema do confronto para determinar o valor da $\int_a^b F'(x)dx$.

ANEXO II

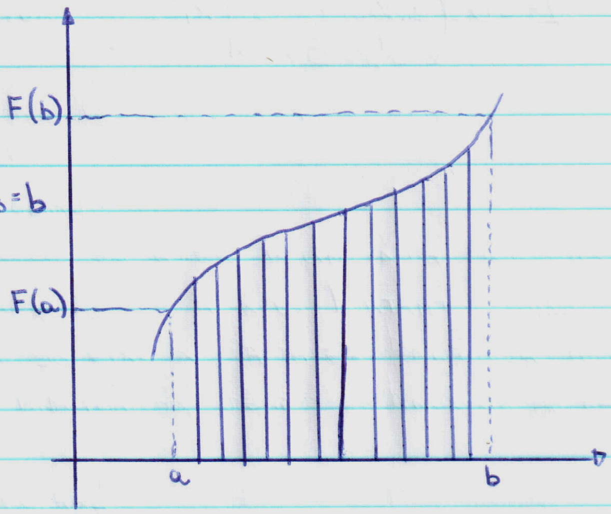
Produção de Alguns Alunos de 2006 Relativa às Atividades no GeoGebra

• NOTE QUE, PARA N = 2 O S_2 NÃO APRESENTA RETÂNGULOS ABAIXO DO EIXO X. ISTO OCORRE, PORQUE O VALOR DA FUNÇÃO ENTRE [-pi, 0] ASSUME VALOR MÁXIMO IGUAL A ZERO. LOGO, A ALTURA DO RETÂNGULO É ZERO E A ÁREA TAMBÉM.

04) • INTEGRAL $[x^2+1, 0, 4] = 25,33.$
• INTEGRAL $[x^2-9, 0, 3] = -18.$
• INTEGRAL $[\sin(x), -pi, pi] = 0.$

05) a) $S_n = 3$
$s_n = 0$
b) Porém, $\int_0^3 D(x)dx \nexists$ PORQUE $D(x)$ NÃO É CONTÍNUA.

III) a)



b) $n = 13$
$x_0 = a$ E $x_{13} = b$

c) CADA TERMO DESSA SOMA CORRESPONDE À DIFERENÇA ENTRE AS ALTURAS DOS RETÂNGULOS CALCULADOS PARA S_n E s_n.

2006

d) Intuitivamente, percebe-se que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existem e são iguais. Qual interpretação geométrica você atribuiria a esse valor comum? A ÁREA ABAIXO DA CURVA

e) Você consegue encontrar o valor exato desse limite? Caso contrário, NÃO ; 25,335 determine um valor aproximado para esse limite cuja diferença entre este valor e o valor real seja inferior a 0,01;

f) Encontre um valor aproximado para $\int_0^4 f(x)dx$. Indique o erro entre o valor real e o valor que você encontrou. 25,3355 ERRO < 0,01

$S_4 = -14,34$
$S_8 : -16,24$
$S_{16} : -17,14$
$S_{32} : -17,57$
$S_{64} : -17,79$
$S_{128} : -17,89$
$S_{1024} : -17,99$

2. Repita os itens do exercício anterior para $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$. Além disso, responda:

a) Porque os retângulos de S_n estão no interior da região e não *circunscritos*, como no caso anterior? PORQUE O GRÁFICO DESTA FUNÇÃO ESTÁ ABAIXO DO EIXO X

b) Qual a área aproximada da região em destaque? 18

c) Porque S_n e s_n são negativas? POIS ESTÃO ABAIXO DO EIXO X

d) Qual a relação entre a área e a integral? IGUAL EM MÓDULO

3. Repita os exercícios 1 e 2 para $f(x) = sin(x)$ entre $[-pi, pi]$.

- Comece com $n=2$ e explique porque, para esta subdivisão, a região abaixo do eixo x não foi preenchida por retângulos.

4. Use o comando integral[f(x), a, b] para encontrar o valor exato da integral das funções dos exercícios 1, 2 e 3.
1 - 18
2 - 25,33
3 - -18

5. Para a função de Dirichlet, $D(x)$:

$D(x) = 1$, *se x for racional* e

$D(x) = 0$, *se x for irracional*

a) Determine S_n e s_n, no intervalo $[0, 3]$, para $n=3, 6, 9, 10^7$; $S_n = 3$ $s_n = 0$

b) Qual a $\int_0^3 D(x)dx$ $\exists$, pois $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

natmcbarnero@gmail.com

d) A soma das áreas é uma aproximação da integral.

03.

SOMA SUPERIOR	SOMA INFERIOR
1- 3,14	1- -3,14
2- 3,14	2- -3,14
3- 1,57	3- -1,57
4- 0,79	4- -0,79
5- 0,39	5- -0,39
6- 0,2	6- -0,2
7- 0,1	7- -0,1
8- 0,01	8- -0,01

04. (1) 25,33

(2) -18

(3) 0

05.

SOMA SUPERIOR	SOMA INFERIOR
3-3	3-0
6-3	6-0
9-3	9-0
10^7-3	10^7-0

$$\int_0^3 D(x)\,dx \cong \nexists \text{ INTEGRAL}$$

Como os limites não atingem o mesmo ponto, conclui-se que a integral não existe.

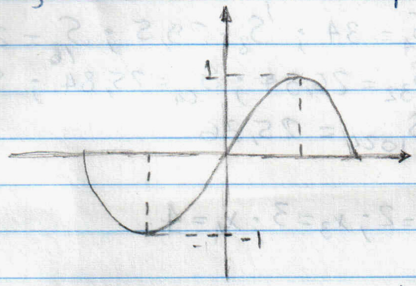
02- a) Como as Somas Superiores utilizam o máximos absolutos de cada intervalo e a função está abaixo do eixo X, os retângulos de S_n estarão inscritos.

b) $A \cong 18$

c) Pois o gráfico está abaixo do ~~gra~~ eixo X.

d) A integral estima o valor da área.

03- Na função $f(x) = \sin(x)$ $[-pi, pi]$



Quando aplicamos, por exemplo, Soma Superior com 2 subdivisões, a parte do gráfico acima do eixo X constitui um único retângulo com altura no extremo absoluto da função naquele intervalo $[0, \pi]$. Já no intervalo $[-\pi, 0]$, o valor máximo absoluto corresponde a $f(x) = 0$, logo o retângulo se resume à uma linha no eixo X negativo.

04- Usando o aplicativo geogebra temos:

1) $\int f(x)\, dx = 18$ 2) $\int (x^2+1)\, dx = 25,33$

3) $\int (x^2-9)\, dx = -18$

05- $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ a) $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overset{\text{VMA}}{c_i}).\Delta x = 1.3 = 3, \forall n$

$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\underset{\text{vma}}{c_i}).\Delta x = 0.3 = 0, \forall n$

$[0,3]$

b) $\int_0^3 D(x)dx = S_n = s_n$, mas $S_n \neq s_n$, logo $\int_0^3 D(x)dx = \nexists$

ANEXO III

Exercícios da Primeira Sessão da Sequência de 2008
(Epistemologia Histórica do Conceito de Integral)

Exercícios de Cálculo Fundamental

04/08/08

Serão recebidos no dia 13/08/08

1. Na aula de hoje, você teve que reformular algum conhecimento antigo seu? Qual(is)?

2. Reconte a história da origem do conceito de integral, baseando-se apenas no que você apreendeu desta aula.

3. Deduza a área do círculo de raio 1, aplicando o método da exaustão (explorado nesta aula) e algumas propriedades do limite que você aprendeu no semestre passado.

4. Se a área do quadrado de lado 1 fosse padronizada como igual a 2, qual seria a área do quadrado de lado n? E do triângulo?

5. Encontre um processo pelo qual você consiga determinar um valor aproximado (com um erro qualquer dado) para a área da região limitada pelo gráfico da curva $y = -x^2+4$, pelos eixos x e y, e pela reta $x=1$.

ANEXO IV

Exemplos de Respostas à Primeira Questão da Folha de Exercícios do Anexo III

1. Sim. O tratamento de medidas 'reais' relacionadas com medidas irracionais, como o triângulo isósceles de lados congruentes iguais a 1, foi interessante. E a teoria das áreas reais.

01

Não, somente o de infinitos maiores que outros infinitos, porém, este já foi esclarecido.

1) Sim. O conceito de área apresentado não correspondia totalmente ao conhecido. Primeiramente, não sabia que a área de um retângulo era convencionada (base × altura). Em segundo, tendo um retangulo em gráfico f(x), ao tirar um segmento correspondente a um x, a área não se altera. (x ∈ ao intervalo que contém o retângulo)

1. Sim. Foi possível fazer uma revisão sobre alguns conceitos básicos, como a definição de "área" (que, embora simples, acaba fugindo à memória) e o que seriam números construtíveis, não-construtíveis, algébricos, transcendentes, etc.

① Eu pensava que a área do quadrado de lado 1, é 1 por causa de algum cálculo e não por causa de uma convenção.

1. Na aula de hoje, você identificou algum conhecimento seu que estava mal formulado? Qual(is)?

Sim, por exemplo a questão da medida de algo, pois precisa-se de uma referência de medição. Também tem a questão de números construtíveis

Q1 Sim, o conceito de área e o conceito de medição.

01| NA AULA, PUDEMOS REVIVER CONHECIMENTOS ANTIGOS, MUITOS DELES, OBTIDOS NO ENSINO FUNDAMENTAL DO PERÍODO ESCOLAR. ENTRE ELES, OS ASSUNTOS DE CONJUNTOS, FIGURAS PLANAS, SENDO ABORDADO, DESDE A SUA NATUREZA (DESENHO COM RÉGUA E COMPASSO) ATÉ O CÁLCULO DA SUA ÁREA, ALÉM DE LÓGICA E ÁLGEBRA. COM ISSO, TODOS OS ASSUNTOS FORAM ENTENDIDOS DE FORMA CORRETA E CLARA, ASSIM COMO HAVIAM SIDO APRENDIDOS.

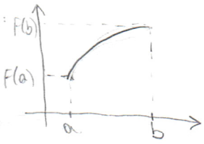
02| DESDE OS PRIMÓRDIOS O HOMEM SENTIU A NECESSIDADE DE CRIAR

ANEXO V

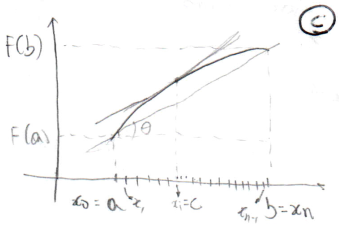
Algumas Respostas ao Problema III
da Lista do GeoGebra

Problema

(a) Esboço:



(b)



(c) Cada termo da soma equivale a diferença entre dois retângulos consecutivos.

(d) 1) TVM para o intervalo $[a,b]$: $F'(c) = \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a} \overset{N}{=} tg\theta$

2) TVM para o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $F'(\bar{c}_i) = \dfrac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) . F'(\bar{c}_i)$

onde $(\bar{c}_i)$ é um ponto entre a e b

(e) 1) Temos que $F'(\bar{c}_i) . \Delta x_i \geq (vma_i) \Delta x_i \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i) \Delta x_i}_{F(b)-F(a)} \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (vma_i) \Delta x_i}_{S_n} \therefore s_n \leq F(b) - F(b)$

2) Temos ainda: $F'(\bar{c}_i) . \Delta x_i \leq (VMA_i) . \Delta x_i \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i) \Delta x_i}_{F(b)-F(a)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (VMA_i) . \Delta x_i}_{S_n} \therefore S_n \geq F(b) - F(b)$

(f) 1) Temos:

$s_n \leq F(b) - F(a) \leq S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} (F(b)-F(a)) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \quad (I)$

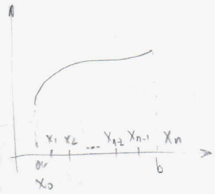
2) Como a função é integrável, temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b F'(x) . dx$, para o intervalo $[a,b]$. Logo, na equação (I), pelo Teorema do Confronto:

$\lim\limits_{n\to+\infty} (F(b) - F(a)) = \int_a^b F'(x) dx \therefore \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$

B) V, pois sempre entre dois racionais há infinitos irracionais

PROBLEMA

A)



C) Diferença na altura entre x_i e x_{i+1}

D) $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Rightarrow f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})\, f'(c_i) \text{, sendo } c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

E) $s_n = \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)(x_i - x_{i-1})$ sendo $F'(t_i)$ uma em $[x_{i-1}, x_i]$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow s_n \leq F(b) - F(a)$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)(x_i - x_{i-1})$ sendo $F'(t_i)$ UMA em $[x_{i-1}, x_i]$

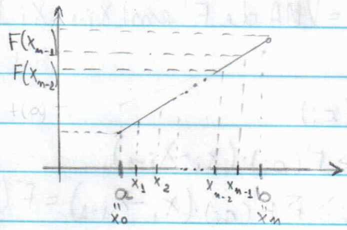
$$S_n \geq F(b) - F(a)$$

F) $s_n \leq F(b) - F(a) \leq S_n$, $\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$ (supondo que a integral de $F'(x)$ exista e seja $F(x)$. Como $\lim_{n \to +\infty} s_n = \int_a^b f'(x)\,dx$, temos pelo Teorema do Confronto:
$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx$.

III) Problema

a)

b)



c) Cada termo dessa soma corresponde, geometricamente, ao acréscimo que F sofre quando se passa de $x = x_{i-1}$ para $x = x_i$.

d) • Seja o intervalo $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, F é derivável neste intervalo, logo $\exists\ c_i \in]x_{i-1}, x_i[\ ;\ F'(c_i) = \dfrac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x_i}}$, dessa forma:

$$\boxed{F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \cdot \Delta x_i}$$

• Generalizando, temos: $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} [F'(c_i) \cdot \Delta x_i]$

$$\therefore \boxed{F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F'(c_i) \cdot \Delta x_i]}$$

16/08/08

e) $\cdot\ s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, onde $m_i = F'(t_i) = $ vma de F' em $[x_{i-1}, x_i]$.

Dessa forma, temos: $m_i = F'(t_i) \leq F'(c_i)$

$$F'(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \leq F'(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)\,(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

$$\therefore\ \boxed{s_n \leq F(b) - F(a)}$$

$\cdot\ S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, onde $M_i = F'(k_i) = $ VMA de F' em $[x_{i-1}, x_i]$

Dessa forma, temos: $M_i = F'(k_i) \geq F'(c_i)$

$$F'(k_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \geq F'(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} F'(k_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \geq \sum F'(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

$$\therefore\ \boxed{S_n \geq F(b) - F(a)}$$

$\Rightarrow s_n \leq F(b) - F(a) \leq S_n$

f) $\cdot$ Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b F'(x)\cdot dx$, quando $\Delta x = (x_i - x_{i-1}) \to 0$, então, de acordo com o teorema do confronto, temos:

$$\int_a^b F'(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)\,\Delta x_i \leq F(b) - F(a) \leq \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F'(k_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F'(x)\, dx$$

$$\therefore\ \boxed{\int_a^b F'(x)\cdot dx = F(b) - F(a)}$$

ANEXO VI

Proposta preliminar de reforma das matemáticas
do Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática
CGETI-UFC

Proposta preliminar de reforma das disciplinas de matemática do primeiro e segundo anos do curso de graduação em Engenharia de Teleinformática

Antonio Caminha, Natália Barroso e João Cesar Mota

Universidade Federal do Ceará

É indiscutível a importância da Matemática para os cursos de Engenharia, tanto para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo do estudante quanto para a compreensão e o desenvolvimento de novas tecnologias.

Em geral, para se resolver um problema de engenharia é necessário analisá-lo, modelá-lo em um contexto matemático, encontrar pelo menos uma solução matemática e, enfim, convertê-lo para a realidade da Engenharia. Estes passos, apresentados de maneira bastante sucinta, indicam que não se pode isolar a Engenharia da Matemática. Esta idéia é reforçada no Relatório *Educating the Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to the New Century*[15] ao alertar que, devido à crescente complexidade dos problemas de engenharia, a base da educação em engenharia deslocou-se para os fundamentos da Ciência e da Matemática. Ao mesmo tempo, defende que é importante introduzir atividades de engenharia logo cedo na experiência do graduando por intermédio dos cursos básicos de Matemática e de Ciências.

O que foi dito acima parece óbvio, porém, o ensino de Matemática pura para as engenharias no Brasil vem se tornando, na prática, cada vez menos útil, ao ponto de alunos e, pior, até professores, defenderem que a Matemática, que hoje é ensinada apenas como uma ferramenta (o que é questionável do ponto de vista do aprendizado), é uma pedra indesejável no caminho do engenheiro, no que concerne principalmente a abordagem abstrata.

Uma noção do quadro atual das disciplinas de Matemática nos cursos de Engenharia pode ser vista em Cabral e Baldino[16]. Segundo estes autores, no Brasil, a reforma universitária adotada em 1969, seguindo o modelo norte americano vigente de compartimentalização do conhecimento em departamentos acadêmicos, retardou em

---

[15] Livro lançado em 2005 e elaborado pelo *Committee on the Engineering of 2020, Committee on Engineering Education, National Academy of Engineering*.

[16] Cabral, T. e Baldino, R.: O Ensino de Matemática em um Curso de Engenharia de Sistemas Digitais. In: Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: Reflexões, Relatos, Propostas. Edipucrs, Porto Alegre, 2004.

muito a identidade profissional do engenheiro, pois os cursos de engenharia foram divididos em ciclo básico e ciclo profissional, em um formato imiscível. Como conseqüência, os alunos seguem, em geral, um ciclo básico comum e não conseguem vislumbrar e nem perceber a importância da Matemática para o seu curso. Ao mesmo tempo, os matemáticos voltaram suas atenções para os cursos de bacharelado e de pós-graduação, e as disciplinas que tinham que ministrar para outras áreas, foram atribuídas, em geral, aos professores iniciantes ou de menos experiência junto aos seus departamentos. Muitos destes professores não têm qualquer visão sobre como as disciplinas de matemática que ministram refletem seus conteúdos no elenco das disciplinas profissionais da Engenharia.

Embora, hoje, haja um número grande de docentes com titulação do mais alto grau, o professor de matemática continua chegando à sala de aula sem ter refletido ou sido informado ou estudado sobre a necessidade e os desdobramentos da disciplina que leciona para a formação do futuro engenheiro.

Refletindo sobre o estado atual das disciplinas de Matemática nos cursos de engenharia da UFC, o Departamento de Engenharia de Teleinformática (DETI) tem buscado soluções que contribuam, em especial, para uma formação mais densa dos alunos no Curso de Graduação em Engenharia de Teleinformática (CGETI) no que diz respeito às disciplinas de Matemática. Contemplando conteúdos, métodos e avaliações, tem-se por objetivo uma melhor inserção dos conteúdos matemáticos no contexto do curso de graduação em Engenharia de Teleinformática, através da integração conceitual e prática da matemática no desenvolvimento intelectual e da habilitação profissional do engenheiro.

Já tendo iniciado o CGETI, em 2004, com uma proposta ousada nas disciplinas de matemática, diferenciada dos demais cursos de graduação em Engenharia, e buscando sempre fazer ajustes que favoreçam a relação ensino/aprendizagem/avaliação (EAA), apresenta-se, neste texto, uma proposta de mudança relativa aos conteúdos e à carga horária das disciplinas de Matemática ensinadas nos dois primeiros anos de graduação do currículo de 2004, na perspectiva de melhorar a relação EAA.

Esta proposta surgiu de discussões e de experiências realizadas ao longo destes quatro primeiros anos de existência do CGETI, a partir de observações de sala de aula, de análises de perfil de seus alunos, de análises de conteúdos matemáticos frente a conteúdos de Engenharia de Teleinformática, de experiências nacionais e internacionais, e da visão de diferentes professores de Matemática e de Engenharia preocupados e comprometidos com a melhoria da relação EAA.

I. Problemática atual:

a) A análise do perfil dos estudantes nos indica que lhes falta **maturidade lógico-argumentativa**. No primeiro ano, eles chegam à sala de aula de Matemática esperando aprender novas fórmulas para aplicar em problemas algorítmicos. Quando surpreendidos por questões sem respostas prévias, que necessitam de análise, argumentação, dedução, codificadas pela matemática para inferir veículos e instrumentos para medições, muitos se vêem confrontados com dificuldades aparentemente insuperáveis e, por conseguinte, perdem a motivação pela Matemática, chegando por vezes ao extremo da desistência do curso, sendo um dos motivos, portanto, da evasão;

b) A crescente participação de estudantes de graduação de engenharia da UFC, e em particular do CGETI, em **projetos de cooperação entre o Brasil e a França** aponta para a necessidade de um nivelamento de nossos estudantes no sentido de melhor adequá-los ao contexto internacional. Por exemplo, na França, os alunos de ciências exatas e de engenharia estudam Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Ensino Médio, enquanto no Brasil, são pouquíssimas as escolas de ensino médio que têm algumas salas especiais onde apenas noções de CDI são ensinadas;

c) A **carga horária de sala de aula em disciplinas exclusivas para Matemática** ministradas exclusivamente para o CGETI em seus dois primeiros anos é demasiado **pequena** (quatro horas por semana no primeiro ano e três horas por semana no segundo ano, ou seja, um total de 224 horas de aulas). Conteúdos complementares de Matemática são introduzidos em disciplinas profissionais gerais de Engenharia sem que sejam tratados como objetos matemáticos em disciplinas específicas de matemática. Com isso, no contexto da Engenharia em geral, tais conteúdos são postos na forma de ensino com pouca exploração da argumentação astuta do rigor matemático (fator que beneficia a capacidade de síntese e de investigação das hipóteses e dos resultados da matemática). No entanto, o volume de conteúdo da matemática é explorado em pouco tempo para realizar com sucesso a maturação do estudante e os exercícios sem acompanhamento instrucional, levando forçosamente o alunado a tentar interpretar e aprender individualmente em toda a sua extensão aspectos tais como: conceituação, análise, argumentação indutiva e dedutiva, modelagem e obtenção de resultados analítico/numérico. A limitação a qual se vê implicado diante do insucesso iminente daquelas tarefas leva o alunado a interessar-se mais pelo uso mecânico ritualístico de seus resultados, limitando deveras seu desenvolvimento intelectual, e, por conseguinte, suas habilidades no manuseio instrumental da matemática.

II. Justificativa para a necessidade de reforma

O conteúdo que se deseja idealmente ensinar, na perspectiva de melhorar a relação EAA, é excessivamente extenso para a carga horária atual. Apenas como referência, tal conteúdo é essencialmente aquele que é coberto usualmente nas seguintes disciplinas oferecidas pelo Departamento de Matemática, as quais totalizam 800 horas, assim divididos:

- Matemática Discreta: seis horas por semana (total: 96 horas)
- Geometria Analítica: quatro horas por semana (total: 64 horas)
- Álgebra Linear I e II: quatro horas por semana cada (total: 128 horas)
- Cálculos I, II, III e IV: seis horas por semana cada (total: 384 horas)
- Equações Diferenciais Ordinárias: quatro horas por semana (total: 64 horas)
- Funções de uma Variável Complexa: quatro horas por semana (total: 64 horas)

Simples aritmética permite então concluir que o que se está exigindo da média dos estudantes do CGETI é uma competência de aprendizagem cerca de 3,5 vezes superior àquela demonstrada pela média correspondente dos estudantes do curso de Bacharelado em Matemática, mesmo considerando que aqueles têm em média um melhor desempenho que os últimos nos certames vestibulares da UFC. Agrava-se a situação pelo fato de que a habilidade diferenciada exigida não se refere somente à velocidade de apreensão de conhecimentos novos, mas também à capacidade, autodidatamente, de identificar conteúdos hoje não cobertos nas disciplinas de matemática do CGETI, mas imprescindíveis a um desenvolvimento lógico suave da Matemática superior elementar (e.g., o que é usualmente coberto em um curso de Matemática Discreta), suprindo suas ausências.

III. Objetivos da reforma:

a) Fornecer ao estudante médio de graduação do CGETI uma sólida formação em Matemática, que preencha os pré-requisitos necessários ao estudo sistemático e aprofundado das teorias de eletromagnetismo, circuitos elétricos, sinais e sistemas, transmissão de sinais, controle e códigos;
b) Antecipar para o primeiro ano o ensino de alguns conteúdos matemáticos que são aplicados em disciplinas específicas da Engenharia de Teleinformática ao longo do seu segundo ano;
c) Dar subsídios aos melhores estudantes de graduação para um engajamento suave em programas de mobilidade nacional e internacional, tais como o Programa de dupla diplomação com a França;
d) Incluir na carga horária das disciplinas de matemática duas horas de estudo dirigido semanais, com acompanhamento de instrutor e presença obrigatória do alunado.

IV. Proposta de reforma:

Quanto aos créditos, didática e pedagogia:

- Mudança de duas para três disciplinas de Matemática, sendo duas no primeiro ano e uma no segundo ano;
- As disciplinas do primeiro ano seriam: Cálculo Fundamental, com cinco horas semanais (sendo uma hora para estudo dirigido), e Introdução à Álgebra, com quatro horas semanais (com duas horas quinzenais para estudo dirigido). Fazendo um total de nove créditos no primeiro ano;
- A disciplina do segundo ano, Matemática Aplicada, passaria de três para cinco horas semanais (com uma hora para estudo dirigido);
- As horas para estudos dirigidos serão organizadas em duas horas/quinzena para disciplinas que têm previsto uma hora semanal;
- O objetivo do estudo dirigido é permitir que o estudante tenha acompanhamento do instrutor para a realização de teste do seu conhecimento adquirido em sala de aula e/ou estudo autônomo e orientado;
- Os elementos de teste de conhecimento e aprendizado a serem realizados em estudos dirigidos, serão harmonizados às aulas teóricas e podem ser de natureza

simbólica, analítica e/ou numérica, através de exercícios teóricos, práticos e/ou experimentais, disponíveis ao alunado com antecedência;

- As atividades a serem desenvolvidas poderão ser avaliadas com ou sem nota;
- Os estudos dirigidos serão conduzidos por instrutores ou programas tutoriais de informática, em sala apropriada, com freqüência obrigatória do alunado, e supervisionado pelos professores responsáveis das disciplinas;
- Os instrutores poderão ser estudantes bolsistas ou voluntários selecionados entre aqueles de cursos de graduação e pós-graduação *stricto sensu*, qualificados para o exercício da atividade;
- Os instrutores não resolvem os problemas quando chamado pelo aluno, tendo apenas o papel de facilitador para o encaminhamento correto da compreensão do problema e de suas soluções

Quanto ao conteúdo de:

Cálculo Fundamental para Engenharia:

- **Ementa**: cálculo diferencial e integral para uma variável real: cálculo de área e de volume de elementos geométricos com simetria; introdução às equações diferenciais ordinárias; seqüências e séries de funções; funções vetoriais e geometria analítica vetorial; aspectos matemáticos do cálculo e do método numérico; aplicações em engenharia.
- **Livros-texto**: Cálculo, Volumes I e II, Tom M. Apostol.

Introdução à Álgebra para Engenharia:

- **Ementa**: introdução à lógica, conjuntos, funções, indução e seqüências, introdução à divisibilidade, introdução à teoria dos grupos, anéis de polinômios, álgebra linear, aplicações em engenharia.
- **Livros-texto**: Matemática Discreta, E. Scheinermann, e Álgebra Linear, Hoffman-Kunze.

Matemática Aplicada em Engenharia:

- **Ementa**: cálculo integral e diferencial para funções de mais de uma variável real; cálculo vetorial; teoria geral das equações diferenciais ordinárias; introdução às equações diferenciais parciais: método de solução por separação de variáveis em coordenadas cartesianas, esféricas e cilíndricas; introdução à estatística matemática; funções de uma variável complexa.

- **Livros-texto**: Cálculo, Apostol, Vol. II e Cálculo de uma Variável Complexa, Márcio Soares.

V. Bibliografia:

- Cálculo, Tom M. Apostol, Vol. I e Vol. II, Ed. John Wiley & Sons;
- Matemática Discreta: Uma Introdução, E. Scheinermann, Ed. Thomson, São Paulo, 2006;
- Álgebra Linear, Hoffman-Kunze, Ed. Livros Técnicos e Científicos S/A;
- Cálculo de uma Variável Complexa, Márcio Soares, Publicações IMPA, 2001;
- Educating the Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to the New Century. Committee on the Engineering of 2020, Committee on Engineering Education, National Academy of Engineering. EUA. 2005;
- Cabral, T. e Baldino, R.: O Ensino de Matemática em um Curso de Engenharia de Sistemas Digitais. In: Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: Reflexões, Relatos, Propostas. Edipucrs, Porto Alegre, 2004.