UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JOELMA NOGUEIRA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO NATURAL E O USO DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE CONCEITUAL

FORTALEZA

2013

JOELMA NOGUEIRA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO NATURAL E O USO DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE CONCEITUAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Linha de Pesquisa: Métodos pedagógicos no ensino de Ciências.

Orientador: Prof. Dr. José Rogério Santana.

Coorientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

S233c Joelma Nogueira dos Santos.
A construção do conceito de número natural e o uso das operações fundamentais nas séries iniciais do ensino fundamental / Joelma Nogueira dos Santos – 2013.
180 f. : il. color., enc. : 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Rogério Santana.
Coorientação: José Othon Dantas Lopes.

1. Aritmética. 2. Algoritmos. 3. Material dourado. I. Título.

CDD 372

JOELMA NOGUEIRA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO NATURAL E O USO DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE CONCEITUAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Rogério Santana

Aprovada em: 22/04/2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Rogério Santana (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. José Óthon Dantas Lopes
Universidade Federal do Ceará – UFC

Profa. Dra. Maria Gilvanise Oliveira Pontes
Universidade Estadual do Ceará – UECE

AGRADECIMENTOS

A Deus, acima de tudo, por me conceber inspiração e perseverança na realização deste trabalho.

Ao professor Dr. José Rogério Santana, meu mestre, a quem aprendi a admirar, pela paciência e dedicação.

Ao professor Dr. José Othon Dantas Lopes, pela coorientação e pela competência, meu carinho e respeito.

Aos professores do curso que contribuíram com o engrandecimento de meu conhecimento acadêmico.

Aos meus pais pela dedicação de uma vida a mim e a minha carreira profissional.

Aos amigos do curso por fazerem esta caminhada agradável.

Aos professores da banca pela colaboração e atenção dispensada a esta pesquisa.

Às professoras-alunas que voluntariamente participaram e colaboraram com o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus companheiros de trabalho pela compreensão das muitas vezes que estive ausente da escola.

A minha grande amiga e companheira Janaina Holanda pela paciência, dedicação e ajuda que me deu durante toda esta caminhada.

RESUMO

Esta pesquisa aborda a análise conceitual da construção do número natural e do uso das operações fundamentais que são trabalhadas nas séries iniciais. A história da contagem vem auxiliar a compreensão do surgimento do número natural juntamente com as considerações feitas a partir da teoria dos números especificamente os axiomas de Peano. As atividades realizadas tiveram objetivo de verificarmos na prática como é trabalhado o sistema de numeração decimal posicional e as operações fundamentais adição, subtração, multiplicação e divisão, e como são desenvolvidas nos algoritmos por profissionais que ensinam esses conteúdos. Essas atividades desenvolvidas compõem um manual de orientação sobre os conteúdos citados acima, trabalhados a partir da manipulação do Material Dourado utilizado como ferramenta. É um importante recurso didático e, proporcionou uma visão concreta de algumas ideias que precisaram ser abstraídas. A oficina da matemática foi ministrada a partir da mediação da Sequência Fedathi, proporcionando discussões que serviram de base para nossas análises. As professoras-alunas envolvidas na pesquisa tiveram a oportunidade de, além do recurso didático, trabalhar com outras formas de cálculo na aritmética dos números naturais, vivenciando inclusive a troca de experiências. Buscamos uma matemática que está além dos algoritmos que foram explorados no intuito de identificar a compreensão das participantes com relação às técnicas de cálculo das operações como também os conceitos de cada uma delas. As epistemologias das professoras-alunas foram um dos assuntos que envolveram discussões durante a oficina. Os resultados deste trabalho mostraram o quanto é relevante o domínio do conhecimento matemático pelos profissionais que ensinam matemática nas séries iniciais. Comprovamos também por meio dos resultados que é necessário o aprimoramento da prática de ensino a partir de uma formação continuada.

Palavras-chave: Número Natural. Operações Fundamentais. Aritmética. Algoritmos. Material Dourado.

ABSTRACT

This research addresses the conceptual analysis of the construction of natural number and use of fundamental operations which are worked in the early grades. The history of counting comes to help the understand the emergence of the natural numbers along with considerations made from the theory of numbers, specifically the Peano's axioms. The activities performed had the objective to verify in practice how the positional decimal system and the fundamental operations of addition, subtraction, multiplication and division work, and also how the algorithms are developed by professionals who teach these contents. These activities constitute a guidance manual on the content mentioned above, worked from the manipulation of the golden material. This material was used as a tool. it is an important teaching resource, and provided an overview of some concrete ideas that needed to be abstracted. The math workshop was taught from the mediation of the Sequence Fedathi, providing discussions that formed the basis for our analyzes. Besides the teaching resource, teachers-students involved in this research had the opportunity to, work with other ways of calculating the arithmetic of natural numbers. They could also relish the exchange of experiences. We seek a kind of mathematics that is beyond the algorithms that were explored in order to identify the understanding of the participants regarding the calculation techniques as well as the concepts of each of them. Epistemology of teachers-students was one of the issues discussed during the workshop. The results of this work showed how relevant is the mastering of the mathematical knowledge by the professionals who teach mathematics in the early grades. Results also proved that it is necessary to improve teaching practice through continuing education.

Keywords: Natural Number. Fundamental Operations. Arithmetic. Algorithms. Golden Material.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A construção do conceito de número é histórica. Quando analisamos sua origem, percebemos que ele surge ainda quando o homem das savanas num período distante do nosso, dá os primeiros indícios de contagem e, esta, por sua vez foi sendo utilizada à medida que a humanidade ia se desenvolvendo. As noções primitivas de número estão relacionadas com as primeiras experiências da raça humana, observar as formas na natureza, fazer correspondências entre grandezas e consequentemente, aprender a contar. Esse foi o processo e depois dele, surgiu a concepção de número. Não tem como o indivíduo entender número se não entender como se dá a contagem e para isso, é necessário que ele faça correspondências entre elementos de dois grupos, de dois conjuntos, de duas coleções (LIMA *et al*, 2006).

Embora o conceito de número e sua representação sejam tão antigos quanto o desenvolvimento da escrita, e ainda mais, sua sistematização tenha ocorrido definitivamente no século XIX, percebemos ainda hoje a dificuldade em se trabalhar corretamente esse conceito, as propriedades e o uso das operações matemáticas, principalmente nas séries iniciais da Educação Básica, etapa na qual a criança tem os primeiros contatos com a construção do número. Discutir sobre as ideias e as concepções envolvidas no ensino e na aprendizagem da matemática nesse nível da educação é extremamente relevante porque, a partir dessas discussões, é possível perceber não apenas os fatores envolvidos na aquisição do conhecimento matemático, mas também a relação que há entre o saber matemático do professor e sua prática de ensino (EVES, 2004; FERREIRA, 2011; KAMII, 2001).

No entanto, pesquisas em Educação Matemática têm mostrado o quanto a dificuldade de aprendizagem matemática ocorre nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Atrelada a essa questão estão os obstáculos que permeiam o processo de ensino de matemática, a não compreensão dos conceitos e dos fundamentos matemáticos pelos professores que ensinam nesse nível da Educação Básica. De acordo com a LDB nº 9394/96 a formação desses profissionais se dá em nível superior, nos cursos de Pedagogia, mas sua formação matemática não é substanciada pela grade curricular estabelecida nos núcleos das instituições superiores que formam esses pedagogos. Logo, sua fundamentação nessa ciência fica bem aquém do que é exigida pela sua prática docente, deixando para a formação continuada a função de complementar a formação inicial. Nossa preocupação nesta pesquisa é com a fundamentação do conhecimento matemático para o professor que ensina essa disciplina nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Dentro do contexto do ensino e da aprendizagem, a matemática foi e ainda é discutida. Concepções sobre o que ensinar, quando ensinar e como ensinar, estão presentes no dia a dia da escola. Professores sempre buscam novas metodologias de trabalho para melhor aplicar os conceitos em sala de aula, questionam sua prática pedagógica e levam para a realidade do aluno atividades de ensino que buscam a continuação da aquisição de conhecimentos e uma maior abrangência no domínio da matemática no cotidiano desse aluno. Diante desse fato, precisamos destacar a relevância que há na conexão entre a matemática escolar e a matemática cotidiana sem desconsiderar os aspectos epistemológicos envolvidos. Quando analisamos a história da educação no Brasil, percebemos que sua trajetória tem uma série de percalços. Desde o início, de não ter uma instituição voltada para a formação inicial de professores até as que hoje em dia têm essa função. E no que se refere ao ensino de matemática das séries iniciais da Educação Básica não fundamentam o futuro professor com o conhecimento matemático necessário para atuar na sala de aula (BRASIL, 1998).

Sabemos que o ensino de matemática no Brasil passa por um processo de mudanças desde a década de 1980, mas ainda está muito distante de resultados eficazes. Analisando os fatores diretamente relacionados a essa disciplina, percebemos que a crise se instalou pelas décadas de 1960 e 1970 quando o mesmo passou por uma reforma radical, influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna. É certo que antes da reforma, o ensino dessa disciplina desconsiderava aspectos importantes, como por exemplo, a psicologia da aprendizagem. Esse movimento trouxe sérias consequências ao ensino, e que em muitos casos ainda não foi possível superar. Dentre elas apontamos a ênfase demasiada ao simbolismo dissociado de sentido mais completo. E se os cursos de licenciatura de um modo geral foram envolvidos pela concepção estruturalista do grupo Bourbaki, que dizer então dos cursos de formação de professores de matemática das séries iniciais? (BRASIL, 1998; D’AMBROSIO, 1998; KLINE, 1976).

Atualmente, alguns países já superaram a crise da Matemática Moderna, mas, no Brasil, ainda é possível perceber os resquícios desse movimento. Práticas de ensino ligadas a essa tendência perduram nas salas de aulas. Em algumas instituições a grade curricular continua mal estruturada e os cursos de formação inicial de professores permanecem subjugados ao formalismo exagerado. Enfatizam o conteúdo em detrimento do método e perdem muito tempo trabalhando conceitos que não são utilizados. Daí a necessidade de o professor evitá-los porque não estimulam a curiosidade do aluno. Se por um lado as discussões giram em torno dos conteúdos e métodos trabalhados na formação acadêmica, por outro, o domínio do conhecimento matemático dos professores que trabalham nas séries iniciais precisa ser analisado.

Discussões entre os teóricos da área têm sido feitas e os resultados mostram que o currículo e as atividades nos cursos de formação de professores são distantes da realidade das escolas. Quando na verdade poderiam ser o ponto inicial das práticas pedagógicas, alicerçando o desenvolvimento do conhecimento matemático do futuro professor. Dessa forma, percebemos a necessidade de reestruturar os cursos de Pedagogia para uma melhor fundamentação do currículo voltado para o ensino de matemática que atenda as necessidades de aprendizagem dos alunos, de forma que se modernizem as propostas curriculares e fundamentem as estratégias pedagógicas, trazendo bons resultados para os processos de ensino e de aprendizagem, beneficiando didaticamente os que ensinam e os que aprendem, estabelecendo um elo entre o saber matemático e a prática de ensino voltada para uma aprendizagem significativa.

Entender o processo histórico da construção do saber matemático não só é importante para uma prática docente eficaz, como também entender sua fundamentação na própria ciência chamada Matemática. Diante dessa análise, colocamos aqui alguns questionamentos: De que forma se dá a construção do conceito de número e de agrupamento nas séries iniciais do ensino fundamental? Como está sendo trabalhada a construção histórica? Qual a relevância de trabalhar a construção histórica? Até que ponto essa questão é relevante? Como está sendo trabalhada a construção do conceito de número nas salas de aula das séries iniciais? O que está sendo explorado nos cursos de formação inicial de professores das séries iniciais da educação básica em relação ao currículo de matemática? Quais fundamentos matemáticos estão sendo estudados nesses cursos? Como os professores aprendem suas práticas pedagógicas para ensinar matemática? Nos dias de hoje, o Movimento da Matemática Moderna que chegou à década de 1960 e teve ênfase aqui no Brasil na década de 1970, como ainda influencia o ensino de matemática? Qual a matemática que está por trás da matemática, ou seja, a matemática além das técnicas que é tão relevante quanto os algoritmos? Qual a diferença entre conhecimento matemático e saber matemático? Que relação existe entre eles? Qual a importância de relacionar o saber matemático e a prática de ensino?

Nosso trabalho visa explorar alguns pontos que consideramos pertinentes como:

- algumas considerações do processo histórico da construção do número natural;
- a análise conceitual dos números naturais;

- a matemática que está além dos algoritmos;
- o processo de ensino dos números naturais.

No capítulo 2 analisamos a construção do conceito de número natural historicamente, no intuito de compreender como se desenvolveu dos primórdios até o século XIX, período em que foi estruturada a concepção de número definitivamente. Buscamos fundamentar esse assunto à luz de Boyer (1974) e Eves (2004). Realizamos também uma análise conceitual do número natural. Consideramos Caraça (2010) para o momento antes Movimento da Matemática Moderna e Lima *et al* (2006), Ferreira (2011) e Millies e Coelho (2006) para o momento posterior a esse movimento. No capítulo 03, apresentamos as operações fundamentais no campo dos naturais: a adição, subtração, multiplicação e divisão assim como suas propriedades. Utilizamos os trabalhos de Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996), Dante (2009), Giovanni Júnior e Castrucci (2009) e Iezzi, Dolce e Machado (2009) para uma abordagem mais didática na discussão do ensino das operações e de suas propriedades. No capítulo 4, nosso objetivo foi discorrer sobre as técnicas de cálculo nas operações estudadas no capítulo 3, mas já inseridas em nossa pesquisa de campo. Utilizamos a Engenharia Didática de Michele Artigue explorada em Machado (2008) como nosso método de pesquisa e a Teoria de Fedathi na Sequência Fedathi como mediação didática (BORGES NETO; SANTANA, 2001). As considerações sobre os algoritmos tiveram o intuito de fazermos compreender como funciona a operação que está por trás de cada um deles. Em seguida, apresentamos nossa pesquisa de campo e nossas conclusões acerca do conhecimento matemático dos professores em formação continuada que ensinam matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental, o pedagogo, sobre o conceito de número e de suas operações no campo dos naturais.

2 A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO NATURAL

Neste capítulo analisamos brevemente o processo histórico da construção do conceito de número natural, desde o surgimento da contagem até a sistematização e estruturação do número no campo dos naturais.

2.1 A contagem

A matemática desde os primórdios desenvolveu-se a partir das necessidades do homem assim com atendê-las, e a contagem foi essencial para esse desenvolvimento. O conceito de número que hoje soa como algo simples não foi tão fácil de ser estruturado, levou séculos e envolveu grupos humanos de diferentes lugares da Terra. Este começou a se desenvolver nos primórdios, a partir das primeiras tentativas feitas pelo homem para compreender o conceito de “[...] grandeza, forma e número” (EVES, 2004, p. 25). Tanto o ato de contar como o conceito de número foi desenvolvido ainda com os povos primitivos. Desde uma época bem remota o homem já tinha desenvolvido a noção de contagem quando percebia o acréscimo ou a retirada de algum objeto de coleções organizadas por ele. À medida que ia se desenvolvendo em comunidades, contar tornou-se uma prática comum de suas atividades diárias.

A contagem surgiu num passado muito distante. O homem das savanas viveu durante o período da história chamado Paleolítico Inferior. Este ser se alimentava da caça e de frutos, e disputava o alimento com outros animais. “Era predador-nômade, vivendo na dependência do que pudesse retirar da natureza” (ROSA NETO, 2008, p. 07). Para essas atividades diárias, desenvolveu noções de comparação como, por exemplo, maior ou menor, muito ou pouco. A forma e a simetria também foram percebidas na produção de artefatos que ajudavam na sua existência e consequentemente no desenvolvimento da contagem, relacionando uns objetos com outros. No período do Paleolítico Superior embora o homem já fosse *Homo Sapiens Sapiens*, ainda era um predador-nômade. Aprimorou instrumentos de caça e contava até quatro, mas as quantidades maiores que esse valor, eram consideradas ‘muitas’.

O homem vivenciou suas primeiras experiências com as quantidades na mesma época em que surgiu a necessidade de melhorar sua condição de vida, construindo conhecimentos matemáticos que pudessem ser aplicados em suas atividades diárias, organizando-se em grupos e nas cavernas. Buscava o alimento conforme sua necessidade e comunicava-se “[...] por meio de gestos, grunhidos e desenhos” (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1996, p. 09).

Quando os grupos começaram a aumentar, o homem deixou a vida de nômade para fixar-se em terras férteis, próximas aos rios e favoráveis às plantações e à criação de animais, assim como à habitação. Observando as fases da lua e as estações do ano, percebeu a melhor época para plantar e colher. Dentre algumas das atividades do dia a dia, destacamos a de cuidar dos animais e de levar o rebanho para pastar. Essa tarefa fez com que o homem, por exemplo, estabelecesse uma correspondência entre cada animal que ia ao pasto com uma pedrinha. Dessa forma poderia ter o controle das coisas ou ovelhas que levasse para pastar.

> Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo (EVES, 2004, p. 25,6).

Atualmente, a matemática é utilizada em várias áreas de conhecimento, mas precisamos ressaltar que essa ciência originou-se de conceitos de número, grandeza e forma. Esses conceitos vêm de noções primitivas e estão relacionadas com as primeiras experiências da raça humana. Num período não muito distante acreditou-se que a matemática estava numa dimensão superior à nossa, além dos nossos sentidos. No século dezenove, o homem começou a enxergar o conhecimento matemático longe da concepção natural, embora este tenha surgido da necessidade do dia a dia.

> A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças – a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dissemelhança entre a forma redonda lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa das experiências caóticas, a realização de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática (BOYER, 1974, p. 01).

É possível que a forma na qual o homem iniciou a contagem fosse apresentada em registros utilizando uma correspondência biunívoca. Essa prática mostra os primeiros indícios da contagem. Sendo que “[...] a correspondência um a um estabelecida entre o conjunto de ovelhas ou cabras e o conjunto de pedras possibilitava ao homem dessa época comparar duas coleções sem conhecer as quantidades envolvidas” (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1996, p. 09).

Os registros históricos mostram também que o homem primitivo utilizava sons diferentes para identificar duas árvores e esse som era diferente da identificação de dois peixes, por exemplo. Daí justificou que as palavras que utilizamos atualmente para números referiam-se a coleções de objetos concretos. As pedras não foram os únicos mecanismos utilizados pelo homem para controlar quantidades. Nós em corda, entalhes em madeira ou em osso são exemplos de instrumentos de contagem por meio de correspondência um a um, e no que se refere à noção de quantidade, o homem primitivo tinha apenas a noção de um, dois e muitos.

> Para uma contagem de carneiro, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo ranhuras no barro ou na pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números (EVES, 2004, p.26).

É interessante percebermos que, em meio aos contrastes, veem-se as semelhanças. O lobo, a árvore, a pedra podem ser considerados, cada um, como objeto único. Mas em grupo e em pares, podem ser dispostos um a um, fazendo-se correspondências com eles. Outra questão relevante é a de que o desenvolvimento da ideia número não é considerado como um feito de um único indivíduo ou de um único grupo étnico, mas foi percebido gradualmente num passado muito distante. Seu desenvolvimento é tão antigo quanto à descoberta do fogo. As evidências históricas mostram que o desenvolvimento do número ocorreu gradativamente. O grego, por exemplo, mostra em sua gramática a diferença entre um, dois e mais de dois. Sobre essa ideia Brasil (1998, p. 25) faz a seguinte consideração: “Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas”.

O processo da contagem desenvolveu-se de forma quantitativa assim como a construção do número estava relacionada ao concreto: dois peixes, três ossos, por exemplo. A contagem com os dedos também ajudou o homem a desenvolver a noção de quantidade. Estes instrumentos estavam sempre disponíveis para ajudar a contar, durante certo tempo, até dez, depois utilizou outras formas de agrupamento. A contagem utilizando os dedos para agrupar de cinco em cinco, de dez em dez passou a ser uma prática no dia a dia do homem. Daí a referência para os sistemas de numeração de várias civilizações, inclusive a nossa.

Segundo Boyer (1974), embora a contagem quinária e decimal tenha surgido depois da binária e da ternária, era utilizada com mais predominância do que as duas últimas. O ato de contar é mais antigo que as civilizações e a escrita. É provável que sinais para números, ou seja, representações com marcas em osso surgiram bem antes de formulações de frases para reconhecer o número.

Várias situações do cotidiano necessitam da contagem, independente de onde o homem viva ou o que faça, nas grandes cidades, executando atividades da mais alta tecnologia ou, vivendo em locais não muito habitados, trabalhando no campo contando algumas ovelhas, não importa, contar faz parte do seu dia a dia. Num passado distante o homem resolveu o problema da contagem com a criação dos números naturais. De acordo com a história secular, primeiro veio a contagem, depois, os números que estão presentes na vida social e individual do homem. Quando este começou a contar utilizou-se de recursos do próprio corpo como os dedos das mãos e dos pés. O homem primitivo utilizava esses recursos para relacionar coleções de objetos, assim poderia contar até vinte. Quando a quantidade de objetos para contar passou a ser maior que a quantidade de dedos que possuía, então começou a usar outros recursos como pedras, ossos de animais, entalhes em madeira entre outros. (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1996; CARAÇA, 2010).

2.2 A base de um sistema de numeração

Quando a necessidade do homem exigiu que a contagem se estendesse para quantidades maiores, foi necessário um processo de sistematização. Fazendo um breve relato sobre a utilização de outros números como base de agrupamento, observamos que os números eram dispostos em grupos e eram conhecidos, como o grupo de 2, o grupo de 5, o grupo de 10. O homem começou a utilizar formas mais eficazes no ato de contar. “[...] o método consistia em escolher certo número b como base e atribuir nomes aos números 1, 2, 3,..., b. Para os números maiores que b os nomes eram essencialmente combinações dos números já escolhidos” (EVES, 2004, p. 27).

Como o agrupamento de 10 em 10 era muito frequente, era de esperar que o número 10 fosse usado como base para a contagem, e posteriormente, algumas línguas, como a língua inglesa que nomeou aos números utilizados a noção de base ou agrupamento de 10. Quantidades acima desse valor eram denominadas a partir da combinação de 10 com outro valor da sequência $1, 2, \ldots, 10$. Os números $2, 3$ e 4 também foram utilizados como bases no passado.

Atualmente, ainda é possível encontrar tribos que usam o conhecimento matemático de forma bem primitiva. Alguns grupos étnicos na África ainda têm essa concepção sobre a contagem. Entre os povos dessas tribos prevalece a noção do número um e do número dois, além dessas quantidades, a ideia de muitos, ou seja, sem base nenhuma e sem nenhum aprimoramento. “Mesmo hoje muito povos ainda contam objetos dispondo-se em grupos de dois” (BOYER, 1974, p. 02).

Embora o desenvolvimento da contagem e, posteriormente do número tenha sido atrelada ao desenvolvimento do homem, algumas tribos indígenas não desenvolveram totalmente a contagem. É o caso de alguns povos em Queensland na Austrália e de algumas tribos na América do Sul que utilizam o número 4 como base e outras o número 5. Este último foi usado como base de agrupamento durante muito tempo. Dessa forma a matemática está enraizada culturalmente, pois era um apanhado de experiências aplicadas à vida diária do homem. Embora o conceito de número tenha surgido depois da percepção humana com a contagem, esta se acha inserida no instinto animal. Assim como no homem primitivo, nessas tribos não há uma designação única para um ou dois, a ideia que dão a três peixes, por exemplo, não tem a mesma palavra para três árvores. Não há “[...] conceito para descrever a quantidade de um objeto concreto, não há abstração” (ARAGÃO, 2009, p. 45).

O que sabemos de fato é que a experiência humana, inclusive na fala, organizou a noção de alguns termos e estruturou algumas palavras que se referem aos números, embora ainda hoje algumas tribos tenham um conhecimento rudimentar dos números e da contagem.

> As tribos mais rudimentares contam apenas *um, dois, muitos*. A língua inglesa ainda guarda um resquício desse estágio na palavra *thirce*, que tanto pode significar “três vezes” como “muito” ou “extremamente”. Algo parecido ocorre no idioma francês, onde as palavras *très* (muito) e *trop* (demasiado) são claramente vocábulos cognatos de *trois* (três), bem como em italiano onde *tropo* (excessivamente) deriva de *tre* (três). É curioso que, em alemão, o fenômeno se dá com *viel* que significa “muito” enquanto *vier* quer dizer “quatro” (LIMA *et al*, 2006, p. 33,4).

Como já discorremos, além dos sons, com o tempo veio a representação dos números pelos dedos. Essa representação não era usada apenas pela quantidade, mas pela forma como os dedos eram posicionados. Em relação à base 5, historicamente os camponeses germânicos usavam o sistema quinário em seus calendários. O número 12 também era uma base e pode ter sido usado ainda na pré-história, no que se refere à medição. O número 20 também foi muito utilizado para agrupar. Os índios americanos assim como os celtas usavam a base vigesimal que era dos maias. O número 60 foi usado no sistema babilônico e é, na base sexagesimal, que medimos o tempo e os ângulos em minutos e em seus submúltiplos, os segundos. Posteriormente, o comércio na Idade Média exigiu um aperfeiçoamento na representação digital (representação por meio dos dedos). “No desenvolvimento final, os números 1, 2,..., 9 e 10, 20, ..., 90 eram representados na mão esquerda e os números 100, 200, ..., 900 e 1000, 2000, ..., 9000 na mão direita. Os livros de aritmética da Renascença traziam figuras dos números digitais” (EVES, 2004, p. 29).

Consideramos mais uma vez o uso da representação dos números pelos dedos por povos primitivos que vivem em nossa época e no passado. Dentre elas citamos as tribos africanas, árabes e persas. Há evidências de tribos indígenas na América do Sul e na América do Norte e também alguns grupos de esquimós. A vantagem da representação dos números por meios dos dedos é que esta sempre superou o problema da linguagem falada. Esses registros são os primeiros indícios da tentativa da escrita numérica e que posteriormente resultou em vários sistemas numéricos.

Chamamos atenção para um fato interessante. Nossos alunos na aprendizagem da concepção de número e nas primeiras manipulações com algumas operações numéricas utilizam os dedos enquanto não conseguem avançar no conhecimento lógico-matemático. Ainda estão numa fase primitiva do seu desenvolvimento cognitivo denominado operatório concreto (PIAGET, 2002).

O sistema de agrupamento simples é indicado como o mais antigo. (Eves, 2004, p. 30) afirma que: “Nessa modalidade de sistema escolhe-se um número b como base e adotam-se símbolos para $1, b, b^2, b^3$ etc”. Os egípcios usavam esse princípio em seu sistema de numeração, empregando hieróglifos em 3400 a.C. . Os símbolos eram utilizados na forma aditiva, quantas vezes fossem necessárias, seriam usados. Os registros históricos mostram que os babilônicos antigos também usavam o sistema de agrupamento simples. Mas o uso era caracterizado por uma forma subtrativa. Os gregos, embora tivessem uma simbologia para o cinco, utilizavam em seu sistema de numeração, o agrupamento simples, como uma maneira diferente dos babilônios de trabalhar o princípio subtrativo. A evolução do sistema de agrupamento simples foi o sistema de agrupamentos multiplicativos (LIMA, SIANI FILHO E COUTO FILHO, 1996).

Podemos exemplificar da seguinte maneira: Imaginemos que o sistema de numeração em questão tenha base 10, os símbolos utilizados para trabalhar nesse sistema são 1, 2, 3, ..., 9. Outro conjunto de símbolos também é adotado, neste caso, $10, 100, 1000..$ Que significam $10, 10^2, 10^3, ...$ E que são representados por exemplo, por letras, como a, b e c. Segundo Eves (2004, p. 33),

> Nesse tipo de sistema, após se escolher uma base b adotam-se símbolos para 1, 2,..., b-1 e um segundo conjunto de símbolo para $b, b^2, b^3, ...$ Empregam-se os símbolos dos dois conjuntos multiplicativamente de maneira a mostrar quantas unidades dos grupos de ordem superior são necessárias.

O número 4392, por exemplo, é escrito no sistema multiplicativo na forma $4c3b9a2$.

O sistema de numeração chinês-japonês tradicional usa o princípio multiplicativo da base 10. No sistema de numeração posicional, adota-se um número para ser a base, em seguida, faz-se uma notação para $0,1, 2, ..., b - 1$. O nosso sistema de numeração usa esse princípio do valor posicional. Um número N qualquer tem uma forma única de ser representado. Sendo $0 \leq a_i < b,\ i = 0, 1, 2, ..., n$. Temos que:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0. \qquad (1)$$

No sistema de numeração posicional, um número pode ser representado como múltiplo de uma potência da base b. O número 504, tem 5 representando $5x100$ ou $5x10^2$. Mas em 59, o algarismo 5 está representando $5x10$ ou $5x10^1$. Segundo Eves (2004, p.36) "Um sistema de numeração posicional é uma consequência lógica, embora não necessariamente histórica, de um sistema agrupamento multiplicativo." Num sistema de numeração posicional de base b, adotam-se símbolos para a sequência $0, 1, 2, \ldots, b - 1$. Nosso sistema de numeração indo-arábico tem base decimal. Embora o número 10 tenha sido uma escolha arbitrária, agrupamentos em outras bases também são relevantes.

Quando a base b é menor ou igual a 10 ($b \leq 10$), usamos os algarismos que conhecemos. Por exemplo, se o número 4311 está representado na base 5, então escrevemos $(4311)_5$. Caso o número esteja na base 10 ($b = 10$), o número pode ser escrito sem índice. Quando a base b é maior que 10 ($b > 10$) além dos algarismos que conhecemos, utilizamos outros símbolos, como as letras por exemplo. É o caso do sistema de numeração de base 12 e de base 16. Passar um número de uma base qualquer para a base 10, não é uma tarefa tão difícil. Como exemplo, vamos passar o número citado acima, $(4311)_5$ para a base 10.

$$(4311)_5 = 4.(5^3) + 3.(5^2) + 1.(5^1) + 1.(5^0) \quad (2)$$

$$(4311)_5 = 4.(125) + 3.(25) + 1.(5) + 1.(1)$$

$$(4311)_5 = 500 + 75 + 5 + 1$$

$$(4311)_5 = 581$$

De uma forma geral, N é o número na base $b = 5$ que será transformado para o número N' na base $b = 10$.

2.3 O sistema de numeração decimal posicional

Nosso sistema de numeração é decimal posicional. Decimal porque a escrita de qualquer número pode ser feita, utilizando os dez símbolos, ou um, ou alguns deles. Isso significa que o agrupamento é de dez em dez. Nele, cada grupo de dez unidades de uma ordem é substituído por uma unidade da ordem imediatamente superior. Posicional porque a escrita dos números é feita de forma sequencial e finita dos dez algarismos e que o valor deles depende de suas posições nas representações dos números. Quatro mil anos se passaram desde o surgimento dos sistemas de numeração escrita e o sistema que utilizamos atualmente, o indo-arábico (FERREIRA, 2011).

No número 397, o valor posicional do algarismo 3 é 300, 9 é 90 e 7 é 7 unidades. Daí, temos $397 = 300 + 90 + 7 = 3x10^2 + 9x10^1 + 7x10^0 = 3x10^2 + 9x10^1 + 7$. Reforçando nossa ideia, Brizuela (2006, p. 27) afirma que,

> O sistema numérico escrito que usamos é representado por meio de dois elementos; a base dez e valor posicional. A base do sistema numérico escrito significa que tantas unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior. No sistema de numeração decimal (base dez), dez unidades de uma ordem formam uma unidade (1) de ordem imediatamente superior.

Podemos estruturar um sistema de numeração posicional em qualquer base $b \geq 2$. Embora o primeiro sistema de numeração decimal estruturado tenha sido o chinês, o nosso sistema de numeração indo-arábico é considerado o mais completo sistema desenvolvido.

Nele podemos perceber a estrutura aditiva, a estrutura multiplicativa e a estrutura exponencial (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

> Em nosso sistema de numeração – como é sabido –, o valor que representa cada algarismo se obtém multiplicando esse algarismo por uma determinada potência de base. Se um número tem mais algarismos que outro, necessariamente intervieram em sua decomposição potência de dez de *maior grau* que as envolvidas no outro, e em conseqüência será maior. Por outro lado, quando se trata de dois números com a mesma quantidade de algarismo – com exceção dos que começam com o mesmo algarismo – é o primeiro quem determina qual é o maior, porque esse algarismo indica por quanto deve ser multiplicada a potência de grau maior que "intervém" no número. Por razões semelhantes, se os primeiros algarismos forem iguais, a responsabilidade de determinar o número maior seria transferida ao algarismo imediatamente posterior, assim sucessivamente (LERNER; SADOVSKY; WOLMAN, 1996, p. 109,10).

De uma forma geral, podemos representar um número num sistema de numeração numa base $b \geq 2$ da seguinte forma: $N = a_k.b^k + a_{k-1}.b^{k-1} + \cdots + a_1.b + a_0$, onde $k \geq 0$, $a_k \neq 0 \; e \; 0 \leq a_i < b, \; i = 0,1,2,\ldots,k$.

Exemplificando: $4x10^3 + 3x10^2 + 0x10^1 + 7x10^0 = 4000 + 300 + 0 + 7 = 4307$.

Essa ideia do sistema de numeração decimal posicional é matematicamente sustentada por um teorema decorrente do algoritmo de Euclides, estudado na Teoria dos Números. Os números naturais podem ser representados por meio do sistema de numeração decimal, utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Esse sistema é conhecido como indo-arábico (LIMA *et al*, 2006).

2.3.1 Considerações sobre o ensino do valor posicional

A educação possibilita ao indivíduo desenvolver sua inteligência, utilizando o que Nunes *et al* (2009, p. 19) chamam de "[...] instrumentos culturalmente desenvolvidos [...]" cuja função é dar maior dimensão às nossas capacidades. Esses instrumentos não necessariamente precisam ser concretos. Podem ser utilizados por meio de símbolos, como por exemplo, os sistemas de numeração.

Os sistemas de numeração têm o objetivo de expandir nossas habilidades de registro, de escrita, de manipulação de quantidades e de memória. As quantidades relativamente pequenas podem ser contadas sem a necessidade de um sistema de numeração, o que não ocorre com uma quantidade bem grande. Juntar a quantidade de um milhão, quinhentos mil, quatrocentos e dezenove habitantes de certa cidade com dois milhões, quinhentos e vinte e quatro habitantes de outra cidade na contagem de um censo é um exemplo da necessidade do sistema de numeração. Ao trabalharmos com o sistema de numeração decimal, percebemos que este não só evita que contemos a quantidade de habitantes um por um, como simplifica nossa contagem, “pois começa a aparecer um padrão que se repete a cada dezena: vinte e um, vinte e dois, vinte e três..., trinta e um, trinta e dois, trinta e três..., quarenta e um, quarenta e dois, quarenta e três... e assim sucessivamente” (NUNES *et al*, 2009, p. 20).

O valor posicional é um exemplo de conhecimento socioconvencional. No número 555 temos $5x100 + 5x10 + 5$, o primeiro algarismo 5 representa 5 centenas, o segundo algarismo 5 representa 5 dezenas e o terceiro algarismo 5 representa 5 unidades. E no que se refere à escrita dos números em nosso sistema de numeração, Brizuela (2006, p. 28) afirma que,

> São usados algarismos de zero a nove, e esses algarismos são combinados de várias maneiras para formar números escritos; o valor do número é determinado pelos algarismos e pela posição que cada um deles ocupa. O valor da posição nos permite usar um número limitado de algarismos (dez algarismos na sequência 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) para registrar qualquer número natural, independentemente de ele ser pequeno ou grande. O algarismo 1 escrito na posição das unidades (à esquerda imediata da vírgula decimal ou à extrema direita se não houver vírgula decimal) denota uma unidade; o mesmo algarismo escrito na posição à esquerda do lugar das unidades denota dez; o mesmo algarismo o escrito na posição à esquerda do lugar das dezenas significa cem; na próxima posição, mil, e assim por diante.

Esse padrão de contagem não é percebido imediatamente pelo sujeito quando está aprendendo a contar, só algum tempo depois ela vai percebendo esse padrão. Quando a criança sabe contar até cinquenta, sessenta ou setenta é porque já percebeu o padrão que rege o sistema de numeração decimal. Dependendo do nível de abstração do indivíduo, é possível estabelecer algumas relações entre as ordens. O número 47, por exemplo, pode ser visto por crianças como uma sequência de quarenta e sete objetos em fila. Em outro nível pode ser visto como 4 dezenas e 7 unidades. Em um grau de desenvolvimento mais elevado o indivíduo consegue abstrair 4 dezenas ao mesmo tempo de 40 unidades (NUNES *et al*, 2009; KAMII, 2005).

O sistema de numeração decimal posicional simplifica não apenas a contagem, mas também demonstra uma forma clara de representação dos números e dos cálculos com as operações básicas e de outras mais complexas.

> O sistema de numeração escrito utilizado por nós é uma maneira simples e econômica de representar números. Também permite a realização de cálculos simples do cotidiano e de outros bastante complexos. A base dez e o valor posicional, todavia são apenas algumas, entre muitas outras maneiras, de registrar números (BRIZUELA, 2006, p. 29).

Entender o sistema de numeração como um aperfeiçoamento da contagem é fundamental para que o sujeito avance no desenvolvimento do conhecimento da aritmética dos números naturais.

2.4 O número natural: sua construção e evolução

Embora a contagem tenha precedido os números naturais, as civilizações que existiram no passado tinham conhecimento deles. Dependendo de quanto cada uma era desenvolvida, conhecia de mais ou de menos esses números. O homem primitivo observava o número inserido na natureza, enquanto para o homem contemporâneo o número tem significação aritmética e não está atrelado à realidade, é apenas abstração, está no pensamento humano. A matemática desde os primórdios desenvolveu-se a partir, e para as necessidades do homem e a contagem foi essencial para esse desenvolvimento. O conceito de número que hoje soa como algo simples, não foi tão fácil de ser estruturado, levou séculos e envolveu grupos humanos de diferentes lugares da Terra em diferentes épocas.

Algumas civilizações antigas criaram sistemas de numeração diferentes em uns aspectos e outros não. Como exemplo, temos o sistema babilônico de base sexagesimal que diferenciava do sistema de numeração egípcio cuja base era decimal. A criação desses números pelos povos primitivos não inclui o zero, este foi introduzido na sequência numérica

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Segundo Davis e Hersh (1985, p. 154): “Os inventores dos algarismos 0, 1, 2,..., 9 ou de suas formas primitivas estão perdidos na névoa do tempo.”

Já o sistema de numeração o qual utilizamos inclui o zero, uma criação dos hindus que foi ignorada durante muitos séculos pelos gregos e egípcios. Para Ferreira (2011, p. 02) “[...] A invenção do zero foi um passo decisivo para a consolidação do sistema de numeração indo-arábico, devido à sua eficiência e funcionalidade em relação aos demais sistemas de numeração”.

Segundo Caraça (2010, p. 06) esse feito foi “[...] um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão”. O símbolo zero foi criado a partir da exigência da escrita dos números e de suas operações.

Várias técnicas foram desenvolvidas para aprimorar o uso dos sistemas de numeração. A criação do zero sem dúvida nenhuma foi um grande feito, por causa dele e do valor posicional do nosso sistema de numeração, podemos multiplicar, por exemplo, 1029 x 203. Lima *et al* (2006, p. 36) ressaltam que,

> Deve-se lembrar que o símbolo 0 (sob diferentes formas gráficas) foi empregado inicialmente pelos maias, posteriormente pelos hindus, difundido pelos árabes e adotado no ocidente, não como um número e sim como um algarismo, com o utilíssimo objetivo de preencher uma casa decimal vazia.

As escolas de educação básica no Brasil adotam o zero como sendo o primeiro elemento do conjunto $\mathbb{N}$. Na verdade, ter ou não o zero nesse conjunto é uma questão de convenção. Ressaltamos que as crianças ao aprender o conceito de número não têm de imediato a compreensão do zero como um algarismo quanto mais como um número (LIMA *et al,* 2006).

Outro grande acontecimento que contribuiu de forma significativa para estruturar o conceito de número, e da matemática como um todo foi a Escola Pitagórica. Fundada por Pitágoras, o ensinamento foi caracterizado não apenas pelo conhecimento matemático, mas também pelo astronômico e o religioso. O lema ‘tudo é número’ ligava fortemente a matemática às coisas que cercam o mundo. “Pitágoras acreditava que tudo na natureza tinha explicação pelos números.” Mas o que a escola pitagórica tem a ver com a concepção de número? (ARAGÃO, 2009, p. 21; BOYER, 1974).

As ideias pitagóricas desde o início pregavam que era possível obter um segmento de reta a partir da comparação entre dois outros segmentos. Essa comensurabilidade gerou a noção de número racional. Por exemplo, se o segmento $\overline{PQ}$ cabia um número de vezes exatas em um segmento $\overline{AB}$ e outro número de vezes exatas num segmento $\overline{CD}$, podia-se afirmar que $\overline{PQ}$ era 'submúltiplo comum' de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

No que se referem aos números naturais, os pitagóricos fizeram uma descoberta que mudaria a direção na qual, todos eles olhavam a concepção de número. Ao lidar com o quadrado, perceberam que a diagonal e o lado dessa figura plana eram segmentos incomensuráveis. Mas o que é a comensurabilidade? O que essa ideia tem a ver com a construção do conceito de número? Segundo Euclides (2009, p. 353): "Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se". Para entendermos é necessário imaginarmos duas grandezas. Caso consigamos compará-las, existe um valor que é um submúltiplo comum dessas duas. Então dizemos que são comensuráveis. Uma grandeza sozinha não pode ser considerada incomensurável. Para tal afirmação é necessário dois objetos ou duas grandezas. "Incomensurabilidade é uma relação entre duas grandezas da mesma espécie; não dá ideia de quantidade muito grande." (LIMA *et al*, 2006, p. 62). Esse fato abalou as estruturas da escola pitagórica que enxergava o mundo a partir da comensurabilidade. Os pitagóricos acreditavam que o domínio do conhecimento matemático era regido pelos números inteiramente exatos. Só aceitavam a ideia da existência dos números racionais porque era possível obtê-los a partir dos números inteiros, como é o caso das frações. "As frações só eram admitidas pelos gregos não como números, mas como razão entre números (1, 2, 3, 4, etc.)". Essa questão implicou diretamente no conceito de número, pois os fatos mostram que os pitagóricos tinham um conceito limitado de números e desconheciam o campo dos reais. (FERREIRA, 2011, p. 05).

Embora os gregos não considerassem as frações como número, eles as entendiam muito bem. Durante muito tempo acreditou-se que a comensurabilidade sempre iria existir entre dois segmentos quaisquer. Provavelmente essa ideia parte dos conceitos da Aritmética, "[...] onde dois números naturais têm sempre um divisor comum (na pior das hipóteses, igual a 1)." Mas a ideia da comensurabilidade desabou por volta do quarto século antes de Cristo, quando os pitagóricos observaram que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. Essa descoberta 'levou ao chão' a ideia de que os números governam o mundo. Quando a incomensurabilidade veio à tona no cenário matemático, foi necessário expandir o conceito de número, aparecendo então outro campo numérico: os números racionais (LIMA *et al.,* 2006, p. 61).

O conceito de número só foi estabelecido definitivamente no século XIX mais especificamente no final desse período. Chamamos a atenção para a semelhança que há entre a aquisição do conceito de número que hoje é concebida e a forma como as civilizações antigas vivenciaram. De acordo com a história da matemática primeiro veio a contagem em seguida os números naturais, assim ocorreu com as pessoas no passado e assim ocorre com as pessoas no presente, nessa mesma sequência. Primeiro aprendem a contar, em seguida vem a aprendizagem dos números.

Mas o que é o número então? E como o sujeito constrói sua concepção de número? Na visão piagetiana, há três tipos de conhecimento: o físico, o social e o lógico-matemático. O conhecimento físico está relacionado com o mundo exterior e os objetos que ele possui. A partir da experiência do sujeito com os objetos e da observação sobre eles. O conhecimento social é criado pelo homem. Palavras como ‘dez’ ou ‘ten’ são exemplos de conhecimento social, mas a ideia que se tem do número 10 diz respeito ao conhecimento lógico-matemático. Este se refere às construções originadas das relações que o sujeito cria com o objeto. A base das relações é a mente. O conhecimento lógico-matemático é construído pelas relações que são criadas a partir de outras relações. Neste último, encontra-se a natureza do número. Portanto, não se ensinam as relações que há por trás da aprendizagem de uma adição ou logaritmação na transmissão do conhecimento social. Nessa transmissão o que pode acontecer é o ensino da resposta correta (KAMII, 2001).

O conhecimento lógico-matemático parte da relação que o indivíduo cria mentalmente com o objeto o qual, a partir das suas propriedades, surgem informações estruturadas pelo indivíduo. De acordo com Kamii (2001, p. 15) “O número é a relação criada mentalmente por cada indivíduo”. Quanto mais o indivíduo desenvolve as relações que ele criou com o objeto mais conhecimento ele vai construindo. E o conhecimento lógico-matemático depende justamente desse desenvolvimento e da maneira como as relações são coordenadas.

Abstrair a ideia de número não é o mesmo que abstrair a ideia da forma de um objeto. Abstração empírica (conhecimento físico) está relacionada com a ideia de propriedade do objeto como cor, tamanho e forma. Quando o indivíduo abstrai empiricamente, ele focaliza sua atenção a uma única propriedade, ignorando todas as outras. Já a abstração reflexiva relaciona-se com a ideia de construir relações a partir das propriedades observadas no objeto, e essas relações estão na mente desse sujeito que as desenvolveu.

Alguns professores confundem abstração com representação. Acreditam que pelo fato de trabalhar com material concreto, a atividade é concreta e quando trabalham apenas com números escritos a atividade é abstrata. Na visão piagetiana, o uso do material concreto pode ocorrer em uma atividade em que os indivíduos têm alto ou baixo nível de abstração, assim como o uso de símbolos pode ser feito em um alto ou baixo nível de abstração (PIAGET, 2002).

Para que o sujeito entenda o conceito de número é necessário que ele tenha conhecimento sobre duas relações: a ordem e a inclusão hierárquica. A ordem está relacionada com a capacidade que o indivíduo tem de organizar os elementos de uma coleção. O arranjo que o sujeito compreende não é o espacial, mas o que está estruturado mentalmente. A inclusão hierárquica está relacionada com a capacidade que o indivíduo tem de compreender que um número está incluído em outro. Para quantificar uma determinada coleção é necessário relacionar os objetos a partir de uma inclusão hierárquica. A necessidade de ordenar objetos na contagem é no intuito de garantir que nenhum deles seja contado mais de uma vez. A inclusão de classe refere-se à capacidade que o indivíduo tem de perceber o todo e as partes. Quando não há o domínio da inclusão de classes apenas as partes são percebidas. Além desta é necessário o entendimento sobre a inclusão hierárquica, a ordem sozinha não garante a aprendizagem da contagem (KAMII, 2005).

Kamii (2001, p. 20) afirma que “Se a ordenação fosse a única operação mental da criança sobre os objetos, estes não poderiam ser quantificados, uma vez que a criança os consideraria apenas um de cada vez, em vez de um grupo de muitos ao mesmo tempo”. Dessa forma, a ordem está atrelada à inclusão hierárquica que vai garantir que um número seja quantificado.

Semelhante à inclusão hierárquica é a inclusão de classes, mas há diferença entre esses dois termos. Na inclusão hierárquica, em cada nível existe apenas um elemento que compõe a ideia de número, enquanto que, na inclusão de classe, há além de um elemento. O indivíduo deve perceber a partir da abstração reflexiva que o número um está incluído no número dois, que o número dois está incluído no número três e assim por diante. Na inclusão de classes o importante é que o indivíduo domine a invariante da reversão, pois ao fragmentar o todo em partes, será necessário juntá-las novamente para chegar ao todo. Mas o domínio da reversibilidade precisa ser desenvolvido em ações e eventos nos quais os objetos estão inseridos.

2.5 A construção do número natural na teoria

A matemática dos dias de hoje está toda fundamentada na ideia de conjuntos. Os conceitos matemáticos podem ser representados por essa ideia. Com o conceito de número natural não é diferente. A concepção de número vem do domínio da contagem e esta por sua vez, trabalha a relação entre elementos de duas coleções, e o que são essas coleções se não conjuntos. “A noção abstrata de quatro é, segundo Russel e Whitehead (Principia Mathematica, vol 1), o conjunto de todos os conjuntos que podem ser postos em correspondência um a um” (DAVIS; HERSH, 1985, p. 161).

Atrelada a essa ideia Lima *et al* (2006, p. 28) fazem a seguinte consideração: “Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar, medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza.”

Davis e Hersh (1985, p. 375) mostram a visão intuicionista de Brouwer, idealizador do Intuicionismo, corrente filosófica da matemática enquanto ciência, do que são os números naturais e de que eles são na verdade o princípio de todo conhecimento matemático. “A posição de Brouwer era de que os números naturais nos são dados por uma intuição fundamental, que é o ponto de partida de toda a matemática. Ele insistia em que toda a matemática deveria estar baseada *construtivamente* nos números naturais”.

Os números naturais implicados na sequência 0, 1, 2, 3,... são concebidos na forma de abstração e são manipuláveis também de forma abstrata. Essa ideia nos permite olhar para o número 179.345.638.000.001 e fazer algumas considerações. Embora não se trabalhe na prática com coleções envolvendo um número tão grande assim, podemos duplica-lo, triplicá-lo, dizer se é par ou ímpar, se é menor que 1.000.000.000. Dessa forma, embora na sala de aula e no dia a dia trabalhamos com a matemática finita, por meio de seus símbolos e de suas leis, podemos abstrair números grandes que não se enquadram inclusive de uma representação decimal. A contagem de números pequenos é tão importante quanto entender e contar números grandes. E a distinção entre esses dois tipos de abstração é essencial para esse entendimento (DAVIS; HERSH, 1985; KAMII, 2001).

Davis e Hersh (1985, p. 173) confirmam essa ideia quando afirmam que: “Trabalhando com a matemática finita, e com poucos símbolos, podemos fazer definições que conduzem a inteiros tão grandes que a mente se frusta ao tentar mesmo representá-los decimalmente”.

Embora a construção do conceito de número tenha sido um processo demorado, vemos que os sistemas de numeração desenvolvidos por algumas civilizações eram formas de aperfeiçoamento dos números e que iam se desenvolvendo cada vez mais ao longo do tempo. Graças ao matemático Giuseppe Peano (1858-1932), a Richard Dedekind (1831-1916) e a Georg Cantor (1845-1918) e de seus trabalhos no final do século XIX, hoje temos uma representação e uma definição concisa dos conjuntos numéricos, dentre eles o conjunto dos números naturais (BOYER, 1974; FERREIRA, 2011).

Segundo Ferreira (2011, p. 19): “A ideia de número natural sempre esteve associada à ideia de quantidade e à necessidade de contagem”. A Teoria dos Conjuntos formaliza toda a estrutura dos números naturais e inteiros, assim como de outro campo numérico como os racionais e reais. Os números naturais $1, 2, 3, 4, \ldots$ é uma sequência infinita e não há um número maior que todos os outros. Na concepção construtivista, os números naturais são ensinados intuitivamente e não de maneira formal com definições memorizadas.

Para o construtivista, ver o exemplo, resolver situações-problema, desenvolver habilidade de pensamento é o que faz com que o conceito matemático seja internalizado. A intuição nos permite representar mentalmente objetos matemáticos.

> Assim, a intuição fundamental dos números naturais é um conceito partilhado, uma idéia comum a todos que passaram por certas experiências de trabalhar com moedas ou tijolos, botões ou pequenas pedras, até que se possa dizer (ao termos as respostas “certas” a nossas perguntas) que a idéia foi adquirida – que mesmo, como sempre acontece esgotando-se os botões e as moedas mais cedo ou mais tarde, subsiste uma idéia de algo com uma imensa lata de botões ou de moedas que nunca se esgotarão. Em outras palavras, a intuição não é uma percepção direta de algo que existe externamente e eternamente. É o efeito na mente de certas experiências de atividade e manipulação de objetos concretos (em um estágio posterior, de traços no papel ou mesmo de imagens mentais) (DAVIS; HERSH, 1985, p. 441).

2.5.1 Concepções básicas sobre par ordenado: o produto cartesiano

Dado um conjunto não vazio A, um par ordenado de elementos desse conjunto é um elemento (a,b) pertencente ao produto cartesiano AxA. Quando estruturamos o produto cartesiano entre dois conjuntos não vazios, relacionamos pares ordenados cujos elementos pertencem aos conjuntos em questão. O par ordenado também é o elemento básico para o *sistema de referência*, termo utilizado por Caraça (2010) para se referir à interpretação geométrica de conjuntos de números, dentre eles o conjunto dos números naturais. Seu significado apresenta-se em forma de postulado por ser um conceito primitivo. (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1997).

Dados dois pares ordenados $P_1=(a,b)$ e $P_2=(c,d)$, dizemos que P_1 é igual a P_2 quando $a=c$ e $b=d$. Devemos entender que o par ordenado (a,b) não é igual ao conjunto

$\{a, b\}$, pois o conjunto $\{a, b\}$ é igual ao conjunto $\{b, a\}$ e o par ordenado (a, b) só é igual a *(b,a)* quando $a=b$.

Sejam dois conjuntos $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i\}$ e $B=\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_j\}$ não vazios e finitos com i e j elementos respectivamente. Denomina-se produto cartesiano da A por B o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (a_i, b_j), com a_i em A e b_j em B. O produto cartesiano AxB também é finito e tem $i.j$ elementos. Ou seja, $n(AxB) = n(A)\ x\ n(B)$**,** onde $n(A)$ é o números de elementos do conjunto A e $n(B)$ é o número de elementos do conjunto B. A notação para o produto cartesiano de A por B é AxB. Assim, $AxB = (a, b)/a \in A\ e\ b \in B\}$**.**

Lima *et al* (2006) afirmam que podemos pensar no produto cartesiano a partir de um quadro retangular. Logo para os conjuntos apresentados acima temos:

$(a_1, b_1)\ (a_1, b_2) \dots \left(a_1, b_j\right)$ (3)
...
$(a_2, b_1)\ (a_2, b_2) \dots \left(a_2, b_j\right)$
$(a_i, b_1)\ (a_i, b_2) \dots \left(a_i, b_j\right)$, com *i* linhas e *j* colunas.

2.5.2 A relação binária

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação binária de A em B é um subconjunto qualquer de *AxB.* A notação $a\mathcal{R}b$ indica que *(a,b)* $\in \mathcal{R}$ e que '*a* está relacionado com *b* por meio de $\mathcal{R}$**'.** (Lê-se "a erre b"). Indicaremos *A* como conjunto de partida e *B* como conjunto de chegada. Para indicar que um elemento *(a,b)* pertence à relação $\mathcal{R}$ usamos uma proposição demonstrada por *p(a,b).* A proposição *p(a,b)* é verdadeira quando o elemento *a* de *A* se relaciona como o elemento b de B por meio da relação $\mathcal{R}$, que indicamos por $a\mathcal{R}b$**.**

Vejamos o exemplo a seguir:

Sejam os conjuntos não vazios $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ e $\mathcal{R} \subset AxB$ tal que $\mathcal{R} = \{(a, b) \in AxB/\ a = b + 1\}$**,** logo, $R = \{(1,0), (3,2), (5,4), \dots\}$**.**

Várias são as situações em que relacionamos elementos de um mesmo conjunto ou de conjuntos distintos. Por exemplo, se *C={1, 2, 3, ..., 25}* indica o conjunto de alunos da turma de 5º ano da escola *E*, e *P={p, q, r}* é o conjunto de professores dessa turma na escola

E, então é possível estabelecer várias relações com os elementos desse conjunto *C* e do conjunto *P*.

Vejamos algumas dessas relações.

‘*1* é aluno de *p*’

‘*2* é colega de classe de *25*’

‘*q* é professor de *14*’

‘*r* trabalha na mesma escola que *p*’.

Outra forma é utilizando a linguagem matemática para expressar relações entre os elementos de dois conjuntos. Podemos apontar, por exemplo, $A=\{1, 3, 5, ...\}$ e $B=\{2, 4, 6, ...\}$, quando expressamos a de A e b de B da forma $a+b=15$, estamos indicando uma relação de A e B. A proposição é falsa quando o elemento a de A não se relaciona com o elemento b de B e sua notação é $a \not R b$.

A relação binária nos auxilia na compreensão de como se dá a contagem. Esta ocorre por meio de uma correspondência sucessiva. Numa coleção de coisas, cada unidade é associada a um número natural na sequência em que estão dispostos. Fazer corresponder é a base do processo de contagem. A lei da correspondência consiste em fazer a relação um a um entre dois entes, como por exemplo, uma coleção de *10* bolas representadas por b_1, b_2, b_3, ..., b_{10} e a sequência dos números naturais $1,2,...,10$. Na sequência, b_1 corresponde a *1*, b_2 corresponde a *2*, dessa forma, sucessivamente chegamos a b_{10} que corresponde ao número *10*. Em uma correspondência, o termo antecedente, primeiro termo da correspondência se relaciona com o termo consequente, segundo termo da correspondência. Segundo Caraça, (2010, p. 7) para que exista a correspondência é necessário que haja os termos antecedente e consequente e há uma lei que rege essa condição. A lei de correspondência é na verdade “[...] a maneira pela qual o pensar no antecedente, desperta o pensar no consequente”.

Essa correspondência representa uma relação do conjunto $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$ no conjunto $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, dada por $R = \{(b_i, i);\ b_i \in B\ e\ i \in A\}$. Observe que nesta relação cada elemento de B se relaciona com um único elemento de A e reciprocamente. Neste caso, a correspondência é chamada biunívoca.

Quando duas correspondências trocam os termos antecedente e consequente dizemos que elas são recíprocas. Sendo um consequente para um único antecedente, então a correspondência é unívoca, ou seja, um-a-um. No caso de um antecedente para vários consequentes então a correspondência é um-a-vários. A correspondência é considerada biunívoca quando ela e sua recíproca são unívocas. Sendo biunívoca também é equivalente, ou seja, a quantidade de elementos que compõe uma coleção de objetos é igual a quantidade de elementos que compõe a outra coleção de objetos (CARAÇA, 2010).

Quando o sujeito já domina a conservação de números, ao fazer uma correspondência um a um com duas coleções, percebe que as duas possuem a mesma quantidade. A capacidade lógica de reconhecer que as coleções têm a mesma quantidade de objetos é conhecimento lógico-matemático (KAMII, 2005).

Consideramos a prevalência como sendo a desigualdade na comparação da quantidade de objetos em duas coleções. Sejam duas coleções C_1 e C_2. Havendo uma correspondência entre elas, nas quais os termos antecendentes são de C_1 e os termos consequentes de C_2, podemos afirmar que o todo não é equivalente à parte, ou seja, o todo é prevalente à parte (CARAÇA, 2010).

2.5.3 A relação de equivalência

Uma relação de equivalência em A é uma relação binária de A em A que satisfaz as seguintes propriedades: (i) propriedade reflexiva: se $a \in A$, então $a\mathcal{R}a$; (ii) propriedade simétrica: se $a, b \in A$ e $a\mathcal{R}b$ então $b\mathcal{R}a$; (iii) propriedade transitiva: se $a, b, c \in A$ e $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$, então $a\mathcal{R}c$ (LIMA *et al*,2006).

Caso façamos a análise geométrica da infinitude podemos também afirmar que, pelo Princípio da Extensão, uma reta contém uma infinidade de pontos. Portanto a reta geométrica é um conjunto de infinitos pontos. Quando fazemos correspondências entre objetos e números, estamos realizando uma contagem. Logo é possível fazer correspondências com conjuntos infinitos, portanto também será possível estabelecer o conceito de equivalência para esses conjuntos.

Davis e Hersh (1985, p. 257) afirmam que a noção de conjuntos é tão trivial que é ensinada nas séries iniciais. Mas no final do século XIX, o matemático Georg Cantor (1845-1918) descobre toda a complexidade que há na Teoria dos Conjuntos.

> Cantor observou que, para conjuntos infinitos, faz sentido falar do número dos elementos do conjunto, ou pelo menos dizer que dois conjuntos diferentes possuem o mesmo número de elementos. Exatamente como no caso de conjuntos finitos, podemos dizer que dois conjuntos possuem o mesmo número de elementos - a mesma “cardinalidade” – se podemos associar um a um os elementos dos dois conjuntos. Se isso pode ser feito, dizemos que os dois conjuntos são equivalentes.

Uma das consequências da relação de equivalência de conjuntos infinitos é que, quando fazemos correspondência entre dois conjuntos infinitos nos quais, um é o todo e o outro é parte do todo, então esses conjuntos podem ser equivalentes. Como exemplo, temos o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares, sendo que o segundo conjunto é parte do primeiro e os dois são equivalentes. Isso gera um paradoxo nos conjuntos infinitos, o qual diz que um conjunto infinito pode ser equivalente a um subconjunto próprio, ao mesmo tempo em que mostra a máxima da equivalência entre conjuntos infinitos: "Em verdade, demonstra-se facilmente que um conjunto é infinito se, e somente se, ele é equivalente a algum subconjunto dele próprio" (DAVIS; HERSH, 1985, p. 257).

Existem dois tipos de conjuntos infinitos. O tipo enumerável como é o caso dos números naturais e o tipo contínuo, cujo exemplo é a reta. É possível fazer uma correspondência entre esses dois tipos de infinitos? A resposta é sim. A Teoria dos Conjuntos desenvolvida principalmente pelo matemático Georg Cantor (1845-1918) reza que um conjunto infinito do tipo enumerável pode estabelecer correspondência com um conjunto do tipo contínuo.

Cantor também estabeleceu que conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades não podem se relacionar a partir de uma correspondência biunívoca, como é o caso dos naturais com os reais ou dos números naturais com todos os pontos de um segmento de reta. (LIMA *et al*, 2006).

Davis e Hersh (1985, p. 258) apontam que a alguns conjuntos, mesmo sendo infinitos, não possuem a mesma cardinalidade. Como é o caso do conjunto dos números naturais e do conjunto dos pontos de uma reta

> A noção de cardinalidade de conjuntos infinitos seria interessante somente se pudesse ser mostrado que nem todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade. Essa foi a grande descoberta de Cantor em teoria dos conjuntos. Por meio de sua famosa demonstração em diagonal, ele mostrou que o conjunto dos números naturais 'não' é equivalente ao conjunto dos pontos sobre um segmento de reta.

Entendemos que a relação de equivalência de dois conjuntos parte do princípio de correspondência entre os elementos, mesmo que dois conjuntos numeráveis ou dois conjuntos contínuos, eles devem possuir a mesma cardinalidade. Portanto relacionar dois conjuntos, fazendo correspondência entre seus elementos, significa que estamos realizando uma contagem.

2.5.4 Considerações sobre o axioma de Giuseppe Peano

Ao desenvolvimento humano ao longo da história, foi atrelado o desenvolvimento da contagem e posteriormente, o número natural. Embora a construção do conceito de número tenha sido um processo demorado, vemos que os sistemas de numeração desenvolvidos por algumas civilizações eram formas de aperfeiçoamento dos números naturais e, que iam se desenvolvendo cada vez mais ao longo do tempo. Graças ao matemático italiano Giuseppe Peano no início do século XX, hoje temos uma representação e uma definição concisa do conjunto dos números naturais.

A Teoria dos Conjuntos formaliza toda a estrutura dos números. Segundo Davis e Hersh (1985, p. 732, 73), qualquer texto matemático pode ser escrito numa linguagem da Teoria dos Conjuntos a partir de um processo de formalização.

> A teoria dos conjuntos foi desenvolvida por Cantor como um ramo novo e fundamental da matemática por seu direito. Parecia que a idéia de um conjunto – uma coleção arbitrária de objetos disjuntos – era tão simples e fundamental que poderia ser o tijolo com o qual poderia ser construída toda a matemática. Até a aritmética podia ser reduzida (ou elevada) de uma estrutura fundamental a uma secundária, pois Frege mostra que os números naturais podiam ser construídos do nada – isto é, do conjunto vazio – usando-se as operações da teoria dos conjuntos.

Quando nos referimos ao campo numérico dos naturais, geralmente a primeira ideia que nos vem à mente é a de uma sequência numérica e, de que cada elemento dessa sequência, vai surgindo, somando sempre uma unidade ao elemento anterior. Mas como exatamente se constitui teoricamente o número natural? De acordo com Davis e Hersh (1985, p. 379), na visão construtivista de, Brouwer, originador da corrente intuicionista, acreditava que a matemática deve surgir de algo intuitivo, neste caso, o finito. E a partir dele considerar apenas como matemática o que pode ser construído. “A intuição aqui significa a instrução de *contar*, e nada mais”.

Segundo Lima *et al* (2006), na ideia de sucessão, intuitivamente, quando afirmamos que n é um número natural, ou seja, $n \in \mathbb{N}$ e n' também é um número natural sucessor de n, isto quer dizer que n' vem depois de n e não há outro número natural entre n e n'. Os axiomas da indução de Peano estabelecem as seguintes proposições em relação ao conjunto dos números naturais:

a) um número natural n tem um único sucessor;

b) números naturais distintos têm sempre sucessores distintos;

c) o número natural 1 não é sucessor de nenhum outro número natural;

d) caso $\mathbb{N}$ tenha um subconjunto A, ou seja, $A \subset \mathbb{N}$ e se o elemento 1 pertence a A e todo e qualquer sucessor de 1 pertence a A, então $A = \mathbb{N}$. Este axioma é denominado axioma da indução.

O axioma da indução é considerado o último axioma de Peano. A partir dele é possível demonstrar algumas proposições que se referem aos naturais. Pela descrição de Lima *et al* (2006, p. 37) temos que,

> Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que $i)$ $P(1)$ é válida. $ii)$ Para todo n $\in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n. Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n. Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que 1 $\in$ X em virtude de $i)$ e que n e $X \Rightarrow n' \in X$ em virtude de $ii)$. Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

Todo conhecimento acerca dos números naturais é consequência desses axiomas. No que se refere à sucessão, podemos nomear os sucessores dos primeiros números naturais, mas não é possível fazer a nomeação de sucessores para todos os números. “A partir de um certo ponto, esses nomes tornam-se muito complicados, sendo preferível abrir mão deles e designar os grandes números por sua representação decimal” (LIMA *et al*, 2006, p. 35).

Confirmando a teoria na prática, Ramos (2009, p. 30) analisando as primeiras noções sobre os números naturais e sua aprendizagem faz a seguinte observação:

> A aquisição do conceito de quantidades contáveis é progressiva e hierárquica. Primeiro a criança percebe a ideia de “1”. Depois, acrescenta outro “1”, assim, a ideia de “2” é composta por “1 mais 1”. A ideia de “3” é construída pela ideia de “2 mais 1”. A ideia de “4” é construída pela ideia de “3 mais 1”, e assim

> sucessivamente. A aquisição da ideia de quantidades não dá saltos, respeita um ritmo interno.

A partir da visão intuicionista, assim como ocorreu no passado, também ocorre nos dias atuais, pela teoria, o conceito de número natural se dá intuitivamente e, o indivíduo, assimila a ideia de um, depois de dois, em seguida de três e assim sucessivamente, pela ideia da indução.

2.5.5 O zero é ou não natural?

Aragão (2009) menciona o ano de 3000 a. C. para as primeiras aparições do zero no vale do Indo. Na mesma época, os egípcios usavam o olho de Hórus, um sistema de representação de frações que oscilavam entre zero e um. Em relação à escrita cuneiforme do sistema de numeração babilônico, embora fosse posicional, não continha o zero. Por volta do ano 1000 a. C. os olmecas, povos que antecederam os maias, também criaram um sistema de numeração posicional e, neste, já continha o zero (D’AMBROSIO, 1998).

Na Grécia em 500 a. C., Platão argumentava pelo Paradoxo do Julgamento que uma grandeza nula não poderia existir indo contra qualquer tipo de significado para o zero. No ano de 400 a. C. os chineses já deixavam um espaço vazio em seus ábacos representando o nada. Porém o documento mais antigo que registra a utilização do zero data de 350 a. C. e foram os maias os primeiros a fazer esse registro (BOYER, 1974).

> Deve-se lembrar que o símbolo 0 (sob diferentes formas gráficas) foi empregado inicialmente pelos maias, posteriormente pelos hindus, difundidos pelos árabes e adotado no ocidente, não com um número e sim como um algarismo, com o utilíssimo objetivo de preencher uma casa decimal vazia. (LIMA *et al*, 2006, p. 36).

Em sânscrito, antiga língua dos indianos, *sunya* significa vazio. Este termo foi identificado em um livro em 200 a. C., indicando uma casa decimal nula. Em 300 d. C., o vazio passou a ser substituído por um ponto, o *pujyam*. Em 500 d. C. já se podia observar um pequeno círculo sendo utilizado na representação do zero pelos hindus. Brahmagupta, que viveu na Índia Central por volta do ano 628 d. C., “[...] considerava o zero um número e estabeleceu as primeiras regras para o cálculo com o uso do zero, em multiplicações, adições e subtrações" (ARAGÃO, 2009, p. 54).

Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 80) referem-se ao zero como o 'nada' que passa a ser número e enfatiza que os hindus tinham começado "[...] a reconhecer *sunya* a ausência de quantidade, como uma quantidade de direito próprio! Isto é, tinham começado a tratar o zero como um número".

Segundo Caraça (2010, p. 06) o homem moderno, mesmo com pouco conhecimento matemático escreveria o zero na sequência dos naturais, caso lhe fosse pedido, mas aos primitivos[1] de agora ou de antes não se deve considerar o zero como um número natural e afirma: "não chamaremos ao zero um número natural".

Lima *et al* (2006, p. 36) afirma que não é tão relevante assim considerar o zero natural ou não. "Não se deve dar muita importância à eterna questão de saber se 0 (zero) deve ou não ser incluído entre os números naturais". Por outro lado e pela afirmação acima, é uma eterna questão e, pelo que observamos, não concluída. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 80) para se trabalhar com o zero é preciso considerá-lo um número.

> Para calcular com zero é preciso reconhecê-lo como *alguma coisa*, uma abstração com *um, dois, três* etc. Ou seja, é preciso passar de contar uma cabra, ou duas vacas, ou três carneiros para pensar em 1, 2 e 3 por eles mesmos, como coisas que podem ser manipuladas sem pensar em quais espécies de objetos estão sendo contados. Então você tem que dar mais um passo, pensar em 1, 2, 3... como ideias que existem *mesmo que não estejam contando nada.* Então, e só então, faz sentido tratar o 0 como um número.

Nessa linha de raciocínio, Lima *et al* (2006, p. 35), têm a mesma concepção e apontam o zero incluído na sequência de símbolos (os algarismos) quando se referem ao sistema de numeração como uma engenharia fantástica, porém, se a questão envolve os elementos do conjunto dos números naturais, fazem a seguinte afirmação:

> Deve ficar claro que o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais é uma sequência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significados. Cada um desses objetos (um número natural) possui apenas um lugar determinado nesta sequência. Nenhuma outra propriedade lhe serve de definição. Todo número tem um sucessor (único) e, com exceção de 1, tem também um único antecessor (número do qual é sucessor).

[1] Caraça (2010) utiliza esse termo para se referir ao homem que não domina o conhecimento matemático.

Portanto, considerando o campo dos naturais, não se pode abstrair o zero, de uma forma inicialmente sem sentido ou significado. Daí entendê-lo como um elemento pertencente ao conjunto $\mathbb{N}$, a partir das considerações feitas até aqui, não é passível de entendimento.

3 NÚMEROS NATURAIS: OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS E PROPRIEDADES

Neste capítulo tratamos das operações fundamentais e de suas propriedades. Consideramos a teoria dos números como base desse capítulo relacionando-a com a visão didática do uso das operações.

3.1 Operações fundamentais: operações diretas e inversas

As operações adição, subtração, multiplicação e divisão são consideradas operações fundamentais da aritmética. As operações inversas passam a ser consideradas, quando na adição ou na multiplicação da seguinte forma: tem-se o resultado e um dos termos é dado e o outro termo é pedido. Esta situação requer a inversão das operações citadas acima e, para cada operação nova que resolve o problema, chamamos de operação inversa. Segundo Ramos (2009, p. 62-63),

> Operar matematicamente é realizar uma transformação reversível. Reversibilidade é a capacidade de ir e vir do pensamento, ou seja, partir de uma ação realizada e ser capaz de refazer os passos de volta ao início, desfazendo a ação... A operação matemática é uma ação transformadora que pode ser desfeita.

Caraça (2010) classifica as operações adição, subtração como operações de 1º grau e a multiplicação e divisão em operações de 2º grau. Kline (1976) aponta a abordagem aritmética com o reconhecimento da sequência de números $0, 1, 2, \ldots$ usados para contagem. No caso das operações, suas propriedades ganham relevância a partir do simbolismo.

> [...] sem ação não acontece uma transformação; e, da mesma forma, sem ação não ocorre operação. Compreender e construir os conceitos das operações matemáticas é perceber as diferentes ações envolvidas e brincar com elas, vivenciá-las. A compreensão desses conceitos ocorre pela experiência das diferentes ações, levando-se em consideração os níveis progressivos de desenvolvimento (RAMOS, 2009, p. 67).

3.2 Adição e subtração

3.2.1 A operação adição

Embora a adição seja a operação mais simples, todas as outras operações dependem dela. A noção de número natural inclui a ideia de juntar e de somar. Sobre essa concepção, Caraça (2010, p. 16) faz a seguinte consideração: “A ideia de *adicionar* ou *somar* está já incluída na própria noção de número natural – o que é a operação elementar de passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar uma unidade a um número?”.

Para enfatizar a ideia de sucessor, Lima *et al* (2006, p. 38) afirmam que: “A soma $n + p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidos a operação de tomar o sucessor. Em particular, $n + 1$ é o sucessor de n , $n + 2$ é o sucessor de $n + 1$, etc”.

Utilizando o axioma da indução podemos definir a soma $a + b$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, este garante a soma de b a todo número a, então é possível somar $b + 1$ ao natural a. Dessa adição obtemos $a + b + 1 = (a + b) + 1$ que é o sucessor de $a + b$ (LIMA *et al*, 2006).

Os termos da adição têm nomes. O termo a é chamado de adicionando e assume um papel mais passivo na operação, enquanto que o termo b é chamado de adicionador e tem um caráter mais ativo. Quando nos referimos aos dois termos da adição em conjunto, estes recebem o nome de parcelas (CARAÇA, 2010).

Na adição $a + b = c$, ao par de números naturais (a, b), associamos o número natural c. Usando símbolos temos a seguinte associação: $(a, b) \rightarrow a + b = c$. (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1996).

No que se refere ao ensino da adição, Giovanni Júnior e Castrucci (2009) exploram as ideias da adição como junção de quantidades ou acréscimo de uma quantidade a outra. Dante (2009) trabalha de forma intuitiva as ideias associadas à adição. A primeira ideia que explora também está associada à junção de quantidades e, a segunda está relacionada a acrescer uma quantidade a outra já existente. Iezzi, Dolce e Machado (2009) definem adição como sendo o ato de adicionar relacionado à ideia de somar, de juntar, de ajuntar e de acrescentar.

Ramos (2009, p. 69) afirma que, quando trabalhamos com a ação de acrescentar aparecem três momentos: um momento inicial, o momento de transformação e o momento final e que esta ação é diferente da ação de reunir, embora as duas ações estejam relacionadas com a operação adição.

> Nas ações de acrescentar o verbo declara a ação. Situações de acrescentar são claras e mais elementares. Nas situações que envolvem a ação de reunir... o verbo não é explícito; na quantidade final ocorre a inclusão de classes. Na ação de reunir, a situação é encarada do ponto de vista de quem está considerando a questão.

Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 53) abordam a definição de adição a partir das operações entre conjuntos e utilizam o conectivo ‘ou’ para a ideia de união ou reunião. Considerando a adição entre os conjuntos não vazios A e B como sendo a união desses conjuntos afirma: “O conectivo ou significa que, se um elemento x pertence ($\in$) a pelo menos um dos conjuntos (A ou B), então esse elemento x pertence ($\in$) ao conjunto $A \cup B$”.

Devemos atentar para o fato de que a “soma de números naturais corresponde à reunião de conjuntos somente quando os conjuntos considerados não têm elementos comuns.” (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1996, p. 63).

A consideração feita pelos autores acima sobre a exploração da adição na Teoria dos Conjuntos, confirma a ideia estabelecida por Lima *et al* (2006) quando afirmam que toda a matemática nos dias de hoje está toda fundamentada na Teoria dos Conjuntos.

3.2.2 As propriedades da adição

Caraça (2010) classifica as propriedades das operações fundamentais em dois grupos: 1º grupo e 2º grupo. As propriedades do 1º grupo indicam a forma como os resultados mudam quando os dados também mudam. As propriedades do 2º grupo são denominadas propriedades formais pelo fato de ter várias formas diferentes de combinar os dados sem que os resultados sejam alterados. As propriedades formais tanto no cálculo aritmético quanto no cálculo geométrico têm aplicação. Portanto quem domina as propriedades formais, domina também as operações e o cálculo algébrico. As propriedades formais são elementos do conjunto de leis das operações do cálculo. As leis operatórias do cálculo constituem-se das propriedades formais das operações fundamentais. Caraça (2010) apresenta as propriedades das operações fundamentais ensinadas ainda no ensino tradicional, ou seja, antes do Movimento da Matemática Moderna. Kline (1976, p. 44) mostra claramente que sua relevância foi mantida nos compêndios da Matemática Moderna para o ensino da disciplina. "Empregam-se essas propriedades para justificar passos na aritmética". Podemos então afirmar baseado nesses dois autores que as propriedades das operações fundamentais prevaleceram às mudanças do ensino de matemática desde as décadas de 1930 até os dias de hoje.

1º grupo

- Unicidade

A propriedade da unicidade é apresentada por Caraça (2010) e afirma que se $a = a'$ e $b = b'$, então $a + b = a' + b'$, para $a, a', b,$ e b' naturais.

- Monotônica

Esta propriedade está ligada às relações de ordem dos números naturais e expressa sua compatibilidade com a operação adição desse campo numérico. Daí tem que, se $b > b'$ então $a + b > a + b'$ (FERREIRA, 2011; MILIES; COELHO, 2006).

- Modular

Com a propriedade modular verificamos a existência do elemento neutro da adição. Caso exista um número natural b tal que $a + b = a$ (ou $b + a = a$), para a também natural, então $b = 0$. Logo, concluímos que *zero* é o único neutro aditivo ou elemento neutro ou zero para a adição, ou seja, $a + 0 = 0$ (CONTADOR, 2007; MILIES; COELHO, 2006).

- Redução

Esta propriedade também é conhecida como cancelativa da adição ou lei do cancelamento da adição. Apresenta-se da seguinte forma axiomática. Sejam os naturais a, b e c tais que, se $a + c = b + c$ então $a = b$ (CONTADOR, 2007).

2º grupo

- Comutativa

A comutativa da adição reza que para todo e qualquer par a e b naturais, temos $a + b = b + a$. Dante (2009) de uma forma didática explica que comutar significa permutar ou trocar. No caso da adição é a ordem das parcelas que é trocada, porém a soma não se altera, confirmando o que afirmam Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 12): “A ordem das parcelas não altera a soma.”. Segundo Kline (1976): “Quer isto dizer, podemos comutar ou inverter a ordem na qual somamos os dois números”. Segundo Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996) toda adição de números naturais é comutativa, o que não ocorre com sua inversa, a subtração de números naturais.

- Associativa

A associativa da adição nos dá a interpretação da soma com mais de duas parcelas. De acordo com Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996) em uma adição com três parcelas ou mais, as parcelas podem ser associadas de diferentes maneiras, sem alterar a soma. Por exemplo, para qualquer terna de números naturais a, b, c temos $a + (b + c) = (a + b) + c$**,** mas esta estrutura da adição pode ser feita para qualquer soma de k parcelas. Segundo Ferreira (2011, p. 29)

> [...] a *lei associativa generalizada da adição,* segundo a qual, para $m_1, m_2, \dots, m_k$ naturais, a expressão $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ pode ser interpretada como sucessivas adições com os parênteses em qualquer posição, pois seu valor é independente dessas posições.

Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 12) mostram a finalidade da propriedade associativa da adição em $\mathbb{N}$: “Quando precisamos somar três ou mais parcelas podemos escolher duas quaisquer para somar primeiro. Ao resultado somamos outra parcela, e assim por diante”. Essa afirmação mostra claramente o caráter formal dessa propriedade, na qual os dados são passíveis de combinação e os resultados não são alterados.

3.2.3 A operação subtração

A inversa da adição é a operação chamada subtração. Na adição, quando se tem a soma e uma das parcelas utiliza-se a inversão para determinar a outra parcela. De acordo com Caraça (2010, p. 20): "Deveria haver duas operações inversas, conforme se pedisse o *adicionando* ou o *adicionador*, mas, em *virtude da propriedade comutativa* da adição, os papéis das duas parcelas podem trocar-se, e as duas inversas fundem-se numa só, que se chama *subtracção*".

Pela ideia de operação inversa, podemos definir a subtração como sendo a operação utilizada para determinar o número c, que somado com o número b tem como resultado o número a. $a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$, isto é, a forma como Caraça (2010) apresenta a relação entre a adição e a subtração é confirmada por Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 68) quando declaram que a "[...] toda subtração de números naturais corresponde uma adição de números naturais".

O termo a é denominado de diminuendo ou aditivo e b é o diminuidor ou subtrativo. O termo c é chamado de resto, excesso ou diferença da subtração. Para que $a - b$ seja um número natural é necessário que *a* seja maior ou igual a *b*. Ou seja, o diminuendo não pode ser menor que o subtraendo (CARAÇA, 2010).

Referindo-nos à correspondência que há entre a adição e a subtração, Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p. 44), nos mostram a subtração como inversa da adição pela relação fundamental da subtração, "$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{diferença} \Leftrightarrow \text{subtraendo} + \text{diferença} = \text{minuendo}$".

Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996) utilizam a diferença de conjuntos para definir a subtração. Essa é possível, quando o segundo conjunto tem todos os seus elementos pertencentes ao primeiro, para fazer uma correspondência com a subtração. Considerando dois conjuntos não vazios A e B, dizemos que o conjunto $A - B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ($\in$) a A e que não pertencem ($\notin$) a B.

Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 15) atribuem a ideia de tirar ou diminuir à operação subtração. E ao se referir aos termos da subtração, afirma que: "A diferença é o número que devemos somar ao subtraendo para obter o minuendo".

Na subtração $a - b = c$, ao par de números (a, b), onde $a \geq b$, associamos o número natural c. Usando símbolos temos a seguinte associação: $(a, b) \rightarrow a - b = c$ (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1996).

Giovanni Júnior e Castrucci (2009) abordam algumas ideias ligadas à subtração como a necessidade de retirar uma quantidade de outra. Quando queremos saber quanto uma quantidade tem a mais ou a menos que outra ou quando, dadas duas quantidades desiguais, quanto falta em uma para atingir a outra. De acordo com Iezzi, Dolce e Machado (2009), a subtração pode ser utilizada para o cálculo de quanto sobra, quanto falta, quanto uma determinada quantidade pode ser retirada de outra, quanto uma quantidade tem a mais que outra. Dante (2009) utiliza três ideias associadas à subtração: a primeira está relacionada com tirar uma quantidade de outra quantidade, a segunda, com a ideia de complementação de quantidades, e a terceira, com a comparação de quantidades.

Nunes *et al* (2009, p. 38) nos fazem compreender que a adição e a subtração estão inseridas em um processo de alteração de quantidades, e que o indivíduo percebe essas operações a partir da análise da retirada ou do acréscimo de quantidades, independente da forma em que estão dispostas. Adição e subtração fazem parte de uma mesma estrutura de raciocínio, o raciocínio aditivo. Esse raciocínio aditivo está presente em problemas de maior complexidade cuja resolução está além da aplicação direta das ações, como no caso dos problemas inversos. Essa afirmação mostra a estreita relação entre a adição e a subtração. “Num ensino voltado para a compreensão dos conceitos, seria importante que os alunos compreendessem a relação inversa que existe entre a adição e a subtração”.

3.2.4 As propriedades da subtração

1º grupo

- Unicidade

A unicidade apontada por Caraça (2010) na subtração em $\mathbb{N}$ mostra que se $a = a'$e $b = b'$ então $a - b = a' - b' = 0$.

- Monotônica

Sejam a e b dois números naturais tais que $a > b$. Se $a > a'$, então $a - b > a' - b$ e pode ocorrer também que, se $b > b'$, então $a - b > a - b'$ (CARAÇA, 2010; CONTADOR, 2007).

- Modular

Na propriedade modular da subtração temos a seguinte sentença: se $a - b = a$, então $b = 0$ (CARAÇA, 2010; CONTADOR, 2007).

2º grupo

No segundo grupo das propriedades da subtração, apenas a associativa é citada. Na associação da subtração há a adição (CONTADOR, 2007).

Segundo Caraça (2010), para a, b e c naturais, tais que $a > b > c$, temos:

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$
$$a - (b + c) = (a - b) + c$$
$$a - (b - c) = (a + c) - b$$
$$(a + c) - (b + c) = a - b$$
$$(a - c) - (b - c) = a - b$$

Embora a associativa da subtração seja válida para $a > b > c$, os livros didáticos não exploram tampouco são trabalhadas em sala de aula com propriedade.

3.3 Multiplicação e divisão

3.3.1 A operação multiplicação

É definida como soma de parcelas iguais. Quando fazemos $a.b$ ou axb, (lê-se: a vezes b) temos $a + a + a + \ldots + a$, b vezes. Nessa operação damos ao número a o nome de multiplicando, que é a parcela que se repete, e $b > 1$, o multiplicador, ou seja, o número de vezes que a parcela é somada com ela mesma. Os dois termos em conjunto chamamos de fatores. A ideia de que a multiplicação é a adição de parcelas iguais é apresentada por Dante (2009). Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 28) afirmam que "*Multiplicar* significa adicionar quantidades iguais.". Na multiplicação, o termo que tem o papel de caráter passivo é o multiplicando e o multiplicador tem uma função mais ativa. (CARAÇA, 2010).

Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 78) apresentam a multiplicação inicialmente a partir da ideia de produto cartesiano. Nesta operação "a todo par de números naturais (a, b) podemos associar um número natural c que representa o produto axb, através da operação de multiplicação. $(a, b) \rightarrow c = axb$ ou $c = a.b$".

Outras ideias associadas à multiplicação são: a disposição retangular para contar elementos; números de possibilidades ou combinações; a proporcionalidade (DANTE, 2009; GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009).

3.3.2 As propriedades da multiplicação

1º grupo

- Unicidade

Segundo Contador (2007) se $a = a'$ e $b = b'$, então $a.b = a'.b'$, para a, a', b e b' naturais.

- Monotônica

Assim como a monotônica da adição, a monotônica da multiplicação também está atrelada às relações de ordem dos números naturais. Sejam os números naturais a e b tais que, se $a \neq 0$ e $b > b'$, então $a.b > a.b'$ (CONTADOR, 2007).

- Anulamento

Esta propriedade reza que para todo número natural a, existe $a.0 = 0$. Caraça (2010, p.18) afirma que “se o produto é nulo, deve anular-se, pelo menos, um dos fatores.”.

Dante (2009, p. 50) denomina essa propriedade de “propriedade do elemento nulo... pois em toda multiplicação que tem o zero como um dos fatores o produto é zero”.

- Modular

A propriedade modular trata da existência do elemento neutro multiplicativo, a qual diz que para todo número natural a existe um único elemento diferente de zero indicado como elemento neutro da multiplicação e que é 1. Para $a.1 = a,\ a \neq 0$, se $a.b = a$, então $b = 1$. (MILIES; COELHO, 2006).

De acordo com Geovanni Júnior e Castrucci (2009, p. 58): “Em uma multiplicação de um número natural qualquer por 1, o produto é sempre igual a esse número natural. Nessas condições, o número 1 é chamado elemento neutro da multiplicação”. Iezzi, Dolce e Machado (2009) indicam que, nessa operação, fatores iguais a 1 podem ser suprimidos.

- Redução

A propriedade da redução diz que para toda terna de números naturais a, b, c, com $c \neq 0$, temos que se $a.c = b.c$, então $a = b$. Essa propriedade também é conhecida como lei do cancelamento multiplicativo (CONTADOR, 2007).

2º grupo

- Comutativa

A propriedade comutativa permite observar que, para todo par de números a e b**,** tem-se $a.b = b.a$. Dante (2009) associa a comutatividade à ideia da disposição retangular para efetuar uma multiplicação. Como afirmam Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p. 57): “Em uma multiplicação de dois números naturais quaisquer, a ordem dos fatores não altera o produto”.

A ideia apresentada acima é confirmada por Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 32): “Você pode usar essa propriedade para conferir uma multiplicação. Trocando a ordem e refazendo a conta, deve obter o mesmo resultado. De acordo com a propriedade, você pode efetuar uma multiplicação colocando os fatores na ordem que preferir.”.

Kline (1976, p. 62) observa que, mesmo as propriedades que servem para justificar as operações, precisam ser compreendidas pelo aluno e não apenas ser repassadas como um simples processo mecânico.

> De fato se um estudante é realmente brilhante e lhe dizem que cite a propriedade comutativa para justificar, digamos, $3x4 = 4x3$, ele poderá muito bem perguntar: Por que a propriedade comutativa está certa? A resposta verdadeira é, naturalmente, a de que aceitamos a propriedade comutativa, porque nossa experiência com grupos de objetos nos diz que $3x4 = 4x3$. Em outras palavras, a propriedade comutativa está certa porque $4x3 = 3x4$ e não o contrário. O estudante normal repetirá como papagaio as palavras propriedade comutativa e, como Pascal apresentou em uma de suas *Cartas Provinciais*, “fixará esse termo na memória porque ele nada significa para sua inteligência”.

Nesse momento, consideramos a matemática consciente apresentada por Davis e Hersh (1985, p. 339-340), na qual o ser humano é o grande detentor desse conhecimento, sobrando para alguns animais com um instinto superior, um pouco dela.

> A matemática consciente é o que geralmente consideramos matemática. É adquirir em grande parte por treinamento especial. Parece ser feita no cérebro. Tem-se uma percepção especial de que está sendo feita ou não. Está frequentemente ligada a uma linguagem simbólica e abstrata. É frequentemente auxiliada por papel e lápis, instrumentos matemáticos e livros de referência.

É nessa matemática consciente que estão as propriedades. Mas chama-nos atenção o fato de que, com elas, as propriedades formais, o sujeito trabalha as operações elementares de uma maneira tão habitual que não é necessário pensar sobre tais propriedades. “Se o estudante não perceber prontamente que $3xa = ax3$, não é porque lhe falte conhecimento sobre o princípio comutativo, e sim porque deixa de compreender que a é apenas um número” (Kline, 1976, p. 66).

- Associativa

A associatividade da multiplicação mostra que, para todos os números naturais a, b, c, tem-se $a.(b.c) = (a.b).c$ (FERREIRA, 2011).

Para Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 101): “Na multiplicação de três ou mais números naturais, a ordem de associação dos fatores não modifica o produto. Esta é a propriedade associativa da multiplicação”.

- Distributiva

Para trabalharmos a distributividade da multiplicação é necessária uma terna de números naturais a, b, c tais que $a.(b \pm c) = a.b \pm a.c$ (CONTADOR, 2007; FERREIRA, 2011).

Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 102-103) exploram a distributiva da multiplicação em relação à adição e em relação à subtração.

> O produto de um número natural qualquer por uma adição indicada de duas ou mais parcelas pode ser obtido multiplicando-se esse número por cada uma das parcelas e, em seguida, adicionando-se esses produtos... O produto de um número natural qualquer por uma subtração indicada pode ser obtido multiplicando-se esse número pelo minuendo e pelo subtraendo e, em seguida, subtraindo-se estes produtos.

Chama-nos a atenção o fato de que Giovanni Júnior e Castrucci (2009) mostram diretamente apenas a distributiva da multiplicação em relação à adição. A distributiva da multiplicação em relação à subtração é apenas citada como indicação de propriedade caso seja necessária sua utilização. Dante (2009) e Iezzi, Dolce e Machado (2009) não fazem nenhuma citação à distributividade na multiplicação de números naturais, o que nos faz questionar por que alguns livros didáticos atuais não dão relevância à distributiva da multiplicação se é uma propriedade formal, ou seja, auxilia no desenvolvimento da operação.

3.3.3 A operação divisão

A inversa da multiplicação é a operação chamada divisão. Na multiplicação, quando se tem o produto e um dos fatores utiliza-se a inversão para determinar o outro fator. Devido à propriedade comutativa da multiplicação as duas inversas que deveriam existir, se unem em uma única operação, a divisão. Pela definição de operação inversa de acordo com Caraça (2010), podemos escrever $a:b = c,$ onde b deve ser diferente de zero. Para que a operação ocorra nos números naturais é necessário que a seja múltiplo de b.

Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 39) afirmam que: "*Dividir* é repartir em quantidades iguais". Essa definição também é mostrada por Giovanni Júnior e Castrucci (2009) quando apresentam duas ideias ligadas à divisão nos naturais: a primeira é com relação à divisão de quantidades em partes iguais (partilha), e a segunda é saber quantas vezes determinada quantidade cabe em outra (medida).

Segundo Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 84) a divisão nos naturais pode ser exata (quando as quantidades são divididas igualmente) e não exata (neste caso, as quantidades não podem ser repartidas igualmente). Na divisão exata, o número natural c está associado ao par (a, b). Assim temos $(a, b) \rightarrow c = a:b$. Para a não exata vale a seguinte afirmação: "Na divisão não exata, aos números naturais a e b, denominados, respectivamente, dividendo e divisor, sendo $a > b$ e $b \neq 0$, associamos o número natural c, denominado quociente da divisão, tal que $a = b.c + d$, sendo d denominado resto da divisão e $d < b$". A diferença conceitual entre a divisão exata e a não exata é mostrada por Dante (2009, p. 57) quando afirma que na primeira, o resto é igual a zero, na segunda "é diferente de 0".

3.3.5 As propriedades da divisão

1º grupo

- Unicidade

Para os naturais a, a', b e b' temos que se $a > a'$ e $b > b'$, então $a: b = a': b'$ (CARAÇA, 2010).

- Monotônica

Segundo Caraça (2010) na propriedade monotônica temos que se $a > a'$, então $a: b > a': b$. E tem mais, se $b > b'$, então $a: b < a: b'$.

- Modular

Seja o número natural $a,$ então $a: 1 = a$ (CONTADOR, 2007).

2º grupo

- Distributiva

No segundo grupo das propriedades da divisão, apenas a distributiva é citada (CONTADOR, 2007).

Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 103), diferenciam a divisão em relação à adição ou à subtração.

> Quando a divisão exata está à direita de uma adição ou de uma subtração de números naturais ela é distributiva. Se a, b e c são números naturais e c é diferente de zero, então $(a + b): c = a: c + b: c\ e\ (a - b): c = a: c - b: c$. Quando a divisão exata está à esquerda de uma adição ou de uma subtração de números naturais ela não é distributiva. Se a, b e c são números naturais diferentes de zero, então $a: (b + c) \neq a: b + a: c$ e $a: (b - c) \neq a: b - a: c$. (p. 103).

Caraça (2010) aponta outras maneiras de trabalhar distributiva da operação divisão. Dados a, b, c e d números naturais, temos:

$$(a: b). c = a: (b: c) = (c: b). a$$
$$(a: b): c = a: (b. c) = (a: c): b$$
$$(a: b) = (a. c): (b. c)$$
$$(a: b) = (a: c): (b: c)$$
$$(a. c): (b. d) = (a: b). (c: d)$$

A divisão de números naturais não é comutativa, não é associativa e não possui elemento neutro (LIMA; SIANI FILHO; COUTO FILHO, 1996).

3.4 Analisando o ensino de número natural e as operações fundamentais

As reformas curriculares no Brasil sempre tiveram como base a melhoria da qualidade do ensino. Com o ensino da matemática não foi diferente. Na década de 1920, já existia o desejo de reformulação do currículo de matemática. Mas os movimentos que surgiram para esse objetivo não conseguiram modificar a prática dos professores e nem acabar com o elitismo que caracterizava o ensino dessa ciência (BRASIL, 1998).

Quando nos reportamos para a década de 1950, percebemos que a ideia do ensino da aritmética no Brasil propõe que "[...] conhecer números é saber contar e escrever números e a aprendizagem das operações está baseada na memorização dos 'fatos'" (NUNES *et al,* 2009, p. 35).

A metodologia trabalhada até o início da década de 1950 tinha fundamentalmente duas ideias: a percepção e a memória como fatores principais da aprendizagem, não importando a compreensão. No que se referia às operações, as técnicas e a memorização eram enfatizadas em detrimento do conceito de operações e de suas propriedades. Outra questão a ser considerada é que uma operação era trabalhada sem nenhuma conexão com a sua inversa. Nessa época, ainda prevalecia o conteúdo de matemática utilizado desde o período imperialista. O conceito de número estava ligado à contagem e à escrita, e o conceito de operações, à memorização e às técnicas. O método tradicional de ensino estava direcionado para um único modelo de aprendizagem, que era a memorização. E como uma falha grave apontada no ensino de matemática, faltava a motivação para aprender. O aluno não se sentia atraído pela matemática (Kline, 1976).

Na década de 1960, surge no Brasil o Movimento da Matemática Moderna, movimento este, já conhecido nos EUA e em alguns países da Europa. Seu objetivo era reformular o ensino de matemática a partir de uma visão mais científica, pois a ideia era atender a uma política de modernização da economia. Tinha como pressuposto fundamentar o ensino de matemática "[...] em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc." (BRASIL, 1998, p. 19).

A ideia era discutir de forma ampla as reformas no currículo de matemática. Mas as propostas apresentadas estavam muito além do alcance dos alunos, principalmente dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental. O ensino exagerado de simbolismo distanciava cada vez mais a matemática escolar da realidade do aluno, fazendo com que a aprendizagem do cálculo aritmético, por exemplo, ficasse comprometida.

> No Brasil, o movimento da Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos, teve grande influência, durante longo período, só vindo a refluir a partir da constatação de inadequação de alguns de seus princípios básicos e das distorções e dos exageros ocorridos (BRASIL, 1998, p. 20).

Já na década de 1970, novas concepções a respeito do conceito de número e do sistema de numeração começam a surgir. Mas, as operações continuam sendo trabalhadas sem conexão com suas inversas. A adição era mais relacionada com a multiplicação do que com a subtração. A partir do final da década de 1980, outras discussões surgiram, dessa vez, sobre como o conceito de número e operações são desenvolvidos (NUNES *et al*, 2009).

Atualmente, o ensino do conceito de número natural e das operações fundamentais, assim como das suas propriedades apresenta-se nas séries iniciais divididos em blocos de conteúdos e, dentre eles está o bloco números e operações. Nele o currículo de matemática contempla o estudo que vai desde a ideia do conceito de número natural até as operações fundamentais. Esses conteúdos devem ser trabalhados de forma que desenvolvam as competências e habilidades que têm valor social, como a criatividade, a percepção, a análise crítica e o pensamento lógico-matemático.

4 A ENGENHARIA DIDÁTICA: O MÉTODO E A TÉCNICA

Neste capítulo, fundamentamos nossa pesquisa em duas concepções metodológicas: a engenharia didática e a Sequência Fedathi. A primeira concepção nos proporcionou a estruturação de uma sequência de trabalho, enquanto que a segunda, a mediação didática.

4.1 Utilizando a engenharia didática como metodologia de pesquisa

A engenharia didática, considerada uma teoria educacional elaborada por Michele Artigue na década de 1980, é caracterizada como um processo empírico que busca extrair informações da realidade e compará-las às hipóteses levantadas no início do projeto de engenharia, a partir de várias relações explícitas e implícitas estabelecidas entre o pesquisador e os sujeitos envolvidos na pesquisa dentro de um contexto de ensino. Esse conjunto de relações é denominado situações didáticas e foi utilizado como metodologia de pesquisa em nosso trabalho (MACHADO, 2008; GÁLVEZ, 1996).

Segundo Pais (2002, p. 99):

> A engenharia didática caracteriza-se como uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da matemática. O interesse pelo seu estudo justifica-se pelo fato de se tratar de uma concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa didática. Uma das vantagens dessa forma de conduzir a pesquisa didática decorre dessa sua dupla ancoragem, interligando o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa. Entendida dessa maneira, a engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização prática da pesquisa, levando em conta as relações de dependência entre a teoria e a prática.

A engenharia didática nos proporcionou uma compreensão clara do planejamento e execução de nosso trabalho. Para realizar a pesquisa foi necessário perceber os desafios inerentes às primeiras ideias até à execução do projeto em si. Ao trabalharmos com essa teoria educacional, submetemos nosso trabalho às quatro fases dessa metodologia: a *análise preliminar*, a *concepção e análise a priori*, a *aplicação da sequência didática* e a *análise a posteriori* (MACHADO, 2008).

Na primeira fase, foram feitas algumas considerações sobre a fundamentação teórica na qual o objeto de estudo estava sendo investigado. Em seguida, esse mesmo objeto foi analisado e verificou-se como estava se desenvolvendo na pesquisa. Na *análise preliminar*, consideraram-se também questões de cunho epistemológico; o ensino do conteúdo da pesquisa e a concepção dos sujeitos envolvidos na pesquisa em relação a esse conteúdo; o domínio e as dificuldades acerca do assunto estudado; os obstáculos que poderiam impedir a compreensão e o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem; assim como a forma como este conhecimento está fundamentado. Nessa fase, portanto, os conteúdos, sistema de numeração decimal posicional e as operações fundamentais com os números naturais, abordados na pesquisa foram analisados previamente nos sujeitos já citados no trabalho de investigação metodológica. Os meios, os instrumentos e a mediação pedagógica também foram considerados.

> Para uma melhor organização da análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemológica, cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo (PAIS, 2002, p. 101).

Na fase da *concepção e análise a priori,* elaboramos, a partir de algumas variáveis que comandaram o processo de experimentação, as sequências didáticas.

> Uma parte importante na análise de uma situação didática consiste na identificação das variáveis didáticas e no estudo, tanto teórico como experimental, de seus efeitos. O que interessa são os intervalos de valores destas variáveis que resultam determinantes para a aparição do conhecimento que a situação didática pretende ensinar. Trata-se de determinar as condições das quais depende que seja esse conhecimento que intervém e não outro (GÁLVEZ, 1996, p. 30).

Nesse período da investigação, trabalhamos com os materiais que foram utilizados na pesquisa e que elaboramos anteriormente. As atividades de cunho diagnóstico com a aplicação do primeiro questionário (*Pré-teste).*

Na terceira fase, denominada de *aplicação da sequência didática* o que havia sido planejado e analisado nas fases anteriores, foi executado. Nesta fase, levou-se em consideração a atuação dos sujeitos envolvidos na pesquisa. A oficina foi realizada e as atividades foram desenvolvidas e registradas conforme havia sido estabelecido pelo contrato didático. Dessa forma foi preciso "estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado" (PAIS, 2002, p. 102).

A *análise a posteriori* é a quarta fase da engenharia didática de Michele Artigue. Nela foram tratadas as informações colhidas durante a aplicação da *concepção e análise a priori* com o pré-teste. Nessa fase, os dados foram analisados, assim como a oficina ministrada logo após o *pré-teste*. Os dados obtidos nessa fase foram registrados e interpretados de forma objetiva, para, em seguida, obter a validação dos resultados, confrontando a análise *a priori* e *a posteriori.* Segundo Machado (2008, p. 246): "Essa fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções" dos indivíduos que participaram da pesquisa. É importante salientar a participação dos sujeitos envolvidos na investigação, pois nessa fase é possível perceber o desenvolvimento de seu raciocínio e da aquisição do conhecimento. Portanto, no *pós-teste*, toda a análise feita no pré-teste foi comparada para uma confirmação ou não de nossas hipóteses.

Segundo Pais (2002, p. 103): "Dessa maneira, enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada". E nela, na engenharia didática, fundamentamos nossa investigação, pois no campo didático, teoria e prática devem se complementar e esta metodologia de pesquisa insere-se de maneira adequada na relação entre saber científico e prática pedagógica. Isso significa que nosso trabalho foi sistematizado e estruturado de forma que ciência e técnica se articularam para melhor desenvolvimento do processo investigativo (MACHADO, 2008).

A engenharia didática utilizada em nosso trabalho buscou definir precisamente a ideia de método no qual escolhemos o caminho pelo qual optamos desenvolver nosso trabalho e a técnica de pesquisa constituída de instrumentos que conduziram a ação pedagógica.

4.2 Explorando a Sequência Fedathi

A teoria de Fedathi consiste em uma proposta metodológica voltada para o ensino de matemática. Mostra que a maior parte dos problemas em Educação Matemática está no processo de ensinagem e não no processo de aprendizagem. A ensinagem em Fedathi é um processo no qual o professor realiza seu trabalho com base na estruturação de um preceptorado, e este por sua vez, é o conjunto de todas as relações possíveis que podem auxiliar o trabalho docente. Ocorre ainda na elaboração da aula pelo professor.

Borges Neto e Santana (2001) propõem que na Teoria de Fedathi essas relações sejam compartilhadas, quando na aula se utilizam de materiais didáticos, ou ideias entre professores e alunos e até mesmo pela interação dos ambientes. Mesmo em uma situação em que haja muitos alunos, as relações entre o professor e o grupo partem de momentos únicos entre o professor e um aluno de cada vez.

Na Sequência Fedathi, o professor é quem desenvolve o preceptorado de forma que atenda ao grupo e às diferenças de cada aluno. A ensinagem consiste na execução do preceptorado. Nela, o professor deve planejar a aula de tal maneira que o que se deseja ensinar seja realmente aprendido. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 26), “[...] o professor tem de garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade”.

Para que ocorra a transposição didática, deve-se pensar também no contrato didático explícito e implícito nesse processo. Pais (2002) *apud* Chevallard (1991) afirma que a transposição didática é o trabalho realizado para que um objeto de saber a ensinar se transforma em objeto de ensino, ou seja, esse trabalho corresponde às transformações de adaptação que o saber a ensinar sofre em relação ao objeto de ensino. Portanto o trabalho do professor na concepção da teoria de Fedathi desenvolve-se no planejamento da aula e não na sua execução.

Na teoria de Fedathi está a Sequência Fedathi. Esta consiste em uma sequência didática voltada para o ensino de matemática e está baseada em Lakatos (1978) e na concepção intuicionista de Brouwer. Sua ideia fundamental é permitir que o aluno desenvolva atividades com mais liberdade de modo que o professor interfira em alguns momentos para que a proposta da atividade não se perca (BORGES NETO; SANTANA, 2001; DAVIS; HERSH, 1985).

A Sequência Fedathi apresenta quatro fases e nela detivemos nossa mediação pedagógica.

1ª fase - (*apresentação ou tomada de posição*): em cada encontro da oficina apresentamos problemas a partir da transposição didática para cada grupo dos sujeitos envolvidos na pesquisa, neste caso, as professoras-alunas. A situação proposta foi relacionada com o saber a ser ensinado. As regras da aula e as atividades também foram estabelecidas nessa fase, mostrando assim o contrato didático firmado entre nós e a turma. Segundo Pais (2002, p. 14) o contrato didático “[...] diz respeito às regras que regem a quase totalidade do funcionamento da educação escolar, em seus diversos níveis. No contexto da sala de aula, este contrato estabelece condições que devem ser acatadas pelo professor e pelos alunos.”.

2ª fase - (*debruçamento ou maturação*): nesse momento, os sujeitos envolvidos na pesquisa desenvolveram atividades sem a nossa interferência. Nessa fase, as professoras-alunas expuseram seus argumentos e raciocínios. O objetivo era fazer com que nessa fase as mesmas pensassem, tentassem, errassem e trabalhassem de forma colaborativa (BORGES NETO; SANTANA, 2001).

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 29),

> Tendo sido assegurada, mediante o momento inicial, a compreensão dos alunos acerca da atividade que irá realizar, o professor passa a desempenhar um papel mais de retaguarda. Cabe-lhe então procurar compreender como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar o apoio que for sendo necessário. No caso em que os alunos trabalham em grupo, as interações que se geram entre eles são determinantes no rumo que a investigação irá tomar...Ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática. Como referimos, alguns desses processos são: a exploração e reformulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho.

3ª fase - (*solução*): após a atividade realizada as ideias foram formalizadas e confrontadas. O objetivo estabelecido nessa fase foi a sistematização e a organização do conteúdo. Esse momento foi considerado relevante no sentido de que as respostas puderam ser comparadas, permitindo os grupos confrontar as ideias proporcionando concordância ou discordância dos resultados obtidos em cada um deles. Tentamos mostrar na construção do conhecimento os erros e os acertos valorizando assim todas as respostas independentemente de estarem certas ou erradas. (BORGES NETO; SANTANA, 2001).

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 28):

> O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente da aprendizagem que se cria na sala de aula. É fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas idéias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que as suas idéias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor.

4ª fase - (*prova*): na última fase da mediação pedagógica, as ideias propostas foram revisadas e formalizadas. Segundo Borges Neto e Santana (2001) na teoria de Fedathi, ensinar está relacionado com a criação de condições e possibilidades de aprendizagem por meio da sequência didática adequadamente transposta. Dessa forma, o papel que o professor exerce exige que este compreenda a didática do conteúdo em questão, proporcionando assim aula mais investigativa.

4.3 Coletando os dados da pesquisa

No que se refere ao procedimento metodológico que utilizamos em nossa pesquisa para a coleta e análise de dados, desenvolvemos um trabalho voltado para o uso do Material Dourado. Trabalhamos vários momentos diferentes:

I – Realizamos um questionário para uma primeira análise diagnóstica. Sua estrutura consistiu na elaboração de itens com o objetivo de identificar o grau de conhecimento dos sujeitos envolvidos na pesquisa;

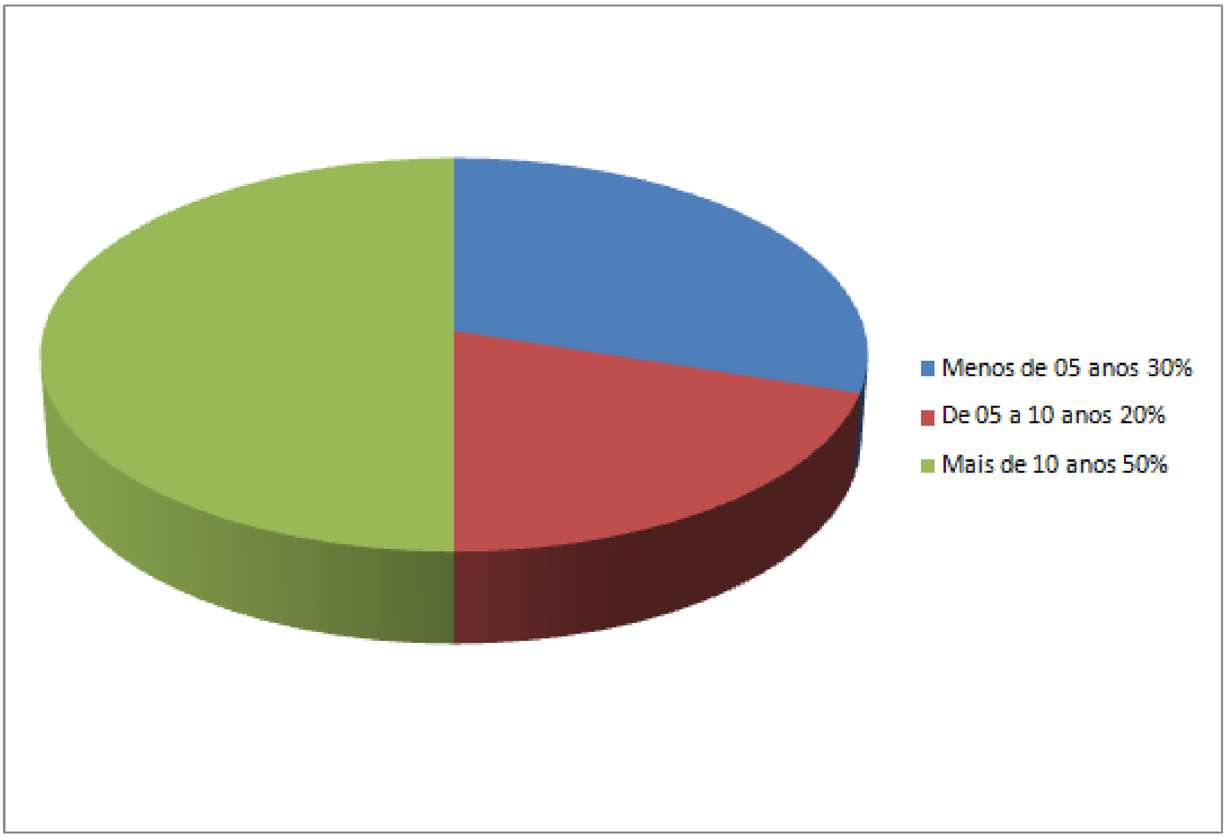
II – Uma oficina de 30h, composta de 06 (seis) encontros no intuito de capacitação para o uso do Material Dourado;

III – Aplicação do Material Dourado no intuito de auxiliar na compreensão do sistema de numeração decimal e posicional e nas operações fundamentais; com atividades no decorrer dos encontros. Nesse momento, trabalhamos com a Sequência Fedathi;

IV – Aplicação de um novo questionário para uma segunda e última análise diagnóstica. Os itens elaborados exploravam os conteúdos em questão: o sistema de numeração decimal posicional e as operações fundamentais, também trabalhados no primeiro questionário e na oficina.

Para a realização de nossa pesquisa de campo, submetemos um grupo de dez (10) professoras que atuam em sala de aula, de três escolas particulares para nossa amostragem. Duas (02) delas estão situadas na região do Grande Pirambu, na comunidade Nossa Senhora das Graças e uma (01) outra no bairro Presidente Kennedy, sendo os dois bairros do Município de Fortaleza. As três escolas trabalham com crianças e oferecem vagas nas turmas de Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Destacamos primeiramente o perfil das alunas que participaram da pesquisa. Para preservar a identidade das professoras que participaram da oficina, atribuímos-lhes nomes de mulheres matemáticas que viveram no passado e que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática.

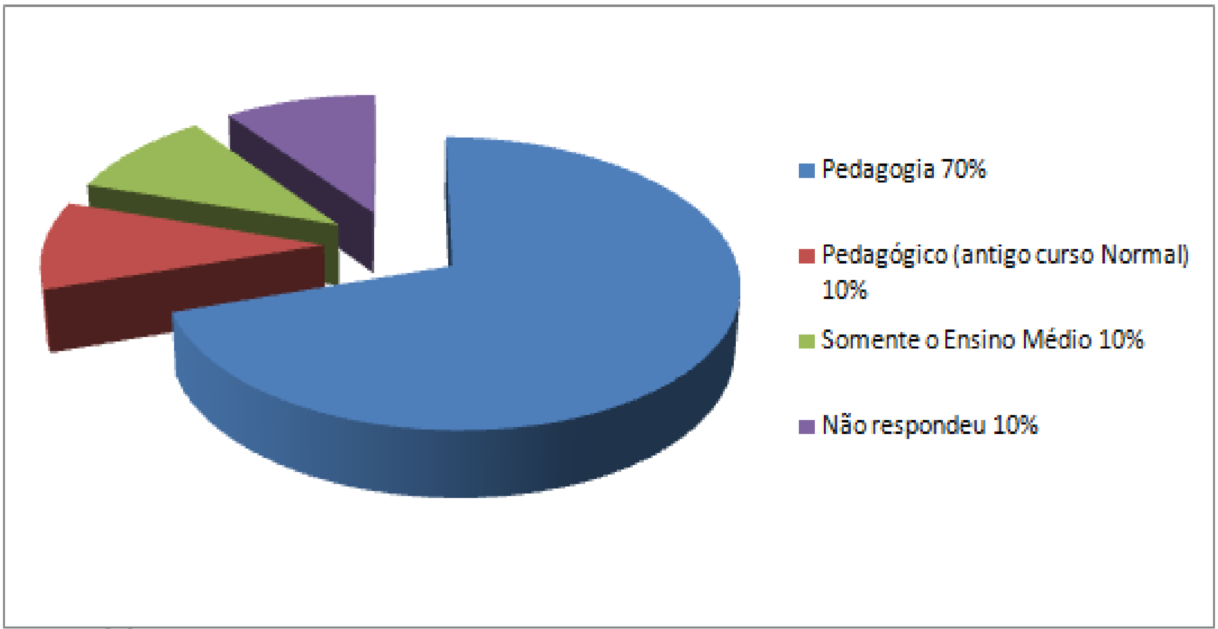
Gráfico 01 – Tempo de serviço no magistério



fonte: elaboração nossa

No que se refere à formação das professoras-alunas, é assim que vamos chamá-las a partir de agora, temos um resultado que vai de encontro à legislação nacional vigente da educação brasileira LDB nº 9394/96 que prescreve sobre a formação acadêmica dos professores que ensinam matemática na educação infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Vemos que a formação acadêmica fica a desejar em algumas escolas que trabalham com a Educação infantil e as séries iniciais do Ensino Fundamental. Observemos o gráfico a seguir:

Gráfico 02 – A formação das professoras-alunas



Fonte: elaboração nossa

Ainda sobre o perfil das professoras-alunas as séries/anos e as disciplinas que lecionam foram levadas em conta. Todas as entrevistadas atuam em sala de aula. E embora apenas 10% tenham afirmado que são professoras de poucas disciplinas, 90% se consideram professoras 'polivalentes', ou seja, ministram todas as disciplinas. O quadro a seguir, mostra o resultado:

Quadro 01 – Série/ano que leciona

Alunas	**Educ. Infantil**	**1º ano**	**2º ano**	**3º ano**	**4º ano**	**5º ano**
Hipátia			x	x		
Maria Agnesi		x			x	x
Sophie Germain	x					
Mary Somerville					x	x
Sofia Kovalevskaya				x	x	x
Emmy Noether	x					
Theano	x	x				
Elena Piscopia				x		
Madame du Châtelet			x			
Laura Catharina Bassi					x	x

Fonte: elaboração nossa

O quadro 01 mostra que as professoras-alunas atuam em mais de uma turma, mas apenas Maria Agnesi que ministra três disciplinas e, Sofia Kovalevskaya que ministra quatro, trabalha em três turmas diferentes. Não foi questionado como dividem esse trabalho com outras professoras, pois a escola só funciona nos turnos da manhã e da tarde.

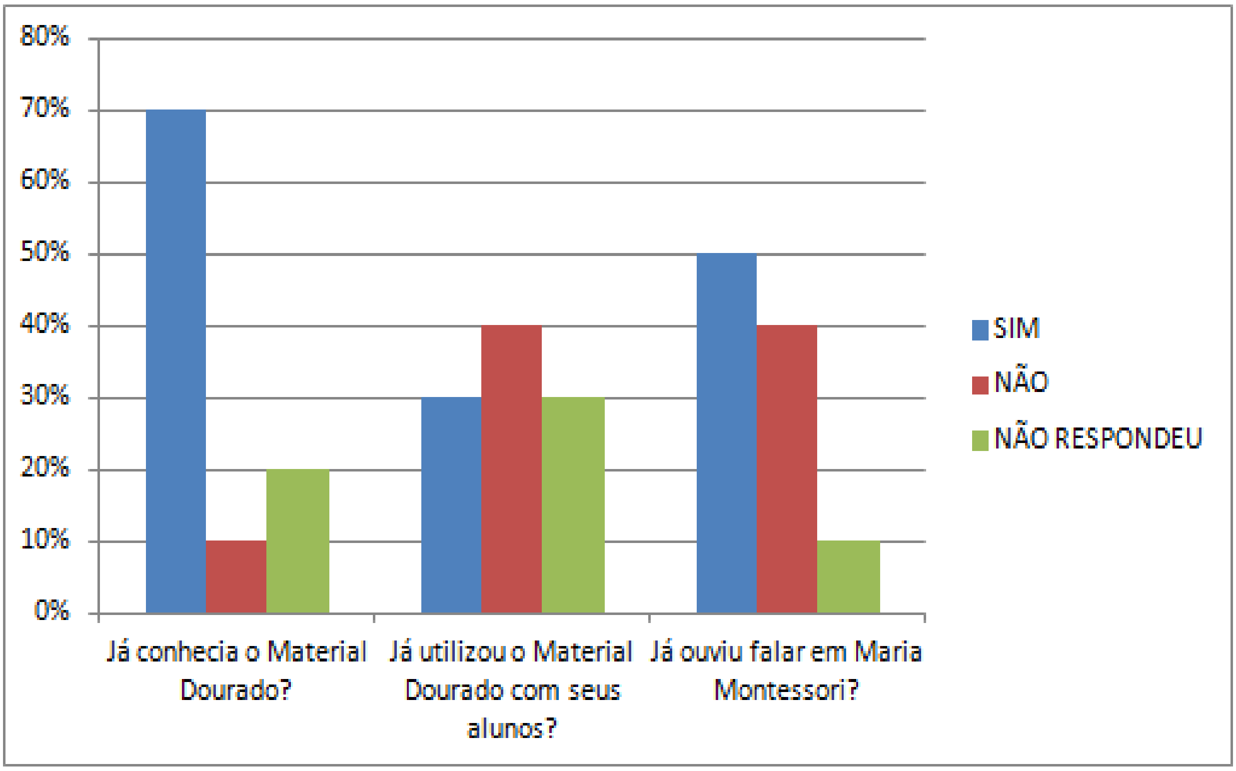
Quadro 02 – Disciplina que ministra cada professora-aluna

Alunas	Disciplinas						
	Matemática	Lingua Portuguesa	Ciências Natuarais	História	Geografia	Educação Religiosa	Lingua Estrangeira
Hipátia	x	x	x	x	x	x	
Maria Agnesi	x	x					x
Sophie Germain	x	x	x	x	x		
Mary Somerville	x	x	x	x	x		
Sofia Kovalevskaya	x	x	x	x	x		
Emmy Noether	x	x	x	x	x		
Theano	x	x	x	x	x		
Elena Piscopia	x	x	x	x	x		
Madame du Châtelet	x	x	x	x	x		
Laura Catharina Bassi	x	x	x	x	x	x	x

Fonte: elaboração nossa

Dentre os recursos didáticos utilizados em sala de aula apontaram a tv, o som, os brinquedos educativos, o material disponível no final dos livros didáticos como tabelas e jogos. O material reciclado como tampinhas de refrigerante foi mencionado por uma única professora, Madame du Châtelet, e apenas outra, Sofia Kovalevskaya, citou o material Dourado como um recurso didático. A maioria denominou suas dinâmicas de aula, como por exemplo, aula com teatro, contação de história, a pintura e a colagem como recurso didático. Uma única professora-aluna do grupo não respondeu ao item referente ao uso de algum recurso didático. Sobre o Material Dourado tabulamos as seguintes situações:

Gráfico 03 – Sobre o conhecimento do Material Dourado

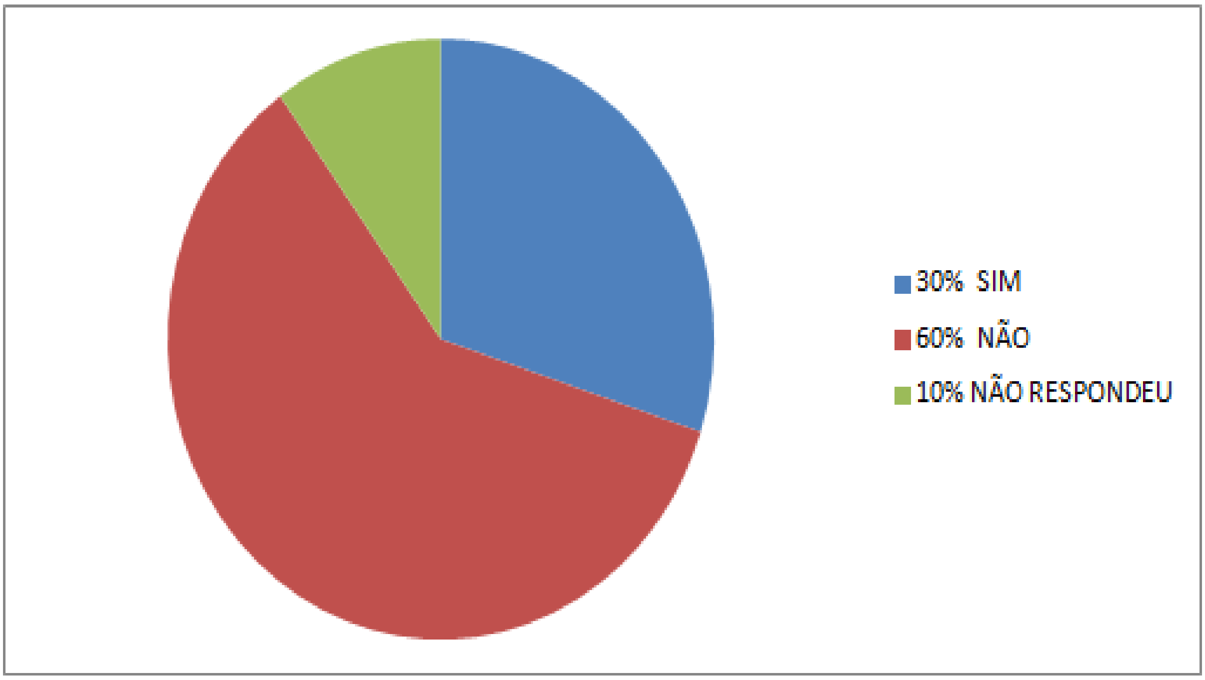


Fonte: elaboração nossa

Consideramos a relevância desse item, devido o Material Dourado ser o instrumento utilizado em nossa pesquisa, assim como a maior parte do grupo ter mais de dez (10) anos de magistério. Em uma das escolas não há o Material Dourado, e nela trabalham 30% das professoras, ou seja, depois da oficina se quisessem utilizar o Material Dourado em suas aulas, este, teria que ser providenciado. Ainda relacionando o material concreto como auxílio de nossa investigação, procuramos saber das alunas se conheciam ou não a educadora Maria Montessori, idealizadora do Material Dourado. A tabela seguinte mostra a situação. De uma porcentagem, especificamente 40% afirmou que já ouviu falar de Maria Montessori, mas apenas 50% desse valor escreveu algo sobre a pedagoga. Hipátia Afirmou que Maria Montessori foi uma educadora que criou um método diferente de aprendizagem. Maria Agnesi afirmou ainda que o trabalho de Montessori estava voltado apenas para a aprendizagem matemática. Nenhuma aluna conseguiu escrever sobre o método montessoriano. Aos 20% que não responderam se conhecia ou não o Material Dourado não foi questionado se eles sabiam ou não do que se tratava, nem de sua relação com Maria Montessori. Embora 70% tenham respondido que conheciam o Material Dourado, 40% do total não conhecia quem idealizou o material e nem tampouco quem era ou o quem foi.

O questionário voltado para a primeira análise diagnóstica ressaltou a importância do domínio do conteúdo. Segundo Lorenzato (2006, p. 03), o professor deve dominar o conhecimento matemático que ensina. “Reconhecemos que o educando tem o direito de receber do professor um correto conteúdo tratado com clareza, e, para que isso possa acontecer, é fundamental que o professor conheça a matemática e sua didática.”. A tabela a seguir mostra esse diagnóstico.

Gráfico 04 – O conhecimento matemático que possui é suficiente



Fonte: elaboração nossa

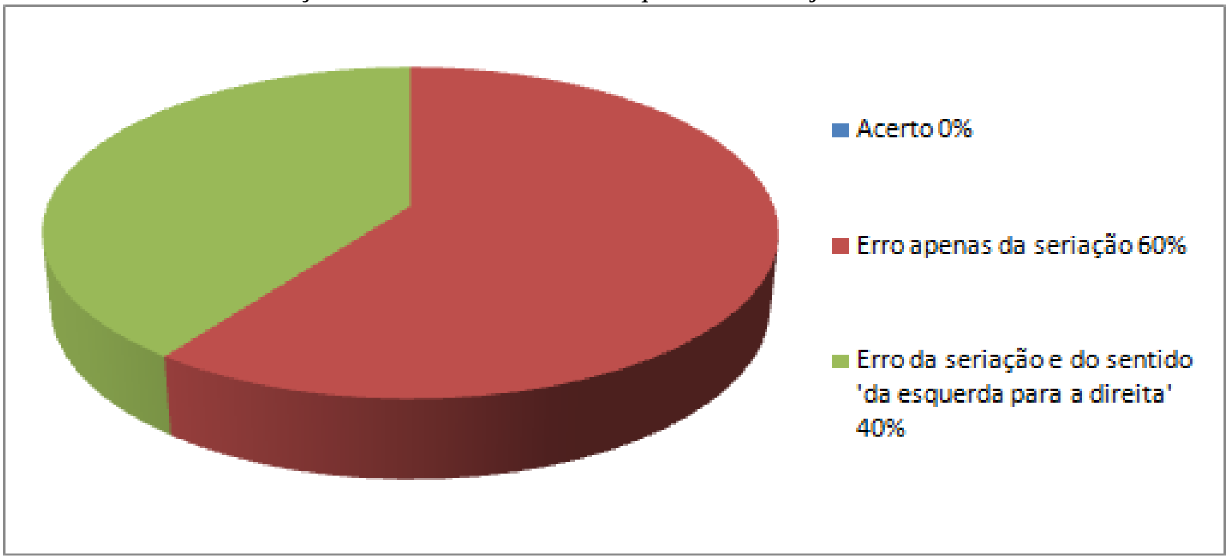
Questionamos com as participantes deste estudo sobre a expectativa da oficina e 30% apenas afirmaram que, quiseram participar da oficina para aprender métodos diferentes para o ensino de matemática, mas não mencionaram se poderiam ou não tornar sua prática de ensino mais eficaz. Somente 10% consideraram que esses métodos poderiam facilitar o ensino da disciplina. Outros 30% admitiram que a oficina pudesse lhes proporcionar mais conhecimento matemático, essa porcentagem não especificou se o conhecimento que poderia aprender era apenas para si ou para os alunos. Apenas 10% admitiram que participar da oficina poderia fazer com que criassem gosto pela matemática. A esse percentual está atrelada uma questão importante, embora não tenham uma formação matemática mais consistente, de uma forma ou de outra atua em sala de aula precisam contribuir com a construção do número e com o uso das operações fundamentais. Outros 10% não responderam, e mais 10% quiseram participar da oficina porque iriam 'lembrar' do que estudaram em sua formação inicial, embora tenha afirmado que sabiam do conteúdo matemático. Nesse momento, nos deparamos com a ideia da aprendizagem significativa. Se aprendeu, como pôde esquecer?

4.4 Analisando as informações coletadas

O pré-teste é composto de 10 itens com respostas objetivas e subjetivas. O item 01 tem como base o estudo de Kamii (2001) sobre ordem e inclusão hierárquica. Quando o indivíduo domina a ordem, não conta um objeto mais de uma vez, já na inclusão hierárquica, deve entender que o um está incluso no número dois, que o dois está incluso no número três, que o três está incluso no número quatro e assim por diante. A seriação é a ação de ordenar os objetos pelas suas diferenças, ou seja, pela noção de classificação, podendo ser feita de forma ascendente ou descendente. Segundo Ramos (2009, p. 25) quando o indivíduo não desenvolveu ainda a noção de seriação, tem dificuldade de ordenar objetos. E afirma que: "A estrutura numérica será operatória quando ocorrer síntese entre dois aspectos numéricos, o cardinal e o ordinal".

Mostramos uma sequência de dez objetos e pedimos que as professoras-alunas circulassem o número oito no sentido da esquerda para a direita. Em todas as respostas apenas o oitavo elemento da sequência foi circulado, ou seja, o ordinal foi apontado. Neste caso, o que ocorreu foi a representação do lugar ou da posição que o elemento ocupa na sequência. A tabela a seguir mostra o resultado:

Gráfico 05 – Identificação do número em uma sequência de objetos

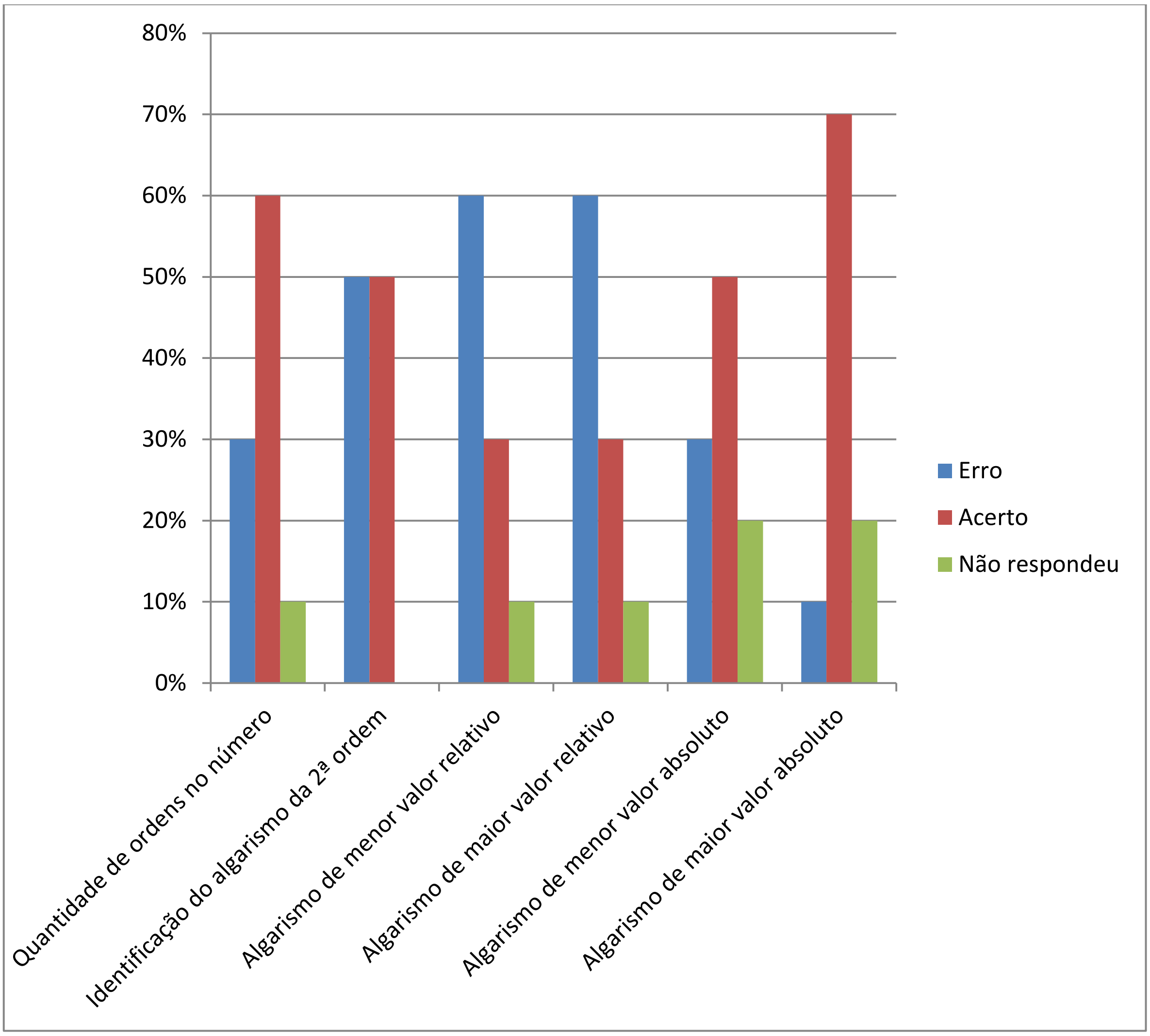


Fonte: elaboração nossa

O item 02 traz algumas considerações sobre a sequência dos números naturais. Quando questionadas sobre o menor valor natural da sequência, 40% responderam que o zero é esse valor e, 60% apontaram o número um. Sobre a existência do maior valor na sequência dos naturais 20% responderam que não há um maior valor, 70% afirmaram que há um número natural maior que todos, mas quando perguntamos qual é esse número as respostas foram '9', '10', '1000' ou 'não se sabe qual é'. Apenas 10% não responderam. Sobre a sucessão dos naturais, foi questionado um número natural que vem imediatamente antes de outro e sobre sucessor. Os dez símbolos usados para representar os números naturais foram apontados da seguinte forma: 10% chamaram de numerais, 70% de algarismos e 10% não responderam.

No item 03, exploramos as ordens e as classes. O número dado foi 10.937, tinha 5 ordens e 2 classes. A tabela abaixo mostra o resultado desse item:

Gráfico 06 – As classes e as ordens do número 10.937

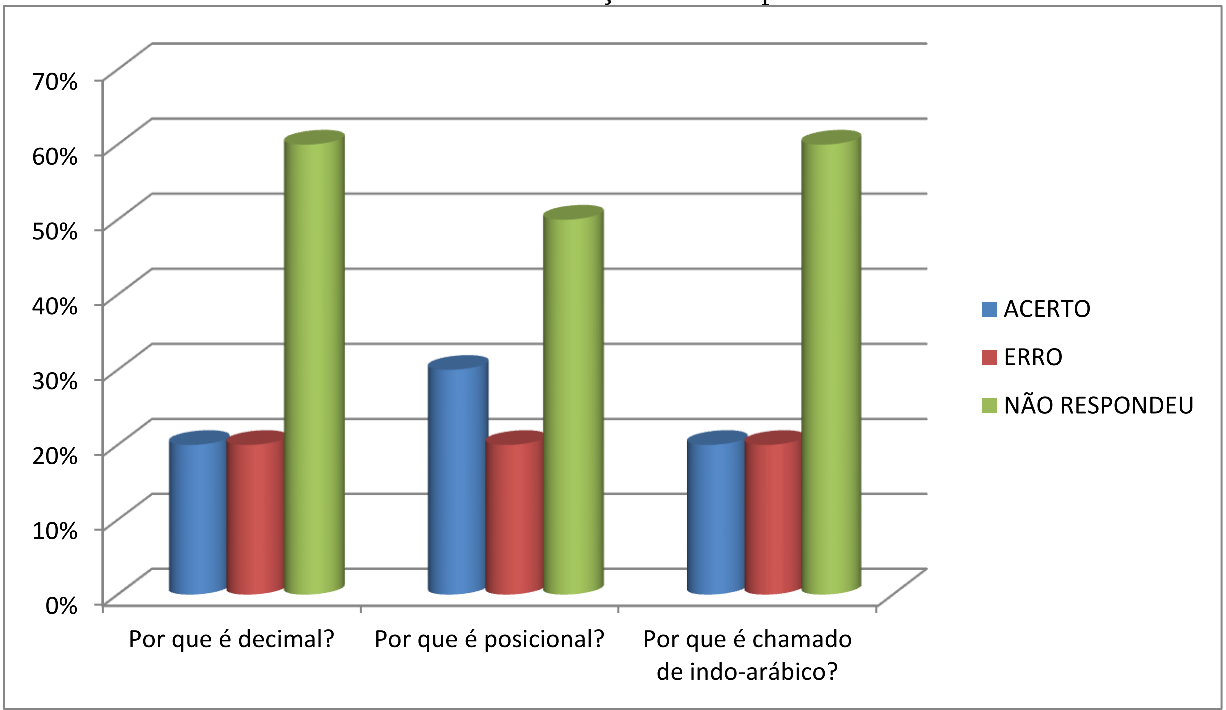


Fonte: elaboração nosssa

Questões sobre a quantidade de classes do número e quais os nomes delas também foram levantadas e, 60% acertaram o item quem mostra a quantidade certa de classe, mas quando perguntamos os nomes das classes apenas 20% responderam corretamente. 40% erraram e 40% não responderam. A tabela anterior chama-nos atenção para os itens que questionam o maior e o menos valor relativo. A maioria não entendeu que valor relativo refere-se ao valor do algarismo na posição em que está. Os fatores analisados, ordem e valor relativo ou valor absoluto, têm em sua definição, a condição necessária para o indivíduo entender o conceito de número, visto que o primeiro fator está relacionado com a ordenação enquanto que os outros dois implicam na compreensão de inclusão hierárquica e inclusão de classes.

Explorando nosso sistema de numeração de forma mais completa fomos questionar o porquê de o sistema ser decimal e posicional, o resultado segue no gráfico a seguir:

Gráfico 07 – Sobre o nosso sistema de numeração decimal posicional

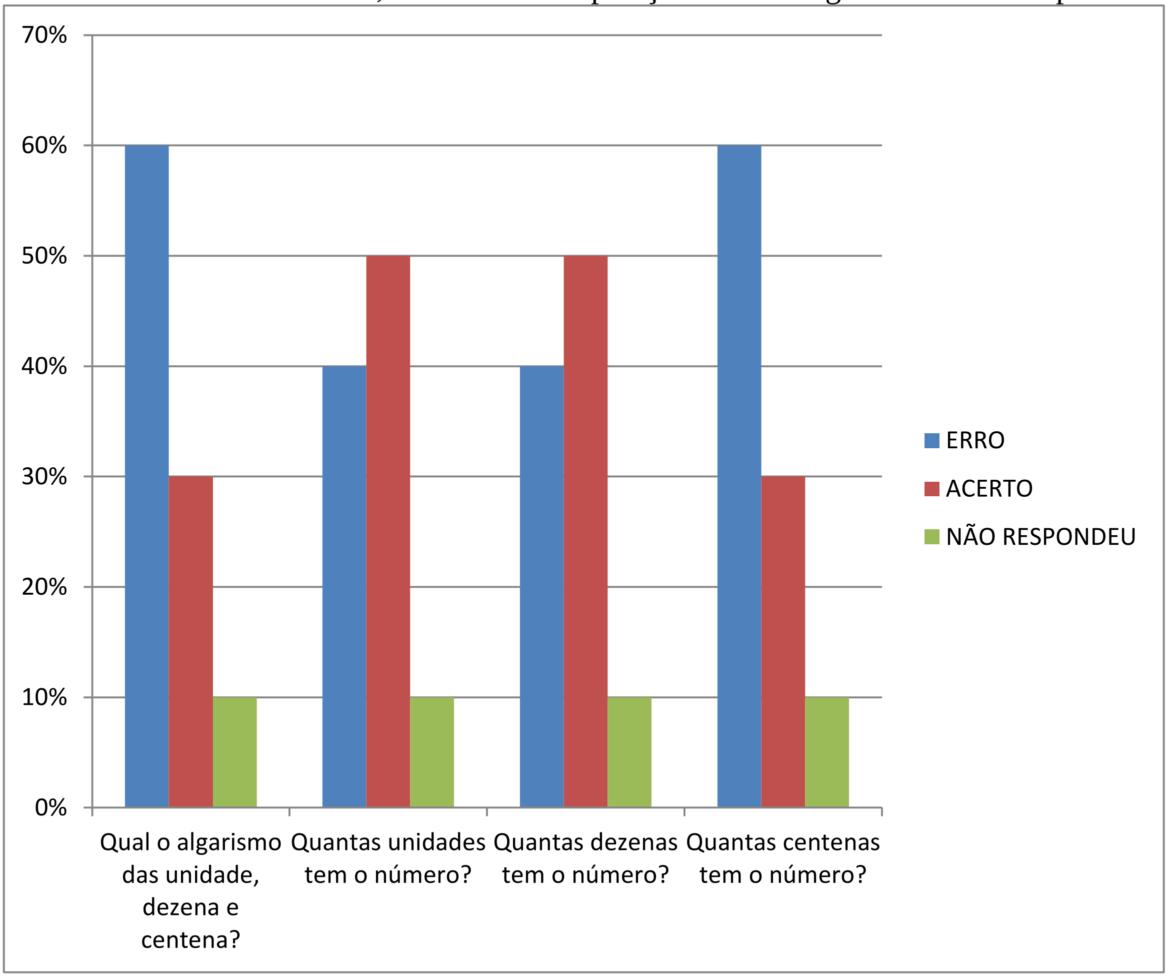


Fonte: elaboração nossa

Os livros didáticos atuais, quando tratam do sistema de numeração informam algo sobre a história dos números e explicam o porquê de ser decimal e posicional e, de ser chamado indo-arábico. Mesmo no 1º e 2º anos, quando estão estruturando a ideia de número já se trabalha com agrupamento de dez, da posição e de como surgiu a contagem. Concluímos que uma boa parte das entrevistadas sabia pouco sobre a história dos números e do sistema de numeração que usamos.

Na análise do número 129, perguntamos sobre as ordens e seus respectivos nomes e os algarismos que ocupavam cada uma delas. O gráfico 08 abaixo mostra o que sabiam:

Gráfico 08 – Sobre as ordens, seus nomes e a posição de cada algarismo nelas ocupadas



Fonte: elaboração nossa

Quando analisamos quantas unidades, dezenas e centenas tem o número, algumas alunas apontaram o algarismo se referindo à quantidade de cada unidade, de cada dezena e de cada centena, mostrando assim que não estava bem claro em sua compreensão quantas centenas, por exemplo, um número representado por cinco algarismos tem.

Nesse momento, também exploramos a função do zero no sistema de numeração decimal, visto que este não é considerado um número que surgiu naturalmente. Na sequência dos naturais, o zero só foi introduzido posteriormente pelos maias (LIMA *et al*, 2006).

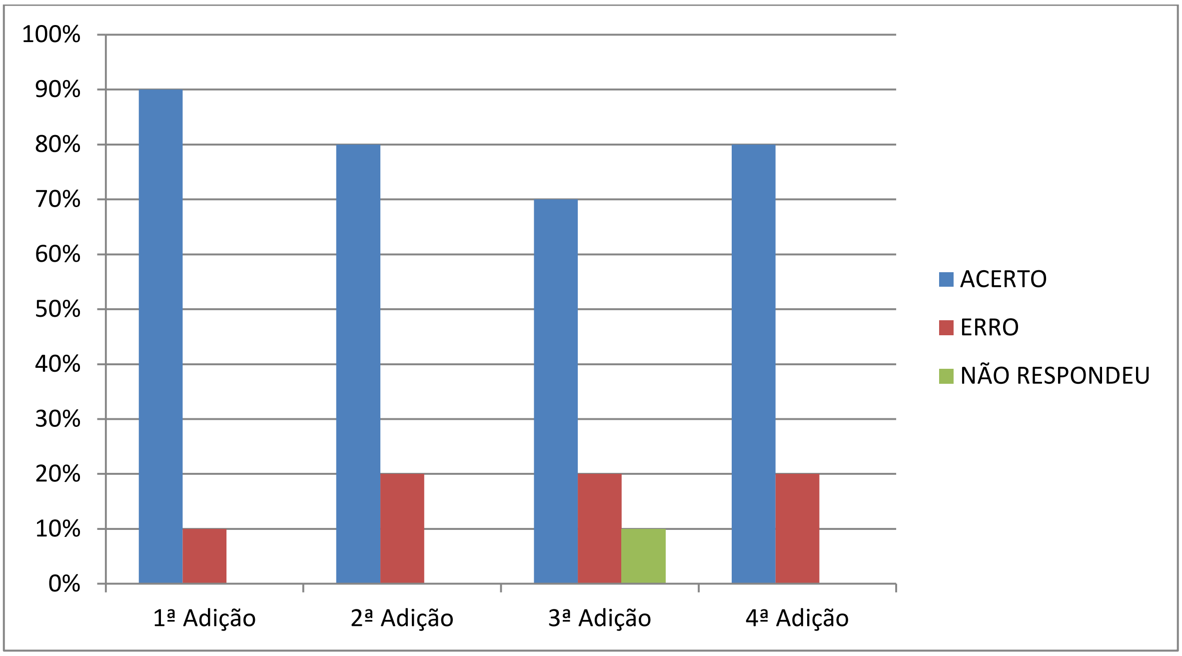
O resultado foi o seguinte: nenhuma das entrevistadas soube descrever uma função do zero em nosso sistema de numeração, 30% erraram ao discorrer sobre a questão e 70% não soube responder. Ao questionarmos sobre outros o conhecimento de outros sistemas de numeração, as alunas responderam o sistema romano corretamente. Outras citações foram ‘sistema métrico’, sistema ordinal’, ‘sistema multiplicativo’ e ‘sistema fracionário’ e, 50% não responderam à pergunta.

Ao serem indagadas sobre a relevância de compreendermos bem o sistema de numeração decimal, as respostas foram poucas. 20% apontaram sua utilidade no dia a dia, outros 20% responderam que é importante sabermos para ‘distinguirmos ordem e posição’ e ‘sabermos contar e ler o número’. 60% que trabalham o sistema decimal posicional em sala de aula não souberam responder exatamente para que serve e qual a sua importância.

4.4.1 sobre as operações fundamentais

No pré-teste, após o sistema de numeração, seguimos com as operações, neste caso começando com a adição. A análise das operações se deu, inicialmente, com os nomes dos termos. Segundo Caraça (2010) os nomes dos termos estão relacionados com a compreensão de sua função na operação. Com relação à adição 70% denominaram os termos de parcelas e soma ou resultado. 20% erraram os nomes dos termos e 10% não responderam. Ao serem questionadas sobre outros nomes para os termos da adição nenhuma das professoras-alunas soube responder. A análise do algoritmo se deu por meio da oferta de quatro adições. Todos os algoritmos apresentados pelas participantes eram da forma abreviada. Observemos agora o resultado dos cálculos:

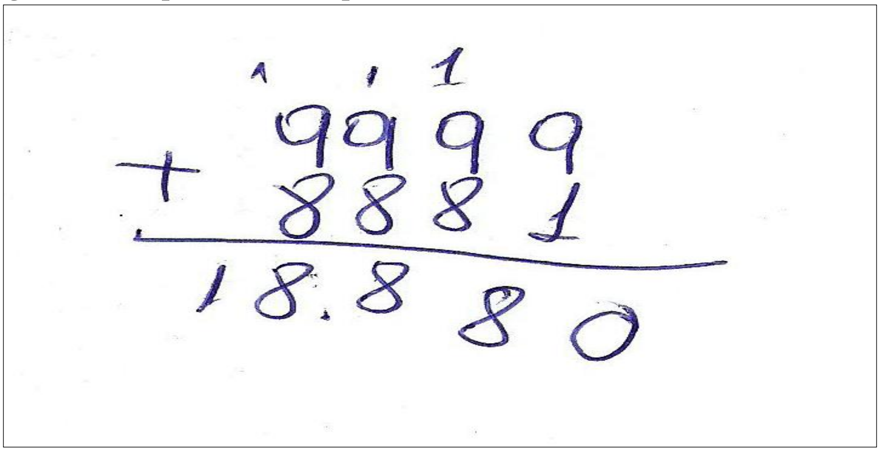
Gráfico 09 – Resultados das adições no pré-teste



Fonte: elaboração nossa

Em algumas respostas, vemos claramente a regra do algoritmo simplificado predominando e a transformação de uma ordem na ordem imediatamente superior, ou seja, a presença do 'vai um' como geralmente se diz.

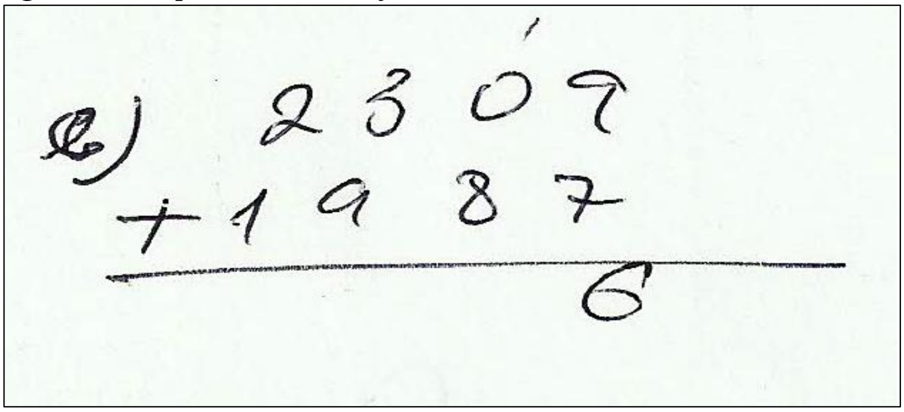
Figura 1 – Algoritmo simplificado e a apresentação do 'vai um'



Fonte: folha de cálculo da adição de uma das professoras-alunas

Outras respostas tiveram os cálculos não concluídos, não questionamos se o motivo foi devido à falta de conhecimento da técnica da adição com agrupamento ou se o motivo foi 'não querer desenvolver a operação', o fator tempo não foi contemplado no sentido de uma das participantes afirmar: 'não houve tempo necessário'.

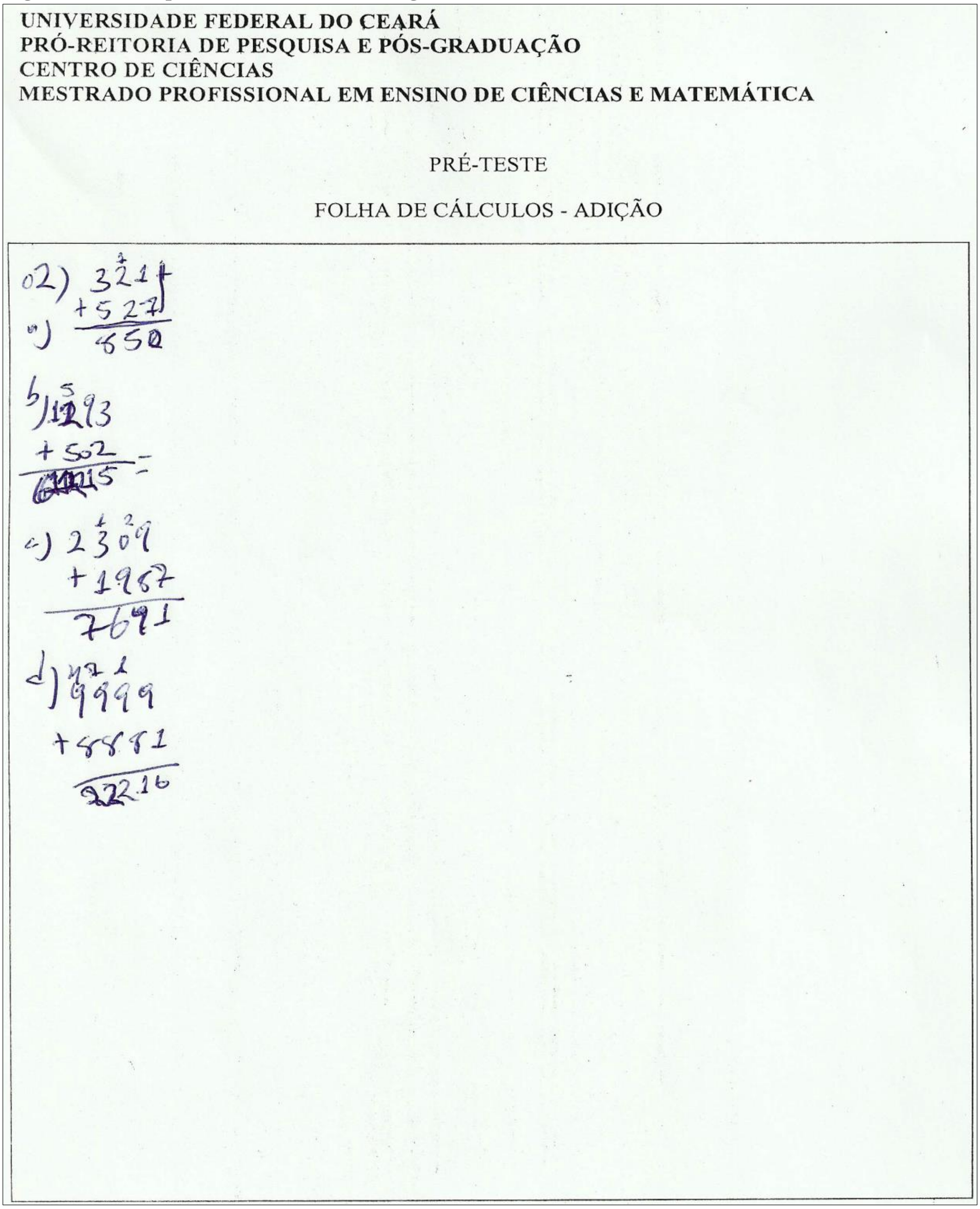
Figura 2 – Algoritmo simplificado da adição não concluído.



Fonte: folha de cálculo da adição de uma das professoras-alunas

Temos uma situação em que todos os cálculos aplicados às adições têm respostas cujos resultados estão errados. Nesse caso, vemos claramente a ausência do domínio do conhecimento matemático. Os algoritmos apresentam a mesma estrutura do simplificado ou abreviado, porém as transformações das ordens apresentam-se sem nexo. Ressaltamos que todas as professoras-alunas envolvidas na pesquisa estão atuando em sala de aula.

Figura 3 – Erro presente em todos os algoritmos


UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRÉ-TESTE

FOLHA DE CÁLCULOS - ADIÇÃO

02) a) 3211 + 527 = 850

b) 1293 + 502 = 1215

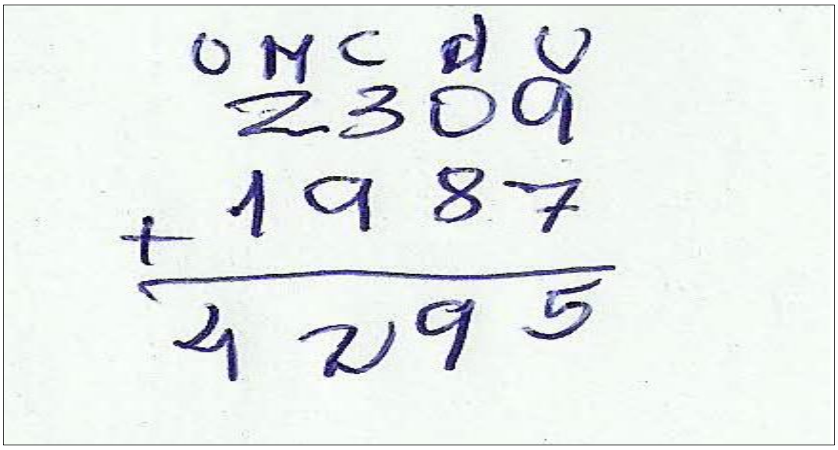
c) 2309 + 1987 = 7691

d) 9999 + 8881 = 92216

Fonte: folha de cálculo da adição de uma das professoras-alunas

Houve caso em que se tentou atribuir ao algoritmo as ordens, porém o cálculo também apresentou erro no resultado. A ordem das unidades teve um soma errada.

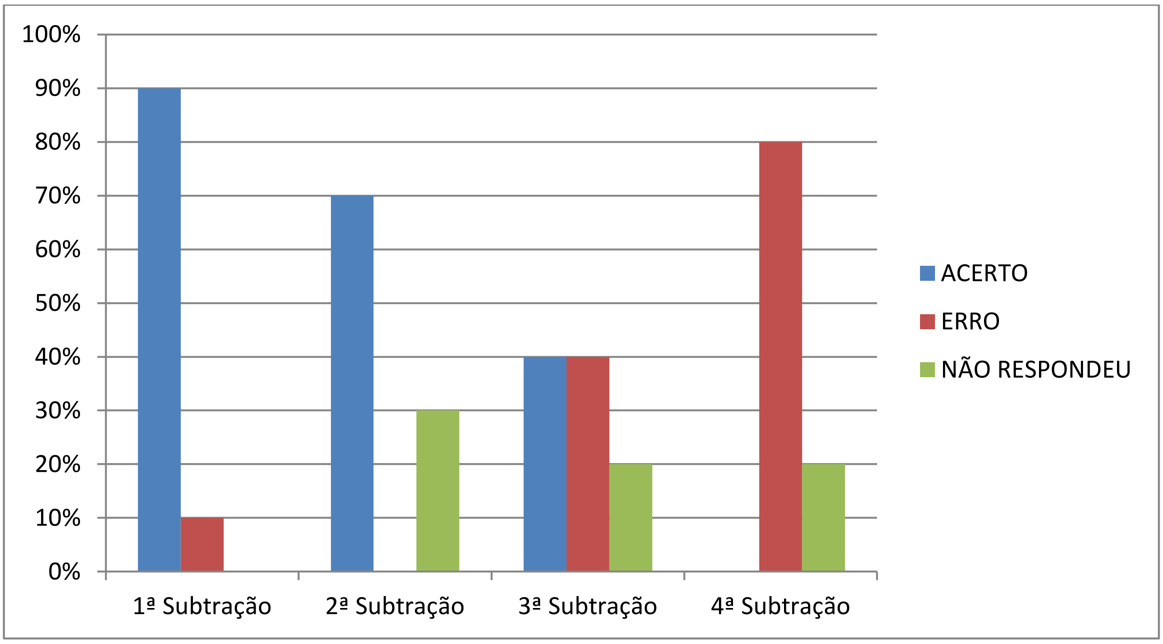
Figura 4 – Algoritmo apresentado erro inicialmente na ordem das unidades



Fonte: folha de cálculo da adição de uma das professoras-alunas

Em relação à subtração os dados obtidos foram os mesmos da adição. 70% denominaram os termos de minuendo, subtraendo e resto ou diferença. 20% erraram os nomes dos termos e 10% não responderam. Dentre as respostas erradas temos o ‘produto’ como sendo o nome do resultado de uma subtração. Ao questionarmos sobre outros nomes dos termos da subtração não houve resposta. Às professoras-alunas foram dadas quatro subtrações. Os cálculos foram tabulados da seguinte forma:

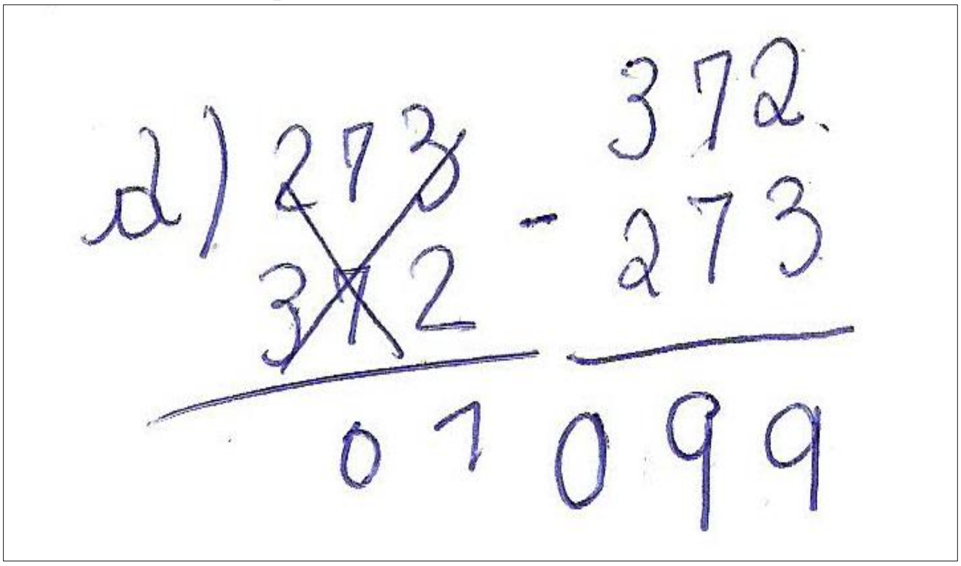
Gráfico 10 – Resultados das subtrações no pré-teste



Fonte: elaboração nossa

Em um dos itens, havia a condição de impossibilidade da subtração no campo dos naturais. Propomos o minuendo menor que o subtraendo em $273 - 372$, algumas alunas responderam mesmo assim. Vejamos:

Figura 5 – Troca do minuendo pelo subtraendo

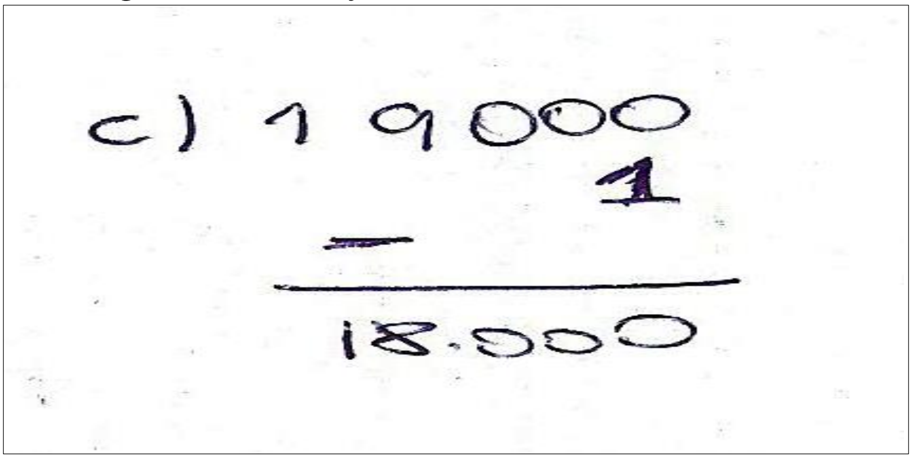


Fonte: folha de cálculo da subtração de uma das professoras-alunas

Observamos que, na situação acima, houve a troca dos termos da subtração, alterando assim a condição de resolução da operação. Na imagem apresentada, percebemos que a professoras-aluna tenta resolver de uma forma e em seguida de outra, como se a posição que os termos ocupam não tivesse relevância. Nossa intenção era questionar se no campo dos naturais é possível retirar a quantidade 372 de 273. 80% das entrevistadas fizeram essa troca.

No que se refere à mudança de um algarismo de uma ordem a outra, na subtração com desagrupamento, percebemos falta de compreensão do desenvolvimento da operação. Na resposta a seguir, é possível perceber a confusão que há na retirada de uma unidade de 19.000.

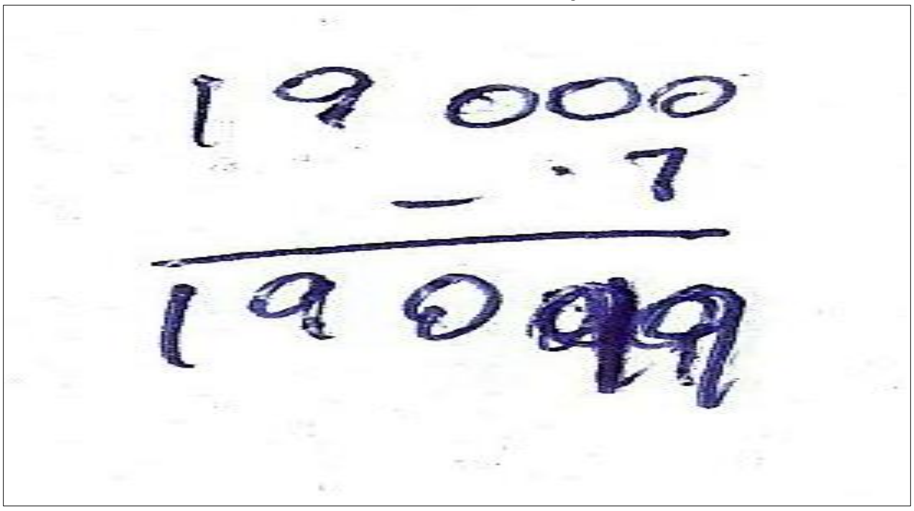
Figura 6 – Erro no algoritmo da subtração $19000 - 1$



Fonte: folha de cálculo da subtração de uma das professoras-alunas

No algoritmo a seguir, percebemos um aumento do valor quando se retira uma unidade de 19.000.

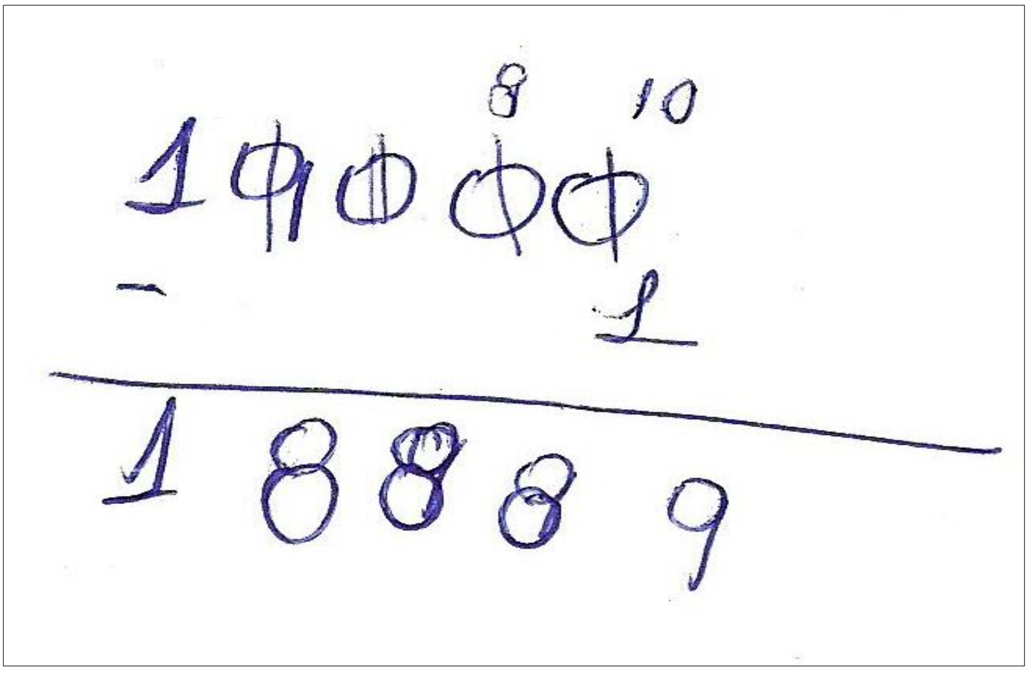
Figura 7 – Resultado com aumento no cálculo da subtração $19000 - 1$



Fonte: folha de cálculo da subtração de uma das professoras-alunas

Outro algoritmo apresentou a intenção de fazer a mudança de um algarismo, de ordens maiores para ordem menores no intuito de garantir o desagrupamento, porém houve confusão no desenvolvimento do raciocínio, como mostra o cálculo a seguir:

Figura 8 – Algoritmo apresentando erro na mudança de uma ordem para uma outra imediatamente inferior.



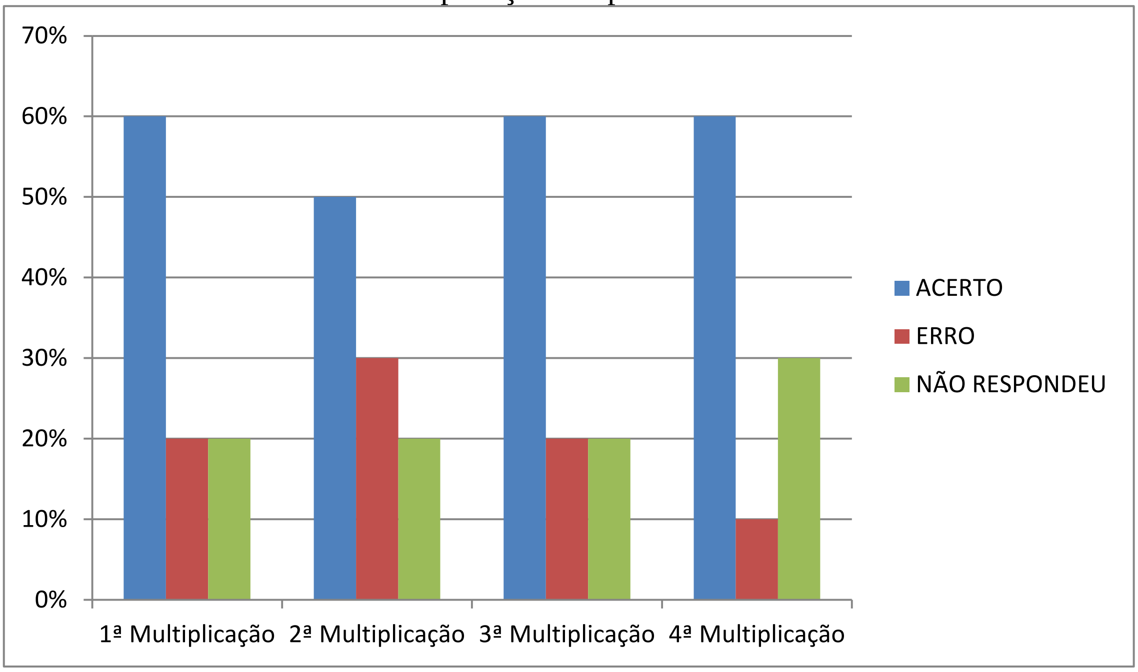
Fonte: folha de cálculo da subtração de uma das professoras-alunas

A subtração embora seja operação inversa da adição, mostrou-nos que a reversibilidade que aparece na definição de cada uma delas não se faz presente nos algoritmos. Kamii (2001) chama esse processo de inclusão de classes, cujo domínio implica na junção e na separação de quantidades.

Na multiplicação, também começamos o questionamento pelos termos. 'multiplicando, multiplicador e produto' foram os nomes apontados por 50% das professoras-alunas, 30% delas deixaram de denominar um dos termos, 10% erraram todos os nomes e 10% não responderam. Ao serem questionadas sobre outros nomes dos termos, 90% não responderam, apenas 10% chamaram os termos de fatores e produto.

Para a análise dos algoritmos, foram dadas quatro multiplicações cujo resultado segue no gráfico abaixo:

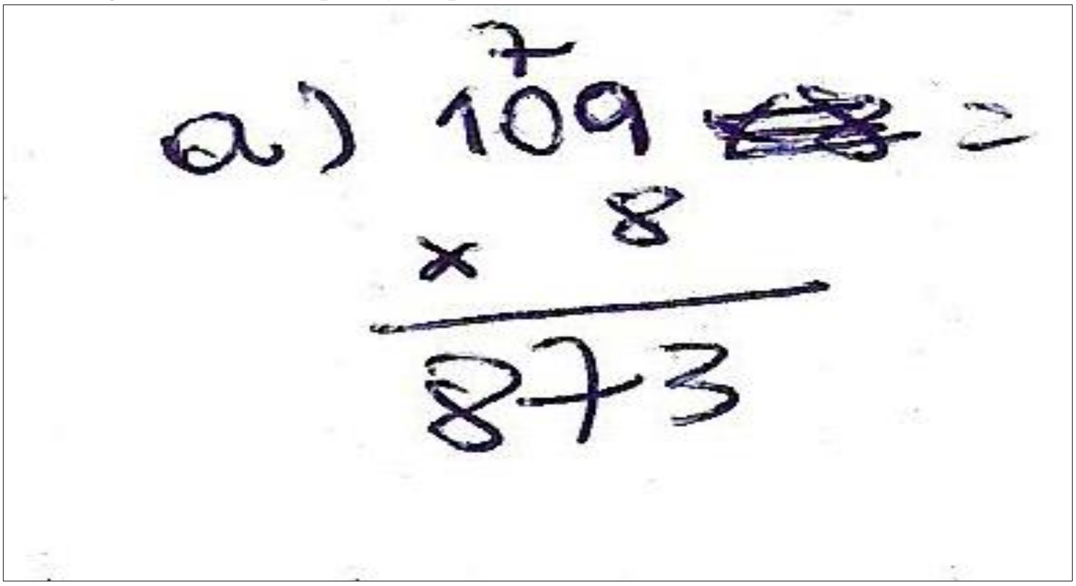
Gráfico 11 – Resultados das multiplicações no pré-teste



Fonte: elaboração nossa

Na primeira multiplicação sugerida, percebemos de imediato, um erro no que chamamos de 'tabuada'. A multiplicação de $8x9$ tinha como resposta da professoras-aluna, o número 73.

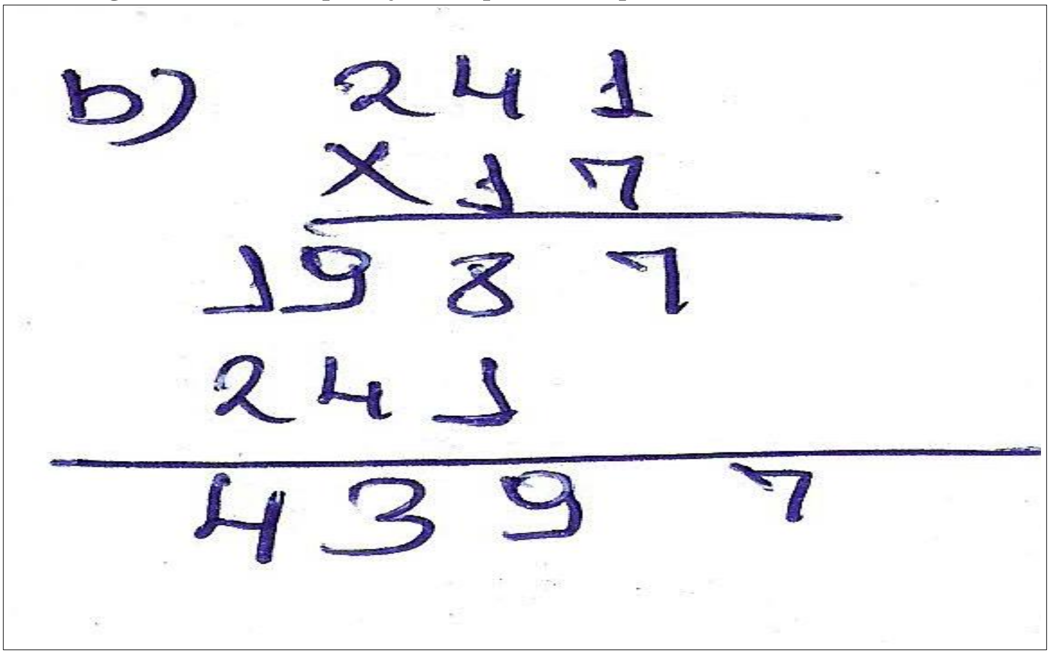
Figura 9 – Algoritmo da multiplicação apresentando erro inicialmente na ordem das unidades



Fonte: folha de cálculo da multiplicação de uma das professoras-alunas

No item seguinte, também foi possível perceber um erro no desenvolvimento da multiplicação no algoritmo destacado abaixo.

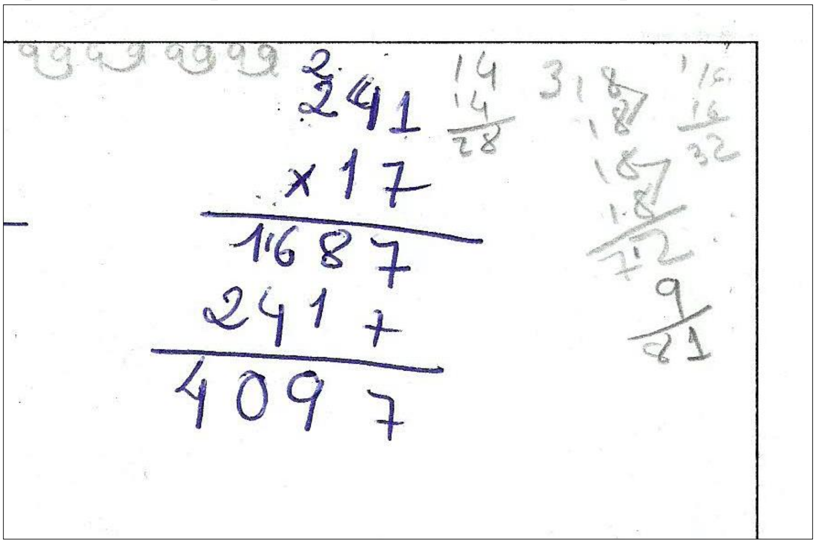
Figura 10 – Algoritmo da multiplicação simplificado apresentando erro no resultado



Fonte: folha de cálculo da multiplicação de uma das professoras-alunas

Já na forma de resolução a seguir podemos identificar agrupamentos que foram feitos ao lado do algoritmo, auxiliada pela definição da multiplicação no que se refere à adição de parcelas iguais.

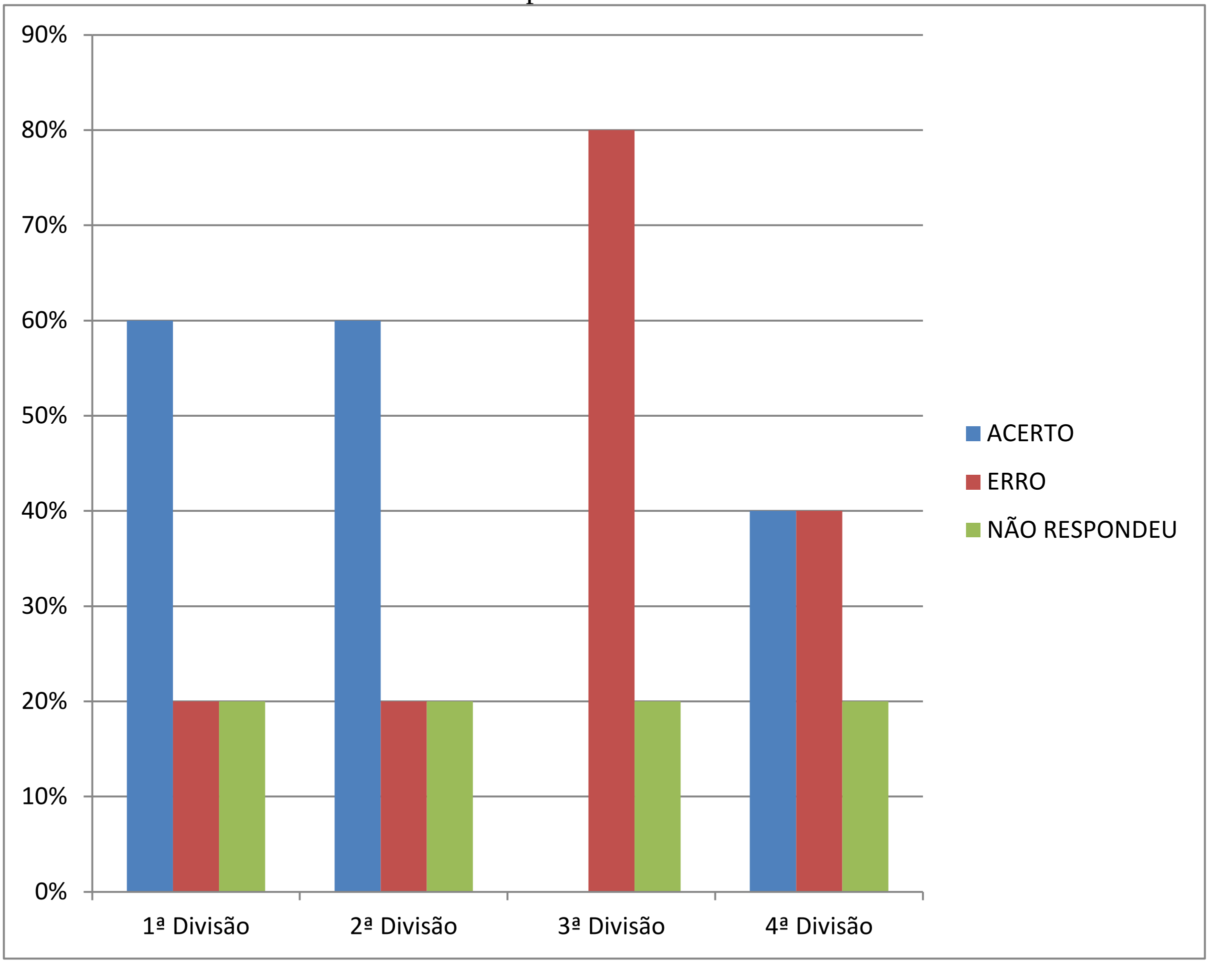
Figura 11 – Agrupamentos complementares no cálculo da multiplicação



Fonte: folha de cálculo da multiplicação de uma das professoras-alunas

A divisão foi a última operação analisada. 70% acertaram os nomes dos termos, 20% erraram e 10% não responderam. Quando questionamos sobre outros possíveis nomes dos termos da divisão 30% erraram a resposta e 70% não responderam. Assim, como nas outras três operações, dispusemos quatro divisões. Os resultados podem ser vistos no gráfico a seguir:

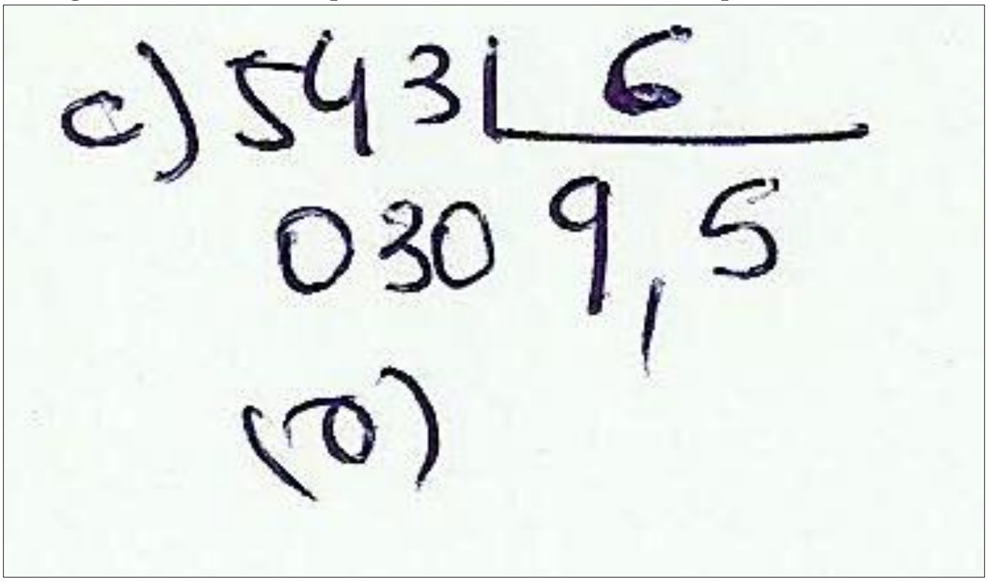
Gráfico 12 – Resultados das divisões no pré-teste



Fonte: elaboração nossa

Podemos observar que houve divisão em que nenhuma das participantes acertou. Diferentemente das duas primeiras as duas últimas tinham resto diferentes de zero. A resolução dos algoritmos foi proposta apenas no campo dos números naturais. Na análise dos algoritmos, percebemos que algumas respostas não foram desenvolvidas em ℕ.

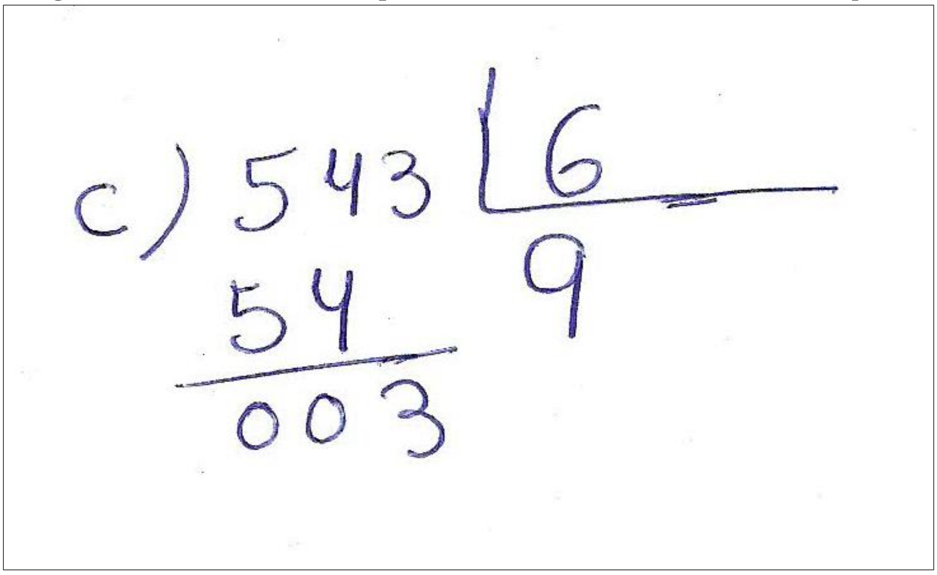
Figura 12 – algoritmo da divisão apresentando um resultado não pertencente a ℕ



Fonte: folha de cálculo da divisão de uma das professoras-alunas

Em outras resoluções foi possível perceber a falta de conhecimento do algoritmo da divisão, pois a ordem das unidades no quociente não foi completada. Como podemos observar no cálculo a seguir, se multiplicarmos $6x9$ e ao resultado somarmos 3, teremos 57 e não 543.

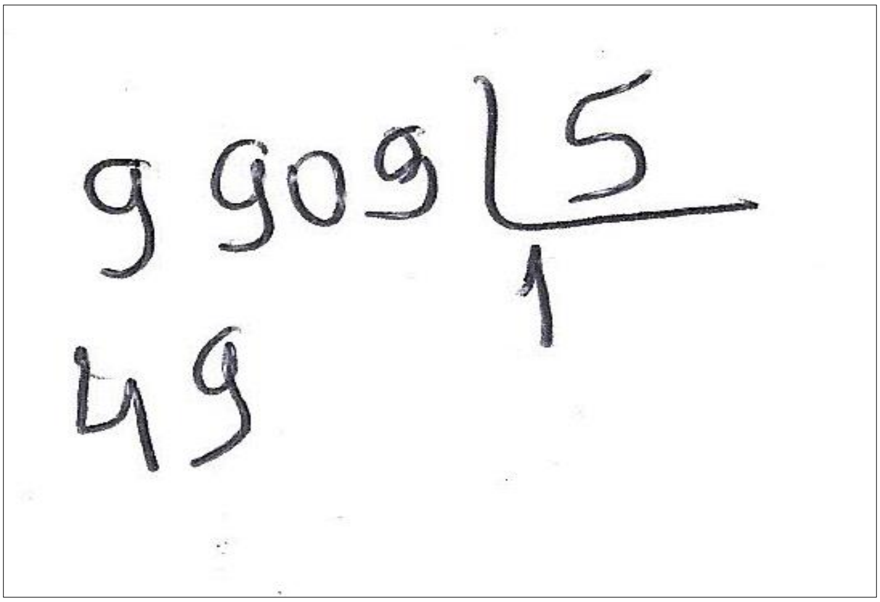
Figura 13 – Algoritmo da divisão incompleto, sem a ordem das unidades no quociente



Fonte: folha de cálculo da divisão de uma das professoras-alunas

A figura a seguir mostra um exemplo do que verificamos em algumas situações. Cálculos iniciados, mas não terminados, principalmente na divisão dos naturais.

Figura 14 – Algoritmo da divisão incompleto



Fonte: folha de cálculo da divisão de uma das professoras-alunas

Mesmo questionando anteriormente o porquê de nosso sistema ser chamado de indo-arábico, pedimos que as entrevistadas fizessem uma pequena produção textual discorrendo sobre o surgimento dos números naturais e sobre o desenvolvimento dos sistemas de numeração, pelo menos do sistema decimal posicional. Dentre as respostas listamos algumas a seguir: 1 – ‘o pastor de ovelhas que precisava fazer correspondência um a um para ter o controle das ovelhas ao levá-las para pastar’; 2 – ‘o surgimento dos números naturais se deu no século XIX com os árabes’; 3 – ‘a contagem foi registrada em cavernas (nas paredes)’; 4 – ‘o sistema indo-arábico começou com a sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8’ (o algarismo 9 não entrou na sequência)[2]; 5 – ‘os mesmos pastores citados acima começaram a contar de um em um e depois de dez em dez’. Identificamos pedaços de fatos e histórias contadas pelos livros didáticos. Algumas informações são desconexas uma das outras como a resposta 2 desse parágrafo. As professoras têm uma vasta ideia do surgimento dos números naturais, mas sobre o desenvolvimento do nosso sistema de numeração, não há conhecimento algum.

[2] Grifo nosso

4.4.2 Analisando a oficina

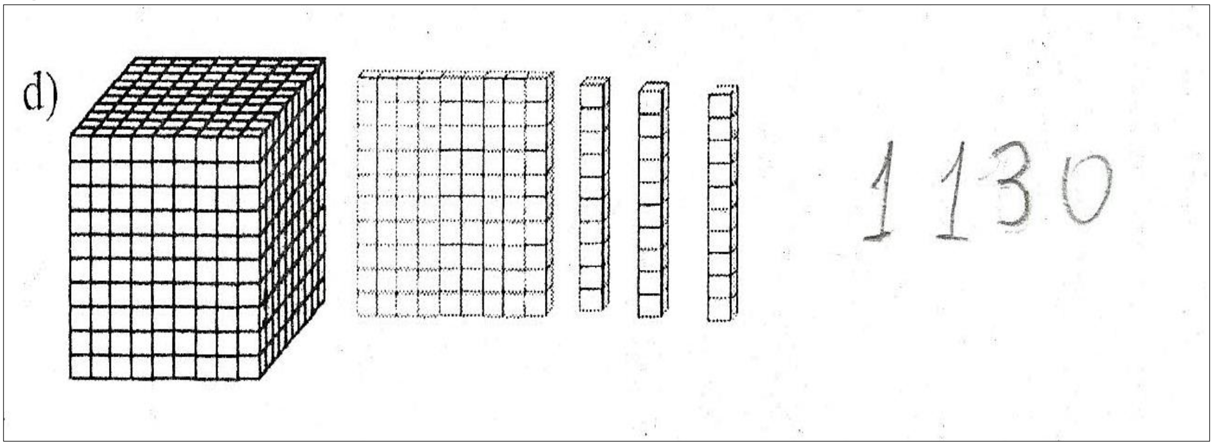
O 1º encontro resumiu-se na compreensão e aprendizagem do Material Dourado. Primeiramente apresentamos o recurso didático para o grupo, mostramos o nome de cada peça explicamos porque é um material estruturado. Em seguida, trabalhamos a Sequência Fedathi de forma que o grupo estabelecesse a relação entre as peças a partir das observações e inferências. Após a análise do recurso didático, as alunas relacionaram as peças do material com as quatro primeiras ordens do sistema de numeração decimal posicional e, ainda perceberam que algumas peças cabem dentro de outras. Algumas apresentaram para o grupo suas observações e todas expuseram suas respostas. Na fala das alunas na oficina confirmou-se o que o pré-teste já havia identificado, o Material Dourado não era um recurso didático conhecido por todas.

Figura 15 – Manipulação inicial do Material Dourado

Fonte: elaboração nossa

Em outro momento, foi possível trabalhar indicação do número a partir de sua representação com o Material Dourado.

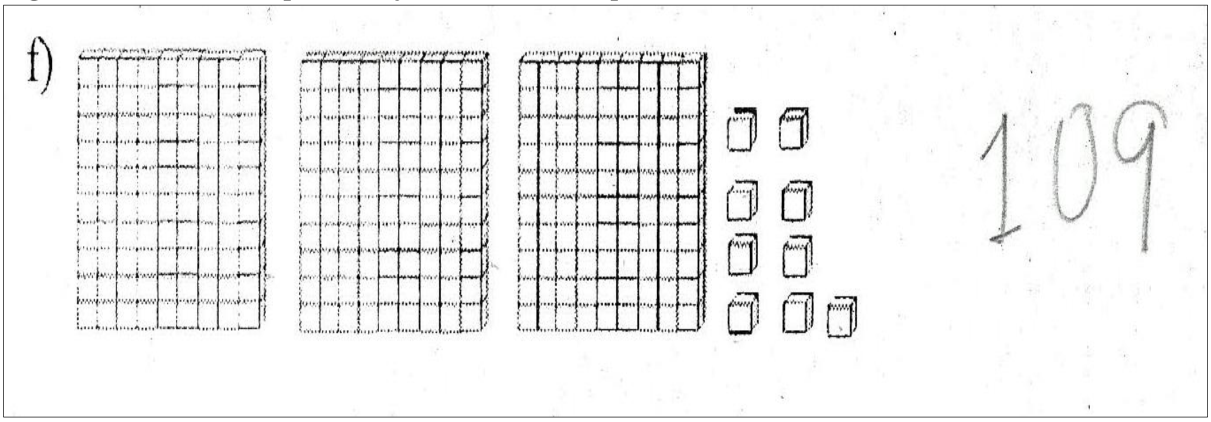
Figura 16 – Representação do número a partir do Material Dourado



Fonte: atividade 06 – item d do 1º encontro da oficina

A atividade foi realizada em dupla e percebemos que, mesmo assim, algumas representações estavam erradas, como no exemplo a seguir. As três placas indicam 300 e não 100 como mostra a resposta de uma delas.

Figura 17 – Erro na representação do número a partir do Material Dourado



Fonte: atividade 06 – item f do 1º encontro da oficina

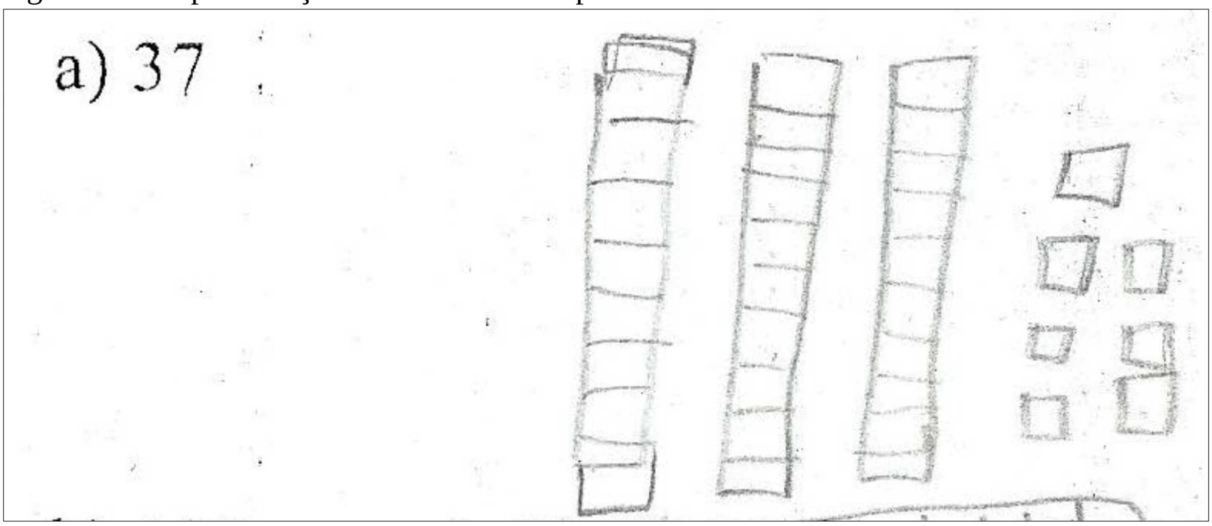
Seguindo a Sequência Fedathi, todas as respostas foram comentadas e discutidas pelas alunas.

Figura 18 – Executando a Sequência Fedathi

Fonte: elaboração nossa

Na atividade seguinte, as alunas trabalham o inverso, a partir da indicação do número representando com o Material Dourado.

Figura 19 – Representação com o Material a partir do número



Fonte: atividade 07 – item a do 1º encontro da oficina

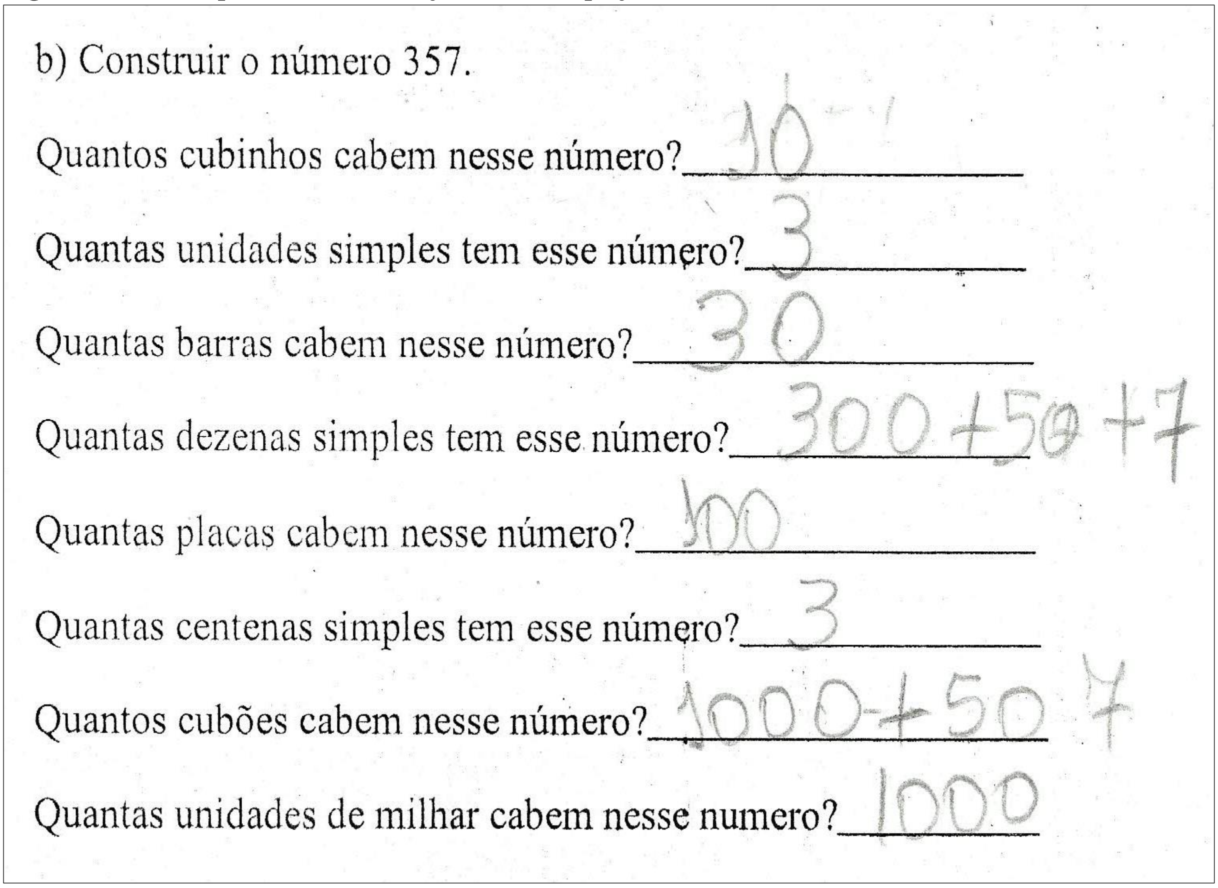
Após o 1º encontro, o grupo participou de uma atividade complementar, na qual as alunas manipularam o Material Dourado de papel para auxiliá-las nas respostas.

Figura 20 – Professoras-alunas resolvendo a atividade complementar do 1º encontro

Fonte: elaboração nossa

A figura a seguir mostra um item da atividade complementar no qual uma das professoras-alunas não conseguiu compreender a relação entre as peças do Material Dourado e as quantidades. Nesse exemplo, embora o número apontado seja 357, a quantidade de cubões foi questionada no intuito de verificar se a compreensão tinha ocorrido ou não. A escrita de algumas respostas não foi inferida pela nossa análise, pois não compreendemos o que a escrita quis mostrar, como na pergunta ‘Quantos cubões cabem nesse número?’.

Figura 21 – Compreensão da relação entre as peças do Material Dourado e o número 357



b) Construir o número 357.

Quantos cubinhos cabem nesse número? 10

Quantas unidades simples tem esse número? 3

Quantas barras cabem nesse número? 30

Quantas dezenas simples tem esse número? 300+50+7

Quantas placas cabem nesse número? 100

Quantas centenas simples tem esse número? 3

Quantos cubões cabem nesse número? 1000+50 7

Quantas unidades de milhar cabem nesse numero? 1000

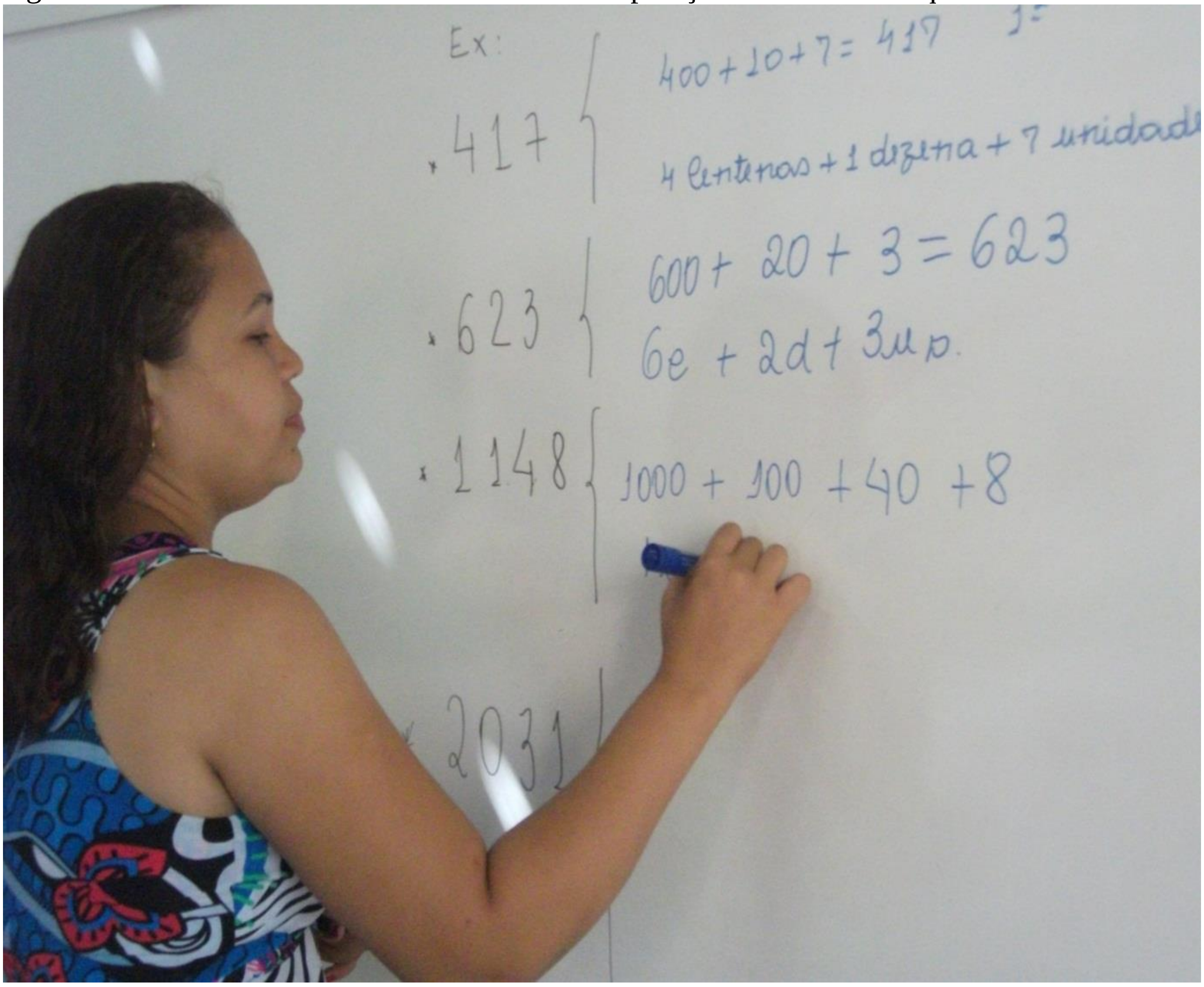
Fonte: Atividade complementar individual – 1º encontro da oficina

Conjecturamos apenas que, na atividade anterior a professora-aluna tentou mostrar através da decomposição a quantidade de unidades simples em cada item. Não abstraiu no momento da manipulação com o Material Dourado planificado a relação das peças com as ordens e nem tão pouco com as quantidades envolvidas em cada caso.

No 2º encontro, trabalhamos o sistema de numeração decimal posicional. No primeiro momento desse encontro, exploramos o surgimento da contagem e o desenvolvimento dos sistemas de numeração. Fizemos uma pequena análise sobre o processo histórico do desenvolvimento dos sistemas de numeração.

No decorrer do encontro, fizemos algumas considerações sobre a ideia de número, algarismo e numeral. A representação dos números naturais, as ordens e as classes, os valores absoluto e relativo (posicional). A decomposição também foi explorada tanto do número, indicando o algarismo que ele ocupa quanto a decomposição indicando a quantidade de unidades que cada número representa.

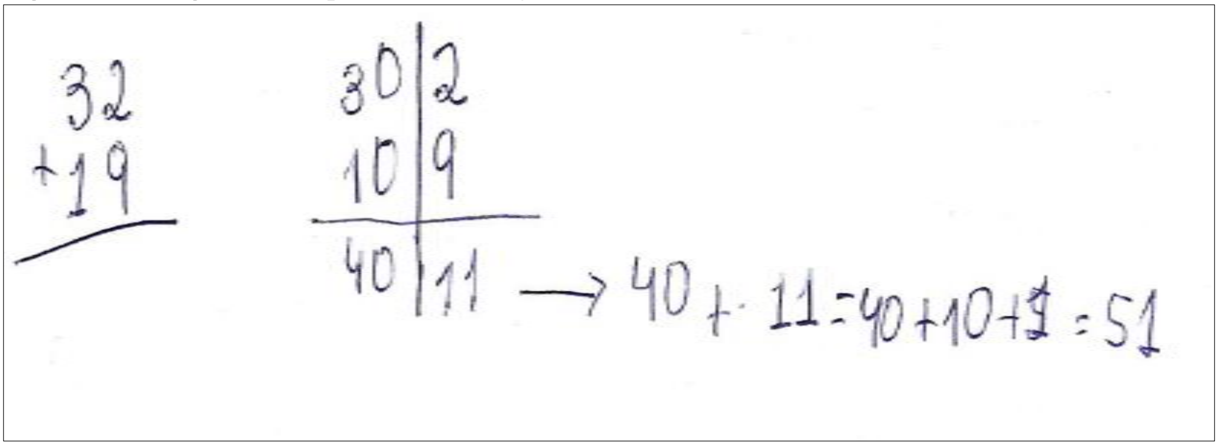
Figura 22 – Professora-aluna resolvendo a decomposição do número no quadro



Fonte: elaboração nossa

A partir do 3º encontro, as operações fundamentais começaram a ser trabalhadas e, a adição com e sem agrupamento foi a primeira delas. Na oficina, a sequência dada foi a seguinte: começamos com os nomes dos termos, em seguida com a manipulação do Material Dourado para somar quantidades, depois o algoritmo expandido ou com decomposição e por último o algoritmo abreviado ou simplificado, no qual supomos ser o que a maioria das professoras-alunas, usam no dia a dia da sala de aula. Pouco tempo depois as mesmas confirmaram nossa suposição.

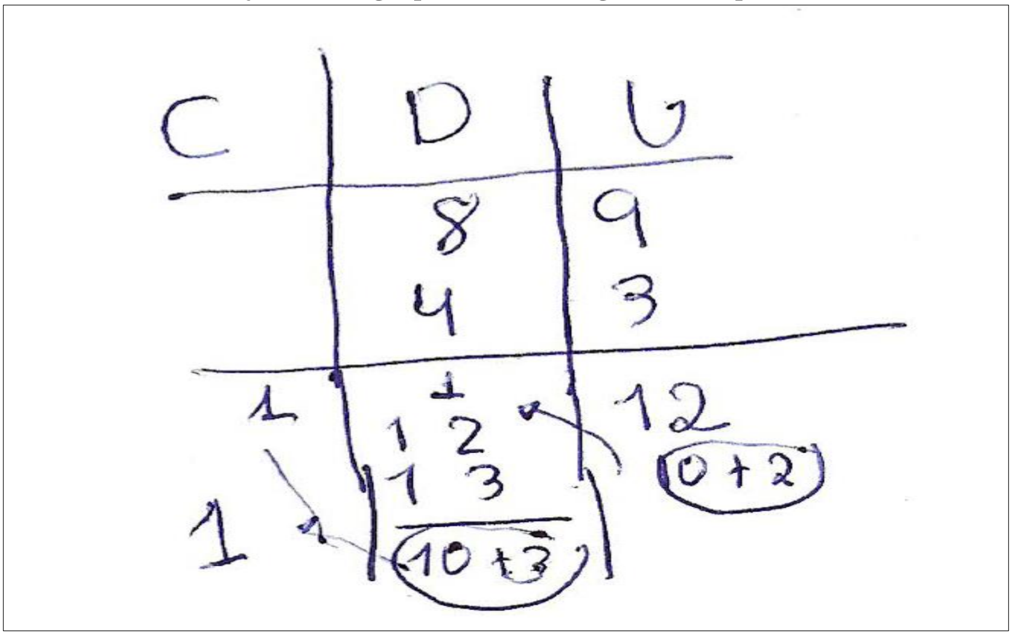
Figura 23 – Algoritmo expandido da adição



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

As alunas afirmaram, de uma forma geral que o algoritmo expandido facilita mais a compreensão, mas não descartaram a importância do algoritmo abreviado. O Material Dourado também foi citado como um excelente recurso didático para facilitar a aprendizagem da adição, pois não apenas nessa, mas em todas as operações nos dá uma ideia concreta do conteúdo que está sendo abstraído. O algoritmo a seguir mostra claramente que as alunas trabalharam o princípio básico do sistema de numeração decimal posicional, sobre a quantidade máxima que cada ordem pode ter. Na escrita do algoritmo é claramente possível perceber a compreensão do número máximo de unidades que cada ordem pode comportar, no caso, o valor máximo é de nove unidades visto que dez unidades significa que deve ocorrer a troca da ordem por outra imediatamente superior.

Figura 24 – Cálculo da adição com agrupamento no algoritmo expandido

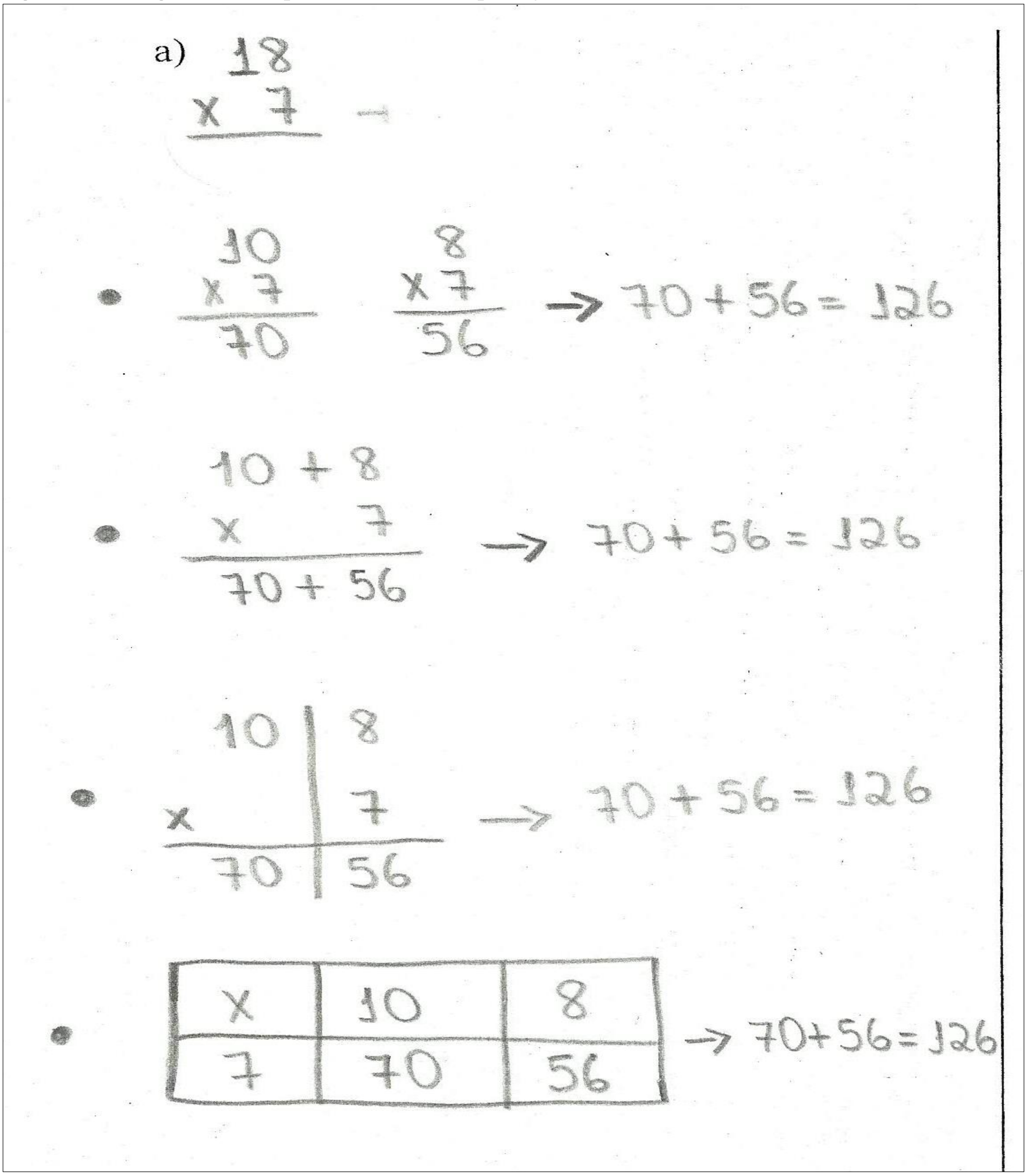


Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

No 4º encontro, a subtração foi explorada e seguimos a mesma sequência da adição, os nomes dos termos, a manipulação do Material Dourado, o algoritmo expandido e o algoritmo abreviado para fixar a compreensão. Propomos exemplos como $1089 - 378$ e $1000 - 1$, visto que, no pré-teste, diagnosticamos a dificuldade em subtrair quando há necessidade de desagrupar e, na análise dos itens respondidos ainda nessa fase, identificamos subtração cuja porcentagem de erro foi 100%. Diferentemente da adição, cada transformação ocorre de uma ordem superior para uma ordem imediatamente inferior. Na manipulação com o Material Dourado, as professoras-alunas também apresentaram dificuldades. Nenhuma delas até então havia trabalhado a subtração com esse recurso didático. Algumas afirmaram que trabalhar com o Material Dourado auxilia a compreensão, porém precisariam de mais tempo para aprimorar o uso.

A multiplicação foi explorada no 5º encontro. Seguimos a mesma sequência das duas operações anteriores. No que se refere ao uso do Material Dourado, todas acharam fácil trabalhar a multiplicação. Os agrupamentos feitos são com a mesma quantidade de peças, reforçando assim a definição da multiplicação como uma adição de parcelas iguais apresentada por Caraça (2010) desde o início de nossa pesquisa. Nessa operação, apresentamos às alunas quatro tipos de algoritmos expandidos ou com decomposição.

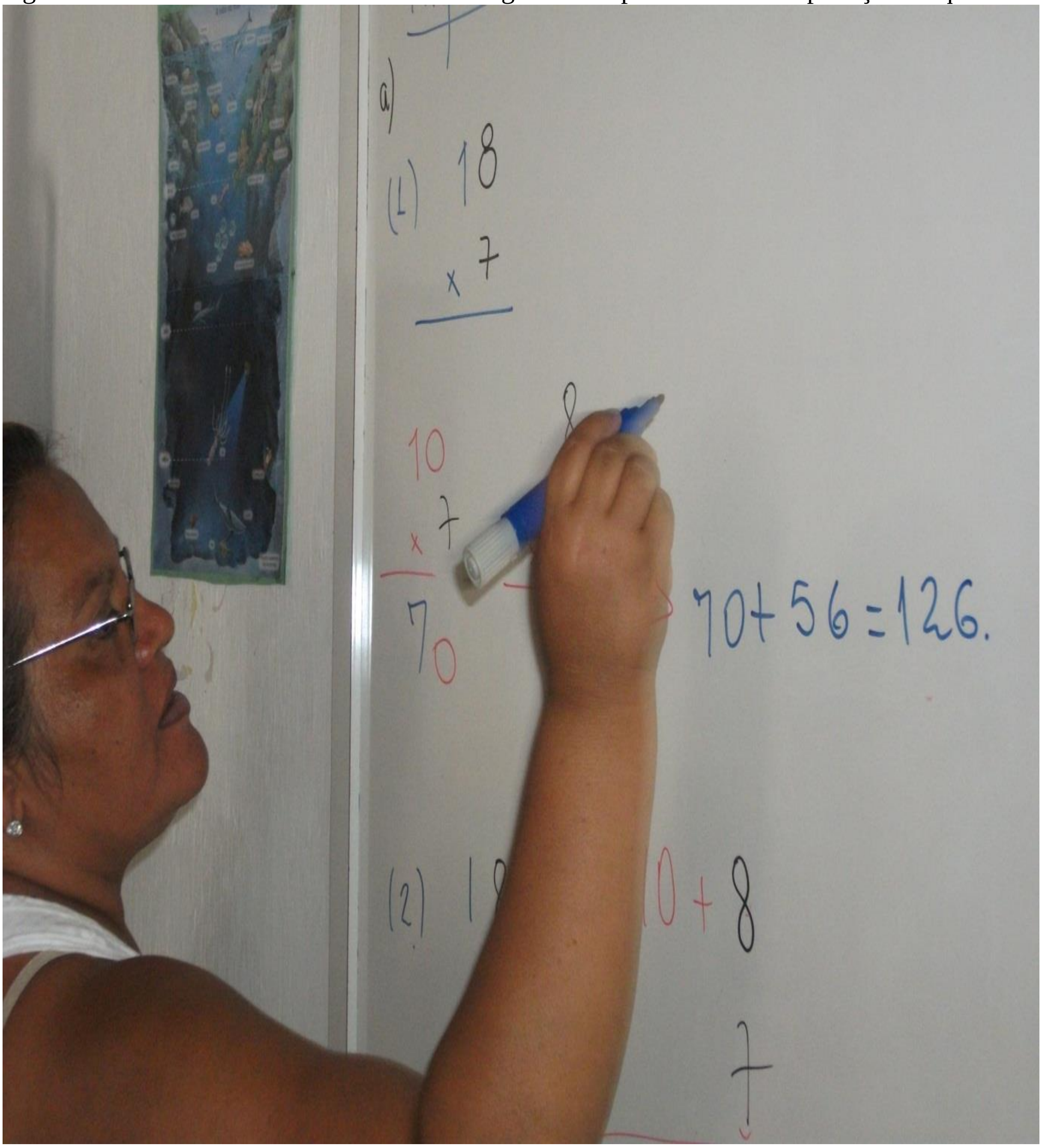
Figura 25 – Algoritmos expandidos da multiplicação



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

Dos quatro tipos apresentados, na sequência de cima para baixo as alunas conheciam o 2º e o 4º tipo, mas admitiram que todos eles são de fácil compreensão e, ainda mais, força o cálculo mental.

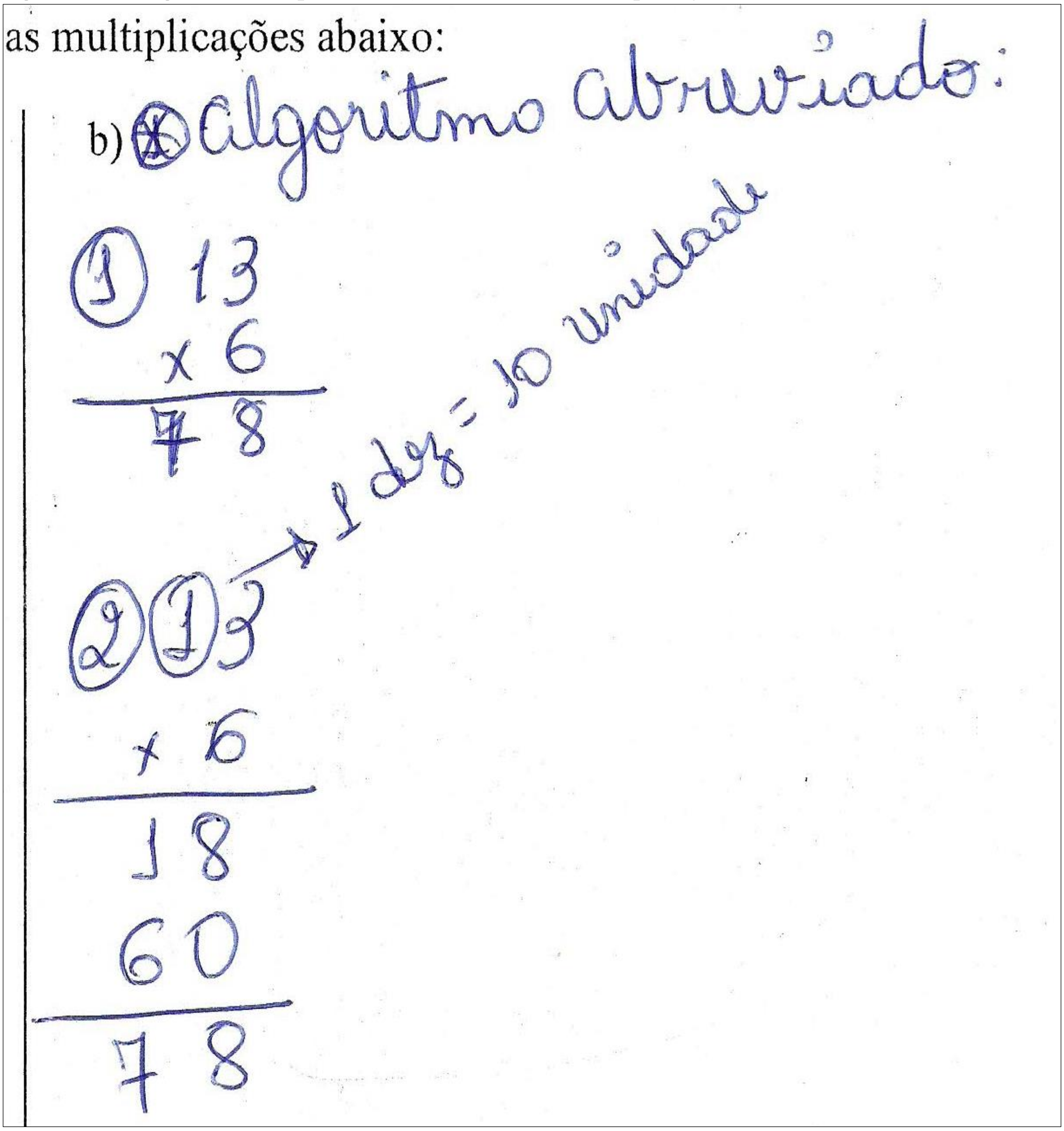
Figura 26 – Professora-aluna trabalhando o algoritmo expandido da multiplicação no quadro



Fonte: elaboração nossa

O algoritmo abreviado foi trabalhado das duas formas. A segunda maneira não era conhecida por nenhuma das alunas.

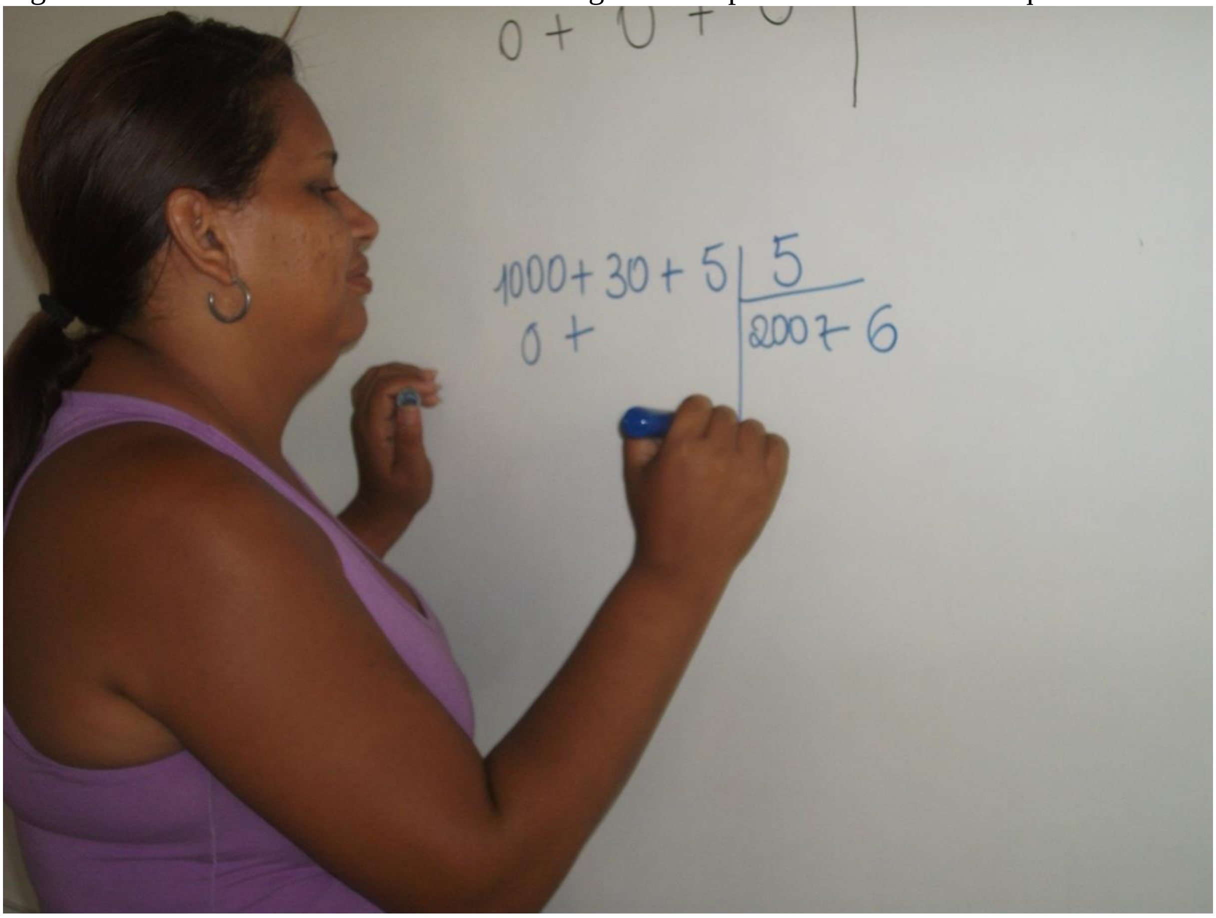
Figura 27 – Algoritmo simplificado (abreviado) da multiplicação: outra forma



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

No 6º encontro, demos uma pausa e fomos questionar as ideias de cada operação até então estudada e, em seguida, fizemos o mesmo questionamento para a divisão. Algumas professoras-alunas afirmaram que a divisão é mais difícil de ser trabalhada em sala de aula, outras, admitiram que a dificuldade está com elas mesmas. Quando utilizaram o Material Dourado, perceberam que a distribuição das peças, mesmo quando há troca, é bem mais simples do que trabalhar apenas com a escrita.

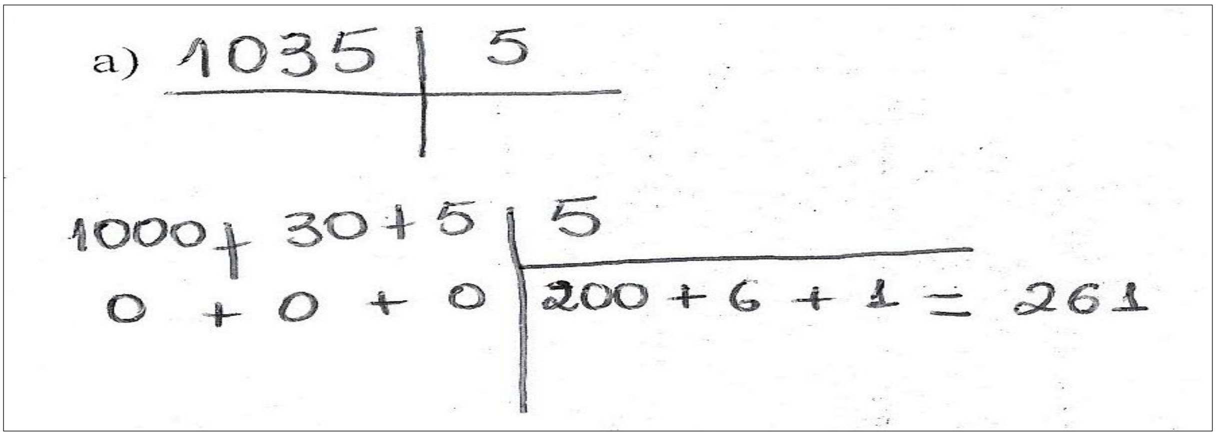
Figura 28 – Professora-aluna trabalhando o algoritmo expandido da divisão no quadro



Fonte: elaboração nossa

Quando começaram a trabalhar o algoritmo expandido ou com decomposição perceberam maior flexibilidade com o cálculo. Observe o exemplo a seguir, cuja divisão é $1035 \div 5$.

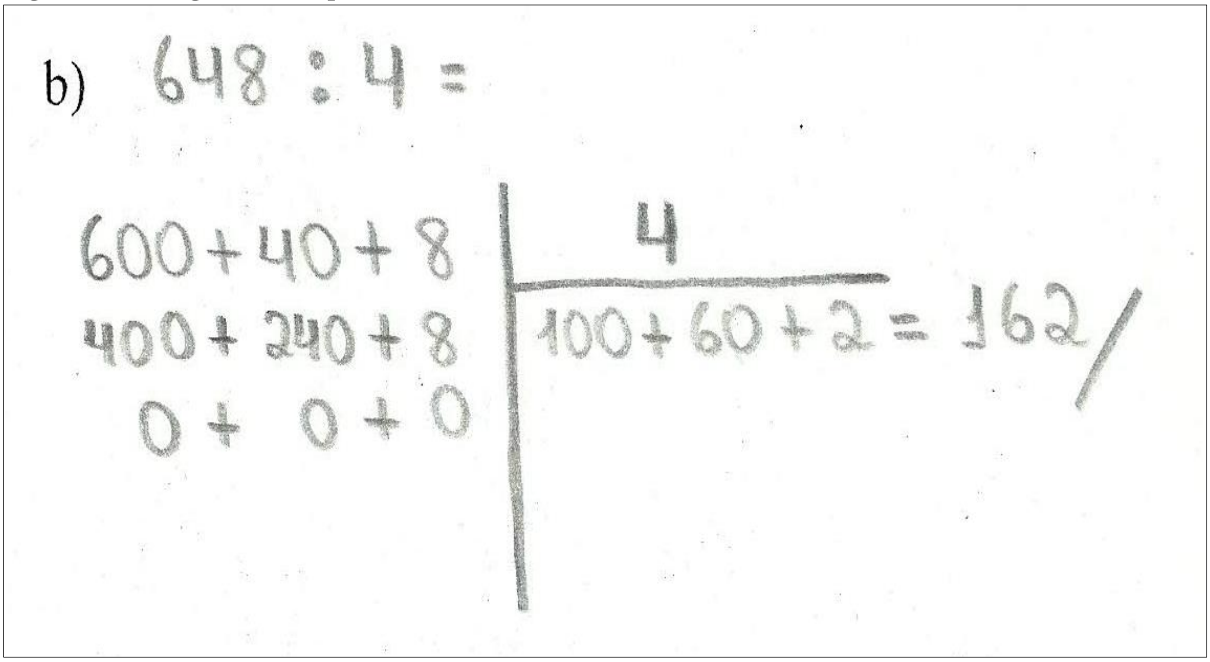
Figura 29 – algoritmo expandido da divisão



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

A flexibilidade mencionada refere-se a agrupamentos diferentes que podem ser feitos para melhor trabalhar a divisão. Na divisão $648 \div 4$, as professoras-alunas fizeram $600 + 40 + 8$, mas perceberam que também poderiam escrever como no exemplo abaixo.

Figura 30 – Algoritmo expandido da divisão: outra forma



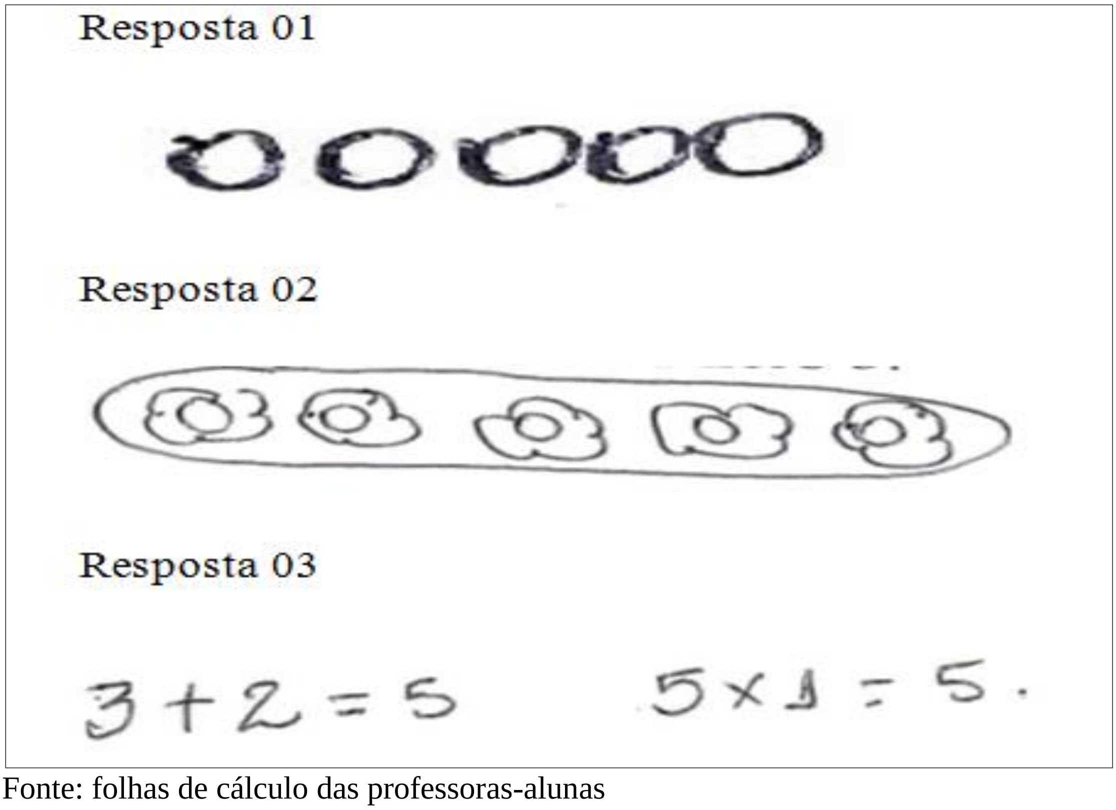
Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

A oficina transcorreu com alguns obstáculos. Todas as professoras-alunas participaram voluntariamente dos encontros. O período era de férias escolares, porém elas continuavam trabalhando e organizando as escolas para o retorno das aulas. Acordamos com a direção de cada escola, que iríamos realizar nossa oficina em cinco dias, mas por um contratempo de duas escolas, tivemos que nos encontrar mais um dia. Quando estruturamos o pré-teste, a oficina e o pós-teste, pensamos inicialmente em trabalhar o sistema de numeração decimal posicional, as operações fundamentais e suas propriedades. As dificuldades que surgiam no campo conceitual impediram de seguirmos adiante com as propriedades sem nos determos nas propriedades. Dois dias depois do término da oficina, voltamos às escolas para realizarmos o pós-teste, apenas 80% das participantes estavam na última fase da pesquisa.

5 RESULTADOS

A atividade 01 refere-se ao sistema de numeração decimal posicional. O item 01 dessa atividade pede a representação do número natural cinco. O objetivo era que esse item fosse semelhante ao item 01 do pré-teste, seguindo o raciocínio de Kamii (2001) o qual afirma que, para entendermos a ideia de número, é necessário entendermos também ordem e inclusão hierárquica. Apresentamos algumas respostas dadas:

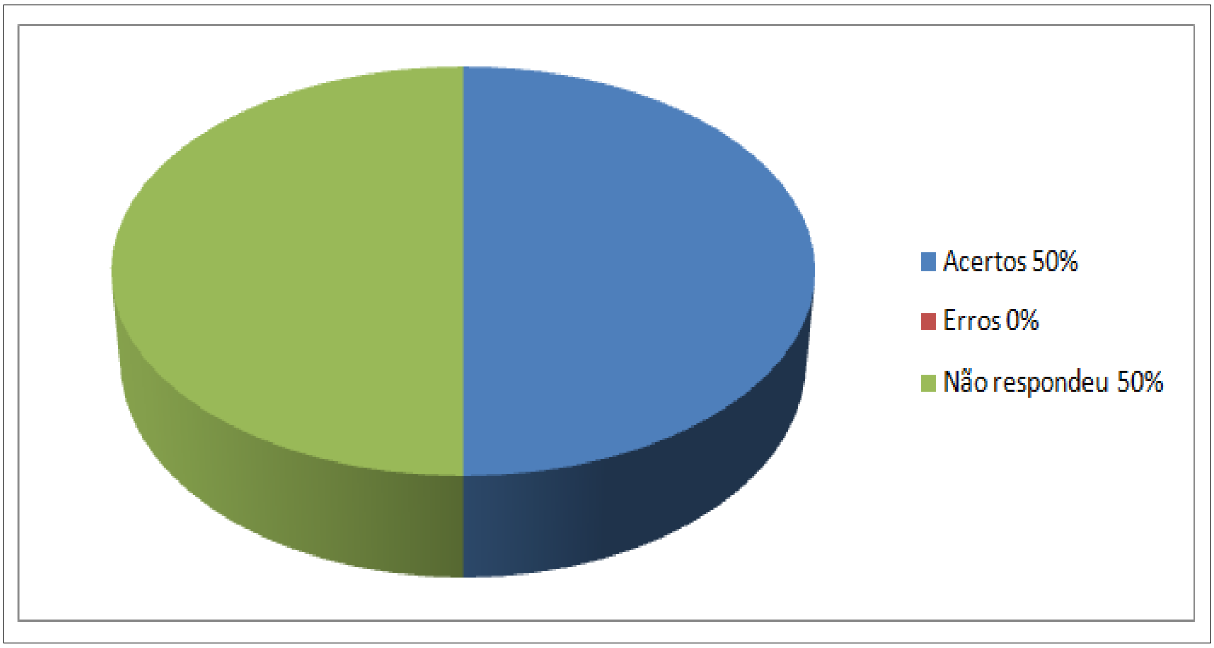
Figura 31 – Representação do número cinco



Fonte: folhas de cálculo das professoras-alunas

Na resposta 03, percebemos um entendimento maior da aluna que respondeu dessa forma, pois já consegue perceber o número natural cinco como parte de uma operação, quando este realmente é. Comparando os resultados do pré-teste e do pós-teste, identificamos o seguinte:

Gráfico 13 – Ideia do número cinco



Fonte: elaboração nossa

Com esse resultado, diagnosticamos um aumento de 50% do aprendizado, visto que antes da oficina nenhuma professora-aluna acertou a resposta.

No item 02, voltamos a explorar a sequência dos números naturais, o que foi surpreendente no resultado sobre o zero ser ou não um número natural. Nesta fase final, 75% do total afirmaram que sim, o zero é um número natural, em contraste com 40% antes da capacitação. Apenas 25% afirmaram que o zero não é um número natural, mostrando assim que todas responderam a esse item que além de questionar sim ou não, pergunta por quê. Para as respostas que admitem o zero como um número natural ou não, resolvemos destacar aqui duas justificativas. 'Nosso sistema precisa dele para efetuar as operações' para o caso sim. Para o não, o argumento foi de que o zero 'é apenas um complemento para os números naturais'. Além de enfatizarmos o papel do zero em nosso sistema de numeração, percebemos ainda na oficina que a influência do livro didático é muito forte na prática de ensino das professoras. Seus argumentos estavam todos voltados para o livro didático, daí a defesa do zero como um número natural.

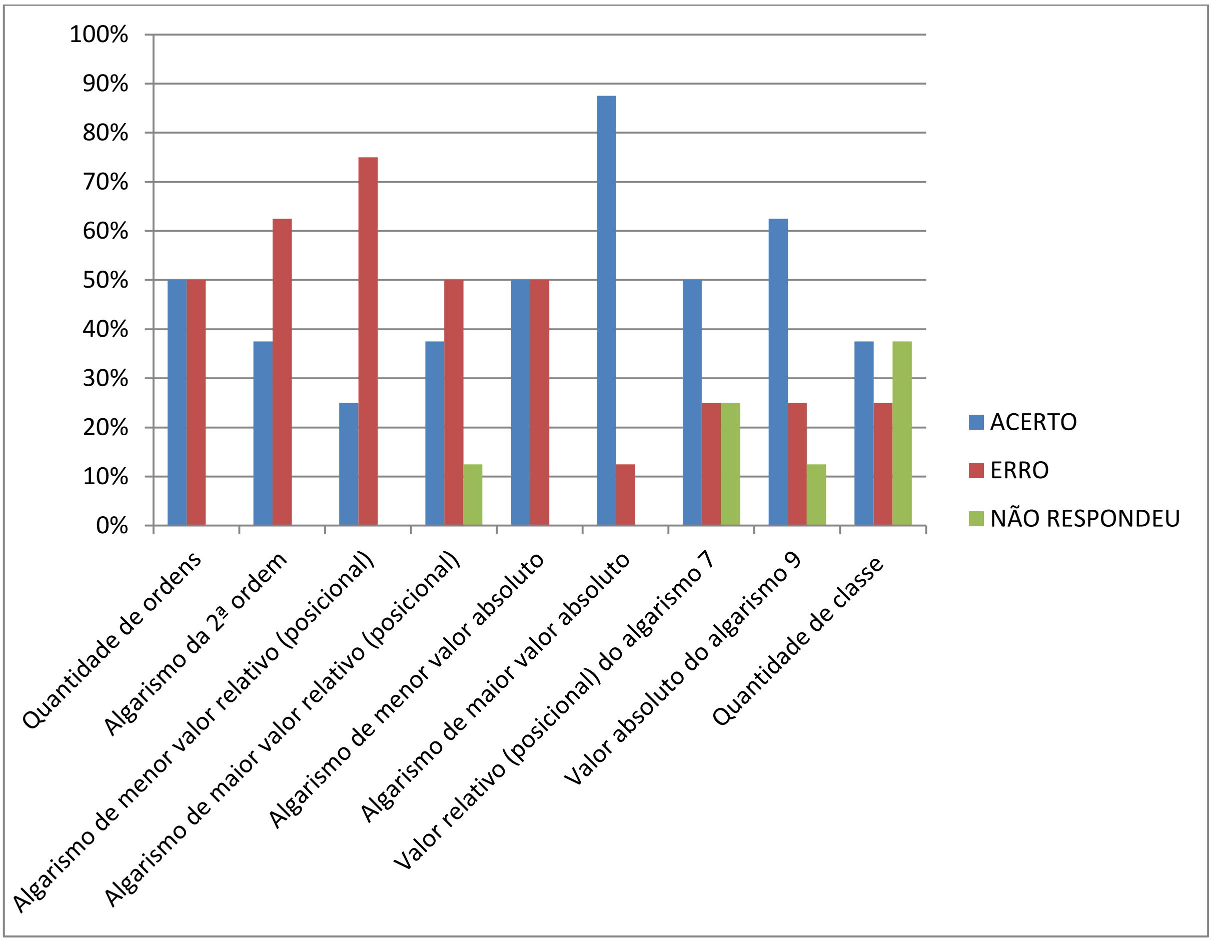
No mesmo item, as participantes responderam sobre a existência do maior de todos os naturais. Mesmo as que responderam sim, que existe o maior natural, algumas respostas apontavam para o infinito. Comparando o resultado com o pré-teste, o número 9 continuou sendo considerado como o maior natural por algumas delas. Apontar o número 9 como o maior natural é uma evidência concreta da falta de entendimento do campo dos naturais. No encontro em que exploramos essa questão, várias discussões surgiram e tentamos esclarecer as dúvidas apresentadas pelas professoras-alunas. Outra consideração que achamos relevante é o número 6 como resposta para o maior número natural. A aluna observou a sequência na qual os números naturais estavam dispostos em nosso pré-teste, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... A gravidade do erro encontra-se no não reconhecimento da sequência com infinita. Destacamos aqui nossa postura a partir de uma análise do processo histórico do surgimento dos números naturais e com base nos axiomas de Peano, não consideramos o zero com um número natural, daí entendemos que houve uma evolução no entendimento da sequência e no reconhecimento da existência do maior número no campo dos naturais, apenas 37,5% do total responderam que sim, contrapondo-se a 70% no primeiro questionário.

Sobre sucessão de um número natural, trabalhamos com duas perguntas: o que vem imediatamente depois e sucessor. A primeira teve 75% do total de acerto e a segunda 62,5% em cada uma delas apenas uma professoras-aluna deixou de responder o que mostra também uma evolução no entendimento desse assunto.

Destacamos novamente um item sobre algarismo e numeral. Percebemos que houve um regresso com relação ao entendimento do algarismo. Após a oficina apenas 50% responderam que os dez símbolos utilizados para representar qualquer número natural são algarismos. Este resultado vai de encontro ao pré-teste no qual 70% do total vinha com essa concepção. A evolução se deu no sentido de que diferente do pré-teste, no pós-teste, todas as participantes responderam os itens. Na oficina, exploramos o conceito de número e a diferença entre número, algarismo e numeral. Percebemos que metade confundiu numeral com algarismo devido à própria definição de numeral, quando afirma ser possível representar o número também na escrita.

No item 03, a análise foi em relação ao número 49.078. Observemos o gráfico abaixo:

Gráfico 14 – Análise do número 49.078



Fonte: elaboração nossa

A maior parte das respostas erradas apontam para duas ordens apenas no número em questão. Identificamos uma confusão entre a quantidade de ordens e de classes do número. No que se refere ao algarismo da 2ª ordem, identificamos um item com duas respostas marcadas uma no 4, e outra no 9. Esse fato confirma nosso argumento anterior, pois tanto o algarismo 4 como o 9 pertencem a 2ª classe e não 2ª ordem. Em relação aos valores relativos e valores absolutos, maior e menor, houve um progresso, com exceção do menor valor relativo. A tabela anterior quando comparada com a do pré-teste que trata do mesmo assunto mostra que houve uma melhor compreensão. Pois as porcentagens de erros referentes à ordem diminuíram.

Analisando ainda os resultados da tabela acima, em relação ao menor valor absoluto, todas as respostas erradas apontam para o algarismo 4. Não identificamos a dúvida que se estabelece nesse item. Na oficina, o valor absoluto foi destacado com sendo o valor do próprio algarismo, nesse caso o 4 não era o menor deles. Assim como o valor absoluto, no número em questão, o algarismo 4 está na maior ordem, portanto não poderia estar na ordem de unidades simples. O maior valor absoluto teve o maior aumento no que se refere à compreensão, porém o único erro apresentado aponta para o algarismo 4. Nesse caso, foi possível perceber a confusão estabelecida entre maior valor absoluto e maior valor relativo (posicional). Sobre o valor relativo do 7, as respostas oscilam entre 7 e 70 e em relação ao algarismo 9 também.

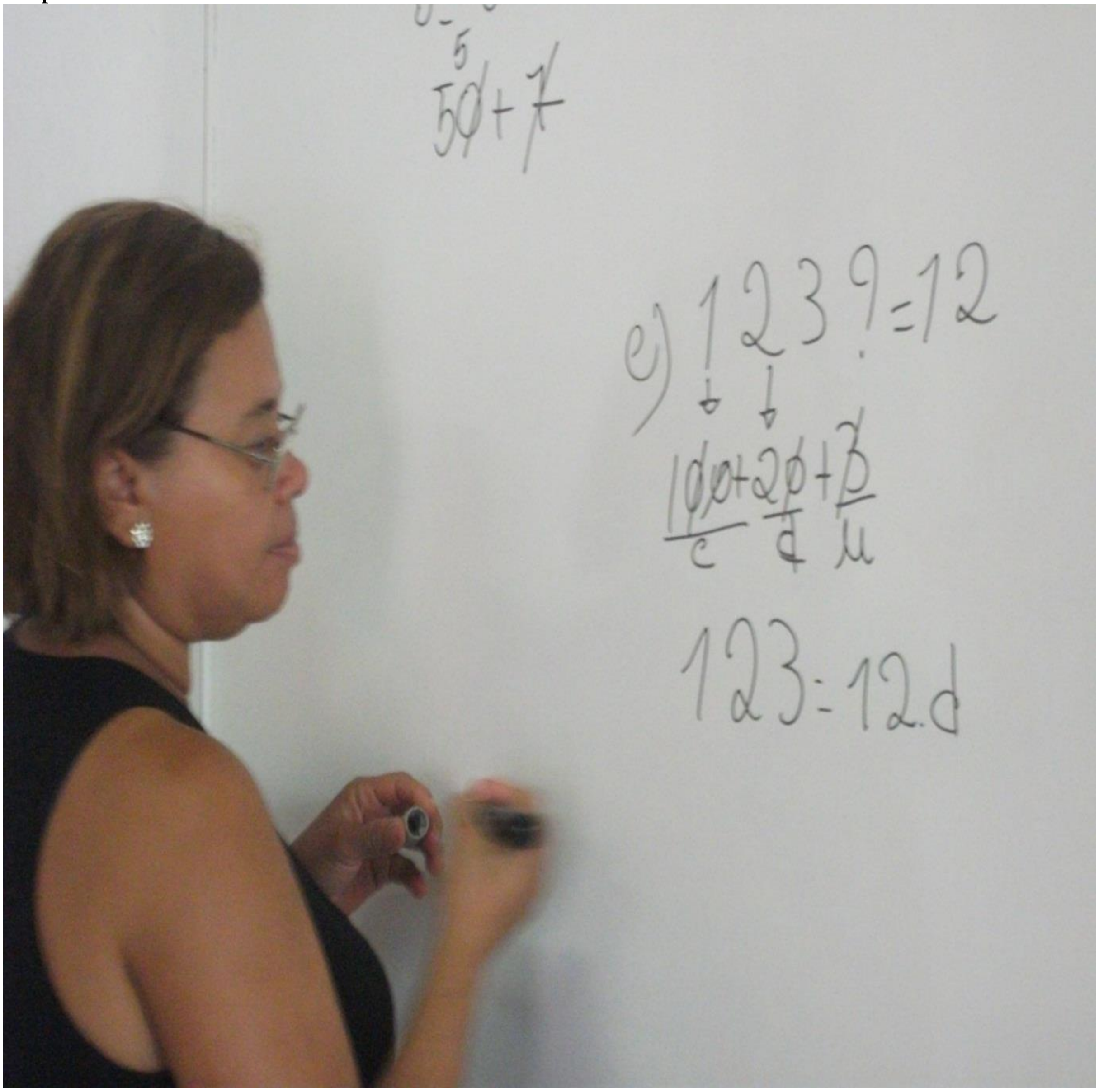
O número de classes que o número 49.078 tem é relevante e o que nos chamou atenção foi a quantidade de paricipantes que não responderam esse item, 37,5%. Nas classes estão incluídas as ordens e segundo Kamii (2001) a inclusão de classes é essencial para o indivíduo compreender a ideia de número. Embora não tenha entrado na tabela os nomes das classes foi questionado, nenhuma aluna acertou os nomes das classes. Para a leitura, escrita e compreensão dos números naturais esse conhecimento é fundamental.

No item 04 exploramos as mesmas questões apresentadas no pré-teste: Por que nosso sistema de numeração é decimal? Por que é posicional? Por que é conhecido com indo-arábico? Na primeira pergunta do item temos 62,5% do total divergindo 20% do total da primeira fase da pesquisa. O segundo questionamento ficou com 75% do total com as respostas certas e a terceira pergunta ficou com 37,5% do total com os acertos. Os índices de 'não respondeu' caíram de forma significativa, quando comparamos o antes e depois da oficina. Temos 60% e 50% do total respectivamente, da primeira e da segunda pergunta no pré-teste e 25% e 12,5% do total em relação ao pós-teste. Em relação ao termo indo-arábico o índice 'não respondeu' também foi reduzido, mas consideramos a porcentagem de 50% na última fase da pesquisa como alta.

Embora o processo histórico do desenvolvimento do nosso sistema de numeração tenha sido considerado, a maioria não assimilou a ideia, pois temos 50% de 'não respondeu' somado com 12,5% de 'erro'. O que nos chama atenção é o fato de os livros didáticos trazerem na introdução do capítulo sobre sistema de numeração decimal posicional algumas considerações sobre esse conteúdo. Durante toda a oficina, as professoras-alunas comentavam sobre os livros com os quais elas trabalham, mostrando assim que ele é um recurso usado no dia a dia da sala de aula e poucas souberam responder.

No item 06 da atividade 01, analisamos o número 346 das duas formas de decomposição, assim como a quantidades das unidades simples, dezenas simples e centenas simples que ele tem. Essa atividade foi enfaticamente trabalhada no encontro.

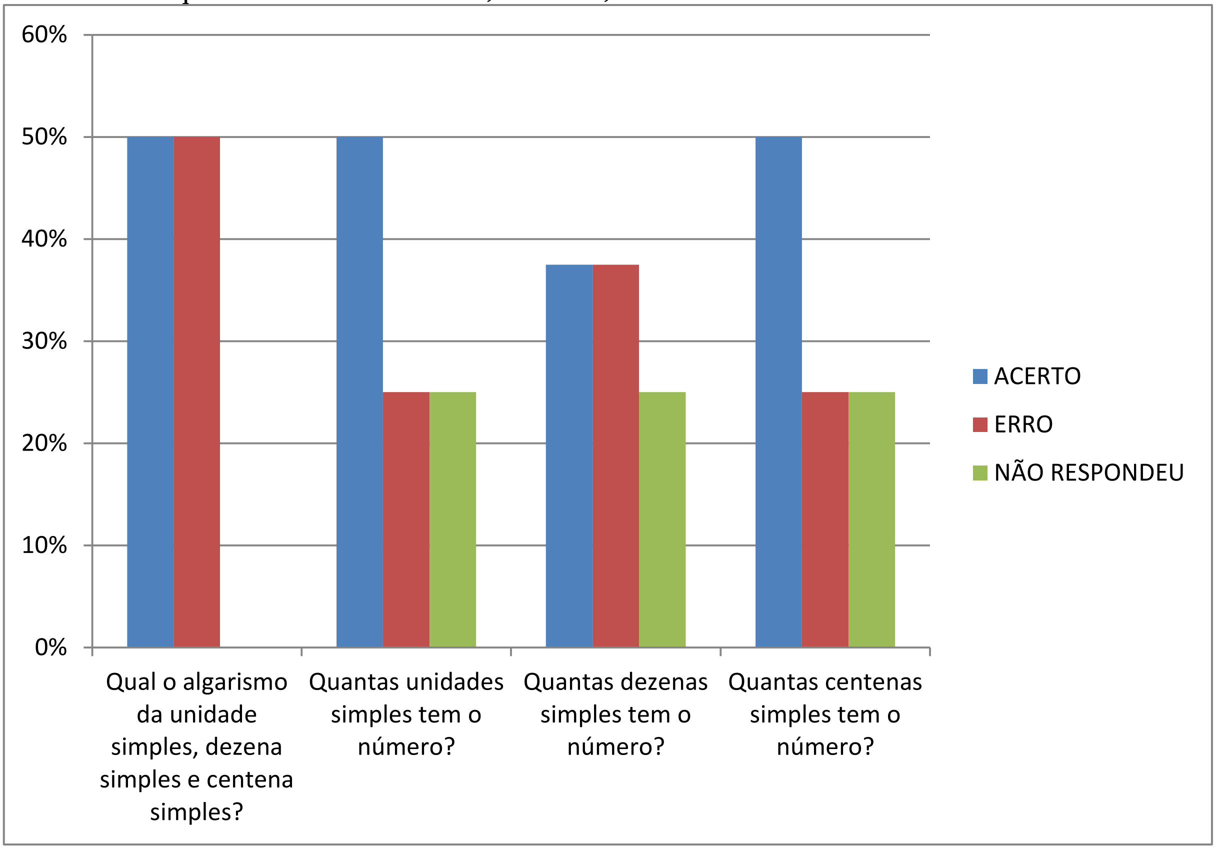
Figura 32 – Professora-aluna decompondo o número indicando o algarismo e a ordem que ocupa



Fonte: elaboração nossa

Dentre as respostas apresentadas, 50% que erraram trocaram o algarismo das unidades simples com o algarismo das centenas simples, o algarismo das dezenas simples se manteve no mesmo lugar tanto nas certas, como era de se esperar, quanto nas repostas erradas. Sobre a quantidade de unidades simples que o número tem, o 6 apareceu na porcentagem dos erros. Para algumas alunas a compreensão de quantidades, mesmo fazendo a decomposição do número não foi fixada. A quantidade de dezenas foi confundida com valor posicional e respostas indicando que o número tem 40 dezenas simples e não 34 foram apresentadas no pós-teste. Algo semelhante ocorreu com as quantidades de centenas simples.

Gráfico 15 – quantidades de unidades, dezenas, centenas do número 346



Fonte: elaboração nossa

Pedimos mais uma vez que as professoras-alunas descrevessem uma das funções do zero. Mesmo depois de algumas discussões a respeito do assunto, tivemos uma resposta errada e, o restante do grupo não respondeu.

Em relação ao conhecimento de outros sistemas de numeração, apenas o sistema romano foi citado corretamente. Algumas insistiram em citar ‘sistema ordinal’ e ‘sistema cardinal’ como no pré-teste. No mais, 50% não responderam.

Finalizamos a atividade 01, insistindo na relevância do sistema de numeração decimal posicional. Selecionamos algumas das respostas: ‘usamos no dia a dia e na escola’, para ‘entendermos e diferenciarmos os números e a posição que os algarismos ocupam’, para a ‘compreensão e leitura de número’. Vemos uma pequena evolução na compreensão da relevância do sistema de numeração. Reconhecemos que 50% das entrevistadas estão há mais de 10 anos em sala de aula e sua maneira de trabalhar está enraizada na sua prática de ensino. Modificar a visão de como trabalhar alguns conteúdos não pareceu para nós uma tarefa tão simples.

Analisando as operações vamos iniciar pela adição. Embora tenha ocorrido um decréscimo no índice de erro com relação aos nomes dos termos, não significa que o índice de acertos aumentou, pelo contrário, apenas 62,5% do total acertaram comparado ao valor do pré-teste que foi de 70%. Os nomes ‘adicionando e adicionador’ também foram apresentados às professoras-alunas no encontro que trabalhamos a adição. Mas no pós-teste, quando perguntadas sobre outros nomes dos termos da adição, ninguém soube responder.

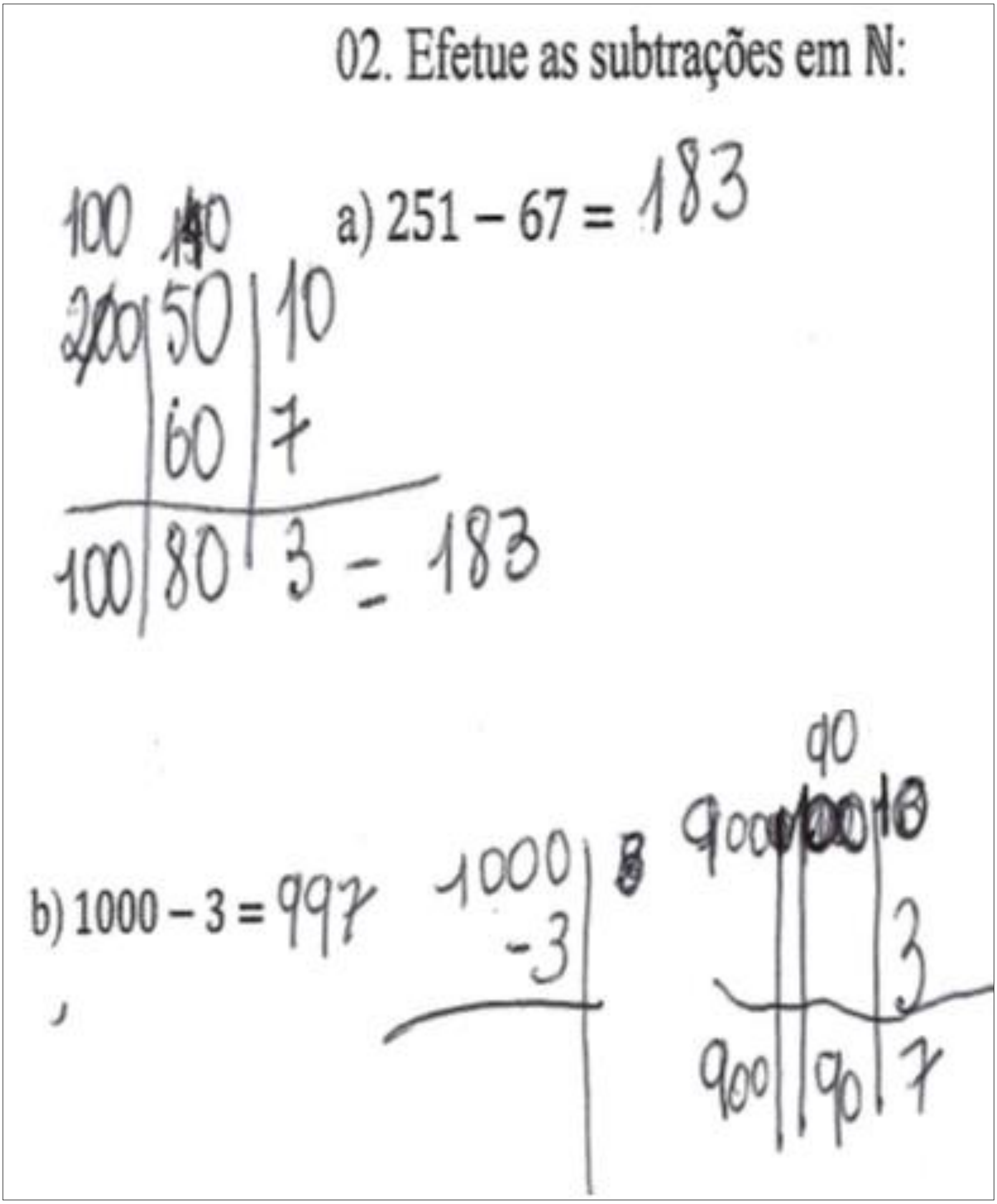
No pré-teste, propomos quatro adições duas com e duas sem agrupamento. No pós-teste apresentamos apenas duas adições com agrupamento para resolução. Fazendo uma comparação com as anteriores, percebemos que houve uma redução no índice de acertos. Tanto a primeira quanto a segunda apresentou apenas 62,5% de acertos e, mesmo sendo trabalhada a manipulação do Material Dourado, e o algoritmo expandido ou com decomposição, as participantes optaram por usar o algoritmo abreviado. Uma das respostas chamou-nos atenção, pois apresentava o quadro de valor que não foi trabalhada na oficina. O fato de nenhuma resposta apresentar outra forma de resolução trabalhada na oficina nos remete à visão de Pais (2002), quando menciona a epistemologia do professor embasada por crenças e costumes enrijecidos por anos de trabalho, gerando uma visão mais pessoal do que científica ou técnica.

Na análise da subtração os nomes dos termos foram mais uma vez considerados. Assim como na adição, dos 70% do total que acertaram na primeira fase da pesquisa, apenas 62,5% finalizaram com os acertos. O percentual de professoras-alunas que não responderam subiu de 20% do total para 25%.

Na subtração, fizemos algo semelhante. Propomos apenas duas subtrações com desagrupamento e, 62,5% do total acertaram o que consideramos um avanço considerável, pois comparando ao pré-teste, nesse tipo de subtração, 40% do total acertaram uma e 0% acertou a outra. Dos cálculos apresentados, independentes de estarem corretos ou não, 12,5% trabalharam o algoritmo expandido em cada uma das operações. Todos os outros foram feitos com o algoritmo abreviado. 25% do total não responderam as subtrações, indicando um aumento em relação ao pré-teste.

Em um dos algoritmos, o erro ocorreu exatamente na finalização do cálculo no algoritmo expandido ou com decomposição. Nesse momento, percebemos que, embora as técnicas tenham sido trabalhadas no encontro, ainda faltava o domínio das mesmas. Porém, no outro item do exercício, é possível ver claramente o acerto, mesmo sem o domínio da técnica.

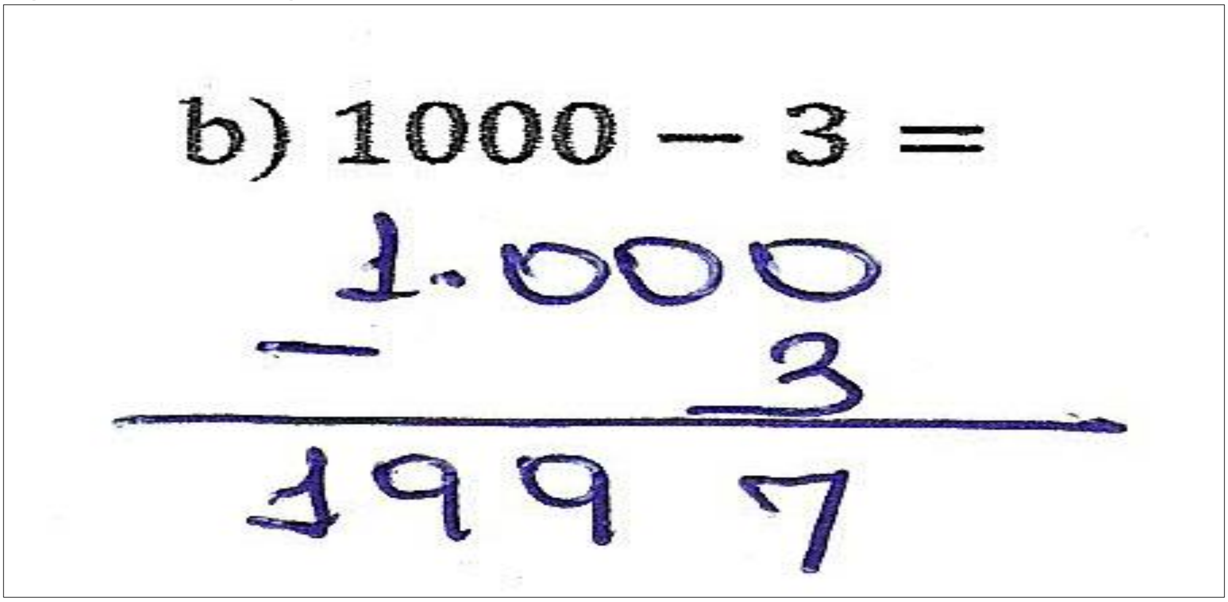
Figura 33 – Algoritmos da subtração no pós-teste



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

Destacamos, a seguir, outro cálculo cuja resposta mostra claramente a falta de compreensão da técnica. A aluna não fazia ideia do que estava resolvendo. De 1000 retiraram-se 3 unidades e o resultado aumenta para 1997. Neste caso, o erro conceitual é fato e uma parte da proposta da oficina foi trabalhar maneiras diferentes de compreender e resolver as operações.

Figura 34 – Erro no algoritmo da subtração no pós-teste

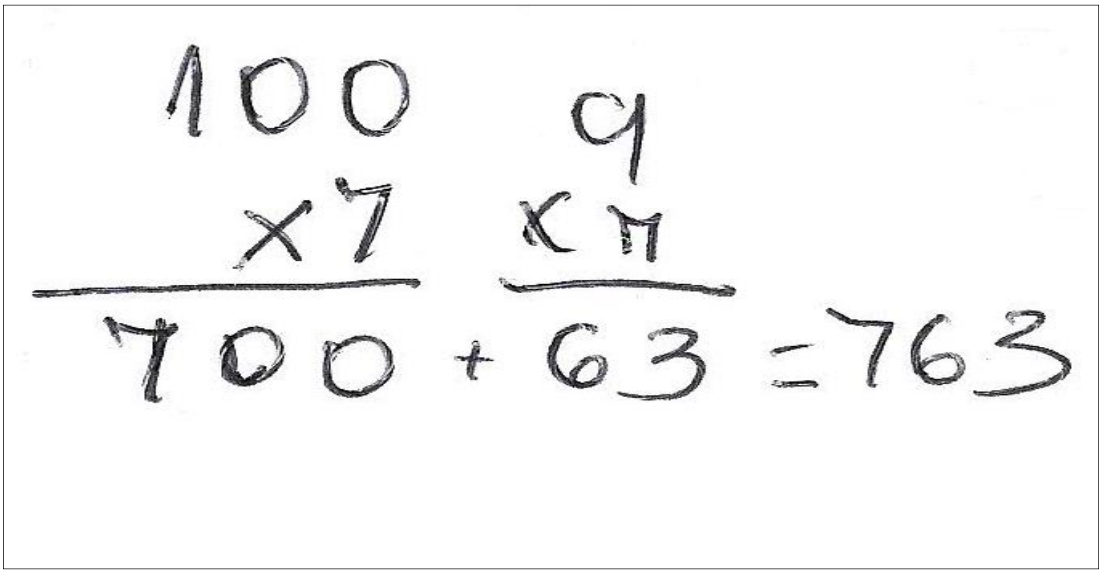


Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

Na multiplicação, podemos diagnosticar a partir do resultado que não houve mudança em relação aos acertos dos nomes dos termos. 50% do total continuaram denominando ‘multiplicando’, ‘multiplicador’ e ‘produto’, porém 25% desse total chamaram o resultado de ‘diferença’ ou ‘resto’, nomes dados ao resultado de uma subtração. Sobre outros nomes, tivemos um avanço. Apenas 75% do total não responderam comparados aos 90% do total na primeira fase da oficina.

As duas multiplicações que as professoras-alunas responderam no pós-teste mostraram um regresso com relação aos cálculos. Enquanto a média de acertos no pré-teste foi de 57,5% após a oficina apenas 37,5% do total de participantes acertaram as respostas. Porém o número das professoras que não responderam esse item subiu de uma média de 37,5% para 50% do total. Apenas 12,5% apresentaram o algoritmo expandido em apenas uma resolução.

Figura 35 – Algoritmo expandido da multiplicação no pós-teste



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

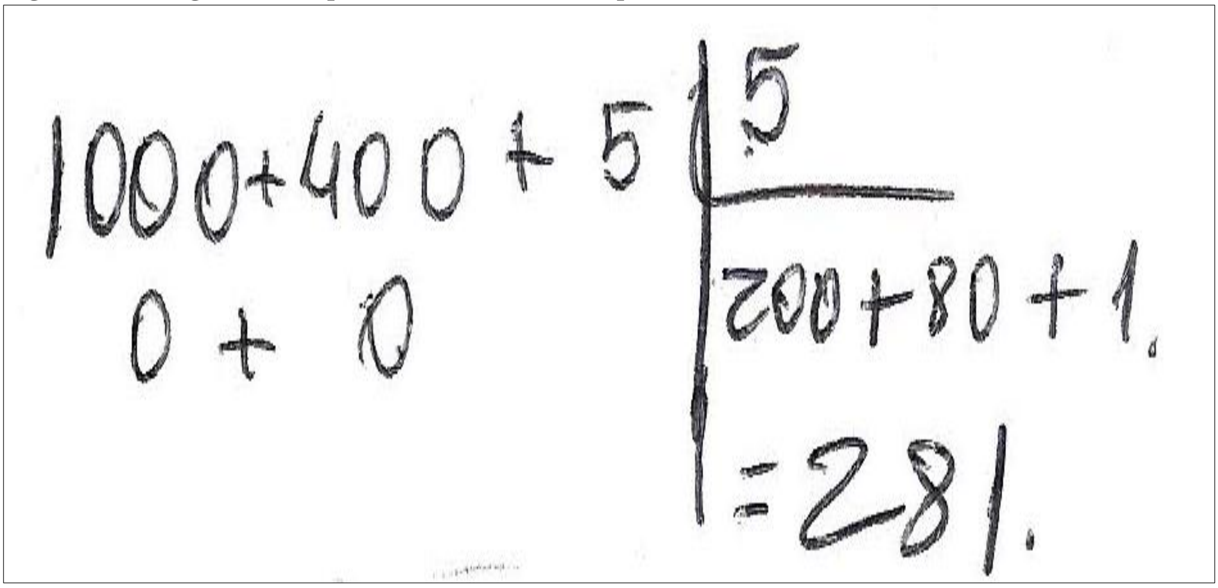
Dos cálculos apresentados, com respostas certas ou erradas, 50% do total estavam na forma do algoritmo abreviado. Em nosso entendimento, não houve avanço na multiplicação de números naturais.

Na divisão, mesmo depois da oficina, 62,5% do total acertaram os nomes dos termos em comparação a 70% do total das participantes do pré-teste. Tanto no pré-teste quanto no pós-teste, perguntamos intencionalmente se as professoras-alunas conheciam outros nomes dados aos termos da divisão. A diferença ficou exatamente no segundo teste, pois, na oficina, usamos apenas os termos ‘dividendo’, ‘divisor’, ‘quociente’ e ‘resto’. As participantes não atentaram para esse detalhe, o que nos chamou a atenção foi o fato de o índice de ‘não respondeu’, subiu de 70% do total para 100% do total. De certa forma, inferimos que, intuitivamente as participantes assimilaram essa informação.

Os cálculos da divisão também mostraram um regresso em relação ao resultado, uma média de 37,5% do total comparada aos 60% do início da pesquisa. Essa comparação está baseada apenas nas duas primeiras divisões do pré-teste por serem exatas. No pós-teste, não exploramos divisões não exatas.

Mesmo com uma predominância maior do algoritmo abreviado ou simplificado, obtivemos cálculos com o algoritmo expandido.

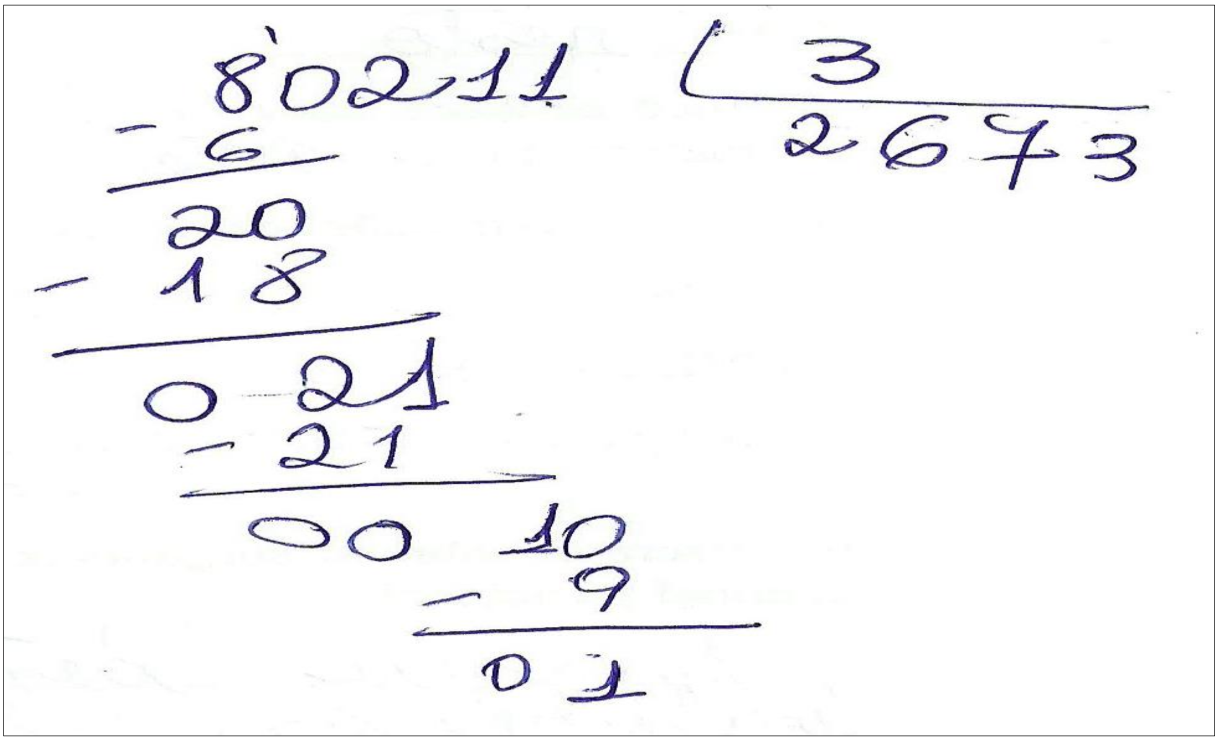
Figura 36 – Algoritmo expandido da divisão no pós-teste



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

Também fazemos questão de mostrar um algoritmo abreviado cuja resposta está errada. Notamos a dificuldade de identificar a próxima ordem que seria trabalhada no cálculo. A confusão se estabeleceu quando a ordem a ser baixada representada pelo algarismo 2 foi trocada pelo resto de uma subtração exigida por esse tipo de técnica.

Figura 37 – Erro no algoritmo abreviado da divisão no pós-teste



Fonte: folha de cálculo de uma das professoras-alunas

Finalizamos nosso pós-teste da mesma forma que o pré-teste. No primeiro, fizemos questionamentos sobre o surgimento dos números naturais e sobre o desenvolvimento do sistema de numeração. Nessa última fase, as professoras-alunas apontaram que o surgimento da contagem se deu 'pela necessidade de não poder contar', o que contradiz a história, quando diz que foi pela necessidade que o homem começou a contar. Outra resposta está relacionada com a seguinte situação: 'Contando com pedrinhas. Foi assim que surgiu'. 'As civilizações antigas começaram a contar'. 'O homem primitivo foi responsável pelo surgimento da contagem'. Em relação ao sistema de numeração decimal posicional, as respostas giram em torno dos hindus e dos árabes. Em outras respostas ligadas ao sistema de numeração, foram citados agrupamentos de 10 em 10. A base 10 foi citada, mas de uma maneira vasta sem conexão com nenhuma outra ideia. Entendemos que as respostas apresentadas aqui, mesmo com ideias vagas e de certa forma sem ligações umas com as outras, apresentaram mais consistência no que se refere ao conhecimento do surgimento dos números naturais e com o desenvolvimento do sistema de numeração do que as apresentadas no pré-teste. Na análise 25% do total deixaram de responder.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisarmos a educação do século XXI, percebemos várias mudanças acontecendo no âmbito da educação escolar. Novas metodologias inovam o ensino para se obter uma melhor aprendizagem; visões diferenciadas de avaliações internas e externas adentram as escolas e os sistemas escolares; propostas curriculares tentam adequar o conhecimento escolar à realidade social na qual vivemos. Considerando que todas essas transformações são necessárias no mundo atual, não podemos descartar a formação docente e a prática de ensino. E é nessa ideia que trabalhamos toda nossa pesquisa ligada ao ensino de matemática, especificamente sobre a construção do número natural e o uso das operações fundamentais. Embora a legislação brasileira estabeleça e regulamente a formação docente, os professores polivalentes (termo dado aos pedagogos que ensinam na educação infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental) não podem ser analisados de forma isolada, e essa foi a nossa preocupação. Aspectos como o domínio do conteúdo matemático somado à etapa da educação em que esse profissional ensina e sua percepção enquanto docente da disciplina, são essenciais para o bom desempenho de sua prática docente.

Esse profissional que trabalha desde a educação infantil até o último ano das séries iniciais do Ensino Fundamental deve se apropriar não apenas do conhecimento matemático que ensina, mas de certa forma ir além do conteúdo que vai ensinar. Mas constatamos que esse conhecimento juntamente com o seu domínio não é oferecido na formação inicial do professor, foi o que nos mostraram os resultados da pesquisa mesmo trabalhando com profissionais com vários anos de experiência. Sabemos que os cursos de Pedagogia oferecem, na verdade, regras de como ensinar a partir de disciplinas ligadas às metodologias de trabalho em sala de aula. E aqui já levantamos a primeira questão: E se o professor não tiver o domínio do conteúdo a ser ensinado, de que adiantam as regras? Foi exatamente isso que detectamos em nossa pesquisa. Trabalhamos com uma pequena amostragem e esta foi suficiente para comprovar o que é tão discutido na academia.

No grupo de professoras-alunas (foi assim que chamamos as professoras que participaram voluntariamente de nossa oficina), tínhamos 50% delas com mais de 10 anos de magistério. Devido a esse aspecto, esperávamos que os resultados fossem mais favoráveis. Encontramos em sala de aula professoras (podemos assim chamá-las porque ensinam formalmente) sem nenhuma habilitação específica ou geral para atuar em sala de aula como rege a legislação. Consideramos esse fato muito relevante, pois nos fez questionar também:

Quantas escolas mantêm professoras sem nenhuma formação acadêmica? Há uma legislação que trate especificamente desse assunto? Como as escolas são supervisionadas pelo poder público? Há supervisão?

Verificamos que antes, durante e depois dos encontros, que as professoras-alunas continuaram cometendo erros de natureza conceitual. Cálculos envolvendo operações relativamente simples com a adição e a subtração mostraram que existe uma ausência do domínio dos conteúdos. As técnicas utilizadas no cálculo são essenciais para esse domínio, pois as mesmas juntamente com a multiplicação e a divisão são consideradas operações fundamentais. Fundamentais porque a partir do momento que o indivíduo compreende o conceito de número natural, começa a trabalhar com essas ideias, juntando quantidades, separando, distribuindo, comparando e utilizando tantas outras situações nas quais são exigidas. Com essa análise, fazemos mais um questionamento: Como está sendo adquirida a prática de ensino após a formação inicial de maneira que contribua significativamente para que, a partir dos algoritmos, se perceba a matemática que está além da técnica?

Em relação ao sistema de numeração decimal posicional, consideramos importante explorá-lo porque significa que a contagem foi aprimorada, porém noções envolvendo a decomposição do número e o valor posicional de um algarismo, por exemplo, não são compreendidas pelas alunas que ensinam esses conceitos. Para essa questão, optamos por trabalhar em nossa oficina com o Material Dourado, um recurso didático que auxilia na aprendizagem dos conteúdos que exploramos. A ideia de usar o concreto foi para nos ajudar na metodologia que utilizamos. Durante as atividades as professoras-alunas abstraíam melhor as ideias a partir desse recurso didático. Quando perguntamos se já conheciam o material a maioria afirmou que sim, mas a mesma maioria nunca tinha trabalhado com ele. Entendemos então que existe a necessidade de inovar métodos de ensino, o trabalho docente é, em grande parte do tempo, esforço. Professoras como nossas alunas estão no dia a dia da sala de aula, seja em qualquer sistema de ensino e se é privado ou público, o trabalho que envolve a construção do número e o uso das operações fundamentais é complexo. A intenção é que a partir de nossa investigação outros meios sejam desenvolvidos no auxílio do trabalho dessas profissionais. Nossa proposta é que se estabeleça um elo entre os institutos superiores de educação e as escolas no geral que trabalham com essas duas etapas da educação básica e de certa forma cumpram o que diz a Lei nº 9394/96 em seu artigo 63, inciso III sobre manter a formação continuada de profissionais em diversos níveis, e os professores que ensinam a educação infantil e as séries inicias do Ensino Fundamental também estão incluídos.

Partindo desse pressuposto e visto que o trabalho docente deve cumprir a carga horária também estabelecida por lei, questionamos aqui a possibilidade da criação de um ambiente de aprendizagem para que seja possível uma formação à distância para esses profissionais, contemplando o público que trabalha com a matemática nessas etapas, no intuito de melhorar a prática de ensino e fortalecer o domínio do conhecimento matemático que é ensinado, beneficiando não apenas o ensino e, consequentemente, a aprendizagem matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAGÃO, Maria José. **História da matemática**. Rio de janeiro: Interciência, 2009.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução de Elza Gomide e helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BORGES NETO, H.; SANTANA, J. R. Fundamentos epistemológicos da seqüência fedathi no ensino da matemática. *In*: XV EPENN _ ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE: EDUCAÇÃO, DESENVOLVIMENTO HUMANO E CIDADANIA, vol. Único, 2001, São Luís. **Anais...** São Luís: UFMA, 2001, p.594.

BRASIL. Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais de matemática.** 7. ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

CONTADOR, Paulo R. M. **Matemática uma breve história.** 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 3v.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática:** Da teoria à prática. 4 ed. Campinas: Papirus, 1998.

DANTE, Luiz R. **Tudo é matemática.** 6º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática.** Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

DOMINGUES, Hygino H. IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna.** 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. *In:* PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática:** reflexões e psicopedagógicas. Tradução de Juan Acunã Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática.** 6º ano. São Paulo: FTD, 2009. (Coleção a conquista da matemática).

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade.** 6º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

KAMII, Constance. **A criança e o número**. Tradução de Regina A. Assis. 28. ed. Campinas: Papirus, 2001.

______. Valor posicional: como se aprende e como se desaprende? . *In*: KAMII, C.; JOSEPH, L. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética (séries iniciais):** implicações da teoria de piaget. Tradução de Vinícius Figueira. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático;** provas e refutações. Tradução de Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LERNER, D.; SADOVSKY, P.; WOLMAN, S. O sistema de numeração: um problema didático. *In:* PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática:** reflexões e psicopedagógicas. Tradução de Juan Acunã Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996.

LIMA, Elon L. *et al.* **A matemática do ensino médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 280p. (Coleção do professor de matemática, 1).

LIMA, M. A. B. **Matemática:** registrando descobertas. 2º ano, 1ª série, livro do professor. São Paulo: FTD, 2008. (Coleção Registrando Descobertas: matemática).

LIMA, M. A. B.; SIANI FILHO, N.; COUTO FILHO, T. **Matemática...você constrói.** 5ª série, livro do aluno. Rio de Janeiro: Ediouro, 1996. 352p.

______. **Matemática...você constrói.** 8ª série, livro do professor. Rio de Janeiro: Ediouro, 1997. 376p.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores).

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. (Séries Trilhas).

MERICK JÚNIOR, L. C. Origem do zero. *In*: GUNDLACK, B. H. **Histórias dos números e numerais.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, v. 1).

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números:** uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

NUNES, Terezinha. *et al.* **Educação matemática 1:** números e operações numéricas. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2002. (Coleção tendências em educação matemática, 3).

PIAGET, Jean. **Seis estudos de psicologia**. Tradução de: Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. 24. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2002.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção tendências em educação matemática, 7).

RAMOS, L. F. **Conversas sobre números, ações e operações:** uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos. São Paulo: Ática, 2009.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática**. 11. ed. São Paulo: Editora Ática, 2008.

RÖHRS, H. **Maria Montessori.** Tradução de Danilo Di Manno de Almeida e Maria Leila Alves. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. (Coleção Educadores).

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. *In:* PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática:** reflexões e psicopedagógicas. Tradução de Juan Acunã Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Pré-teste

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ATIVIDADE 01

ASSUNTO: SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

01. Na sequência abaixo, no sentido da esquerda para a direta, circule o número oito.

02. Em relação aos números naturais responda:

a) Qual é o número de menor valor? ____

b) Há o número de maior valor?__________________ Qual?___________________________

c) Qual é o número que vem imediatamente antes de 900.000.009?______________________

d) Qual é o sucessor de 10.000?____

e) Os dez símbolos usados para representar qualquer número são

(   ) numerais   (   ) algarismos

03. Em relação ao número 10.937, responda:

a) Quantas ordens tem esse número?

(   ) 2   (   ) 3   (   ) 4   (   ) 5

b) Qual o algarismo da 2ª ordem?

(   ) 1   (   ) 0   (   ) 9   (   ) 3   (   ) 7

c) Qual o algarismo de menor valor relativo?

(   ) 1   (   ) 0   (   ) 9   (   ) 3   (   ) 7

d) Qual o algarismo de maior valor relativo?

(   ) 1   (   ) 0   (   ) 9   (   ) 3   (   ) 7

e) Qual o algarismo de menor valor absoluto?

( ) 1 ( ) 0 ( ) 9 ( ) 3 ( ) 7

f) Qual o algarismo de maior valor absoluto?

( ) 1 ( ) 0 ( ) 9 ( ) 3 ( ) 7

g) Qual o valor relativo do 3?____

h) Qual o valor absoluto do 9?____

i) Quantas classes tem o número?

( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5

h) Quais os nomes das classes do número em questão? ______________________________

____

04. O sistema de numeração que utilizamos no dia a dia é decimal e posicional. Explique:

a) Porque é decimal? ____

____

b) Por que é posicional? ____

____

05. Por que nosso sistema de numeração é conhecido como sistema indo-arábico? _________

____

____

06. Dado o número natural 129, responda?

a) Qual o algarismo das unidades?_____ Das dezenas?____ Das centenas?____

b) Quantas unidades tem esse número?____

c) Quantas dezenas tem esse número?____

d) Quantas centenas tem esse número?____

07. Quais as duas centenas mais próximas do número 5.134? ________________________

08. Descreva uma função do zero no sistema de numeração decimal posicional. _________

____

____

09. Que outros sistemas de numeração você conhece?______________________________

____

____

10. Na sua opinião, qual é a relevância de compreendermos o sistema de numeração decimal posicional?

____

____

ATIVIDADE 02

ASSUNTO: ADIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

01.Escreva os nomes dos termos da adição abaixo:

a) $139 + 157 = 296$

139________________________

157________________________

296________________________

b) Você conhece outros nomes dados aos termos da adição? Em caso afirmativo, quais? ____

02. Efetue as adições em $\mathbb{N}$:

a) $321 + 527 =$

b) $1293 + 502 =$

c) $2309 + 1987 =$

d) $9999 + 8881 =$

03. Efetue as adições abaixo:

a) $42 + 10 =$

b) $10 + 42 =$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas adições?________________________

____

d) Na adição de números naturais existe uma propriedade que permite trocar a posição das parcelas sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?_______________________

04. Efetue as adições abaixo:

a) $(24 + 6) + 13 =$

b) $24 + (6 + 13) =$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas adições?__________________________

____

d) Na adição de números naturais existe uma propriedade que permite reunir as parcelas de diferentes maneiras sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?____

05. Efetue as adições abaixo:

a) $23 + 0 =$

b) $0 + 23 =$

c) O que pode observar nos resultados das duas operações?_____________________________

____

d) O zero influencia a adição de números naturais?________ Neste caso, como podemos chamá-lo?

( ) Elemento Inverso ( ) Elemento Neutro ( ) Elemento Nulo

ATIVIDADE 03

ASSUNTO: SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

01. Escreva os nomes dos termos da subtração a seguir:

a) $117 - 89 = 28$

117:_________________________

89:__________________________

28:__________________________

b) Você conhece outros nomes dados aos termos da subtração nos naturais? Em caso afirmativo, quais?____

02. Efetue as subtrações em $\mathbb{N}$:

a) $158 - 43 =$

b) $1000 - 273 =$

c) $19000 - 1 =$

d) $273 - 372 =$

03. Efetue as subtrações abaixo:

a) $13 + (27 - 10) =$
$(13 + 27) - 10 =$

b) $29 - (10 + 15) =$
$(29 - 10) + 15 =$

c) $45 - (15 - 10) =$
$(45 + 15) - 10 =$

d) $(20 + 12) - (13 + 12) =$
$20 - 13 =$

e) $(46 - 20) - (20 - 20) =$
$46 - 20 =$

f) Em cada item o que podemos observar dos resultados?_____________________________

____

____

h) Podemos inferir alguma propriedade na subtração de números naturais?_________ Por quê?____

ATIVIDADE 04

ASSUNTO: MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

01. Escreva os nomes dos termos da multiplicação a seguir:

a) $123x25 = 3075$

123:_____________________________

25:______________________________

3075:______________________________

b) você conhece outros nomes dados aos termos da multiplicação nos naturais? Em caso afirmativo, quais?____

02. Efetue as multiplicações em $\mathbb{N}$:

a) $109x8 =$

b) $241x17 =$

c) $9909x9 =$

d) $12x12 =$

03. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $12x10 =$

b) $10x12 =$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas multiplicações?____________________

____

d) Na multiplicação de números naturais existe uma propriedade que permite trocar a posição dos fatores sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?____________________

04. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $(4x10)x25 =$

b) $4x(10x25) =$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas multiplicações?____________________

____

d) Na multiplicação de números naturais existe uma propriedade que permite associar os fatores de diferentes maneiras sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?____________________

05.Efetue as multiplicações abaixo:

a) $99909x1 =$

b) $1x99909 =$

c) O número 1 alterou o resultado das multiplicações?__________ Neste caso, como podemos chamá-lo?

( ) Elemento Inverso ( ) Elemento Neutro ( ) Elemento Nulo

06. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $1093x0 =$

b) $0x1093 =$

c) O número zero alterou os resultados das multiplicações?________ Neste caso, como podemos chamá-lo?

( ) Elemento Inverso ( ) Elemento Neutro ( ) Elemento Nulo

07. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $8x(10 + 4) =$

$8x10 + 8x4 =$

b) $7x(10 - 3) =$

$7x10 - 7x3 =$

c) Os resultados das duas multiplicações acima não foram alterados. A propriedade que valida essas multiplicações chama-se distributiva. Pelo que você calculou como pode inferir essa propriedade, ou seja, como é possível ser justificada?__________________________________

____

____

____

ATIVIDADE 05

ASSUNTO: DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS

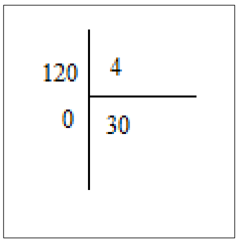
01.Observe o algoritmo da divisão em ℕ e escreva os nomes dos termos dessa operação:

a) 120:_________________________________

b) 4:___________________________________

c) 30:__________________________________

d) 0:___________________________________



e) Você conhece outros nomes dados aos termos da divisão nos naturais? Em caso afirmativo, quais? ____

02. Efetue as divisões exatas e inexatas em $\mathbb{N}$:

a) $145 : 5 =$

b) $8021 : 3 =$

c) $543 : 6 =$

d) $9909 : 5 =$

ATIVIDADE 06

ASSUNTO: O SURGIMENTO DA CONTAGEM E O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL POSICIONAL

01.Escreva sobre o surgimento da contagem e a origem do sistema de numeração decimal posicional.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FOLHA DE CÁLCULOS - ADIÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FOLHA DE CÁLCULOS - SUBTRAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FOLHA DE CÁLCULOS - MULTIPLICAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FOLHA DE CÁLCULOS - DIVISÃO

APÊNDICE B – Pós-teste

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ATIVIDADE 01

ASSUNTO: SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

01. Represente o número 5.

02. Na sequência dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Responda:

a) Você considera o zero um número natural? Justifique.______________________________

____

b) Há o número de maior valor? Por quê?____

____

c) Qual é o número que vem imediatamente depois de 100.009?_________________________

d) Qual é o sucessor de 10.090?____

e) Com a sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 podemos combinar para formar qualquer número natural. Como são denominados esses símbolos?

( ) numerais ( ) algarismos

03. Em relação ao número 49.078, responda:

a) Quantas ordens tem esse número?

( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5

b) Qual o algarismo da 2ª ordem?

( ) 4 ( ) 9 ( ) 0 ( ) 7 ( ) 8

c) Qual o algarismo de menor valor relativo (ou posicional)?

( ) 4 ( ) 9 ( ) 0 ( ) 7 ( ) 8

d) Qual o algarismo de maior valor relativo (ou posicional)?

( ) 4 ( ) 9 ( ) 0 ( ) 7 ( ) 8

e) Qual o algarismo de menor valor absoluto?

( ) 4 ( ) 9 ( ) 0 ( ) 7 ( ) 8

f) Qual o algarismo de maior valor absoluto?

( ) 4 ( ) 9 ( ) 0 ( ) 7 ( ) 8

g) Qual o valor relativo (posicional) do 7? ____

h) Qual o valor absoluto do 9? ____

i) Quantas classes tem o número?

( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5

h) Quais os nomes das classes do número em questão? ________________________________

____

04. O sistema de numeração que utilizamos no dia a dia é decimal e posicional. Explique:

a) Porque é decimal?____

____

b) Por que é posicional? ____

____

05. Por que nosso sistema de numeração é conhecido como sistema indo-arábico? _________

____

____

06. Dado o número natural 346, responda?

a) Qual o algarismo das unidades?_____ Das dezenas?____ Das centenas?____

b) Quantas unidades tem esse número?____

c) Quantas dezenas tem esse número?____

d) Quantas centenas tem esse número?____

07. Quais as duas dezenas mais próximas do número 485?____________________________

08. Descreva uma função do zero no sistema de numeração decimal posicional. ___________

____

____

09. Que outros sistemas de numeração você conhece?________________________________

____

____

10. Na sua opinião, qual é a relevância de compreendermos o sistema de numeração decimal posicional?

____

____

ATIVIDADE 02

ASSUNTO: ADIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

01. Escreva os nomes dos termos da adição abaixo:

a) $94 + 75 = 169$

94__________________________

75__________________________

169__________________________

b) Você conhece outros nomes dados aos termos da adição? Em caso afirmativo, quais? ____

02. Efetue as adições em $\mathbb{N}$:

a) $555 + 289 =$

b) $2442 + 88 =$

03. Efetue as adições abaixo:

a) $12 + 10 =$

b) $10 + 12 =$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas adições?__________________________

____

d) Na adição de números naturais existe uma propriedade que permite trocar a posição das parcelas sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?________________________

04. Efetue as adições abaixo:

a) $(2+4)+1=$

b) $2+(4+1)=$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas adições?___________________________

____

d) Na adição de números naturais existe uma propriedade que permite reunir as parcelas de diferentes maneiras sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?____

05. Efetue as adições abaixo:

a) $3+0=$

b) $0+3=$

c) O que pode observar nos resultados das duas operações? _____________________________

____

d) O zero influencia a adição de números naturais?_________ Neste caso, como podemos chamá-lo?

( ) Elemento Inverso ( ) Elemento Neutro ( ) Elemento Nulo

ATIVIDADE 03

ASSUNTO: SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

01. Escreva os nomes dos termos da subtração a seguir:

a) $401-289=112$

401:__________________________

289:___________________________

112:___________________________

b) Você conhece outros nomes dados aos termos da subtração nos naturais? Em caso afirmativo, quais?____

02. Efetue as subtrações em $\mathbb{N}$:

a) $251 - 67 =$ b) $1000 - 3 =$

03. Efetue as subtrações abaixo:

a) $1+(29-1) =$
$(1+29)-1 =$

b) $29-(1+2) =$
$(29-1)+2 =$

c) $15-(15-10) =$
$(15+15)-10 =$

d) $(20+2)-(10+2) =$
$20-10 =$

e) $(40-20)-(20-20) =$
$40-20 =$

f) Em cada item o que podemos observar dos resultados?_______________________________

____

____

h) Podemos inferir alguma propriedade na subtração de números naturais?________________

Por quê?____

ATIVIDADE 04

ASSUNTO: MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

01. Escreva os nomes dos termos da multiplicação a seguir:

a) $124x15 = 1860$

124:_______________________________

15:_________________________________

1860:_____________________________

b) você conhece outros nomes dados aos termos da multiplicação nos naturais? Em caso afirmativo, quais?____

02. Efetue as multiplicações em $\mathbb{N}$:

a) $109x7 =$ b) $291x18 =$

03. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $5x10 =$

b) $10x5 =$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas multiplicações?______________________

____

d) Na multiplicação de números naturais existe uma propriedade que permite trocar a posição dos fatores sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?_____________________

04. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $(4x1)x25 =$

b) $4x(1x25) =$

c) O que podemos concluir dos resultados das duas multiplicações?______________________

____

d) Na multiplicação de números naturais existe uma propriedade que permite associar os fatores de diferentes maneiras sem alterar o resultado. Qual o nome dessa propriedade?____________________

05.Efetue as multiplicações abaixo:

a) $99x1 =$ b) $1x99 =$

c) O número 1 alterou o resultado das multiplicações?___________ Neste caso, como podemos chamá-lo?

( ) Elemento Inverso ( ) Elemento Neutro ( ) Elemento Nulo

06. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $13x0 =$ b) $0x13 =$

c) O número zero alterou os resultados das multiplicações?_______ Neste caso, como podemos chamá-lo?

( ) Elemento Inverso ( ) Elemento Neutro ( ) Elemento Nulo

07. Efetue as multiplicações abaixo:

a) $2x(10+1) =$

$2x10 + 2x1 =$

b) $5x(4-3) =$

$5x4 - 5x3 =$

c) Os resultados das duas multiplicações acima não foram alterados. A propriedade que valida essas multiplicações chama-se distributiva. Pelo que você calculou como pode inferir essa propriedade, ou seja, como é possível ser justificada?________________________________

____

____

____

ATIVIDADE 05

ASSUNTO: DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS

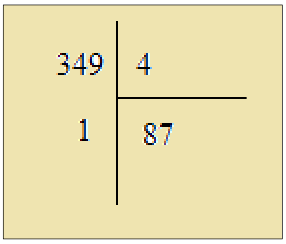
01.Observe o algoritmo da divisão em $\mathbb{N}$ e escreva os nomes dos termos dessa operação:

a) 349:_____________________________

b) 4:________________________________

c) 87:______________________________

d) 1:________________________________



e) Você conhece outros nomes dados aos termos da divisão nos naturais? Em caso afirmativo, quais? ____

02. Efetue as divisões exatas e inexatas em $\mathbb{N}$:

a) $1405:5 =$

b) $80211:3 =$

ATIVIDADE 06

ASSUNTO: O SURGIMENTO DA CONTAGEM E O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL POSICIONAL

01. Escreva sobre o surgimento da contagem e a origem do sistema de numeração decimal posicional.

APÊNDICE C – Entrevista semiestruturada

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

1. NOME (OPCIONAL):
2. TEMPO DE SERVIÇO NO MAGISTÉRIO **( ) MENOS DE 05 ANOS ( ) DE 05 A 10 ANOS ( ) MAIS DE 10 ANOS**
3. TRABALHA **( ) ESCOLA PÚBLICA ( ) ESCOLA PARTICULAR**
4. TRABALHOU **( ) ESCOLA PÚBLICA ( ) ESCOLA PARTICULAR**
4. SUA FORMAÇÃO É: **( ) PEDAGOGIA ( ) OUTRA:**___________________________ ____
5. QUANTAS CAPACITAÇÕES VOCÊ JÁ PARTICIPOU DESDE A SUA FORMAÇÃO? QUAIS? ____ ____
6. SUAS AULAS SÃO PLANEJADAS COM QUE FREQUÊNCIA? **( ) DIARIAMENTE ( ) SEMANALMENTE ( ) MENSALMENTE**
7. QUAL A SÉRIE QUE VOCÊ ATUA? **( ) QUALQUER UMA DA EDUCAÇÃO INFANTIL** **( ) 1º ANO ( ) 2º ANO ( ) 3º ANO ( ) 4º ANO ( ) 5º ANO** **( ) NÃO TRABALHA COM NENHUMA SÉRIE, ATUA EM OUTRO SETOR DA ESCOLA**
8. QUAL A DISCIPLINA QUE VOCÊ MINISTRA? **( ) MATEMÁTICA ( ) PORTUGUÊS ( ) CIÊNCIAS** **( ) GEOGRAFIA ( ) HISTÓRIA ( ) OUTRA(S):**_____________________ ____
9. COSTUMA UTILIZAR RECURSOS DIDÁTICOS EM SUAS AULAS? QUAIS? ____ ____

10. VOCÊ JÁ CONHECIA O MATERIAL DOURADO? (CASO SUA RESPOSTA SEJA NÃO, DEIXE O ITEM 7 EM BRANCO). **( ) SIM ( ) NÃO**
11. VOCÊ JÁ TRABALHOU COM O MATERIAL DOURADO EM SUAS AULAS? **( ) SIM ( ) NÃO**
12. VOCÊ JÁ OUVIU FALAR EM MARIA MONTESSORI? **( ) SIM ( ) NÃO**
13. CASO SUA RESPOSTA DO ITEM 12 SEJA SIM, DESCREVA UM POUCO O SEU CONHECIMENTO SOBRE MARIA MONTESSORI. ____ ____ ____ ____ ____ ____
14. NA SUA OPINIÃO SEU CONHECIMENTO MATEMÁTICO É SUFICIENTE PARA QUE SEUS ALUNOS APRENDAM? JUSTIFIQUE. ____ ____
15. O QUE VOCÊ ESPERA APRENDER NESSA OFICINA? ____ ____

APÊNDICE D – Material Dourado

O Material Dourado

Sobre Maria Montessori...

Dentre as figuras de destaque do movimento da Nova Educação está Maria Montessori. Seu trabalho tornou-se grandioso diante da universalidade de suas ações. Embora sua pesquisa inicialmente incluísse crianças pequenas, com o tempo se estendeu para as crianças mais velhas e para a família como um todo. Sempre foi exemplar e seus estudos, uma prova disso é tentava o tempo todo buscar a harmonia entre a teoria e a prática.

Maria Montessori nasceu em 1870 na Itália e morreu em 1952 na Holanda. Foi a primeira italiana a se formar em medicina em 1896, especializando-se em neuropatologia. Após sua formatura trabalhou em uma clínica de psiquiatria da Universidade de Roma durante dois anos. Sua função era analisar o comportamento das crianças que tinham retardo mental. Nessa atividade, Montessori percebeu que independentemente de uma deficiência mental, as necessidades e os desejos que a criança possui não mudam, continuam intactos. Essa observação significou a busca de maneiras eficazes para educar as crianças com as deficiências. (RAMOS, 2009).

As crianças da clínica em que Montessori trabalhava, brincavam no chão com migalhas de pão, pois não havia brinquedo. A partir dessas observações e pelos estudos de outros teóricos sobre o refinamento das funções sensoriais, resolveu voltar sua atenção para as questões mais educativas e pedagógicas.[3]

Em 1900 começou a trabalhar na Scuola Magistrate Ortofrenica, instituição formadora de professores. Formava pedagogos. Durante esse período foi convidada para trabalhar em San Lorenzo, um bairro pobre de Roma educando crianças. Nesse bairro fundou

---

[3] http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/sanderson/vida_e_obra_montessori.htm

a ‘Casa dei Bambini’ ou casa das crianças. Seu trabalho em San Lorenzo não só teve êxito no que se refere à educação das crianças, mas também fortaleceu sua crença de que a criança quando educada pode se tornar um adulto melhor. Sua maneira de ver o mundo era cada vez mais assimilada na relação fé e ciência. Ao mesmo tempo em que vivia experiências científicas acreditava que podia educar as crianças.

Nos anos seguintes outras casas das crianças foram construídas e tornaram-se locais de visitação de professores que visitavam os locais no intuito de aperfeiçoar aprimorar seus conhecimentos pedagógicos. Sua postura reflexiva sempre voltada para a meditação teve um papel significativo em seu trabalho. Não aceitava métodos que fugissem de sua abordagem. Tomou para si a causa das crianças e as necessidades delas enquanto educandas.

Em relação à Educação Nova, Montessori vai além da substituição de antigos métodos de trabalho por novos. Influenciada por Rousseau tentou combater os mais tradicionais hábitos de criação, inclusive os castigos para crianças. Pregava a liberdade dos atos infantis e afirmava que eles sempre eram importantes para o desenvolvimento da criança.

A ‘Casa Dei Bambini’ era um ambiente cuja estrutura estava voltada para a realidade das crianças atendendo suas necessidades, pois o método montessoriano submetia as crianças à participação efetiva das regras e dos princípios que governavam o local de convivência, trabalhando a autonomia moral.

Dentre as propostas de trabalho há a utilização de um material didático adequado à necessidade da criança trabalhada no decorrer da aula. Röhrs (2010) classifica o método montessoriano de hermenêutico-empírico, pois afirma que as experiências trabalhadas eram descritas com certo teor de subjetividade. O que Montessori desenvolveu foi um método no qual as habilidades sensoriais eram colocadas em prática e o material didático deveria ser utilizado não apenas para experimentar a situação concreta, mas também permitir meios para a abstração.

Dados históricos apontam que o método montessoriano chegou ao Brasil em 1935, mas em 1915 o nome Maria Montessori já era mencionado em palestras. O movimento da Escola Nova que tentou modificar e superar o ensino tradicional também insere Maria Montessori como figura importante. Além de desenvolver experiências relacionadas com a natureza infantil, refletiu de uma maneira geral sobre a educação abordando assuntos ligados a um ambiente propício à formação da criança criando assim o termo ‘mente absorvente’ referindo-se à capacidade e à disposição que o individuo tem de aprender.

O Material Dourado

É um material concreto e pode ser trabalhado na aritmética dos números naturais: o sistema de numeração decimal posicional e as operações fundamentais. Dentre os recursos didáticos desenvolvidos por Maria Montessori está o Material Dourado, um material concreto estruturado. Segundo Ramos (2009, p. 52): “Um material é chamado estruturado quando apresenta as relações entre as peças que o compõem”. O Material Dourado é estruturado na base 10 e sua função é pedagógica.

No início quando foi criado, era denominado *Material das Contas Douradas*[4] e tinha a seguinte forma:

1 – unidade

Figura 38 – Material das Contas Douradas: a unidade

http://montessoribrasil.multiply.com/photos/album/12/Material-Dourado

[4] http://educar.sc.usp.br/matematica/m2l2.htm

2 – dezena

Figura 39 – Material das Contas Douradas: a dezena

http://montessoribrasil.multiply.com/photos/album/12/Material-Dourado

3 – centena

Figura 40 – Material das Contas Douradas: a centena

http://montessoribrasil.multiply.com/photos/album/12/Material-Dourado

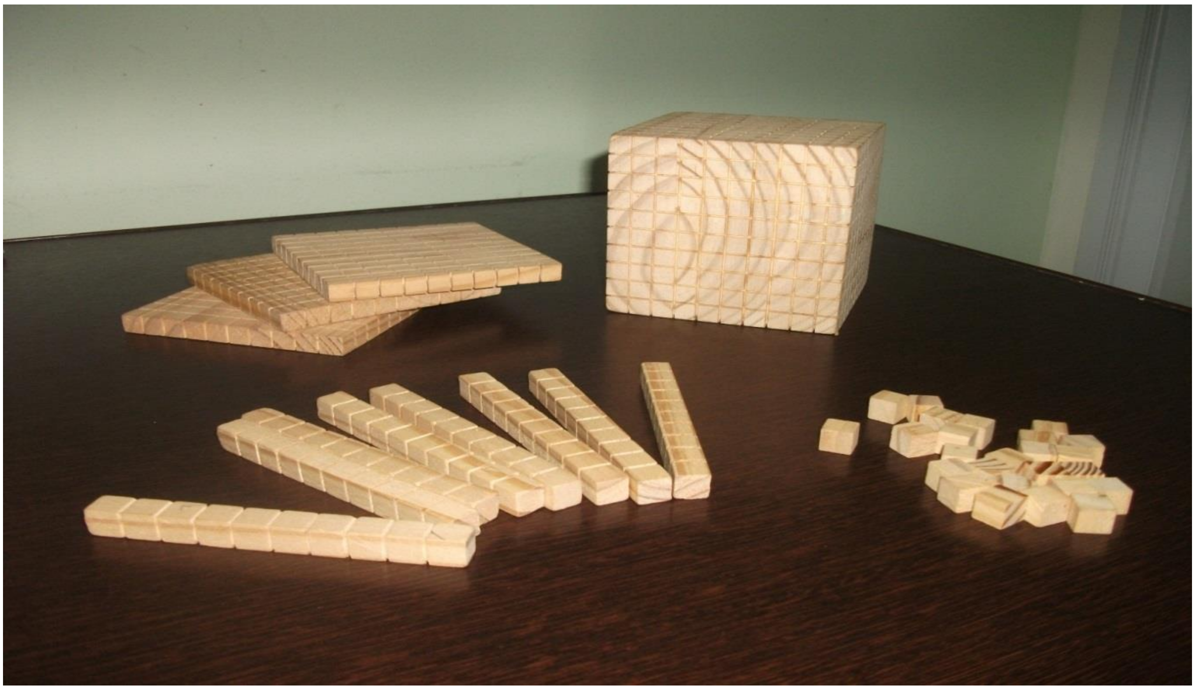
4 – unidade de milhar

Figura 41 – Material das Contas Douradas: a unidade de milhar

http://montessoribrasil.multiply.com/photos/album/12/Material-Dourado

Com o tempo percebeu-se que a imprecisão das contas atrapalhava um pouco sua manipulação, foi então que Helena Lubienska de Lenval, discípula de Montessori, adaptou-o para a forma que é usado atualmente. Como mostra a figura abaixo:

Figura 42 – Material Dourado atual



Fonte: elaboração nossa

O Material Dourado, segundo Lima (2008, p. 52): “é formado por blocos de madeira clara” e sua composição constitui-se de quatro tipos de peças: o *cubinho*, que representa a unidade simples; a *barra*, que representa a dezena simples e é formada por dez *cubinhos*; a *placa*, que representa a centena simples e que é formada por cem *cubinhos* ou por dez *barras*; o *cubo* ou *cubão*, que representa a unidade de milhar e é formado por mil *cubinhos* ou cem *barras* ou ainda dez *placas*.

APÊNDICE E – ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Oficina de matemática desenvolvida como produto educacional

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL POSICIONAL E AS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS: EXPLORANDO OS ALGORITMOS COM A MANIPULAÇÃO DO MATERIAL DOURADO

OFICINA

1º ENCONTRO

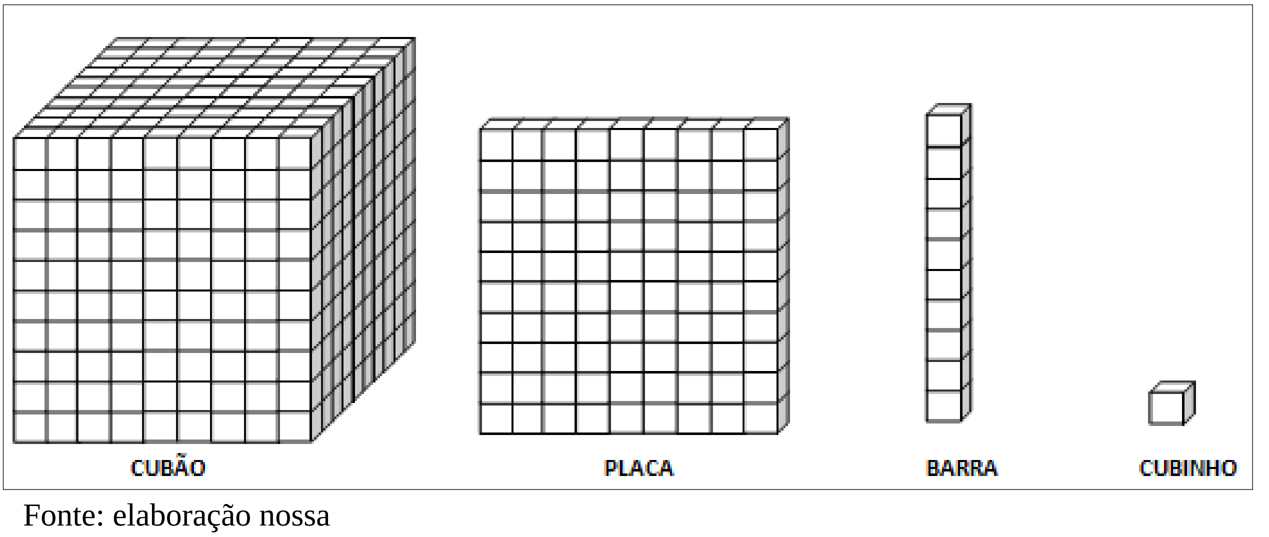
COMPREENDENDO E APRENDENDO COM O MATERIAL DOURADO

1º MOMENTO: APRESENTAÇÃO DO MATERIAL DOURADO

O material dourado é um material concreto que auxilia na compreensão do sistema decimal posicional. Com esse recurso didático o sujeito consegue fazer a imagem concreta das relações numéricas que são abstratas, proporcionando o desenvolvimento do raciocínio e de uma aprendizagem eficaz. É utilizado no auxílio dos algoritmos para efetuar as operações fundamentais. Sua aplicação vai de encontro ao método tradicional cuja técnica predominante é a memorização. (KLINE, 1976; RAMOS, 2009).

2º MOMENTO: CONHECENDO O MATERIAL DOURADO

Figura 43 – Representação do Material Dourado em duas dimensões



Fonte: elaboração nossa

ATIVIDADE 01 (**em grupo**): Compare as peças do Material Dourado e escreva sobre o que se pode inferir.

a) cubinho e barra

____

____

b) cubinho e placa

____

____

c) cubinho e cubão

____

____

d) barra e placa

____

____

e) barra e cubão

____

____

f) placa e cubão

____

____

ATIVIDADE 02 (**em grupo**): Faça a relação com a unidade simples, a dezena simples, a centena simples e a unidade de milhar.

a) o cubinho ou cubo pequeno

____

b) a barra

____

c) a placa

____

d) o cubão ou cubo grande

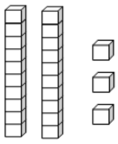
____

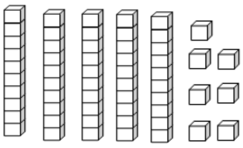
ATIVIDADE 03 (**troca de ideias**): Explanação das atividades 01 e 02 pelos alunos.

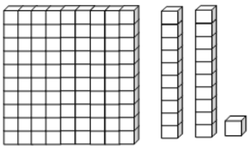
ATIVIDADE 04: Qual é a peça do Material Dourado que é encontrada em todas as outras peças?

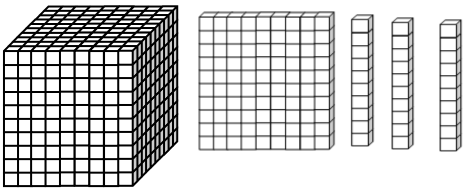
ATIVIDADE 05: Quais as peças que podemos encontrar no cubo grande?

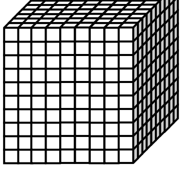
ATIVIDADE 06: Escreva ao lado de cada representação o número indicado.

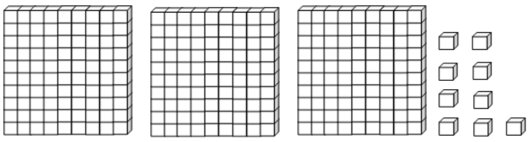
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

ATIVIDADE 07 (**em grupo**): Representar na forma simples (com o menor número de peças) e com o Material Dourado os números a seguir:

a) 37

b) 108

c) 719

d) 1032

e) 1109

f) 1999

ATIVIDADE 08: Uma equipe irá comandar as outras para que os números da atividade anterior sejam representados no quadro e discutir as respostas.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR INDIVIDUAL

Construa os números com o Material Dourado e responda os itens abaixo.

a) Construir o número 23.

Quantos cubinhos cabem nesse número?_________________

Quantas unidades simples tem esse número?_______________

Quantas barras cabem nesse número?_____________________

Quantas dezenas simples tem esse número?________________

Quantas placas cabem nesse número?_____________________

Quantas centenas simples tem esse número?________________

Quantos cubões cabem nesse número?_____________________

Quantas unidades de milhar cabem nesse numero?___________

b) Construir o número 357.

Quantos cubinhos cabem nesse número?__________________

Quantas unidades simples tem esse número?_______________

Quantas barras cabem nesse número?_____________________

Quantas dezenas simples tem esse número?________________

Quantas placas cabem nesse número?_____________________

Quantas centenas simples tem esse número?________________

Quantos cubões cabem nesse número?_____________________

Quantas unidades de milhar cabem nesse numero?___________

c) Construir o número 1419.

Quantos cubinhos cabem nesse número?__________________

Quantas unidades simples tem esse número?_______________

Quantas barras cabem nesse número?_____________________

Quantas dezenas simples tem esse número?________________

Quantas placas cabem nesse número?_____________________

Quantas centenas simples tem esse número?________________

Quantos cubões cabem nesse número?_____________________

Quantas unidades de milhar cabem nesse numero?___________

d) Construir o número 402.

Quantos cubinhos cabem nesse número?__________________

Quantas unidades simples tem esse número?_______________

Quantas barras cabem nesse número?_____________________

Quantas dezenas simples tem esse número?________________

Quantas placas cabem nesse número?_____________________

Quantas centenas simples tem esse número?________________

Quantos cubões cabem nesse número?_____________________

Quantas unidades de milhar cabem nesse numero?___________

e) Construir o número 1049.

Quantos cubinhos cabem nesse número?__________________

Quantas unidades simples tem esse número?_______________

Quantas barras cabem nesse número?_____________________

Quantas dezenas simples tem esse número?________________

Quantas placas cabem nesse número?_____________________

Quantas centenas simples tem esse número?________________

Quantos cubões cabem nesse número?_____________________

Quantas unidades de milhar cabem nesse numero?___________

OFICINA

2º ENCONTRO

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL POSICIONAL

1º MOMENTO: A CONTAGEM E OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

A matemática começou a se desenvolver nos primórdios a partir das primeiras tentativas que o homem executou para compreender e estruturar o conceito de "grandeza, forma e número" (EVES, 2004, p. 25). Tanto a contagem como o conceito de número foi desenvolvida ainda nas civilizações primitivas. O homem desde os primórdios já tinha noção de contagem quando percebia o acréscimo ou a retirada de algum objeto de coleções organizadas por ele. À medida que o homem ia se desenvolvendo em comunidades, contar tornou-se uma prática comum de suas atividades diárias. Lima *et al* (2006) afirma que primeiro o indivíduo aprende a contar depois compreende a ideia de número.

Os egípcios e os babilônios, por exemplo, foram os primeiros povos a contribuir com o desenvolvimento da matemática, embora o homem primitivo tenha desenhado seus primeiros traços num passado distante. Os egípcios tinham um sistema de agrupamento de 10 em 10. Os babilônios utilizavam tanto o agrupamento de 10 em 10 quanto o de 60 em 60. Já os gregos utilizavam letras para a representação dos números, mas não havia uma base definida para utilização de seu sistema de numeração. (KLINE, 1976; EVES, 2004; ARAGÃO, 2009).

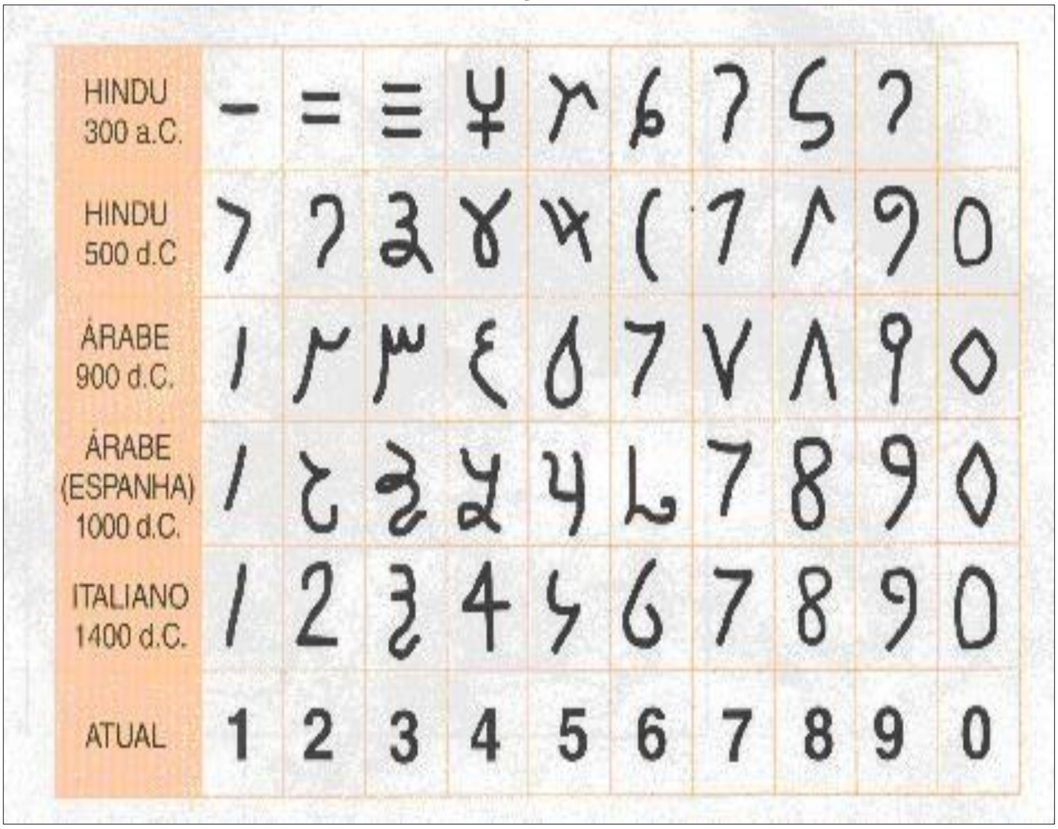
Nosso sistema de numeração é denominado decimal posicional. É decimal porque a base de sua contagem é dez, ou seja, seu agrupamento é de 10 em 10. É posicional os algarismos têm um valor dependendo de qual posição ocupam no número, obedecendo o que Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 22) aponta como "princípio posicional". Esse valor que o algarismo ocupa e que depende da posição é chamado de *valor relativo* e o valor dele prórpio é o *valor absoluto*.

Os números, os algarismos e os numerais

Desenvolvido pelos hindus e propagado pelos árabes, nosso sistema de numeração é conhecido como indo-arábico. O sistema foi composto inicialmente de nove símbolos e posteriormente criaram um símbolo para a representação de nenhuma quantidade. (EVES, 2004).

Os símbolos de nosso sistema de numeração são denominados algarismos e assim são chamados devido ao matemático árabes *Al-Khowarizmi* que divulgou esse conhecimento matemático.

Figura 44 – Desenvolvimento da escrita dos algarismos



http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23508

Segundo Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 23): “Com dez símbolos $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ e\ 9)$ e o valor posicional relacionado com a base 10, os hindus conseguiram construir um sistema que atravessou os séculos, sendo hoje universalmente usado”. O sistema de numeração é o aprimoramento da contagem e em nosso caso, com dez símbolos e algumas regras podemos formar o número que quisermos. Para Ramos (2009, p. 39), o sistema de numeração deciaml posicional “é a linguagem matemática que usamos no dia a dia. É uma linguagem estruturada, organizada e formalizada para expressar quantidades, posições, medidas, espaços, formas, relações etc”.

Usando os dez algarismos qualquer número pode ser formado e trabalhado com esse sistema. Mas qual é a diferença entre algarismo e número? E o numeral pode ser considerado número? Vamos estabelecer a diferença básica entre número, numeral e algarismo. Veja o quadro abaixo:

Quadro 3 – Definição de algarismo, número e numeral

Termos	Definição	Fonte
Algarismo	Símbolo numérico utilizado para expresssar quantidades denominadas números	RAMOS, L. F. **Conversas sobre números, ações e operações:** uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos. São Paulo: Ática, 2009.
Número	Entes abstratos cujo desenvolvimento foi feito pelo homem e que servem de modelos para contar, medir as diferentes quantidades de uma grandeza.	LIMA, Elon L. *at al.* **A matemática do ensino médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 280p. (Coleção do professor de matemática, 1).
Numeral	Representação do número, seja ela escrita ou falada.	http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html

Fontes: anexadas no quadro

A representação dos números naturais: a ordem e a classe

Ainda explorando o valor posicional, um algarismo em um numeral qualquer tem uma ordem e uma classe. Segundo Domingues e Iezzi (2003), cada agrupamento de 10 unidades corresponde a uma ordem e, cada grupo de dez unidades de uma ordem é substituído por uma ordem imediatamente superior.

Isso porque segundo Eves (2004), nosso sistema tem esse princípio e podemos representar um número natural N na base b da seguinte forma: seja $0 \leq a_i \leq b, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Temos que $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + b_0$.

De acordo com Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 41): “As ordens são numeradas da direita para a esquerda. Cada grupo de três ordens recebe o nome de classe. A última classe do numeral (a mais elevada) pode apresentar-se com menos de três ordens e, dessa forma é chamada incompleta”.

Quadro 4 – Classes e ordens

...	CLASSE DOS SEXTILHÕES			CLASSE DOS QUINTILHÕES			CLASSE DOS QUATRILHÕES			CLASSE DOS TRILHÕES			CLASSE DOS BILHÕES			CLASSE DOS MILHÕES			CLASSE DOS MILHARES			CLASSE DAS UNIDADES SIMPLES		
...	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

Fonte: elaboração nossa

A decomposição do número

A decomposição do número pode ser feita de duas maneiras:

1ª maneira: podemos decompor o número indicando o algarismo e a ordem que ele ocupa.

Exemplos:

$(1)\ 56 \rightarrow 5\ dezenas + 6\ unidades$

$(2) 128 \rightarrow 1\ dezena + 2\ centenas + 8\ unidades$

2ª maneira: podemos decompor pela quantidade de unidades que cada número representa.

Exemplos:

$(1)\ 222 \rightarrow 200 + 20 + 2$

$(2)\ 709 \rightarrow 700 + 9$

2º MOMENTO: EXPLORANDO O MATERIAL DOURADO

ATIVIDADE 01 (**em dupla)**: Em cada grupo de 10 cubinhos que formamos temos 01 barra, ou seja, em cada 10 unidades simples temos uma dezena. Quantas dezenas há em

a) 24?______

b) 57?______

c) 123?______

d) 652?______

ATIVIDADE 02 (**em dupla):** Em cada grupo de 10 barras que formamos temos uma placa, ou seja, em cada 10 dezenas simples temos uma centena. Quantas centenas simples há em

a) 36?______

b) 228?______

c) 793?______

d) 4105?______

ATIVIDADE 03: Explanação das ideias. Alunos no quadro.

3º MOMENTO: EXPLORANDO O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL POSICIONAL

ATIVIDADE 01 (**em dupla**): Analisar o numeral 1.405.798 e responder cada item.

a) Quantoas ordens tem?______

b) Qual o algarismo que ocupa a ordem mais elevada?_____

c) Qual o algarismo que ocupa a ordem menos elevada?_____

d) Qual o algarismo de menos valor absoluto?_____

e) Qual o algarismo de maior valor absoluto?______

f) Qul o algarismo de menor valor relativo?______

g) Qual o algarismo de maior valor relativo?______

h) Qual o valor relativo do algarismo 4?______

i) Qual o valor absoluto do algarismo 7?______

j) Quantas classes tem?______

ATIVIDADE 02 (**em dupla):** Escreva o numeral correspondente a

a) 2 grupos de $(10x10x10)$ unidades $+$ 5 grupos de $(10x10)$ unidades $+$ 7 grupos de 10 unidades $+$ 8 unidades:____

b) 7 unidades de 6ª ordem + 1 unidade de 5ª ordem + 4 unidades de 4ª ordem + 8 unidades de 3ª ordem + 2 unidades de 1ª ordem:____

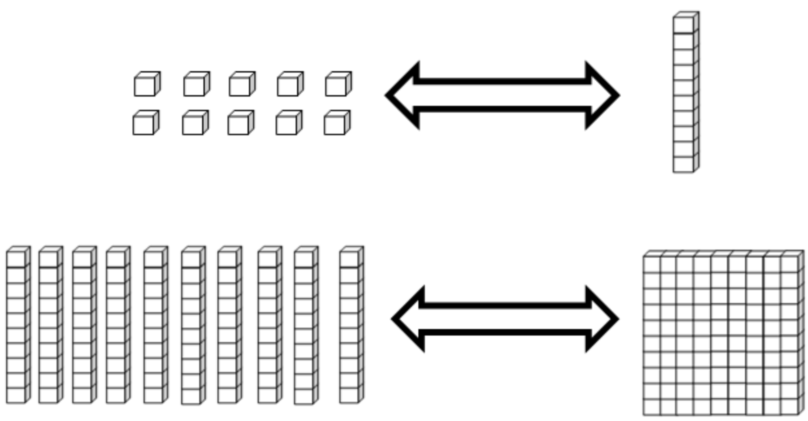
c) Qual o valor de cada algarismo no numeral 437 de acordo com a posição que ocupa?____

AS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Para trabalharmos a adição com e sem agrupamento precisamos entender a ideia de técnicas operatórias ou algoritmos de maneira que desenvolvemos a escrita dos números. De acordo com Ramos (2009, p. 97): “Técnicas operatórias, também chamadas de algoritmos, constituem procedimentos para resolver as operações fundamentais. Uma técnica é um registro escrito das ações realizadas; quanto mais próxima da nossa ação ela for, mais descritiva será.”.

Nas operações fundamentais, iremos trabalhar com as formas expandida, abreviada e com a representação do Material Dourado. Na técnica expandida lidamos com a composição e a decomposição de números simultaneamente. Na técnica abreviada, embora pareça ser mais simples, força a ideia apenas de valor absoluto do número. Com a representação do Material Dourado fazemos a troca das peças em agrupamento de 10 em 10. Quando agrupamos 10 *cubinhos* podemos trocar 01 *barra*. Quando agrupamos 10 *barras* trocamos por 01 *placa*. Quando agrupamos 10 *placas* trocamos por um *cubão*.

Exemplificando...



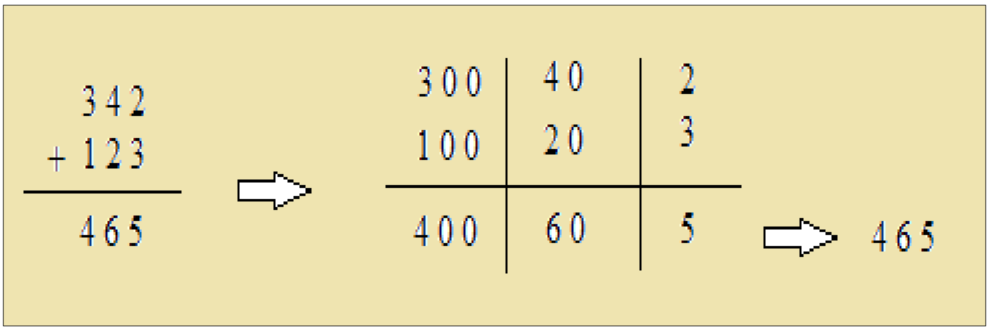
OFICINA

3º ENCONTRO

ADIÇÃO COM E SEM AGRUPAMENTO

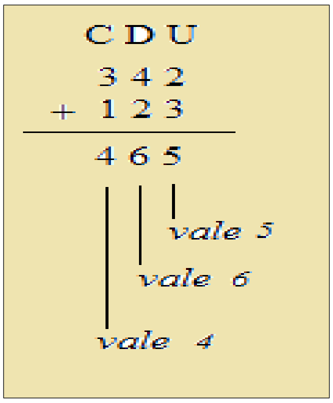
EXEMPLO (01): Vamos efetuar 342 + 123.

Algoritmo expandido ou com decomposição

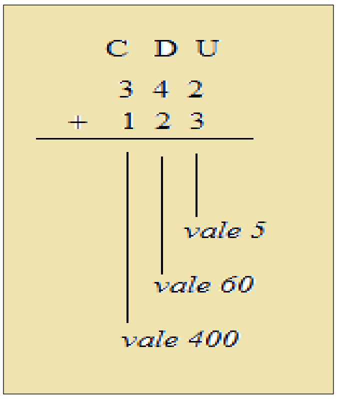


Algoritmo abreviado ou simplificado

Segundo Ramos (2009), ao trabalharmos com o algoritmo abreviado, devemos ter o cuidado para não confundir os valores dos algarismos nas ordens, dando a eles o valor absoluto no lugar do valor relativo. Na representação abaixo temos a compreensão errada do valor posicional de cada algarismo no numeral.

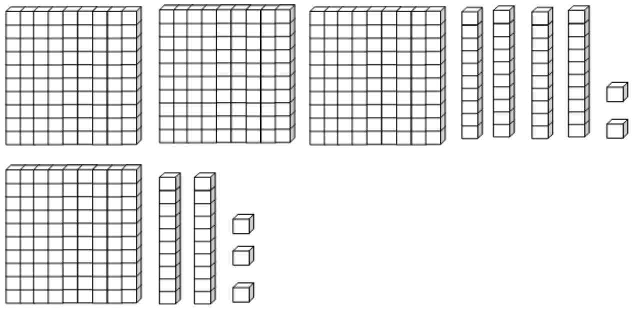


Errada

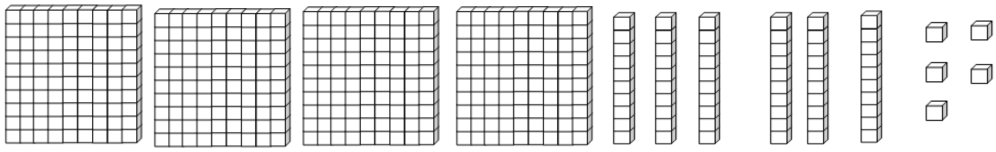


Correta

Representação com o Material Dourado



trocando peças



EXEMPLO (02): Vamos efetuar 219 + 185.

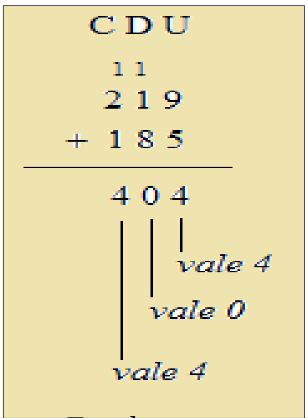
Algoritmo expandido ou com decomposição

200 100	10 80	9 5
300	90	14

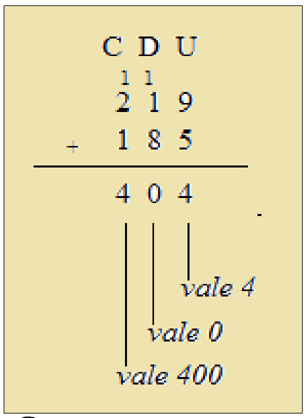
$\Rightarrow$ $300 + 90 + 10 + 4 = 404$

Algoritmo abreviado ou simplificado

Insistimos nessa representação errada do valor posicional dos algarismos com as alunas para questionar sua compreensão do algoritmo abreviado.



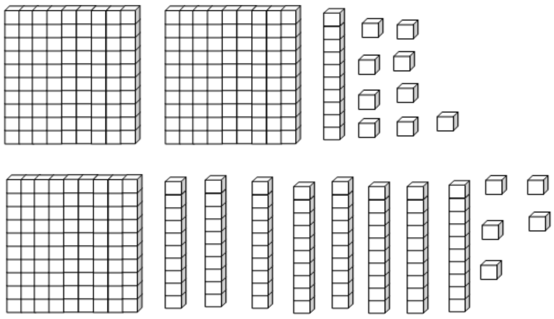
Errada



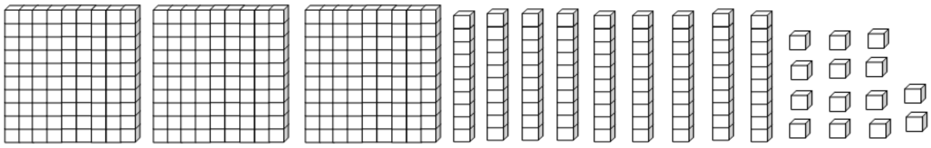
Correta

Representação com o material dourado

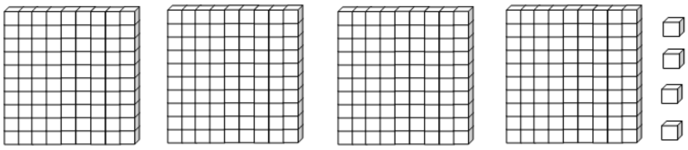
juntando as peças



agrupando peças



trocando peças



ATIVIDADE (01): Utilizando o algoritmo expandido, o algoritmo abreviado e, a representação com o material dourado, efetue as adições abaixo:

a) $809 + 391 =$

b) $1406 + 727 =$

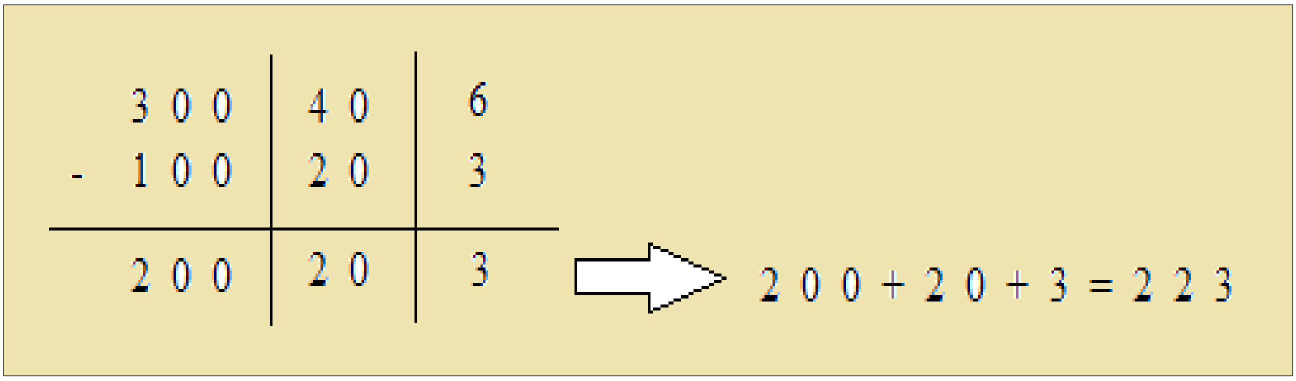
OFICINA

4º ENCONTRO

<u>SUBTRAÇÃO COM E SEM DESAGRUPAMENTO</u>

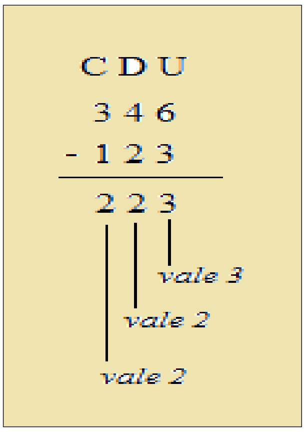
EXEMPLO (01): Vamos efetuar $346 - 123$.

Algoritmo expandido ou com decomposição

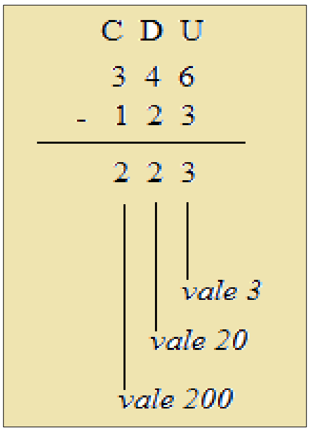


Algoritmo abreviado ou simplificado

Destacamos aqui mais uma vez a representação errada do valor posicional de cada algarismo e a confusão na compreensão da operação subtração no algoritmo.

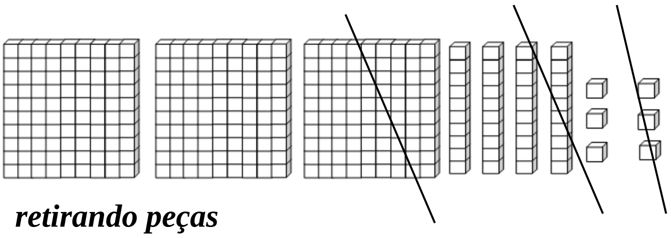


Errada

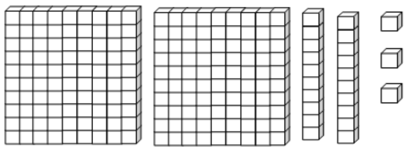


Certa

Representação com o material dourado

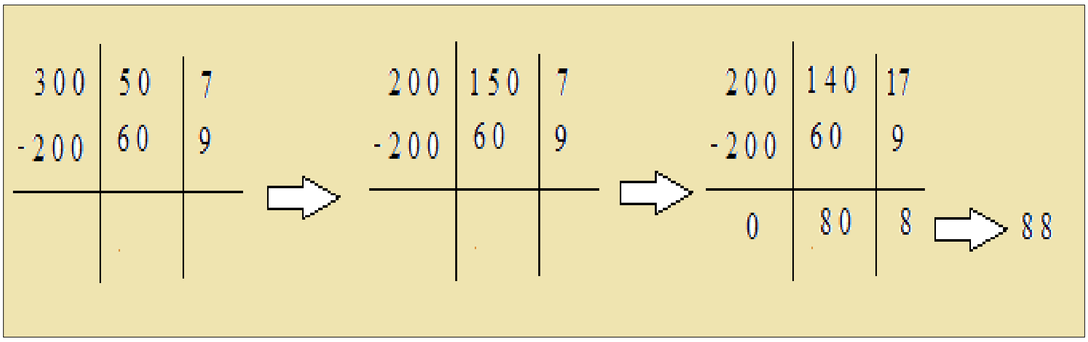


retirando peças

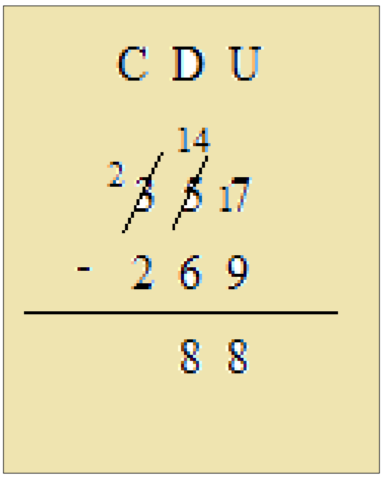


EXEMPLO (02): Vamos efetuar 357 – 269.

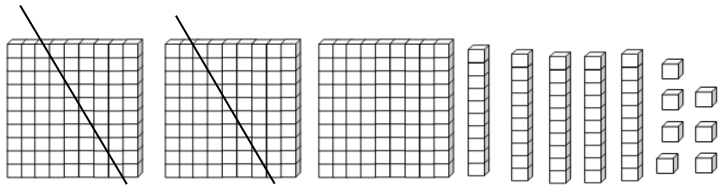
Algoritmo expandido ou com decomposição



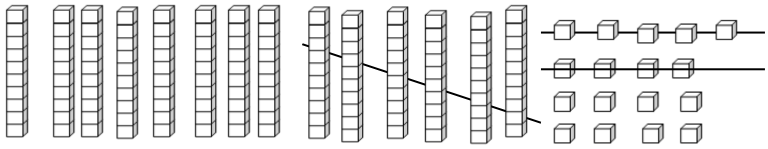
Algoritmo abreviado ou simplificado



Representação com o material dourado



retirando peças



ATIVIDADE (02): Utilizando o algoritmmo expandido, o algoritmo abreviado e a representação com o Material Dourado, efetue as subtrações abaixo:

a) $1089 - 378 =$

b) $1000 - 1 =$

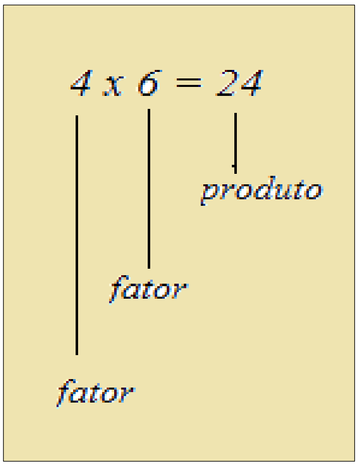
OFICINA

5º ENCONTRO

TRABALHANDO COM A MULTIPLICAÇÃO

Quando analisamos conceitualmente a operação multiplicação, percebemos as diferentes ideias acerca de sua compreensão. De acordo com Dante (2009) quando multiplicamos, adicionamos parcelas iguais. Mas quando contamos elementos a partir de uma disposição retangular, quando verificamos o número de possibilidades ou combinações em uma determinada contagem ou quando usamos a proporcionalidade, estamos multiplicando. (GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009).

Usaremos aqui os nomes fatores e produto para os termos da multiplicação. Sabemos também que os termos podem ser chamados de multiplicando, multiplicador e produto.



Favorecendo o cálculo mental

Segundo Ramos (2009) quando decompomos um números em fatores menores, favorecemos o cálculo mental para a multiplicação. Vejamos os exemplos:

1- $3x40 = 3x4x10 = 12x10 = 120$

2- $5x600 = 5x6x100 = 30x100 = 3000$

3- $4x7000 = 4x7x1000 = 28x1000 = 28000$

EXEMPLO (01): Vamos efetuar $7x13$.

Algoritmo expandido ou com decomposição

(1)

$$\begin{array}{rr} & 10 \\ \times & 7 \\ \hline & 70 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3 \\ \times & 7 \\ \hline & 21 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{rr} & 70 \\ + & 21 \\ \hline & 91 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rr} & 10 + 3 \\ + & 7 \\ \hline & 70 + 21 \end{array} = 91$$

(3)

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \times \quad & 7 \\ \hline 70 & 21 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 70 + 21 = 91$$

(4)

x	10	3
7	70	21

Algoritmo abreviado ou simplificado

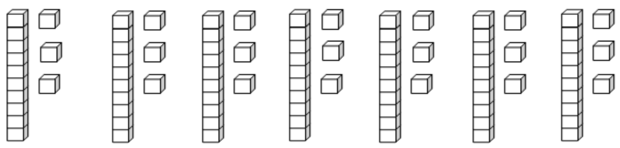
(1)

$$
\begin{array}{lcc}
 & D & U \\
 & {\scriptstyle 2} & \\
 & 1 & 3 \\
\times & & 7 \\
\hline
 & 9 & 1
\end{array}
$$

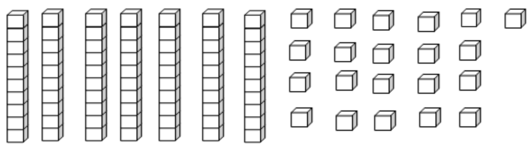
(2)

$$
\begin{array}{lcc}
 & D & U \\
 & 1 & 3 \\
\times & & 7 \\
\hline
 & 2 & 1 \\
+ & 7 & 0 \\
\hline
 & 9 & 1
\end{array}
$$

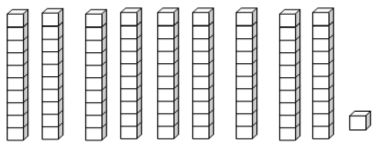
Representação com o material dourado



organizando peças



trocando peças



EXEMPLO (02): Vamos efetuar $14x25$.

Algoritmo expandido ou com decomposição

(1)

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 10 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ \times\ 4 \\ \hline 80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times\ 10 \\ \hline 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times\ 4 \\ \hline 20 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 200+80+50+20=350$$

(2)

$$\begin{array}{lr} & 20+5 \\ \times & 10+4 \\ \hline & 80+20 \\ + & 200+50 \\ \hline & 200+80+50+20=350 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \times & 10 \\ \hline 200 & 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \times & 4 \\ \hline 80 & 20 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 200+50+80+20=350$$

(4)

x	20	5
10	200	50
4	80	20

$\Rightarrow$ $200+50+80+20=350$

Algoritmo abreviado ou simplificado

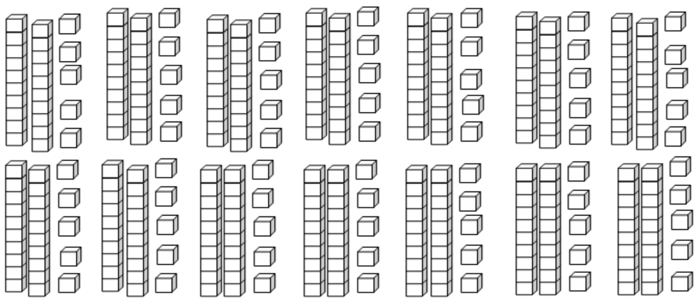
(1)

$$
\begin{array}{rccc}
 & & D & U \\
 & & {\scriptstyle 2} & \\
 & & 2 & 5 \\
\times & & 1 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 \\
+ & 2 & 5 & \\
\hline
 & 3 & 5 & 0
\end{array}
$$

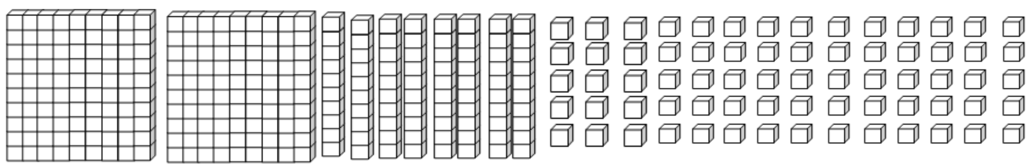
(2)

$$
\begin{array}{rccc}
 & & D & U \\
 & & 2 & 5 \\
\times & & 1 & 4 \\
\hline
 & & 2 & 0 \\
 & & 8 & 0 \\
 & & 5 & 0 \\
+ & 2 & 0 & 0 \\
\hline
 & 3 & 5 & 0
\end{array}
$$

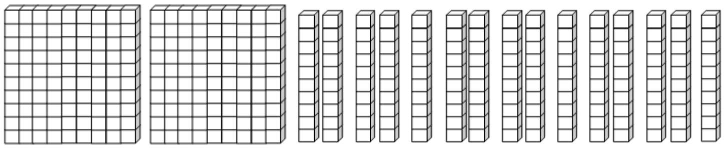
Representação com o material dourado



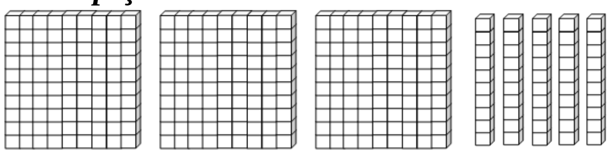
trocando peças



trocando peças



trocando peças



ATIVIDADE (01): Utilizando o algoritmo expandido, o algoritmo abreviado e, a representação com o material dourado, efetue as multiplicações abaixo:

$a)\ 10917 =$

b) $4093x29 =$

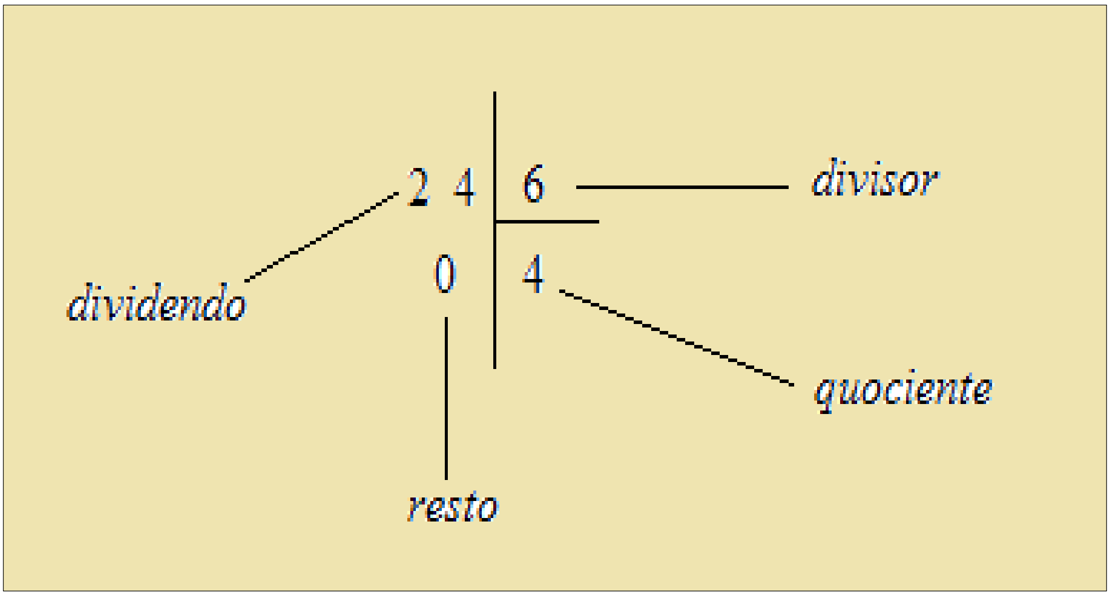
OFICINA

6º ENCONTRO

TRABALHANDO COM A DIVISÃO

Na análise conceitual da divisão vemos algumas ideias ligadas a sua compreensão. Iezzi, Dolce e Machado (2009), afirma que quando dividimos repartimos quantidades iguais. Podemos também por meio da divisão saber quantas vezes uma quantidade cabe dentro da outra. Mesmo que as quantidades repartidas não sejam iguais temos uma divisão. (LIMA, SIANI FILHO, COUTO FILHO, 1996; DANTE, 2009).

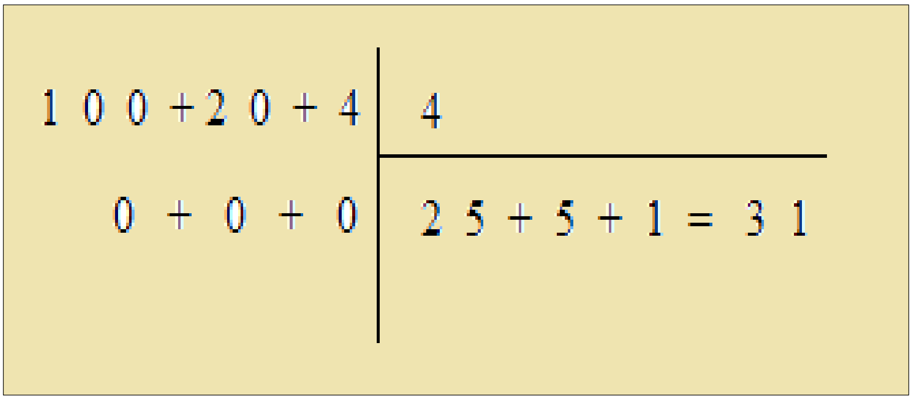
Os termos da divisão dão dividendo, divisor, quociente e resto.



A divisão acima pode ser escrita numa estrutura aditiva e multiplicativa, tal como, $24 = 4x6 + 0$.

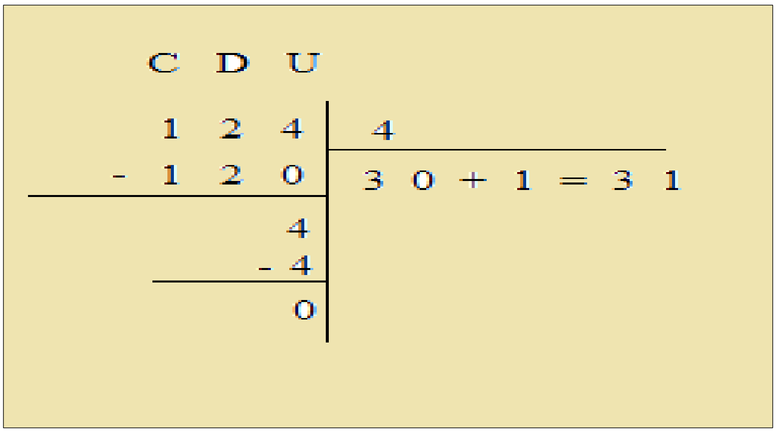
Exemplo (01): Vamos efetuar 124: 4.

Algoritmo expandido ou com decomposição

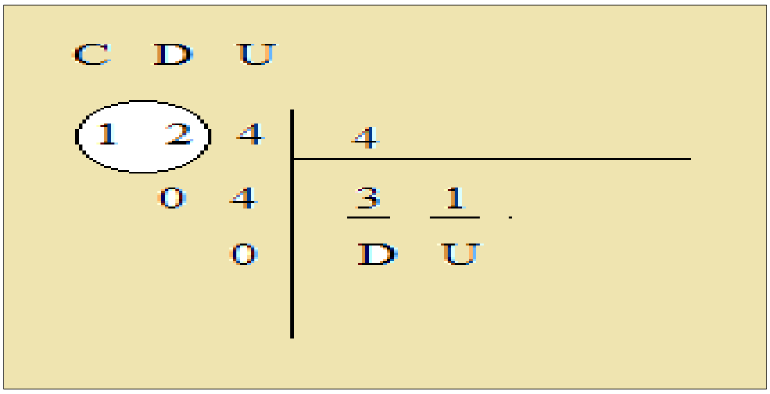


Algoritmo abreviado ou simplificado

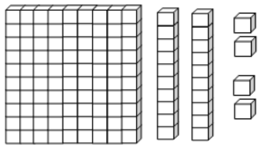
(1)



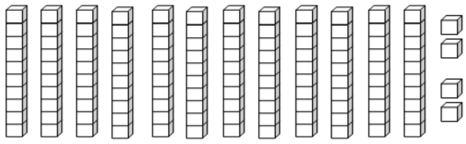
(2)



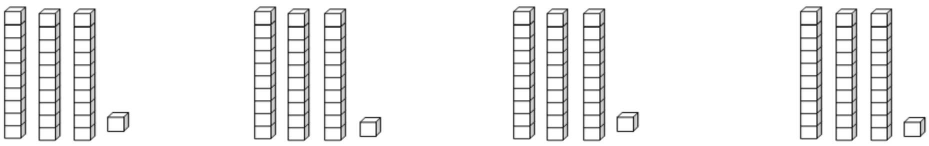
Representação com o material dourado



trocando peças



distribuindo as peças



EXEMPLO (02): Vamos efetuar 157: 8.

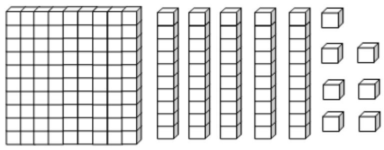
Algoritmo expandido ou com decomposição

$$
\begin{array}{r|l}
100 + 50 + 7 & 8 \\ \hline
\underbrace{20 + 10 + 7}_{37} & 10 + 5 + 4 = 19 \\
5 &
\end{array}
$$

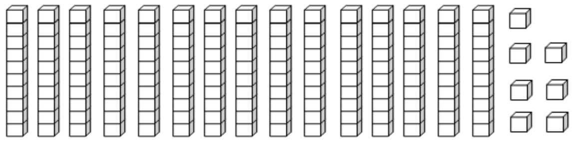
Algoritmo abreviado ou simplificado

$$
\begin{array}{ccc|cc}
C & D & U & & \\
1 & 5 & 7 & 8 & \\ \cline{4-5}
- & 7 & 7 & \underline{1} & \underline{9} \\ \hline
 & & 5 & D & U
\end{array}
$$

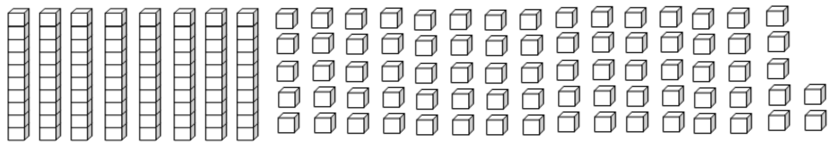
Representação com o material dourado



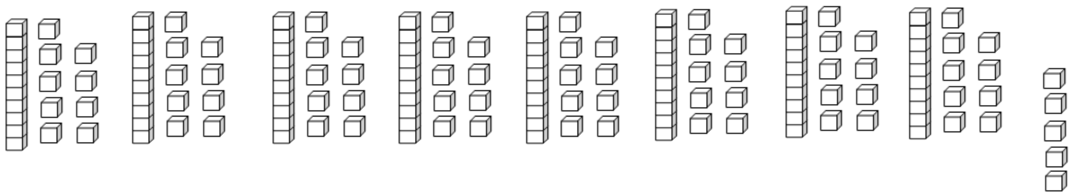
trocando peças



trocando peças



distribuindo as peças



sobra

ATIVIDADE (01): Utilizando o algoritmo expandido, o algoritmo abreviado e, a representação com o material dourado, efetue as divisões abaixo:

a) $377: 29 =$

b) $452: 17 =$

ANEXO A – Autorização do uso de imagens

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(X) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: ______________________________

Fortaleza, 29 de janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(X) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: Francisca Maria Barbosa da Silva Gonçalves.

Fortaleza, 29 de janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(X) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: Iranir Rodrigues de Lima.

Fortaleza, 29 de janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(X) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: Márcia Maria Bastos de Sousa

Fortaleza, 29 de janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(X) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: Viviana Maria Cabral Soriano.

Fortaleza, 29. de janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(X) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: Antônia Thays Nogueira Reis

Fortaleza, 28 de janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(X) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: Verônica das Dores Nogueira

Fortaleza, 28 de janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO DO USO DE IMAGEM

O presente documento refere-se à cessão de uso de imagem da aluna abaixo citada. Ao assinar o documento, estará ciente e concorda:

a) com a utilização de sua imagem na divulgação e registro de participação nos eventos escolares da Universidade Federal do Ceará por meio do material impresso (folhetos, cartazes, painéis, banners, etc.) e eletrônico (sítios, blogs, slides, etc);

b) que por 'imagem' entende-se a fotografia, filmagem ou ilustração (modificada ou não) da aluna ou em grupo;

c) que esta autorização é exclusiva para uso da Universidade Federal do Ceará, não estando estas autorizadas a cederem as imagens para outras instituições e fins que não são os estabelecidos no item "a";

d) que a cessão de imagem é gratuita e a Universidade Federal do Ceará não se responsabiliza pela apropriação e utilização indevida das imagens por terceiros;

e) que, caso a aluna sinta-se constrangida, ofendida, incomodada, ou desrespeitada pelo o uso da imagem e discorde de sua publicação, deve comparecer a esta universidade e registrar o PEDIDO DE RETIRADA DA IMAGEM, que deverá ser realizado em vinte e quatro horas (24h) por esta universidade; caso isto não seja efetuado, cabe à aluna tomar as providências legais para que isto se efetue.

Deste modo ciente do estabelecido acima:

(x) SIM, CONCORDO COM OS TERMOS E AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

( ) NÃO CONCORDO COM OS TERMOS E NÃO AUTORIZO O USO DE IMAGEM.

ALUNA: Tamir Regina de Matos

Fortaleza, 28 de janeiro de 2013.