UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –PROFMAT

JOSÉ MARIA MAGALHÃES JÚNIOR

UMA DISCUSSÃO INTUITIVA SOBRE O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

FORTALEZA – CEARÁ
2015

JOSÉ MARIA MAGALHÃES JÚNIOR

UMA DISCUSSÃO INTUITIVA SOBRE O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº. Drº. Hermínio Borges Neto.

FORTALEZA – CEARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Magalhães Júnior, José Maria.
Uma discussão intuitiva sobre o princípio multiplicativo da análise combinatória [recurso eletrônico] / José Maria Magalhães Júnior. – 2015.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 39 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

1. Princípio Multiplicativo. 2. Análise Combinatória. 3. Ensino Básico. I. Título.

JOSÉ MARIA MAGALHÃES JÚNIOR

UMA DISCUSSÃO INTUITIVA SOBRE O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 24 /11 /2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. João Marques Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará – UECE

A minha filha Cecília Soares de Oliveira Magalhães (in memória).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado à oportunidade de cursar e concluir este mestrado.

A minha querida esposa Priscila Soares de Oliveira, pelo o amor e companheirismo, essencial em muitos momentos desta caminhada.

A toda minha família, em especial a minha mãe Maria Alice Martins Magalhães, que sempre me incentivou a nunca desistir por maiores que fossem as dificuldades.

Ao meu ex-aluno e agora colega de profissão Francisco Das Chagas Alves Brito, pela ajuda e ensinamentos de seu vasto conhecimento em Matemática.

Ao meu orientador, Hermínio Borges Neto, pelo apoio e pelas sugestões para elaboração deste trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

À Universidade Estadual do Ceará e em especial aos professores do PROFMAT pela dedicação, ensinamentos e apoio no decorrer deste mestrado.

Aos colegas de turma, pela convivência, aprendizado e apoio em todas as etapas do curso.

"Se você não puder se destacar pelo talento,
vença pelo esforço."

(Dave Weinbaum)

RESUMO

Problemas de Análise combinatória são, muitas vezes, considerados difíceis pelos alunos, tal dificuldade se deve ao fato do ensino ser direcionado para aplicação de fórmulas sem significado para os mesmos. Durante muitos anos, tais problemas eram exclusividade do ensino médio, no entanto, o tema também é acessível aos alunos do ensino fundamental. O objetivo deste trabalho é incentivar professores e alunos a usar o princípio multiplicativo como meio de interpretar, compreender e solucionar alguns problemas de análise combinatória. Apresentamos soluções alternativas que visam encorajar o professor do ensino básico a abordar e utilizar este princípio como ferramenta para construção de modelos de soluções de alguns problemas matemáticos.

Palavras chave: Princípio Multiplicativo. Análise Combinatória. Ensino Básico.

ABSTRACT

Combinatorial analysis problems are often considered difficult by the student, such difficulty is because the teaching is directed to application of formulas meaningless for them for many years, these were exclusive of high school, and however the subject also is accessible to students of the elementary school. The objective of this work is to encourage teachers and students to use the multiplicative principal as a means to interpret, understand end solve some problems combinatorial analysis. Present alternative solutions that aim to encourage teacher of basic education to approach end use this principal as a tool building models solutions of some mathematical problems.

Keywords: Multiplicative Principle. Combinatorial Analysis. Basic Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

ANPmat	Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais +
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema deste trabalho surgiu da experiência como professor de Matemática no ensino médio, ao perceber as dificuldades que os alunos apresentavam no estudo de Análise Combinatória, em sua maior parte, provocada pela prática pedagógica, que era feita de forma mecânica, limitada a aplicação de fórmulas em situações padronizadas, sem habituar o aluno a fazer uma análise cuidadosa de cada problema.

Diante disso, é necessário encontrar meios que facilitem a aprendizagem de tal assunto e incentivem a criatividade do aluno para a compreensão de problemas combinatórios, que na maioria das vezes requer um completo entendimento das circunstâncias referidas nos mesmos. Neste contexto o princípio multiplicativo (ou Principio Fundamental da Contagem) surge como ferramenta que auxilia no processo de ensino aprendizagem, pois se baseia em uma das operações básicas da matemática, podendo ser usado, inclusive, no ensino fundamental.

Este trabalho tem como objetivo destacar o uso do Princípio Multiplicativo para resolver situações que habitualmente seriam abordadas com aplicação de uma fórmula, que pouco permite ao aluno ter um entendimento completo do problema e das etapas de resolução. Como sugere os PCN + :

> [...] decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002, p.126).

Inicialmente, no primeiro capítulo, vamos apresentar uma análise dos referenciais curriculares no que diz respeito ao ensino de combinatória e perceber uma relação direta com o tema proposto, pois tais documentos destacam e incentivam o uso do princípio multiplicativo como instrumento facilitador da aprendizagem de tal assunto no decorrer do ensino básico.

No segundo capítulo, apresentamos um pouco da teoria da Análise Combinatória, destacando o Princípio Multiplicativo e sua utilidade para desenvolver e justificar as técnicas de contagem já tão conhecidas pelos professores e alunos do ensino básico. Desta forma, o aluno será capaz de perceber que esta ferramenta é a base para o estudo de contagens.

Por fim, no terceiro capítulo, são apresentados alguns problemas de combinatória e suas respectivas soluções, fazendo uma comparação, entre a utilização do Princípio Multiplicativo e a utilização de alguma fórmula tradicional da Análise Combinatória, com o intuito de percebemos que a solução por tal princípio é a mais adequada para os alunos do ensino básico.

2 A ANÁLISE COMBINATÓRIA SEGUNDO REFERENCIAIS CURRICULARES

O ensino da Combinatória na educação básica tem se tornado um grande desafio para professores, por ser considerado um assunto de difícil compreensão para maioria dos alunos, talvez pelo fato de o aluno apresentar dificuldade de identificar a fórmula certa para determinado tipo de problema.

Para amenizar tais dificuldades, torna-se necessário uma abordagem logo nas séries iniciais, como orientam alguns documentos oficiais do governo, em particular os parâmetros curriculares do ensino fundamental:

> A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. (BRASIL, 1998, P.136)

Nos PCNs são apresentados os objetivos gerais do ensino da Matemática e uma proposta de divisão dos conteúdos em quatro grupos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. No grupo Tratamento da Informação é sugerido a realização de “[...] estudos relativos as noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo” (BRASIL, 1998, p. 52). Recentemente, devido seu uso frequente na sociedade, este grupo de conteúdos foi incluído nos currículos brasileiros, sendo trabalhado desde as séries iniciais do Ensino Fundamental até as séries finais do Ensino Médio.

A utilização do Princípio Multiplicativo nas séries iniciais ajuda os alunos a desenvolver a capacidade de construir representações de contagens, sem a aplicação de fórmulas, na forma de diagramas, tabelas e esquemas que auxiliam na solução de problemas de combinatória sendo aplicado também para problemas de probabilidades como destaca:

> [...] o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998, p. 52).

No que se refere ao ensino médio, temos os PCNEM, este documento que está dividido em quatro partes:

Parte I – Bases Legais;

Parte II – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;

Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;

Parte IV – Ciências Humanas e suas Tecnologias.

A matemática está inserida na parte III deste documento, contendo as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos no decorrer do ensino médio.

Em relação ao ensino de Análise Combinatória é destacada a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos alunos e possíveis cuidados que os professores devem ter ao abordar esse conteúdo. Neste sentido, os parâmetros curriculares do ensino médio afirmam que:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastantes complexas. [...] Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 2000, p.44).

Isto mostra uma contextualização no ensino de combinatória, a partir do momento que o problema está inserido num contexto sócio cultural ou numa situação que retrata o cotidiano, ela passa a ter mais significado e sentido para o aluno proporcionando um melhor desenvolvimento cognitivo.

O ensino da análise combinatória durante o ensino médio é realizado a partir da utilização de fórmulas ou padrões de resoluções, no entanto, é necessário que este assunto seja trabalhado de uma forma que possibilite ao aluno a construção de sua própria estratégia de solução, através de conceitos simples que estimule o desenvolvimento do raciocínio correto para a solução do problema. Nesta perspectiva, os PCNs asseguram que:

> Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam por à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. (BRASIL, 1998, p.42).

Podemos ressaltar também, as observações contidas nos PCNs +, documento criado com a finalidade de "encaminhar um ensino compatível com as novas pretensões educativas e ampliar as orientações contidas no PCNEM, adiantando elementos que não estavam ainda explicitados" (BRASIL, 2002, p. 12). Neste documento, a análise combinatória se encontra no eixo temático análise de dados, que é distribuído em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade. Devido o foco deste trabalho destacamos a unidade temática contagem que possui como conteúdos o Princípio Multiplicativo e problemas de contagem, onde suas habilidades são:

> Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de eventos. Identificar regularidade para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2002, p. 127).

Segundo este documento, o ensino de contagem proporciona uma melhor compreensão da probabilidade, pois possibilita ao aluno a melhor forma de organizar todos os possíveis casos, que não deve ser feito com uma lista de fórmulas, e sim de uma maneira que o torne capaz de construir uma representação explicativa e simplificada da situação. As fórmulas surgem como resultado do raciocínio combinatório produzido durante a resolução de problemas e seu objetivo é de reduzir os cálculos quando a quantidade de elementos for bastante grande (BRASIL, 2002).

No dia 14 de Agosto de 2015, foi realizado em Brasília, durante o 2° simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática promovido pela SBM e pela ANPmat, uma mesa redonda para discutir as diretrizes curriculares para a matemática no ensino médio onde foi lançado uma proposta para a restruturação do currículo:

> A presente proposta é resultado de uma discussão ao longo de um pouco mais de três meses, com base na experiência em sala de aula, na análise de currículos em vigor no país e no exterior e no nosso ponto de vista sobre os conteúdos apresentados nos principais livros didáticos usados pelas escolas brasileiras. Desta forma, foi construída uma grade com os principais conteúdos de Matemática, visando contemplar habilidades a serem alcançadas pelos alunos concludentes do Ensino Médio. (SBM, 2015)

Esta proposta apresenta uma divisão dos conteúdos de Matemática em quatro grandes áreas:

a) Números e Funções
b) Geometria
c) Matemática Discreta
d) Tratamento de Informações

A Análise Combinatória está presente na área da Matemática Discreta com a sugestão de ser trabalhada no 1°ano, tendo como um tópico no estudo de Conjuntos e Contagens o princípio multiplicativo. Em seguida, no 2° ano, em Técnicas de contagens constam alguns tópicos como: Permutação Simples, Permutação Circulares e com Repetições e Combinação Simples, recomendando o uso do princípio multiplicativo:

> A técnica de contagem conhecida como Arranjo, tradicionalmente presente nos livros didáticos de Ensino Médio, não precisa ser abordada se o aluno tiver um bom domínio do Princípio Multiplicativo (estudado no 1ª série); a resolução de problemas envolvendo arranjo é, em geral, mais simples quando feita por aquele princípio. Além disso, são frequentes as confusões feitas pelos alunos entre as fórmulas de arranjo e combinação e com as falas "a ordem importa" ou "a ordem não importa". (SBM, 2015)

O Ministério da Educação apresentou no dia 16 de setembro de 2015 uma proposta preliminar da Base Nacional Comum Curricular, este documento detalha o que precisa ser ensinado em Matemática, Linguagens e Ciências da Natureza e Ciências Humanas nas escolas do país. A BNC está prevista na Constituição, na Lei de Bases da Educação e no Plano Nacional de educação, por ser um documento que não foi ainda regulamentado, está aberto para sugestões via internet, ainda haverá uma consulta pública antes de ser redigido o texto final.

Nesta proposta, o ensino da Matemática na educação básica é dividido nas etapas de escolarização por eixos, com seus respectivos objetivos de aprendizagem. No ensino fundamental e médio, os objetivos de aprendizagem são apresentados ano a ano, proporcionando uma melhor orientação durante o processo de escolarização.

Segundo MEC (2015), este documento insere a Análise combinatória no eixo números e funções, sugerindo que seja trabalhada a partir do 8° ano do ensino fundamental, com o objetivo de resolver e elaborar problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo, por meio de diagramas de árvores, tabelas e esquemas. Já no ensino médio, durante o 2°ano, o aluno deverá resolver problemas de combinatória, envolvendo estratégias básicas de contagem. Em seguida, no 3°ano, ele precisa resolver e elaborar problemas de combinatória. Uma novidade é o fato de o aluno ter que elaborar os problemas, que sem dúvida, proporcionará um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório. Vale ressaltar que tal proposta enfatiza o uso do Principio Multiplicativo como ferramenta para o ensino de contagens.

Com essa abordagem feita nos referenciais curriculares é possível perceber uma preocupação com o ensino da matemática, que muitas vezes é feito de forma mecanizada, dificultando sua compreensão. É necessário um ensino mais dinâmico, que tenha significado para o aluno, através de estratégias e metodologias que facilitem o aprendizado. Quando nos referirmos ao estudo das contagens temos um consenso com a proposta deste trabalho, pois destaca o uso do Princípio Multiplicativo como facilitador no processo de ensino e aprendizagem. Tal ferramenta proporciona uma melhor compreensão do conteúdo, pois destaca uma das operações fundamentais que é a multiplicação.

3 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

3.1 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Em nosso cotidiano, nos deparamos com varias situações em que há a necessidade de efetuar uma contagem. Quando a quantidade é pequena, até quatro ou cinco, a reconhecemos por meio da percepção, são as chamada quantidades perceptuais, que são aquelas que não possuem uma estruturação lógico-matemática. No entanto, existem os casos que, apesar de serem números pequenos, só a percepção não é suficiente para reconhecê-las, são as que representam os números elementares (maiores que 5), neste caso, o ato de contar é essencial (KAMII, 1994).

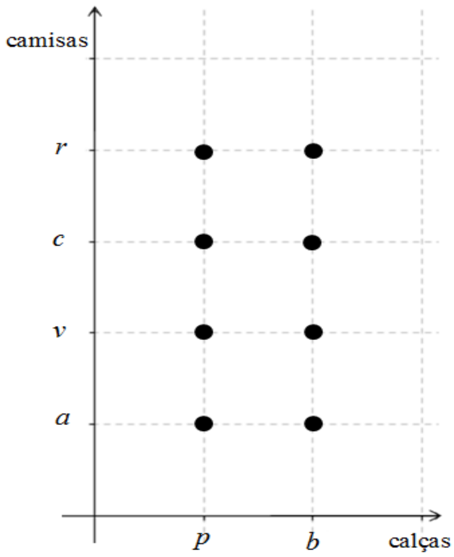
Um dos objetivos no estudo da Análise Combinatória é desenvolver métodos que permitem contar o número de elementos de um conjunto, assim se o conjunto for pequeno, onde sua quantidade é representada por números elementares, basta fazer uma lista organizada com todos os elementos e depois efetuar a contagem. Porém, nos casos onde o número de elementos a serem contados for muito grande, é mais conveniente utilizarmos métodos que facilitem a composição.

Vejamos alguns exemplos:

1. Um homem tem 2 calças (preta e branca) e 4 camisas (amarela, verde, cinza e roxa). De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir usando uma calça e uma camisa?

Chamando por p e b as calças preta e branca e, por a, v, c, e r as camisas amarela, verde, cinza e roxa, podemos representar a situação pedida no problema através do plano cartesiano abaixo:

Figura 1 – Plano cartesiano – exemplo1



Fonte: Elaborada pelo autor

Percebemos que cada ponto está associado a um par ordenado de decisões (calças, camisas). Assim, basta listar todos os pares ordenados:

{(*p*,*a*), (*p*,*v*), (*p*,*c*), (*p*,*r*), (*b*,*a*), (*b*,*v*), (*b*,*c*), (*b*,*r*)}

Daí, o número de maneiras diferentes deste homem se vestir é 8.

2. Quantos são os números de três algarismos distintos que podemos formar usando os algarismos 3, 6 e 8?

Basta enumerar todas as possibilidades de forma organizada:

{368, 386, 638, 683, 836, 863}

Portanto, são 6 números de três algarismos distintos formados com os algarismos 3, 6 e 8.

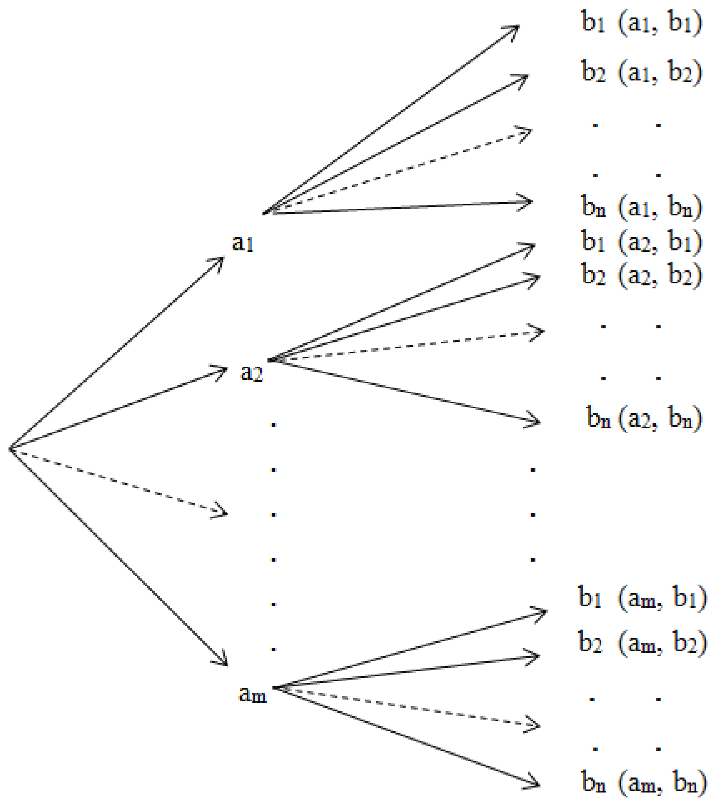
Uma maneira mais simples de visualizamos as soluções destes exemplos é através do diagrama de árvore. Que é definido da seguinte forma:

Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados $\{a_i, b_j\}$ onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo.

Teremos:

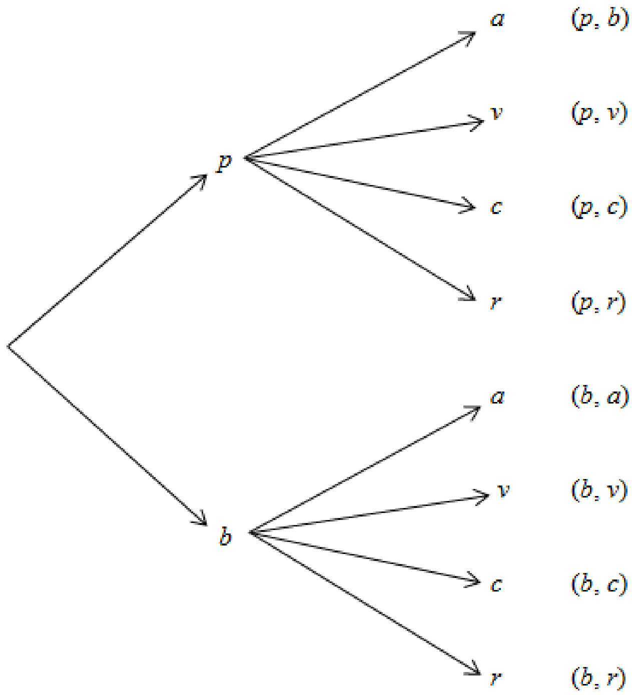
Figura 2 – Diagrama de Árvore.



Fonte: adaptada de HAZZAN (2004).

Com isso, o exemplo 1 será representado do seguinte modo:

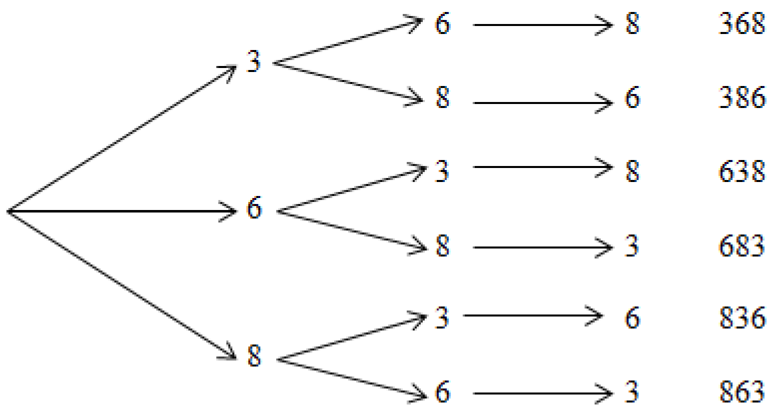
Figura 3 – Diagrama de Árvore – exemplo 1



Fonte: Elaborada pelo autor

E o exemplo 2 possuirá a representação abaixo:

Figura 4 – Diagrama de Árvore – exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Porém, nem sempre é conveniente enumerar todas as possibilidades, observe o exemplo abaixo:

3. Nove atletas disputam uma corrida. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Vamos tentar enumerar todos os resultados possíveis. Chamando de a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 e a_9 os nove atletas, temos:

$\{(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_2, a_5), (a_1, a_2, a_6), (a_1, a_2, a_7), ... ,(a_9, a_8, a_7)\}$

Após analisarmos esses exemplos, percebemos que além de ser trabalhoso obter todos os elementos de um conjunto e depois contá-los, corremos o risco de fazer repetições ou exclusões. No caso do exemplo 3, tal conjunto é muito grande e se torna inviável fazer sua enumeração, mais adiante saberemos como encontrá-lo. Assim, torna-se necessário estabelecer métodos de contagem que permitam chegar aos resultados mais rapidamente.

Uma dessas técnicas, que é objeto de estudo deste trabalho, é o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem que é definido do seguinte modo:

> Se há x maneiras de se tomar uma decisão D_1 e y maneiras de se tomar uma decisão D_2, então a quantidade de maneiras de se tomar, sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$.

Observamos que no enunciado do Princípio Multiplicativo está inserida a ordem como às decisões são tomadas, sendo primeiramente tomada a decisão D_1 para somente depois ser tomada a decisão D_2. Logo, quando aplicamos tal princípio, a ordem das decisões é levada em consideração. Porém, há casos em que a ordem das decisões interessa e outros em que a ordem não interessa.

Esse conceito pode ser estendido para uma quantidade finita de decisões.

PROPOSIÇÃO: Se há x_1 maneiras de se tomar uma decisão D_1, x_2 maneiras de se tomar uma decisão D_2, e assim sucessivamente até x_m maneiras de se tomar uma decisão D_m, então a quantidade de maneiras de se tomar sucessivamente as m escolhas citadas é $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_m$.

PROVA: Faremos a prova utilizando o princípio da indução finita.

Para m = 2, temos uma mera repetição do enunciado do princípio multiplicativo.

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para uma certa quantidade k de decisões ($k \geq 2$), isto é, sendo x_i a quantidade de maneiras de se tomar a decisão D_i, a quantidade de maneiras de se tomar sucessivamente as decisões $D_1, D_2, \cdots, D_k$ é $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k$. Assim, podemos entender a tomada das $k + 1$ decisões $D_1, D_2, \cdots, D_k, D_{(k+1)}$ como a tomada das k primeiras seguida da tomada da última, mas, pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de maneiras de se fazer isto é igual ao produto da quantidade de maneiras da primeira tomada de decisões pela quantidade de maneiras da segunda tomada de decisões. Logo, podemos tomar as decisões $(D_1, D_2, \cdots, D_k)$, $D_{(k+1)}$ de $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k) \cdot x_{(k+1)}$ = $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{(k+1)}$. Portanto, a proposição é válida para qualquer quantidade $k \in \mathbb{N}$ de decisões.

Logo, no exemplo 1, há duas possibilidades de escolher uma calça. Para cada uma delas, quatro possibilidades para escolher uma camisa. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número total de maneiras deste homem se vestir é $2 \cdot 4 = 8$.

Já no exemplo 2, podemos começar escolhendo o algarismo das centenas, isto pode ser feito de três maneiras, como os algarismos devem ser distintos resta-nos duas maneiras de escolher o algarismo das dezenas e, por contarmos apenas com três algarismos possíveis, o algarismo das unidades fica determinado, isto é, há apenas uma maneira de escolhê-lo. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, podemos formar $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números de três algarismos distintos.

Mesmo no caso do exemplo 3, onde a enumeração não é viável, o Princípio Multiplicativo é facilmente aplicado, demostrando ser uma ferramenta poderosa na resolução de problemas de combinatória. A solução do exemplo 3 dá-se, então, da seguinte forma: podemos começar escolhendo o atleta que ocupará o primeiro lugar, para isso há nove possibilidades de resultados, qualquer um dos atletas pode ocupar o segundo lugar, exceto aquele que já foi escolhido como primeiro colocado, restando oito possibilidades para o segundo e usando um raciocínio análogo vemos que há sete possibilidades para o terceiro colocado. Então, pelo Princípio Multiplicativo, o número de resultados possíveis é $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Vejamos mais exemplos onde podemos aplicar o Princípio Multiplicativo:

4. Um prédio possui seis portas. De quantas maneiras posso entrar e sair do prédio se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada.

Para a entrada, posso escolher qualquer uma das seis portas. Escolhida a porta de entrada, sobram cinco portas para a saída. Logo, existem $6 \cdot 5 = 30$ maneiras de entrar e sair por portas diferentes.

5. Numa determinada rua há seis casas. Deseja-se pintar as fachadas das casas utilizando apenas as cores azul, verde e amarelo, de modo que cada fachada seja pintada de uma única cor e que fachadas vizinhas não sejam da mesma cor. De quantos modos se pode pintar as fachadas?

Pintar as fachadas é o mesmo que escolher a cor de cada fachada. A três modos de escolher a cor da primeira fachada e, a partir daí, dois modos de escolher a cor de cada uma das outras cinco fachadas. Logo, existem $3 \cdot 2^5 = 96$ modos de se pintar as fachadas.

6. Quantos são os números pares de três algarismos distintos escolhidos no conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

O algarismo das unidades pode ser escolhido de três formas (2, 4 e 6). O algarismo das dezenas pode ser escolhido de cinco formas, pois não pode ser igual ao das unidades. Já o algarismo das centenas pode ser escolhido de quatro formas, pois não pode ser igual, nem ao das unidades, nem ao das dezenas. Logo, existem $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ números pares de três algarismos distintos.

Em Lima *et al.* (2006, p.90) encontramos algumas dicas que nos ajudam na resolução de problemas de Combinatória:

Postura. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No exemplo 4, nós colocamos no papel da pessoa que deveria entrar e sair do prédio; no Exemplo 5, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria pintar as fachadas; no Exemplo 6, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria escrever números pares de três algarismos.

Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Entrar e sair do prédio foi dividido em escolher a porta para entrar e escolher a porta para sair; pintar as fachadas foi dividido em pintar cada fachada; formar um número de três algarismo foi dividido em escolher cada um dos três algarismos.

Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No exemplo 6 a escolha do algarismo das unidades era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o algarismo das unidades, neste caso, não pode ser igual a 1, 3 ou 5. Essa é, portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

3.2 PRINCÍPIO ADITIVO

Se uma sequência de decisões pode ser analisada totalmente em duas ou mais situações disjuntas duas a duas, então o total de modos possíveis de se tomar tais decisões sucessivamente equivale à soma da quantidade de modos de cada situação.

Tais princípios são os instrumentos básicos para o estudo da Análise Combinatória, porém, sua utilização na resolução de problemas poderá, às vezes, ser trabalhosa. Vamos apresentar algumas técnicas que nos ajudam a determinar o número de elementos de um conjunto que possui algumas particularidades.

3.3 FATORIAL

Em alguns problemas de combinatória há a necessidade de lidar com um produto de números naturais consecutivos. Para simplificar a representação desses produtos surgiu a notação de fatorial.

Define-se como fatorial de um número natural n, e denota-se por $n!$, ao produto de todos os inteiros de 1 até n.

Assim,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geq 1.$$

Podemos definir recursivamente o fatorial para qualquer número natural n, da seguinte forma:

$$1! = 1$$
$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Tal definição nos auxilia nas simplificações de frações com fatorial. Por exemplo:

$$a)\ \frac{5!}{2!+3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! + 3 \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}!}{\cancel{2}!\,(1+3)} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4}} = 15$$

$$b)\ \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n}!}{\cancel{n}!} = n^2 + 3n + 2$$

3.4 PERMUTAÇÃO SIMPLES

Suponha que precisamos formar um fila com n elementos distintos. De quantos modos distintos esta fila poderá ser formada?

Visivelmente, cada posição da fila é uma decisão, chamamos por D_1 a decisão de qual elemento ocupará a primeira posição da fila, como qualquer um dos n elementos pode estar em primeiro, teremos n formas de tomar esta decisão. O fato de todos os elementos da fila serem distintos nos diz que o segundo elemento não pode ser igual ao primeiro, restando então $n-1$ maneiras para a decisão D_2, e assim sucessivamente até que o último elemento da fila fica determinado, isto é, a quantidade de maneiras de se tomar a decisão D_n é 1. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de ordenarmos os n elementos é equivalente a: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, ou, de forma reduzida, $n!$.

Cada maneira de ordenar (ou enfileirar) os n elementos recebe o nome de permutação simples. Chamamos de permutações simples de n elementos distintos, e denotamos por P_n, ao número de maneiras de ordenar (ou enfileirar) os n elementos. Assim, temos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{1}$$

Permutar significa trocar, embaralhar, ou seja, mudar os objetos de posição com a finalidade de obter uma nova configuração. Numa permutação, os elementos são sempre os mesmos, eles apenas trocam de posição.

Exemplo: De quantos modos podemos dispor em fila 5 pessoas?

Resolver este problema equivale a determinar o número de permutações de 5 elementos distintos. Desta forma temos, $5! = 120$ modos.

3.5 PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS NEM TODOS DISTINTOS

Suponha que precisemos organizar 10 copos em uma prateleira, sendo destes 4 copos azuis idênticos, 3 copos verdes também idênticos e 3 copos amarelos também idênticos, e estejamos interessados na quantidade de modos distintos de fazer isto. O fato de termos que organizar os copos nos remete a pensar em uma permutação, mas deve-se ressaltar que, neste caso, as permutações de copos idênticos entre si não geram uma nova organização, portanto não devem ser consideradas, assim poderíamos resolver este problema da seguinte forma:

Inicialmente, consideremos a quantidade de modos de permutar os 10 copos, por (1) a resposta seria $10!$, mas sabemos que fizemos uma contagem indevida, pois neste caso é como se dado um padrão qualquer de organização destes copos, uma troca de posições envolvendo apenas os copos azuis gerasse um novo padrão de organização, o que não é verdade, considerando que a quantidade de modos de ordenar apenas os copos azuis equivale ao número de permutações destes e devemos contar todas estas como um padrão só, devemos dividir o resultado anterior pelas permutações destes copos, mas isso ainda não resolve o problema, pois também devemos analisar o caso dos copos verdes e dos copos amarelos, chegando ao resultado $\frac{10!}{4!3!3!}$.

De um modo geral podemos nos perguntar: E no caso em que nem todos os n elementos fossem distintos? Como fazer?

A quantidade de sequências com n termos, formada pelos elementos $a_1, a_2, \dots , a_k$, onde o elemento a_1 aparece r_1 vezes, a_2 aparece r_2 vezes, e assim por diante, será dito o número de permutações de n elementos com repetições $r_1, r_2, \dots, r_k$, que será denotado por $P_n^{r_1, r_2, \dots, r_k}$ pode ser calculado generalizando o raciocínio do problema anterior, obtendo $P_n^{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$.

Apesar de não termos utilizado diretamente o Princípio Multiplicativo para calcular este número, utilizamos a ideia do número de permutações simples, ou seja, uma consequência deste princípio.

3.6 ARRANJO SIMPLES

A ideia de Arranjo simples é retratada na seguinte situação: De quantos modos três pessoas podem se sentar em cinco cadeiras colocadas em qualquer ordem?

A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de cinco modos; a segunda, de quatro; a terceira de três. Logo a resposta para este problema é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

A solução deste problema equivale a encontrar o número de agrupamentos ordenados de três das cinco cadeiras. Podemos pensar num problema mais geral: quantos são os agrupamentos ordenados de p elementos distintos dentre n elementos também distintos?

Percebe-se facilmente que para este problema fazer sentido devemos ter $p \leq n$, e no caso de $p = n$ estaremos apenas enfileirando os n elementos, isto é, fazendo permutações. Por (1), $n!$.

Quando tivermos $p < n$, então iremos tomar p decisões, tendo n maneiras de tomar a primeira (D_1), e pelo fato de todos os elementos serem distintos, teremos $n - 1$ maneiras de tomar a segunda (D_2) e assim sucessivamente até $n - p + 1$ maneiras de tomar a p-ésima decisão (D_p), resultando (pelo princípio multiplicativo) que

$$n\cdot\ \ n-1\ \ \cdot\ldots\cdot(n-p+2)\cdot(n-p+1)$$

Mas podemos ver este produto como

$$\frac{n\cdot\ \ n-1\ \ \cdot\ldots\cdot\ \ n-p+2\ \ \cdot\ \ n-p+1\ \ \cdot\ \ n-p\ \ \cdot(n-p-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{n-p\ \ \cdot(n-p-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{n-p\ \ !}$$

No caso de $n=p$, $(n-p)!=0!$.Vemos, então, que é bastante conveniente estender a definição de fatorial par o 0, pondo $0!=1$.

Um arranjo simples de p elementos distintos tomados dentre n elementos distintos é qualquer agrupamento ordenado de p elementos dos n elementos. Chamamos de arranjos simples de n elementos tomados em grupos de p elementos, e denotamos por $A_{n,p}$, ao número de maneiras de montarmos agrupamentos ordenados de p elementos, todos distintos, quando dispomos de n elementos, também todos distintos. Deste modo,

$$A_{n,p}=\frac{n!}{n-p\ \ !}$$

Exemplo: De quantos modos podemos escolher um presidente e um vice num grupo de oito pessoas?

Resolver este problema equivale a determinar o número de arranjo simples de 8 elementos, tomados em grupos de 2 elementos. Desta forma temos, $A_{8,2}=\frac{8!}{6!}=56$ modos.

3.7 COMBINAÇÃO SIMPLES

Para compreendermos a ideia de combinação simples, abordaremos a situação a seguir: Dispondo de 6 pessoas, de quantos modos distintos podemos escolher uma comissão formada por 3 pessoas deste grupo?

A primeira pessoa pode ser escolhida de seis modos, a segunda de cinco e a terceira de quatro, mas no caso de uma comissão estamos falando de um agrupamento não ordenado, cada comissão pode gerar seis agrupamentos ordenados, que é o número de permutações dos três elementos que compõem a comissão. Daí, a resposta para o problema é 20 modos.

E quando queremos escolher p elementos distintos dentre n elementos também distintos? Como fazer?

Neste caso estamos interessados na quantidade de agrupamentos não ordenados de p elementos, quando temos n elementos disponíveis, o que equivale a tomar o número de agrupamentos ordenados nas mesmas condições e desconsiderar a questão da ordem. Como, pelo Princípio Multiplicativo para acrescentarmos uma decisão basta multiplicarmos pela quantidade de maneiras de fazê-la, para retirá-la basta dividir por tal número. Assim, responder esta questão será tomar o número de arranjos simples de n elementos tomados em grupos de p elementos e dividi-lo pelo número de permutações de uma sequência de p elementos distintos. Assim, temos:

$$\frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{n!}{n-p\ ! \cdot p!}$$

Uma Combinação simples de p elementos distintos tomados dentre n elementos distintos é qualquer agrupamento não ordenado de p elementos dos n elementos. Chamamos de combinações simples de n elementos tomados em grupos de p elementos, e denotamos por $C_{n,p}$, ao número de agrupamentos não ordenados de p elementos, todos distintos, quando dispomos de n elementos, também todos distintos. Deste modo:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{n-p\ ! \cdot p!}$$

Exemplo: Entre sete policiais serão escolhidos três para garantir a segurança de um evento. De quantos modos esta escolha poderá ser feita se os escolhidos terão funções idênticas?

Resolver este problema equivale a determinar o número de combinações simples de 7 elementos, tomados em grupos de 3 elementos. Desta forma temos, $C_{6,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ modos.

Percebemos que as técnicas de contagem mais utilizadas no ensino médio têm suas definições apoiadas no Princípio Multiplicativo, e para um melhor entendimento destas técnicas é interessante que tais definições sejam ressaltadas pelo professor durante o ensino de combinatória.

Sabemos da importância destas técnicas, que são as mais usadas na resolução de problemas no ensino médio, para o ensino da Análise Combinatória, pois proporcionam ao aluno um estudo em relação às semelhanças e diferenças, principalmente no que diz respeito à ordem e natureza dos elementos. Porém, se o ensino é feito de forma de mecânica, através de aplicações de fórmulas em problemas padronizados, estará limitando o processo de aprendizagem dos alunos, pois não proporciona o hábito de analisar e interpretar cuidadosamente cada problema. Ele pode até conseguir resolver alguns problemas mais simples, no entanto, terá dificuldades em problemas que possuem alguma particularidade em seus agrupamentos.

Apenas apresentar fórmulas para os alunos pode até ser menos trabalhoso, porém não contribui para o desenvolvimento do raciocínio necessário para solucionar problemas mais elaborados. Não defendemos o não uso das fórmulas, pois as mesmas são necessárias para a simplificação dos cálculos, defendemos uma abordagem que as usem como uma ferramenta que auxilie na resolução de problemas quando a quantidade de agrupamentos for muito grande.

A seguir apresentamos alguns problemas de contagem e suas respectivas soluções, apresentando cada uma de duas formas. A primeira, a forma tradicional como nos livros didáticos. Em seguida, usando o foco deste trabalho, pelo Princípio Multiplicativo.

4 APLICAÇÕES

Nesta seção, será realizado o foco principal do trabalho. Selecionamos oito problemas de Análise Combinatória e, em seguida, resolvemos cada problema de duas maneiras. A primeira, de forma mecânica, utilizando alguma das fórmulas conhecidas durante o ensino de combinatória. A segunda, que utiliza a proposta inicial deste trabalho, ou seja, pelo Princípio Multiplicativo.

4.1 O CASO DO PROBLEMA DOS NÚMEROS DE QUATRO ALGARIMOS DISTINTOS.

Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?

Solução usando a fórmula do Arranjo simples:

Inicialmente, devemos preencher o algarismo das unidades de milhar, que poderá ser feito de 9 maneiras, restando para ser ocupado os algarismos das centenas, dezenas e unidades. Neste caso precisamos montar sequências ordenadas de três elementos distintos dispondo de nove elementos distintos, pois dos 10 algarismos do sistema decimal já utilizamos um algarismo. Isto equivale a calcular $A_{9,3}$. Logo, a solução é:

$$9 \cdot A_{9,3} = 9 \cdot \frac{9!}{9-3\ !} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

Solução usando o Princípio Multiplicativo:

Percebemos que se trata de um número de quatro algarismos, e vamos, sucessivamente, fazer a escolha começando pelo da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo, de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro e, neste caso, o 0 já pode aparecer. O terceiro, de 8 modos, pois deve ser diferente dos dois primeiros. O último, de 7 modos, pois deve ser diferente dos anteriores. A resposta é $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

4.2 O CASO DO PROBLEMA DA SOMA DE NÚMEROS DE TRÊS ALGARISMOS DISTINTOS.

(Obmep-2011) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

Solução usando a fórmula do Arranjo simples:

Neste caso, montamos sequências ordenadas de três elementos distintos dispondo de quatro elementos distintos. Assim, temos $A_{4,3} = 24$ números. Para efetuarmos a soma de todos esses 24 números é necessário perceber que nas unidades cada algarismo aparece 6 vezes, pois preenchido o algarismo das unidades resta $A_{3,2} = 6$ modos para preencher os dois algarismo restante, e de maneira análoga, para dezenas e centenas. Assim, a soma nas unidades será $(1 + 4 + 6 + 8) \cdot 6 = 114$, a soma das dezenas e centenas serão também a mesma. Daí a soma total será $114 + 10 \cdot 114 + 100 \cdot 114 = 111 \cdot 114 = 12654$.

Solução usando o Princípio Multiplicativo:

Com estes algarismos é possível formarmos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números de três algarismo distintos, pois temos 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena, que deve ser distinta da centena, e por fim 2 possibilidades para escolher a unidade, que deve ser distinta da centena e da dezena. Dos 24 números possíveis cada algarismo aparece na posição das unidades em seis deles, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e $24 \div 4 = 6$; de maneira análoga observa-se o mesmo resultado para as dezenas e centenas. Assim, a soma nas unidades será $(1 + 4 + 6 + 8) \cdot 6 = 114$, a soma das dezenas e centenas serão também a mesma. Daí a soma total será $114 + 10 \cdot 114 + 100 \cdot 114 = 111 \cdot 114 = 12654$.

4.3 O CASO DO PROBLEMA DAS DUAS RETAS PARALELAS E TRIÂNGULOS

Sobre uma reta marcam-se 7 pontos e sobre outra reta, paralela à primeira, marcam-se 4 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 pontos quaisquer do total desses pontos?

Solução usando a fórmula da combinação simples:

Inicialmente, sabemos que os vértices de um triângulo não são colineares, o que indica que os três pontos não podem ser tomados sobre a mesma reta, podendo então ser tomado de uma das seguintes formas:

Forma 1: dois pontos sobre a 1ª reta e um ponto sobre a 2ª reta. Para a 1ª reta devemos encontrar o numero de subconjuntos de dois elementos tomados em um conjunto com 7 elementos e para a 2ª reta devemos encontrar o numero de subconjuntos com um elementos tomados em um conjunto com 4 elementos. Assim, temos

$$C_{7,2} \cdot C_{4,1} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 21 \cdot 4 = 84 .$$

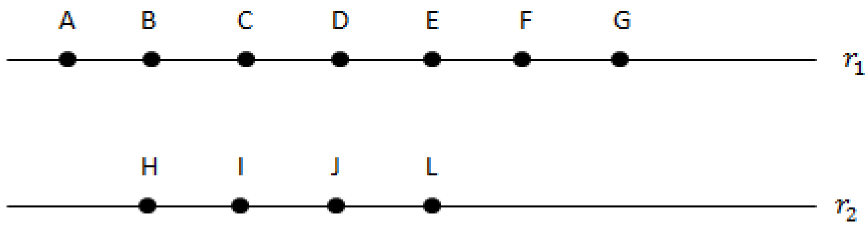
Forma 2 : um ponto sobre a 1ª reta e dois pontos sobre a 2ª reta. Para a 1ª reta devemos encontra o numero de subconjuntos de um elemento tomados em um conjunto com 7 elementos e para a 1ª reta devemos encontrar o numero de subconjuntos com dois elementos tomados em um conjunto com 4 elementos. Assim, temos

$C_{7,1} \cdot C_{4,2} = \frac{7!}{6! \cdot 1!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 7 \cdot 6 = 42$. Estas formas são complementares, logo, o número total de triângulos será: $84 + 42 = 126$.

Solução usando o Princípio Multiplicativo:

Usaremos a figura abaixo para auxiliar na solução

Figura 5 – Retas paralelas e pontos



Fonte: Elaborada pelo autor

Chamaremos de r_1 a reta que contém 7 pontos e r_2 a reta que contém 4 pontos. Três desses pontos determinam um triângulo das seguintes formas:

Forma 1: se dois deles pertencerem a r_1 e um pertencer a r_2. Assim, escolhendo dois pontos em r_1 temos 7 possibilidades para o primeiro ponto e depois 6 possibilidade para o segundo. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos $7 \cdot 6 = 42$ pares ordenados de pontos. No entanto, os pares AB e BA, por exemplo, representam o mesmo segmento, para obter o número correto de pares, devemos tirar as repetições, ou seja dividir por 2. Logo, o número de pares em r_1 será $\frac{42}{2} = 21$ e para cada par, temos 4 possibilidades de escolha em r_2. Daí, usado mais uma vez o Princípio Multiplicativo, temos $21 \cdot 4 = 84$ maneiras de formar um triângulo.

Forma 2: se dois deles pertencem a r_2 e um pertence a r_1. Com raciocínio análogo ao anterior, obtemos $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pares sobre a reta r_2 e para cada um deles 7 possibilidades para o terceiro ponto em r_1. Portanto há $7 \cdot 6 = 42$ maneiras de formar um triângulo.

Logo, o número total de triângulos será: $84 + 42 = 126$.

4.4 O CASO DO PROBELMA DOS PONTOS TURÍSTICOS EM NITERÓI

(UFF - 05) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede, a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

Solução usando a fórmula da combinação simples:

Como não estamos levando em consideração a ordem, o hóspede está simplesmente tomando um subconjunto com três pontos turísticos dentre os oito disponíveis, isto pode ser feito de $C_{8,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ modos.

Solução usando o Princípio Multiplicativo:

O primeiro ponto turístico pode ser qualquer um dos oitos, o segundo só não pode ser o primeiro, podendo ser escolhido, portanto, de sete maneiras, o terceiro pode ser qualquer um dos seis pontos restantes. Ao escolher ordenadamente os três pontos turísticos, temos $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ maneiras, mas neste caso a ordem não é um fator importante, e para evitar contagens repetidas devemos retirar as permutações dos três pontos turísticos, obtendo, na verdade, $\frac{336}{3!} = 56$ possíveis escolhas.

4.5 O CASO DO PROBLEMA DA VIAGEM DE MOTOCICLETA

(UFJF-MG) Para uma viagem, seis amigos alugaram três motocicletas distintas, com capacidade para duas pessoas cada uma. Sabe-se que apenas quatro desses amigos são habilitados para pilotar as motocicletas e que não haverá troca de posições durante o percurso. De quantas maneiras distintas esses amigos podem se dispor nas motocicletas para realizar a viagem?

Solução usando a fórmula da permutação simples:

Obviamente uma motocicleta terá dois amigos habilitados, enquanto nas demais apenas o piloto será habilitado. Supondo escolhida a moto que terá dois amigos habilitados, devemos agora ordenar os quatro habilitados nos quatro espaços já determinados, podendo fazer isso de $P_4 = 4! = 24$ formas, qualquer uma das três motos pode ser escolhida como a que vai ter os dois habilitados, assim, os habilitados podem ser organizados de $3 \cdot 24 = 72$ formas. Resta agora, ordenar os não habilitados, e isto pode ser feito de $P_2 = 2! = 2$ formas. Portanto, os amigos podem se dispor nas motocicletas de $72 \cdot 2 = 144$ formas.

Solução usando o Princípio Multiplicativo:

Devemos começar pelas posições com mais restrições, que são as de piloto. As motos são distintas e só os habilitados podem pilotar. O piloto da moto 1 pode ser qualquer um dos quatro habilitados, o piloto da moto 2 pode ser qualquer um dos três habilitados restantes e o piloto da moto 3, qualquer um dos três habilitados restantes, logo podemos definir os pilotos de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneiras. Na posição de passageiro não há diferenciação entre habilitado e não habilitado. O passageiro da moto 1, pode ser qualquer um dos três amigos que sobraram. O passageiro da moto 2, um dos dois restantes. Já o passageiro da moto 3 fica determinado, logo podemos organizar os passageiros de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras. Por fim, os amigos podem se dispor de $24 \cdot 6 = 144$ maneiras.

4.6 O CASO DO PROBLEMA DE DOIS SEGMENTOS NO PENTÁGONO

(Obmep-2009) Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer diferentes figuras unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Figura 6 − Figura do problema 6

Fonte: OBMEP (2009)

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Solução usando a fórmula da combinação simples:

Devemos escolher dois dentre todos os segmentos possíveis entre os vértices do pentágono, o total destes segmentos pode ser calculado por $C_{5,2} = 10$. Agora, a quantidade de formas de escolher dois dos segmentos é $C_{10,2} = 45$.

Solução usando o Princípio Multiplicativo:

O número de segmentos possíveis entre vértices do pentágono equivale ao número de modos de se escolher dois dentre cinco vértices. O primeiro vértice pode ser escolhido de cinco maneiras e o segundo, por ser distinto do primeiro, de quatro maneiras, mas devemos desconsiderar as permutações dos dois vértices escolhidos, assim o número de segmentos é $\frac{5\cdot4}{2}=10$. Resolver o problema equivale a encontrar o número de modos de se escolher dois entre os dez segmentos. O primeiro segmento pode ser escolhido de dez maneiras e o segundo, por ser distinto do primeiro, de nove maneiras, mas devemos considerar as permutações dos dois segmentos escolhidos, assim o número de figuras que podemos formar é $\frac{10\cdot9}{2}=45$.

4.7 O CASO DO PROBLEMA DAS POSES PARA UMA FOTOGRAFIA

(IME-adaptada) 5 rapazes e 5 moças devem posar para fotografia, ocupando cinco degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça lado a lado e que os rapazes fiquem todos do mesmo lado. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?

Solução usando a fórmula da permutação simples:

Suponha que todos os rapazes fiquem do lado direito, devemos permutá-los entre os degraus, podendo fazer isso de $P_5 = 5! = 120$ maneiras, vale o mesmo para as moças, considerando ainda que os rapazes possam estar do lado esquerdo obtemos então, $120\cdot120\cdot2=28800$ maneiras de arrumar o grupo.

Solução usando o Princípio Multiplicativo:

Suponha que todos os rapazes fiquem do lado direito, há 5 maneiras de escolher o rapaz para o primeiro degrau, 4 para o segundo, 3 para o terceiro, 2 para o quarto e o rapaz do quito degrau fica determinado, assim podemos organizar os rapazes de $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ maneiras, vale o mesmo para as moças, considerando ainda que os rapazes possam estar do lado esquerdo obtemos então, $120\cdot120\cdot2=28800$ maneiras de arrumar o grupo.

4.8 O CASO DO PROBLEMA DOS NÚMEROS DE CINCO ALGARISMOS DADOS

Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismo 1, 1, 1, 2 e 3?

Solução pela fórmula da permutação com repetição:

Este problema equivale ao número de permutações de 5 elementos, onde um elemento aparece três vezes e os dois restantes são distintos, logo temos $P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20$ números.

Solução pelo Princípio Multiplicativo:

O primeiro algarismo pode ser escolhido de cinco formas, o segundo de quatro, o terceiro de três, o quarto de duas e o quinto fica determinado, mas desta forma realizamos contagens indevidas, pois os algarismos 1's trocando de ordem apenas entre si não gera um novo número, assim, devemos desconsiderar estas trocas de ordem, que podem ocorrer de 6 formas, já que o primeiro deve ser um dos três, o segundo um dos dois restante, deixando o terceiro determinado. Assim, temos $\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ números.

Após as resoluções dos problemas propostos acima, percebemos que o Princípio Multiplicativo, por si só, é suficiente para resolver os problemas, mas sua melhor aplicação é na justificação das demais ferramentas e no desenvolvimento do raciocínio necessário para o domínio da contagem.

Uma vez justificadas as fórmulas, sua aplicação torna a resolução mais compacta, mas ressaltamos que seu uso é mais adequado quando o aluno já está desenvolvido o suficiente para utilizá-las sem prejudicar seu raciocínio. Tal desenvolvimento ocorre, principalmente, quando a abordagem inicial dos problemas é feita utilizando o Princípio Multiplicativo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que o ensino de Análise Combinatória não deve se feito de maneira mecânica, através de aplicações de fórmulas em problemas padronizados. O que propormos com este trabalho, é incentivar professores e alunos a usar o Princípio Multiplicativo como meio para facilitar a interpretação, análise e compreensão de problemas de contagem.

Neste contexto, sugerimos que para resolver problemas de combinatória, é necessário pensar, concentrar, colocar-se no papel da pessoa que vai fazer a situação proposta no problema, transformar certa decisão a ser tomada em uma sequência de decisões mais simples que possibilite o uso do Princípio Multiplicativo, e quando as decisões forem divididas em etapas, é essencial que as decisões mais complicadas sejam tomadas em primeiro lugar, pois pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades.

Destacamos também a relação existente entre as definições de Arranjo, Combinação e Permutação, onde percebemos que as justificativas de suas respectivas fórmulas partem da compreensão deste princípio, possibilitando ao aluno participar da construção destas e perceber que o uso das mesmas não é um conhecimento mecânico, e sim, um instrumento prático pra evitar que tenhamos que discutir repetidamente resoluções da mesma natureza, fazendo-o descobrir que várias situações de contagem podem ser resolvidas desta forma.

Os exemplos e atividades deste trabalho foram escolhidos pela experiência como professor de Matemática no ensino fundamental e médio e por serem, a grosso modo, os mais típicos. Também procuramos soluções que possibilitem fazer um paralelo entre, solucionar problemas usando alguma fórmula tradicional da combinatória, e usando simplesmente o Princípio Multiplicativo, para percebemos que o uso de tal princípio proporciona um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Consideramos importante o ensino da Análise Combinatória desde as séries iniciais da educação básica. No entanto, para haver o envolvimento dos alunos e, em consequência, a aprendizagem, é necessário que o professor utilize meios que estimule seu raciocínio e proporcione uma melhor compreensão. Enfim, esperamos que este trabalho ajude professores e alunos no que se refere ao processo de ensino aprendizagem de tal assunto.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documento/BNCC-APRESENTAÇÃO.pdfdocumento/BNCC-APRESENTAÇÃO.pdf.>. Acesso em: 22 set. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (1° e 2° ciclos do ensino fundamental). V.3. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio** (PECNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)**: Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática elementar**. Combinatória e Probabilidade. Volume 5, 7.ed. São Paulo: Atual, 2004.

KAMII, Constance. **A criança e o número**. 18.ed. São Paulo: Papirus, 1994.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2, 6.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OBMEP. **Provas e soluções**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 15 out. 2015.

SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), **Contribuição da SBM** para a discussão sobre currículo da matemática – Ensino Médio. Disponível em: <http://www.sbm.org.br/images/Contribuio_da_SBM_Ensino_Meio.pdf>. Acesso em: 17 set. 2015.