UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ IVAN ESTEVES VIEIRA

USO DA SEQUÊNCIA FEDATHI PARA O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO: UMA POSSIBILIDADE NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

FORTALEZA – CEARÁ
2017

JOSÉ IVAN ESTEVES VIEIRA

USO DA SEQUÊNCIA FEDATHI PARA O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO: UMA POSSIBILIDADE NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

FORTALEZA – CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Vieira, José Ivan Esteves.
Uso da sequência Fedathi para o ensino do sistema de numeração: uma possibilidade na educação de jovens e adultos [recurso eletrônico] / José Ivan Esteves Vieira. - 2017.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 86 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Área de concentração: Educação Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Hermínio Borges Neto .

1. Educação de jovens e adultos . 2. Sistemas de numeração. 3. Sequência Fedathi. I. Título.

JOSÉ IVAN ESTEVES VIEIRA

USO DA SEQUÊNCIA FEDATHI PARA O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO: UMA POSSIBILIDADE NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 18 / 08 / 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto (UFC)

Profa. Dra. Ana Cláudia Mendonça Pinheiro (IFCE)

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda (PROFMAT/UECE)

Dedico este trabalho a Deus e a minha família que sempre estiveram ao meu lado nos momentos em que precisei de força para continuar minha trajetória profissional.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, por me proporcionar saúde para trabalhar;

À Silvaniza, minha esposa, e à Samille, minha filha, por sempre me acompanharem nos momentos difíceis;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Hermínio Borges, pela maravilhosa orientação e avaliação;

À Prof.ª Dra. Ana Cláudia Mendonça, por seus métodos de orientação eficientes e eficazes;

À Prof.ª Dra. Layza Castelo Branco, pelos estímulos e elogios relacionados a este trabalho;

Aos membros da banca, pela avaliação, crítica, tolerância e compreensão.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria”

(Paulo Freire).

RESUMO

A Matemática é uma ciência muito antiga e largamente utilizada no dia a dia. Por essa razão, desde a educação infantil as crianças já são iniciadas no aprendizado dessa ciência. Contudo, sabe-se que tem havido falhas no processo de ensino-aprendizagem que dificultam a aquisição desse saber, tanto por crianças quanto por jovens e adultos. Esses últimos, que fazem parte dos programas de Centros de Educação de Jovens e Adultos (CEJA), muitas vezes apresentam intensas dificuldades, pois já possuem histórias pregressas de déficits de aprendizagem e abandonos escolares, além de serem indivíduos que já estão inseridos no mercado de trabalho e têm pouco tempo para dedicação aos estudos. Logo, novos métodos de ensino de Matemática devem ser pensados e experimentados, para que ocorra a superação dessas dificuldades. Este estudo realizou uma pesquisa bibliográfica acerca da possibilidade de utilizar uma proposta pedagógica nova, nomeada Sequência Fedathi, para o ensino da Matemática na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Para discutir essa possível utilização de metodologia foi feita uma descrição de instrumentos pedagógicos utilizáveis na EJA por meio da descrição do uso do quadro de valores nas operações aditivas, da subtração com reserva, da multiplicação com reserva e da divisão pelo método breve. Em seguida mostrou-se o uso de materiais recicláveis em aulas de sistema de numeração e algumas práticas pedagógicas vivenciadas em um CEJA. Logo após, descreveu-se algumas práticas pedagógicas de ensino utilizadas na educação na atualidade: abordagens tradicional, comportamental, humanista, cognitivista e sociocultural. Diante dessa explanação foi possível mostrar a adequação da Sequência Fedathi no cenário de ensino contemporâneo. Por fim, escolheu-se um tema da Matemática, qual seja, Sistemas de Numeração, para mostrar como poderia esta moderna proposta, acima mencionada pode ser utilizada no ensino dessa ciência. Para tanto, explanou-se dados das primeiras experiências na Aritmética, a importância de cada algarismo no sistema posicional, a importância de alguns sistemas para a informática, sistema de numeração romana e números p-ádicos. Percebeu-se, portanto, que essa nova proposta metodológica pode ser eficaz no ensino de Sistemas de Numeração para a Educação de Jovens e Adultos. Concluiu-se, portanto, que, mesmo sendo a Matemática uma ciência milenar, o seu processo de ensino deve ser continuamente revisado para que novas e mais eficazes maneiras de aprendizado sejam sempre verificadas e atualizadas, de acordo com as demandas sociais.

Palavras-chave: Educação de jovens e adultos. Sistemas de numeração. Sequência Fedathi.

ABSTRACT

Mathematics is a very old science and widely used in everyday life. For this reason, since early childhood, children are already initiated in the learning of this science. However, it is known that there have been shortcomings in the teaching-learning process that make it difficult to acquire knowledge, both by children and by young people and adults. These two last ones, which are part of the Youth and Adult Education Centers (JSCA) programs, often present serious difficulties, as they already have previous histories of learning deficits and school dropouts, as well as being individuals who are already in the job market and have little time to study. Therefore, new teaching methods in Mathematics must be thought and tried to overcome these difficulties. This study carried out a bibliographical research about the possibility of using a new pedagogical proposal, named Fedathi Sequence, for the teaching of Mathematics in the Education of Young and Adults (EJA). In order to discuss this possible use of the methodology, a description was made of pedagogical instruments that can be used in the EJA by describing the use of the table of values in additive operations, subtraction with reservation, multiplication with reservation and division by the short method. Then the use of recyclable materials in classes of numbering system and some pedagogical practices experienced in a JSCA was shown. And next, we described some pedagogical teaching practices used in education today: traditional, behavioral, humanistic, cognitive and sociocultural approaches. Based on of this explanation, it was possible to show the suitability of the Fedathi Sequence in the contemporary teaching scenario. Finally, a Mathematical theme, named Numbering Systems, was chosen to show how this modern proposal could be used in the teaching of this science. To do so, we explained data from the first experiments in Arithmetic, the importance of each digit in the positional system, the importance of some computer systems, Roman numeral system and p-adic numbers. It was realized, therefore, that this new methodological proposal can be effective in teaching Numbering Systems for Youth and Adult Education. It was concluded, therefore, that even though Mathematics is a millennial science, its teaching process must be continuously revised so that more effective ways of learning are always verified and updated according to social demands.

Keywords: Youth and Adult Education. Numbering System. Fedathi Sequence.

LISTAS DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA

No início de minha vida escolar (ocorrido na escola onde leciono atualmente, hoje transformada em CEJA), fui avaliado, início, como aluno com dificuldade de aprendizagem. No entanto, sempre me despertava os números escritos em placas de carro e outros locais. Pois observava, brincava, realizava algumas operações, descobria divisores – mesmo sem ainda ter visto este assunto na escola, descobria algumas coincidências e curiosidades, tais como o caso do número 37, que multiplicado por um número múltiplo de 3 (até 27), dá como resultado uma formação de três algarismos repetidos. Assim sendo, 37x3 = 111; 37x6 = 222; ... 37x27 = 999. Tem-se, ainda, o curioso fato de que o número formado somente por algarismos 1's e quando elevados ao quadrado, tem-se como resultado, inicialmente, os algarismos numa sequência crescente iniciada por 1 indo até o algarismo representante da quantidade de algarismo desse número (a base da potência), em seguida, continua decrescendo até 1, conforme se analisa no exemplo a seguir: $1111^2 = 1234321$ (cresce de 1 até 4 e, em seguida, decresce até 1). Uma outra novidade ocorre com um número de três algarismos possuindo o algarismo 0 (zero) no meio. Quando elevado ao quadrado, tem-se como os dois últimos algarismos do resultado, o quadrado do terceiro algarismo (ocupando sempre duas ordens). Na parte do meio – terceira e quarta ordens -, coloca-se o resultado do dobro do produto do primeiro e terceiro algarismos da base da potência e, no início, coloca-se o resultado do primeiro algarismo elevado ao quadrado. Observando-se no exemplo a seguir, tem-se: $902^2 = 813604$. Coloca-se, no final, 2^2 representando-se por 04 (sempre dois algarismos); no meio, encontra-se 36 = 2x9x2 e, no início, $81 = 9^2$. Formando-se, assim, o número (81)(36)(04) = 813.604. Novas dessas curiosidades foram surgindo, até que, certa vez, quando professor de Matemática do Colégio Cearense Marista, fui aconselhado pelos gestores desta escola a realizar no Serviço Social do Comércio (SESC) – mantinha convênio com esta instituição de ensino – no período de 2002 a 2004.

Após isto, resolvi plenificar meu curso de graduação, de 2004 a 2007, e cursando várias disciplinas denominadas por "Práticas e Vivências", na área de Educação Matemática. Ao concluí-lo, cursei na mesma linha de trabalho, o curso de especialização através da Universidade Gama Filho: "Pós-graduação de Metodologias de Ensino da Matemática", nos anos 2007 e 2008. Concluindo este último, iniciei pela primeira vez, minhas atividades de magistério, numa escola da Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ceja José Walter – onde aí encontrei um público numeroso de alunos com acentuada dificuldade de aprendizagem, principalmente, em operações básicas, mesmo sendo a maioria deles estudantes do Ensino Médio. Daí, iniciei com práticas de oficinas pedagógicas e me inspirando no enriquecimento de minha experiência fundamentada nesses cursos realizados anteriormente – de capacitação, graduação e pós-graduação. Neste CEJA, iniciei a montagem de um Laboratório de Matemática, a princípio, com material reciclável (QVL com pedaços de isopor, palitos de churrasquinho e anéis de garrafas pet; quadradinhos de cartolina etc.). Desenvolvi, juntamente com a professora da turma de Alfabetização de Adultos, várias oficinas, obtendo êxito, embora tenha enfrentado críticas e resistências por alunos e colegas. Tentativas semelhantes enfrentei no Cejas Professor Milton Cunha, no bairro de Messejana. Monsenhor Hélio Campos (bairro Nossa Senhora das Graças – Pirambu). Neste último, já havia esse tipo de laboratório praticamente concluído, mas lá só permaneci por apenas três meses, exercendo funções no Serviço de Assessoramento Pedagógico (SASP).

Ao ser lotado, em 2012, no Ceja Professor José Neudson Braga, onde existiam aí alguns materiais concreto/manipulativos em que dei continuidade a esta prática pedagógica e já referenciada e sugerida, sob agendamento periódico, pela Secretaria de Educação Básica do Estado do Ceará (SEDUC), passando a reconhece-las. Embora sua existência ocorresse anteriormente a minha lotação, mas valorizavam mais aulas sobre olimpíadas e ENEM.

Estes Cejas, principalmente em nosso Estado, atuam na recuperação de estudantes ativos e egressos, tais como, os que não concluíram o ensino regular na idade própria, inclusive os idosos; aqueles reprovados em uma ou mais disciplinas da rede pública e privada; os que realizam atualização de estudos destinados aos variados concursos e alunos, que neste modelo de modalidade de ensino, se certificam por conquistarem pontuação suficiente em ENEM e ENCEJA.

Houve, no passado histórico de nosso país, instâncias no sentido de fazer funcionar a EJA, tais como, no período do Brasil/colônia (1549), sob a orientação dos jesuítas; nos envolvimentos religiosos do século XVIII; na Constituição de 1934: O Plano Nacional de Educação (PNE) estabelecendo a EJA como dever do Estado, a Campanha de Adolescentes e Adultos (CEAA), o primeiro e segundo Congressos Nacionais da EJA, o Programa Nacional de Alfabetização (PNA) – coordenado por Paulo Freire, o Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL), a criação do Ensino Supletivo, dentre outras.

Conforme foi argumentado acima, desde tenra idade percebi-me com interesses pela Matemática. Contudo, aos 17 anos, em 1974, fui aprovado para ingressar como aluno de Eletrotécnica (em nível de Ensino Médio) na Escola Técnica Federal do Ceará (ETFC), atualmente, Instituto Federal de Educação do Ceará (IFCE). Essa primeira escolha profissional, que se aproxima da Física, decorreu de influência familiar. Entretanto, não concluí a graduação técnica, tendo recebido apenas a titulação de término do ensino médio, pois possuía a certeza que meu real interesse era a Matemática, que enquanto ciência me instigava sempre a procurar aprender mais.

Em 1977, tornei-me estudante de graduação do curso de Bacharelado em Matemática na Universidade Federal do Ceará (UFC) e em 1984, ingressei no curso de Licenciatura em Ciências na Universidade Estadual do Ceará (UECE). Esse segundo curso de nível superior, hoje extinto nessa Instituição, tratava-se de uma graduação que qualificava o aluno egresso para ensinar em nível de ensino fundamental. Pouco depois, em 1979, fui aprovado em dois concursos públicos, quais sejam, Polícia Federal e Banco do Brasil S. A., tendo assumido o segundo. Essa escolha deveu-se mais a necessidades financeiras do que ao interesse para a referida área de atuação, pois na realidade meu desejo nunca havia deixado de ser docente em Matemática. Mesmo tendo trabalhado por quase doze anos no serviço público, nunca deixei de qualificar-me como autodidata nesse saber, que sempre me estimulava a pesquisar mais sobre o assunto.

Com o passar do tempo, meu interesse pela Matemática aumentava, assim como o desejo de oficialmente profissionalizar-me como docente, já que informalmente, desde minha adolescência, dava aulas particulares. Por essa razão, em 2004, ingressei no curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). Em 2008, iniciei o curso de Especialização em Metodologia do Ensino de Matemática, pela Universidade Gama Filho – Brasília (DF). Em 2009, fui aprovado em concurso público como Professor de Matemática da Secretaria de Educação Básica do Estado do Ceará, bem como das Prefeituras de Caucaia e Canindé fazendo a escolha por trabalhar no Estado, função que exerço até hoje. Em 2011, fui empossado como professor de Matemática e Ciências da Secretaria de Educação do Município de Fortaleza, porém, permaneci por quase um ano. Minha escolha por priorizar meu exercício profissional no Estado deveu-se ao meu interesse em trabalhar com Educação de Jovens e Adultos.

A primeira vez que lecionei em nível superior, foram as disciplinas de Álgebra Linear e a de Equações Diferenciais Ordinárias na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), porém, foi apenas uma experiência pontual. Nesse momento, percebi que possuía interesse também em ensinar em cursos de nível superior, porém, precisaria me qualificar para essa função, tendo sido o primeiro momento de despertar para estudos de pós-graduação.

Contudo, ainda não havia delimitado um campo de estudos para o qual me dedicaria a pesquisar.

Destarte, com o passar dos anos, por meio da minha experiência enquanto docente do Centro de Estudos para Jovens e Adultos (CEJA), passei a me interessar por pensar novas metodologias de ensino mais eficazes aos alunos dessa Instituição, que em sua maioria são indivíduos que não estudaram na idade apropriada por razões relacionadas à questões socioeconômicas, tais como a necessidade de trabalhar, a falta de estímulos familiares, etc. Foi quando percebi que poderia realizar estudos sobre essas metodologias por meio de um mestrado e, assim, além de melhor qualificar-me para aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem na relação com meus alunos, poderia melhorar, qualificando-me mais para lecionar no ensino superior que, como já citado, também possuía grande interesse. Foi então que em 2014, fui aprovado no Exame Nacional de Admissão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

1.2 PROBLEMÁTICA

Sabe-se que cerca de 89% dos alunos que chegam ao final do Ensino Médio sem dominar o conhecimento esperado em Matemática (DIÁRIO DE SANTA MARIA, 2012). Sobre isto, Pinheiro e Vitalle (2012) ressaltam que "[…] 15% a 20% dos indivíduos em idade escolar (de 6 a 14 anos) apresentam dificuldades de aprendizagem" (p. 66).

A defasagem no aprendizado de Matemática, no final da Educação Básica, é o resultado de um caminho de problemas no ensino, tendo como raiz o início da vida escolar. Destaca-se, ainda, a problemática existente nos extensos currículos desta importante disciplina, que em sua maioria, não deixam claro os significados dos seus usos para o aluno. Sendo assim, a grande maioria dos estudantes depara-se com um conteúdo matemático desinteressante (DIÁRIO DE SANTA MARIA, 2012).

Convém ressaltar que há diversos fatores que contribuem para o desinteresse dos estudantes em aprender Matemática, no Brasil. Com base em sua experiência, a Profª Ismara Padilha de Freitas, professora de Matemática da Gema Belia, listou alguns. São eles: o fato de haver alunos preocupados apenas em aprovação, em detrimento do aprendizado; o temor que alguns alunos têm de errar, ignorando o fato de que o erro faz parte do aprendizado; turmas numerosas; carga horária incoerente com a quantidade de conteúdo a ser assimilado (Ibidem). Todas esses fatores acima citados por Padilha, são relevantes, entretanto, eles não são os únicos desencadeadores das dificuldades em Matemática. Há muitos outros, como a ausência do desenvolvimento de senso numérico, citado por Corso e Dorneles (2010), como um grande impedimento no processo de aprendizagem desta Ciência.

Além dessas dificuldades acima citadas, verifica-se que muitos alunos estão tendo dificuldades na consolidação do conhecimento acerca dos sistemas de numeração, que, como já foi mencionado, é um conhecimento básico da Matemática, importantíssimo para outras fases posteriores de aprendizagem de outros conteúdos desta disciplina. Quando os sistemas de numeração não são apreendidos de forma adequada, ou seja, quando há defasagem desse conhecimento, os alunos passam a ter dificuldades como leitura dos números, conceituação de números, realização das primeiras operações básicas, reconhecimento de valores posicionais relativos e absolutos, entre outros problemas.

Esses problemas acima citados, podem se mostrar ainda mais intensos quando observados no processo de educação de jovens e adultos, pois são indivíduos que por razões diversas não puderam estudar na infância. Algumas dessas razões são a pobreza e a necessidade de trabalhar ainda na infância e na adolescência, falta de compreensão dos pais que muitas vezes também não puderam estudar, entre outros motivos. Muitas vezes, esses indivíduos, assim também, como os professores envolvidos nesse processo de educação, têm desafios ainda maiores a superar.

1.3 JUSTIFICATIVA

Conforme Santos e Rodrigues (2016), a formação específica dos professores de Matemática para esta modalidade de ensino da EJA é uma necessidade a ser alcançada por uma tão almejada aprendizagem significativa, tendo em vista que, atualmente, registra-se uma expressiva deficiência de aprendizagem, causada nesse modelo de ensino rigorosamente tradicional.

Segundo o relato de Alves (2016), torna-se indispensável uma análise criteriosa sobre a construção de conhecimento envolvido em trabalho pedagógico que valoriza a formação continuada, o diálogo, a manipulação de material concreto, o contexto de situação-problema, quando se tem a aprendizagem significativa como uma meta, de acordo com o pensamento de Paulo Freire.

As dificuladades nas operações matemáticas é notória quando se observa a falta de habilidade nas mais simples tarefas aplicadas. Entretanto, essa deficiência pode ser solucionada ou minimizada através de atividades com materiais concretos, tais como uma prática vivenciada com uma “simulação de dinheirinho”, que é um instrumento mediador com forte significação para os alunos.

Como ressaltam Soares e Belmar (2016), o docente em início de carreira nesta modalidade de ensino, não atende aos anseios exigidos para o pleno exercício da função. No final da década de 50 surgiram demasiadas críticas sobre a Educação de Jovens e Adultos, contrariando, assim, as ideias defendidas por Paulo Freire.

Levando em consideração as problemáticas acima descritas, parte-se da hipótese que formas inovadoras de ensino podem colaborar no processo de aprendizagem da Matemática por alunos da EJA. Muitas propostas surgem nesse sentido, destaca-se, por exemplo, mais uma vez, as tão importantes considerações de Paulo Freire que, inicialmente, falou sobre a alfabetização, mas ampliou a valorização da EJA no Brasil em todos os sentidos para todas as ciências que estão descritas como necessárias ao processo de educação formal no país. Esse fato, além de outros, justificou a criação de EJAs. Lembra-se com Fonseca (2001), que as reflexões sobre as experiências escolares anteriores de alunos da EJA são escassas e esse fato dificulta a compreensão das dificuldades a serem superadas por esses indivíduos no processo de aquisição dos conhecimentos da Matemática. Para essa autora, deve-se sempre lembrar que os alunos de EJA não são apenas sujeitos da aprendizagem em matemática, pois são também sujeitos do seu próprio processo de escolarização. Logo, os professores de matemática devem buscar metodologias que valorizem esse fenômeno processo de aprendizagem. De acordo com suas considerações, muitas vezes no ensino da Matemática centram-se muitos em conceitos e são esquecidas as necessidades de contextualização das histórias de vida e nelas a necessidade e as dificuldades na relação com essa ciência.

Se alunos de EJA têm histórias de vida que devem ser levadas em consideração nos momentos de serem refletidas suas condições educacionais, destaca-se que essas histórias não se encerram nas possíveis problemáticas na infância, pois, em sua grande maioria, esses alunos ainda apresentam dificuldades sociais, tais como o acúmulo de papéis (são trabalhadores, estudantes, muitas vezes pais, entre outros papéis). Sobre isso, de acordo com Carnielli (2003), parece haver um temor sobre os alunos da EJA permanecerem ou não no processo de continuidade da escolarização. Contudo, a autora afirma que a existência e persistência da EJA têm sido fatores preponderantes na expansão do ensino médio.

Esse fato aponta para uma série de problemas que podem vir a ser fatores que dificultam a aprendizagem, tais como o problema da estigmatização revelada por Carnielli durante uma pesquisa realizada no Distrito Federal. Tal pesquisa mostrou que os alunos da

EJA sentem-se estigmatizados. Esse fenômeno poderia ser superado se no processo de ensino-aprendizagem os alunos fossem considerados protagonistas de suas histórias, lembrando que, toda história dos indivíduos têm aspectos negativos e positivos e por mais que não tenha estudado o suficiente na infância seja um fator negativo, estar fazendo parte de uma EJA é algo positivo, pois implica em superação.

Perceber isso, leva ao reconhecimento de que os alunos da EJA devem envolver-se em seus processos educacionais como corresponsáveis juntamente com a equipe pedagógica que os acolhem. Logo, como destaca Laffin (2007), o docente e o discente devem juntos protagonizar o processo de ensino-aprendizagem e devem ser igualmente responsáveis pelo acúmulo de saberes teórico-metodológicos. Esse cenário ideal diferencia-se da realidade conteudista e pautada em excesso de conceitos proferidos pelos professores que em sua maioria constroem relações assimétricas com seus alunos, geralmente exercendo relações de poder onde eles ensinam o que consideram necessário com base em escolhas aleatórias e não nas histórias de vida de seus alunos. Imagina-se que por essa razão, o ensino da Matemática fica descontextualizado e o aluno de EJA desmotivado.

Diante disso, sabe-se que novas metodologias no ensino da Matemática devem ser pensadas para alunos da EJA. Essa pesquisa propõe-se a refletir sobre esse assunto. Contudo, um recorte foi necessário, levando em consideração que a Matemática é uma ciência vasta e complexa. Logo, decidiu-se verificar uma nova perspectiva para o sistema de numeração. Esse recorte deve-se ao fato de ser o sistema de numeração um conhecimento básico e necessário para vivências do dia-a-dia e, portanto, alunos da EJA precisam dominar não apenas para obterem certificados de conclusão escolar, mas para suas rotinas.

Esse assunto não é novidade, pois como lembra Rosa, Damazio e Silveira (2014), Davýdov e seus colaboradores, estudiosos da teoria sócio-histórica de Vygotsky que propaga as ideias sobre os processos de ensino-aprendizagem sempre levaram em consideração as condições históricas, sociais e culturais do sujeito aprendiz, há anos pesquisaram sobre o ensino de sistema de numeração ser baseado, como afirma os conceitos vygotskyanos, nessas condições acima citadas.

Assim sendo, há neste trabalho a intenção de contribuir para que estudantes dominem de forma mais efetiva o Sistema de Numeração Decimal. Diante das dificuldades encontradas no sentido de proporcionar aos alunos da EJA da atualidade uma educação de boa qualidade, que atenda às exigências deste século, verifica-se, com muita clareza, a necessidade de transformar esta realidade onde os alunos de EJA não estão sendo considerados como protagosnistas no processo de ensino da Matemática que lhes servirá de forma extensa às suas vidas. Começar pelo sistema de numeração é relevante.

Como exemplo cita-se que, com o intuito de valorizar e aplicar as primeiras técnicas de calcular relacionadas ao Sistema de Numeração, de forma simples e bastante significativa, é que Pais (2013) apud Pereira e Santos (2017), destaca o raciocínio como uso de ideias tais como “vai um e empresta um” em conteúdos básicos com números e nas primeiras operações.

Outro exemplo pode ver ser destacado por Carvalho (2011) apud Pereira e Santos (2017), que ressaltou a importância de se explorar, em aula, o uso do cálculo mental contribuindo para a aquisição do conhecimento e soluções de problemas por um meio mais fácil. Segundo Caraça (2010), é importante enfatizar a noção de soma a partir do concedito de número natural, ao passar de um número ao seu posterior, adicionando uma unidade a cada novo número. Sobre as operações de multiplicação e divisão, conforme afirmam Iezzi Dolce e Machado (2009) apud Pereira e Santos (2017), define-se multiplicar como adicionar múltiplas vezes quantidades iguais e a divisão passa a repartir várias vezes quantidades iguais – uma partilha – ou procurar descobrir quantas vezes certa quantia se inclui em outra.

Diante desse cenário, decidiu-se verificar uma nova metodologia educacional desenvolvida no Ceará e suas possibilidades de aplicabilidade no ensino da matemática, mais precisamente no ensino dos sistemas de numeração, qual seja a Sequência Fedathi. Essa metodologia educacional inovadora propõe o ensino de Matemática e Ciências por meio de quatro etapas.

O motivo da escolha desta abordagem, nesta relevante pesquisa, tem como consequência, o fato de se propor modificações na metodologia aplicada na Educação de jovens e adultos, fazendo uso de propostas pedagógicas inovadoras, além de ter como escopo, as principais abordagens pedagógicas, bem como adequar-se aos atuais recursos didáticos, exigidos pela sociedade deste século.

De acordo com Sousa e Borges Neto (2001), a partir de uma experiência realizada com a disciplina “Sequência Fedathi no Ensino de Matemática: Metodologias e Aplicações”, as operações com números naturais é uma das dificuldades mais evidentes. Como estratégia, o início desta experiência se deu com a utilização de algarismos romanos, por se aplicarem muito bem, representando agrupamentos. Daí, a prática específica da atividade com os seguintes objetivos: Uso da sequência Fedathi realizando agrupamentos, reagrupamentos, trocas, cancelamentos e operações com algarismos romanos.

A Sequência Fedathi, uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática, desenvolvida por professores da Universidade Federal do Ceará – UFC, estruturada em 04 (quatro) etapas - Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova, merece destaque por ter seu foco voltado para uma metodologia de ensino mais eficiente e eficaz.

Quanto à metodologia referenciada nas quatro etapas da Sequência Fedathi, com atividades utilizando, inclusive, o material dourado em oficinas pedagógicas, tem-se tais práticas foram usadas de forma mediada e, destacando como processos de ensino, e não somente a aprendizagem. Há de se esperar novas expectativas, surjam inovadoras propostas pedagógicas com a intenção de majorar o processo de aprendizagem e, na área da Matemática, com ênfase, sobre Sistemas de numeração envolvendo desde a leitura dos números, inclusive, operações básicas. E, assim, tornando a aprendizagem matemática mais efetiva.

Para tanto, nesse estudo aprofundou-se conhecimentos sobre a EJA no segundo capítulo que foi dividido em uma breve história da EJA no Brasil, instrumentos pedagógicos utilizáveis na EJA, uso do quadro de valores nas operações aditivas, subtração com reserva, multiplicação com reserva, divisão pelo método breve, materiais recicláveis em aulas de sistema de numeração Práticas pedagógicas vivenciadas em um CEJA. Já no terceiro capítulo verificou-se algumas abordagens de ensino já aplicadas na atualidade. São elas: tradicional, cognitivista, comportamental, humanista e sociocultural. No capítulo quatro dedicou-se a detalhar a compreensão dos passos da Sequência Fedathi. No capítulo cinco foram discutidos aspectos dos sistemas de numeração, entre eles escolheu-se aprofundar conhecimentos sobre as primeiras experiências na Aritmética, a importância de cada algarismo no sistema posicional, a importância de alguns sistemas para a informática, os sistemas de numeração romana e os números P-ádicos.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desse estudo consistiu em compreender a aplicação da Sequência Fedathi para o ensino do Sistema de Numeração com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

1.4.2 Objetivos Específicos

Analisar aspectos da EJA, bem como possibilidades pedagógicas para essa finalidade;

Descrever propostas pedagógicas de ensino já consolidades na atualidade;

Descrever a Sequência Fedathi como uma nova proposta pedagógica de ensino;

Identificar aspectos conceituais do Sistema de Numeração;

Conhecer a aplicação da Sequência Fedathi para o ensino do Sistema de Numeração com alunos da EJA.

2 EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

2.1 BREVE HISTÓRIA DA EJA NO BRASIL

De acordo com Silva e Moura (2013), para compreender a educação de jovens e adultos no Brasil, é necessário reportar-se ao momento da colonização. Sabe-se que inicialmente o intuito de educar esse público era religioso, por meio dos Jesuítas que ao chegarem à Colônia Portuguesa, em 1549, possuíam a tarefa de educar os nativos e os colonizadores. Contudo, lembra-se que em 1759, eles foram expulsos do Brasil e a educação sofreu sérias consequências (BESERRA; BARRETO, 2014). Entretanto, é preciso destacar que a intenção inicial acerca da educação de jovens e adultos, não era a produção de cidadania, muito menos, a educação voltada para autonomia e liberdade de pensamento. Ao contrário, a educação com o caráter religioso, visava incutir formas de pensar e compreender o mundo, às quais hoje se pode traduzir como uma forma velada de controle social.

Muitos momentos importantes na história do Brasil podem ser apreendidos no sentido de iniciativas acerca da implantação da educação para jovens e adultos. Citam-se alguns deles: Constituição de 1824, que afirmava que todos os cidadãos, ou seja, na referida época apenas pessoas livres, deveriam ter direito à instrução primária gratuita; Revolução de 1930, que culminou com a posse de Getúlio Vargas como presidente da República, passou a fornecer educação gratuita apenas para o aprendizado da leitura e da escrita, atendendo ao processo de industrialização; A Constituição de 1934 instituiu o Plano Nacional de Educação (PNE), que incluía, também, a EJA como dever do Estado; Campanha de Educação de Adolescentes e Adultos (CEAA) em 1947; Realização do 1.º Congresso Nacional de EJA em 1947; Realização do 2.º Congresso Nacional de EJA em 1958; Na década de 1960 a implantação do Plano Nacional de Alfabetização (PNA), pensado e coordenado por Paulo Freire; Na década de 1970 a substituição do PNA pelo Movimento Brasileiro de Alfabetização (que possuía princípios diferentes, contudo a importância da alfabetização já não poderia mais ser esquecida); Implantação do Ensino Supletivo em 1971 (SILVA; MOURA, 2013; SILVEIRA NETO; ANDRADE, 2010; BESERRA E BARRETO, 2014).

Percebe-se que nesses quase duzentos anos, gradualmente a EJA tem sido refletida não apenas pelos governantes, mas também por estudiosos da educação. Hoje é consolidada a ideia de que a educação liberta (FREIRE, 1964) e que a liberdade de pensamento que leva à formação cidadã crítica e reflexiva, não é aplicada apenas à infância e se pode conquistá-la, também, em qualquer fase do desenvolvimento humano.

Percebeu-se que a EJA surgiu para erradicar o analfabetismo. Porém, com o tempo, constatou-se que poderia ser aplicada a outras áreas do conhecimento de maneira que jovens e adultos pudessem ter a oportunidade de estudar outras disciplinas, que pudessem não apenas levá-los a adquirir um diploma para pleitear empregos, concursos, seleções para educação superior etc., mas esssencialmente qualificá-los a manipular o conhecimento exigido pela vida cotidiana, a educação como parte do processo de desenvolvimento do sujeito.

Contudo, acredita-se que ainda há muito o que se desenvolver para no Brasil, alcançar níveis ideais de resultados eficientes e eficazes para essa educação, no âmbito de ciências como a Matemática. De acordo com Januário, Freitas e Lima (2014), ainda é pequeno o número de pesquisas sobre o currículo de Matemática para a EJA. Para esses citados autores, pesquisas devem ser realizadas, pois aspectos culturais e sociais devem ser levados em consideração na hora do professor, em sala de aula, desenvolver situações de aprendizagem que levem à aquisição de conhecimento.

Para Januário, Freitas e Lima (2014) os currículos de Matemática devem ser revistos, de forma “que leve o aluno a entender a importância de ampliar sua gama de conhecimentos, porque perceberão que eles estão, de fato, relacionados de alguma forma com a sua realidade, nas diferentes dimensões (social, política, cultural)” (p. 553). Com base nessa assertiva, afirma-se que não apenas os currículos de Matemática devem ser adequados às necessidades dos alunos de EJA, mas também às metodologias de ensino, pois de nada adiantaria um bom currículo se não houver uma metodologia eficaz. Sabe-se que essas metodologias devem ser emancipatórias, proporcionando a autonomia dos estudantes na condução de seu aprendizado.

Segundo Januário, Freitas e Lima (2014) os currículos e as metodologias para o ensino de Matemática para a EJA deveria ser mais conectado com situações reais que reconheçam as experiências culturais da Matemática. Dessa forma a aprendizagem torna-se mais efetiva, na medida em que se conecta com a realidade da necessidade de aprendizagem para algo. Os autores destacam ainda que essas atividades devem enfatizar teorizações, explicações, ideias intuitivas, bem como a seguridade para explicar essa ciência. Além disso, destacam que os conceitos matemáticos devem ser conectados com diferentes saberes, quais sejam, os técnicos, os formais e até os informais. Só assim, segundos os autores citados, o ensino da Matemática partirá do contexto do aluno para o contexto dessa ciência e não o contrário, pois é exatamente essa situação contrária de ser o ponto de partida a Matemática e não o sujeito aprendiz que dificulta a trajetória de aprendizagem. Logo, o aluno poderá lidar com as explicações e conceitos matemáticos podendo fazer conexões com situações de seu dia-a-dia, ou seja, em seu meio social.

Esses autores, em suas pesquisas, também concluíram que no ensino da Matemática para a EJA, devem existir situações de valorização da cultura. Essas situações devem correlacionar a aprendizagem da Matemática com fatos sociais que são problemas reais os quais no dia-a-dia o aluno necesariamente vá deparar-se. Portanto, os autores acreditam que esses fatos podem ajudar o aluno a compreender os conceitos e problemas matemáticos, na medida em que percebem necessidades reais de aplicação. É diante desse cenário que é possível deduzir a importância da presença do respeito à cultura e ao contexto social do aluno nos currículos de Matemática. Currículos com essas características tornam-se mais acessíveis ao aluno, pois enriquecem o aprendizado tornando-o significativo para a vivência real desses indivíduos.

As atribuições e regras que atualmente regem a Educação de Jovens e Adultos são regulamentadas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n.º 9394/96, Capítulo II, Seção V, Artigo nº 37 afirma que a EJA se direciona aos indivíduos que não cursaram o ensino fundamental e médio na idade adequada. Ainda nesse artigo, destaca-se que a EJA será gratuita não importando qual a razão pela qual o aluno não tenha tido acesso aos estudos em idade anterior. Além disso, destaca-se que o poder público garante a viabilidade do aluno estudar e o estímulo ao ingresso e à permanência do aluno em programas de EJA.

E, quanto ao direito de aprender, a Constituição Federal em seu Artigo 205, Capítulo III, Seção I (1988), afirma que "A educação é direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho".

Ademais, é preciso escolarizar a Educação de Jovens e Adultos e vencer desafios, principalmente, no que diz respeito aos altos índices de evasão, evitando, inclusive o problema da marginalidade.

2.2 INSTRUMENTOS PEDAGÓGICOS UTILIZÁVEIS NA EJA

Aqui, citam-se exemplos de um jogo bastante interessante e de grande valia para o estudo de Sistema de Numeração Decimal, com o intuito de proporcionar mais e melhor conhecimento aos alunos sobre práticas relacionadas a este Sistema.

Este jogo, aqui destacado, trata-se de uma montagem, atividade lúdica, construída com dez garrafas PET de água mineral (10 de 250 ml, colocadas de tampa para baixo e 10 de 500ml, com a tampa para cima), dez porta/canudos com algumas plaquetas fixas contendo algumas informações, sendo o esquema (formado pelos porta/canudos e as garrafas menores invertidas), fixado sobre uma base através de parafusos com as seguintes características: tais porta/canudos possuem aberturas (anterior e posterior) e dentro desses, além das garrafas menores fixas, são colocadas garrafas PET maiores, livres para girarem e serem removidas sempre que se fizer necessário, contendo nessas maiores cartolinas coladas constando sempre três algarismos consecutivos - na primeira delas (à direita), iniciando-se por 0, 1 e 2; na segunda, por 3, 4 e 5; na terceira, por 6, 7 e 8 etc., e tem em cada três das garrafas maiores adjacentes, uma plaquinha com as denominações das classes (classes das unidades, das milhares, dos milhões etc.).

Assim sendo, cada uma das garrafas livres contém as denominações das respectivas ordens (primeira ordem, segunda ordem etc.) e sendo postas a girar formando números, num arrumado entre essas, facilitando para o estudante uma melhor compreensão sobre a leitura deles, bem como o reconhecimento de ordens, classes etc.

2.2.1 Uso de quadro de valores nas operações aditivas

O que se espera que o aluno adquira com essas aulas?

- Compreender a significação de Sistema Numérico Decimal e saber usar valor posicional de algarismos;

- Usar técnicas de adição envolvendo trocas e agrupamentos;

- Utilizar palitos de picolé e o Quadro de Valores para se representar números;

- Desenvolver a interação, cooperação e experiências em o aluno "jogue com o outro e, nunca contra o outro", valorizando o espírito de cooperação, solidariedade e fraternidade nesta interação.

Parte inicial

Intencionando confeccionar esse material com os alunos (ou trazer feito), deve-se obter, ao concluir essa atividade, um Quadro de Valores (ou QVL – Quadro de Valor de Lugar), que é um instrumento usado para se aprender conceitos matemáticos e muito utilizado nas séries iniciais do Ensino Fundamental. É muito útil para se compreender conceitos de ordem (unidades, dezenas, centenas etc.), na contagem e formação de números, valores posicionais de algarismos e nas práticas das primeiras operações.

Material a ser utilizado na confecção de um Quadro de Valor: uma folha de papel (70 cm x 45cm); um pedaço de papelão ou papel Paraná (45cm x 30cm); uma caneta; uma régua; tesoura; fita adesiva colorida ou fita crepe.

Confecção: colam-se na folha de papel três retângulos, lado a lado com a base maior na vertical, formando compartimentos em forma de bolso (03 em cada horizontal, de cada papelão), nos quais serão colocados os palitos, cujas quantidades representam os algarismos e cada papelão representa as ordens das unidades, das dezenas e das centenas. E, em cada folha de papel (70 cm x 45cm), representando as classes simples, milhares etc.

Observa-se o exemplo do número 234 a ser representado no QVL a seguir: acima de cada um dos retângulos de papelão, com a base menor em posição horizontal, devem-se fazer constar as denominações das ordens (unidade, dezena e centena: da direita para a esquerda). Nas horizontais, contendo os bolsos de papelão, aparecem palitos, tendo em cada ordem cores diferentes.

1º exemplo: o número 234, terá 4 palitos na última ordem, à direita; à esquerda deste terá 3 na ordem das dezenas e a seguir, 2 na ordem das centenas.

Centenas	Dezenas	Unidades
2	3	4

2º exemplo:

A adição 234 + 24.

Centenas	Dezenas	Unidades
2	3	4
<u>0</u>	<u>2</u>	<u>4</u>
2	5	8

Neste caso, há a necessidade de se utilizar três linhas horizontais: na primeira, terá o número 234 e, na segunda, o número 24 (2, nas dezenas e 4, nas unidades); na terceira, aparecerá o número 258 (2 centenas, 5 dezenas e 8 unidades) – que é a soma das parcelas 234 e 24.

3º exemplo:

A adição 38 + 17. (1)

Dezenas	Unidades
3	8
1	7
5	5

(15)

O número 38, na primeira horizontal e 17, na segunda horizontal. Na última vertical, aparecerão 15 unidades (que são 1 dezena e 5 unidades). Mas, esta dezena aparecerá adicionada à soma 4 da segunda vertical, somada com 1, ficam 5. Assim sendo, a terceira linha horizontal será constituída pelo número 55 – que é o total da soma das duas parcelas: 38 e 17.

4º exemplo: a adição 279 + 152.

O número 279 representado na primeira linha: 2 centenas, 7 dezenas e 9 unidades. E, 152 por 1 centena, 5 dezenas e 2 unidades, na segunda linha horizontal. Na terceira horizontal, onde aparecerá a soma, serão 11 unidades (=9 + 2), equivalente a 1 dezena e 1 unidade; na ordem das dezenas aparecerão 12 unidades (=7 + 5), que será adicionada a 1 dezena já existente nas unidades, totalizando 12 + 1 = 13 dezenas. Mas, isto corresponde a 1 centena (=10 dezenas) e 3 dezenas, ficando esta ordem apenas com 3 dezenas. Agora, as centenas ficarão com 3 +1 =4. Portanto, na terceira horizontal, aparecerá o número 431, que é o total das parcelas 279 e 152.

(1) Centenas	(1) Dezenas	Unidades
2	7	9
1	5	2
4	3	1
	(13)	(11)

2.2.2 Subtração com reserva

Agora, vê-se o exemplo no Quadro Valor de Lugar:

$$\begin{array}{r} 5347 \\ -\underline{2638} \end{array}$$

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
5	3	4	7
2	6	3	8

Com esta subtração no QVL, foram exercitadas as adições anteriores, tem-se que: como não é possível retirar 8 de 7, deve-se transformar uma das unidades da ordem das dezenas, que são 10 unidades, e adicioná-las às sete unidades já existentes totalizando 17 unidades:

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
5	3	4 – **1** = 3	7 + **10** = 17
<u>2</u>	<u>6</u>	<u>3</u>	<u>8</u>

Da mesma, não se pode retirar 6 de 3, na ordem das centenas. Assim, deve-se substituir uma das 5 unidades de milhar em 10 centenas e adicioná-las às 3 já existentes na ordem das centenas, totalizando 13 centenas. Assim, tem-se:

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
5 – **1** = 4	3 + **10**	4 – **1** = 3	7 + **10** = 17
<u>2</u>	<u>6</u>	<u>3</u>	<u>8</u>
2	7	0	9

No que diz respeito ao material concreto, regularmente esta operação pode ser em QVL ou material dourado, que são mais comumente conhecidos.

2.2.3 Multiplicação com reserva

2543
<u>x 3</u>

Desta forma, utilizando um QVL, tem-se que as quantidades 3 unidades, 4 dezenas, 5 centenas e 2 unidades de milhar, aparecem triplicadas, no quadro abaixo, já que o número 2.543 deve ser multiplicado por 3.

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
(1000) (1000)	(100) (100) (100) (100) (100)	(10) (10) (10) (10)	(1) (1) (1)
(1000)	(100) (100) (100)	(10) (10)	(1) (1) (1)

(1000)	(100) (100)	(10) (10)	
(1000) (1000)	(100) (100) (100) (100) (100)	(10) (10) (10) (10)	(1) (1) (1)

Quanto às unidades, permanecem inalteradas, pois não chegam a formar uma dezena; na ordem das dezenas, formam 10 dezenas (=1centena) + 2 dezenas. Esta centena formada passará a ser adicionada à ordem das centenas, totalizando 16 (quinze mais uma centena).

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
(1000) (1000)	(100) (100) (100) (100) (100)	**-(10) -(10)** **-(10) -(10)**	(1) (1) (1)
(1000) (1000)	(100) (100) (100) (100) (100)	**-(10) -(10)** **-(10) -(10)**	(1) (1) (1)
(1000) (1000)	(100) (100) (100) (100) (100) **+ (100)**	**-(10) -(10)** (10) (10)	(1) (1) (1)

E, finalmente, na ordem de unidades de milhar, serão formadas 6 milhares, acrescida de 1 unidade de milhar (proveniente das 10 centenas equivalente a 1 milhar)

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
(1000) (1000)	**-(100)** **-(100)** **-(100)** **-(100)** **-(100)**	**-(10)** **-(10)** **-(10)** **-(10)**	(1) (1) (1)
(1000) (1000)	**-(100)** **-(100)** **-(100)** **-(100)** **-(100)**	**-(10)** **-(10)** **-(10)** **-(10)**	(1) (1) (1)
(1000) (1000) **+(1000)**	(100) (100) (100) (100) (100) **+(100)**	**-(10)** **-(10)** (10) (10)	(1) (1) (1)

Resumidamente, obtém-se o seguinte resultado:

Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
(1000) (1000)	(100) (100) (100) (100) (100) **+(100)**	(10) (10)	(1) (1) (1)
(1000) (1000)			(1) (1) (1)

(1000) (1000) **+(1000)**			(1) (1) (1)

Resultado: 7 milhares, 6 centenas, 2 dezenas e 9 unidades (= 7.629).

2.2.4 Divisão pelo método breve

Com a utilização de “Material Dourado”, pode-se justificar cada etapa da divisão exposta abaixo: 72|2___

Como a divisão se inicia pela esquerda, 7 ou 70 unidades, serão representadas por 7 barrinhas encontradas juntas ao Material Dourado. Cada uma delas representa uma dezena de cubinhos.

Assim, ao se dividir essas sete entre duas pessoas, cada uma delas ficará com três e, ainda, sobrará uma. Isto se comprova por meio da subtração: 7 - 3 x 2 = 7 – 6 = 1. Agora, esta barrinha que representa o resto desta operação realizada será substituída por dez cubinhos (ou 10 unidades, encontradas no Material Dourado). Como ainda se dispõe de duas unidades (que é o 2, do número 72), perfaz-se, agora, um total de 12 unidades (2 mais os 10 cubinhos da barrinha/resto). Agora, divide-se 12 por 2, dando 6 unidades como resultado. Daí, conclui-se, que o quociente da divisão 72:2 é representado pelas 3 dezenas adicionadas das 6 unidades (o quociente da segunda divisão efetuada). Dessa forma, o resultado final é 30 (as três dezenas) + 6 unidades = 36.

Exemplos de Adição e Subtração de “números decimais” utilizando Material Dourado:

1º)2,79 – 0,3;

2º) 1,13 – 0,76.

Como a parte decimal envolve até os centésimos, as unidades da parte inteira devem ser representadas pelas placas das centenas, isto é, cem cubinhos.

No primeiro exemplo, 0,3 deve ser escrito como 0,30 (0 inteiro, 3 décimos de uma placa e 0, ou nenhum, centésimo dela). Inicialmente, tem-se (9 – 0) centésimos = 9 centésimos ou 0,09. Quanto ao penúltimo algarismo tem-se (7 – 3) décimos = 4 décimos = 0,4 e, finalmente, (2 – 0) inteiros. Daí, conclui-se que 2,79 – 0,3 (0,30) = 2 + 0,4 + 0,09 = 2,49.

O número 1,13 ficará sendo 1 placa das centenas (1 inteiro ou 1 centena inteira), 1 barrinha das dezenas (1 décimo ou um décimo de centena) e 3 cubinhos (3 centésimos ou 3 centésimos de uma placa de centena) e em 0,76 tem-se 0 inteiro, 7 décimos de uma placa e 6 centésimos de uma centena. Assim, iniciando pelo último algarismo da parte decimal, tem-se 13 centésimos menos 6 centésimos resultando em 7 centésimos. Agora, restaram (1,0 – 0,7) placas de centenas, resultando 0,3. Assim, 0,3 (3 décimos de uma placa) + 0,07 (7 centésimos), que é igual a 0,37.

No segundo exemplo, 0,3 deve ser escrito como 0,30 (0 inteiro, 3 décimos de uma placa e 0 centésimo dela). Inicialmente, tem-se (9 – 0) centésimos = 9 centésimos ou 0,09. Quanto ao penúltimo algarismo tem-se (7 – 3) décimos = 4 décimos = 0,4 e, finalmente, (2 – 0) inteiros. Daí, conclui-se que 2,79 – 0,3 (0,30) = 2 + 0,4 + 0,09 = 2,49.

Como instrumentos didáticos a serem usados neste CEJA, têm-se o seguinte material: a princípio utiliza-se, conforme a pedagogia tradicional, um módulo (emprestado ao aluno) com estudo dirigido para o aluno copiar em seu caderno os exercícios existentes e, em seguida, serem resolvidos em casa, após uma leitura de todos os capítulos. Além disso, há um livro-texto (adotado em 2014 pelo Governo do Estado do Ceará) de pouco uso devido ao baixo aproveitamento. Acompanhado desse material, o estudante também recebe uma lista de exercícios (uma pequena parte objetiva e a restante subjetiva) a ser resolvida, dialogicamente, com a ajuda e acompanhamento do professor.

Quanto ao material concreto usado principalmente em Geometria, dispõe-se de “material dourado, ábacos ou QVL (Quadro Valor de Lugar), palitos de madeira e massa de modelar (contribuindo para a formação de planos e sólidos geométricos), algumas feitas de cartolina etc.”. Os ábacos ou QVL são muito utilizados por alunos do Ensino Fundamental na leitura dos números naturais, no reconhecimento de ordens, classes, valores relativos e absolutos, além de aprenderem, de forma construtiva, as primeiras operações básicas e as conhecidas tabuadas (a de multiplicar é muito solicitada). Com esse material, muitos alunos (até mesmo os do Ensino Médio), que não sabiam, com destaque, subtrair e multiplicar, hoje, acabaram com essa dificuldade. Embora, alguns tenham conseguido de forma lenta.

2.3 MATERIAIS RECICLÁVEIS EM AULAS DE SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Aqui se tem exemplos de jogos construídos com material reciclável, com objetivo de preparar os alunos para dominar, com bastante eficácia, conhecimentos sobre Sistema de Numeração e as primeiras operações básicas. A princípio, serão comentados e caracterizados dois jogos denominados por Material Reciclado (Sistema de Numeração Decimal) constituído de dez porta/canudos.

Observações Importantes:

Mantém-se, neste CEJA (Prof. José Neudson Braga), uma lista de informações com dicas importantes para efetuar algumas multiplicações e divisões de forma rápida.

1ª) Todo número multiplicado por zero é igual a zero.

Exemplo

2x0 = 0 ou 0x2 = 0

Motivo: 2x0 = 0 + 0

2ª) Todo número par multiplicado por 5 é igual à metade dele acompanhado de "zero" a sua direita.

Exemplo

8x5 = ? (é a metade de oito, acompanhada de "zero" à direita)

Portanto, 8x5 = 40.

Se o número for ímpar, a metade dele é um número decimal terminado em "cinco". Neste caso, basta apagar a vírgula.

Exemplo

7x5 = ? (a metade de "sete" é 3,5 e, sem a vírgula, fica igual a 35).

Portanto, 7x5 = 35.

3ª) Todo número de um algarismo multiplicado por " nove" é igual ao algarismo ao lado de "nove", subtraído de uma unidade; anota-se este resultado e à direita deste, coloca-se o que falta dele para chegar a nove.

Exemplo

7x9 = ? (7 - 1 = 6; 6 para chegar a nove, faltam 3 e colocado à direita de 6, forma o número 63).

Portanto, 7x9 = 63.

4ª) Todo número multiplicado por 10 é igual a esse número acompanhado de "zero" a sua direita.

1º exemplo:

15x10 = 150.

2º exemplo:

50x10 = 500.

5ª) Todo número de dois algarismos multiplicado por "onze" é igual este colocando entre seus algarismos a soma deles.

1º exemplo

53x11 = ? (5 + 3 = 8 e colocando 5 e 3, dá 583)

Portanto, 53x11 = 583.

2º exemplo

84x11 = ? (8 + 4 = 12; coloca-se 2 entre 8 e 4 e o algarismo 1, 12, é adicionado com o 8).

Portanto, 84x11 = 924.

E, se tiver mais de dois algarismos, anota-se o primeiro e o último deles separadamente e somam-se todos pares de dois algarismos vizinhos e vai anotando-os entre os dois separados.

Exemplo

3581x11 =? (3 + 5 = 8; 5 + 8 = 13; 8 + 1 = 9. Então, fica sendo 3**8**^{1}**39**1 = 39391)

Portanto, 3581x11 = 39391.

6ª) Todo número multiplicado por "25", procede-se da seguinte maneira:

Divide-se esse número por 4;

Se o resto for zero, coloca-se "00" à direita do quociente encontrado:

1º exemplo: Em 20x25, tem-se 20:4 com quociente 5 e resto "zero".

Portanto, 20x25 = 5**00.**

Se o resto for "um", coloca-se 25 (=1x25) à direita.

2º exemplo: Em 21x25 = 5**25.**

Se o resto for "dois", coloca-se 50 (=2x25) à direita.

3º exemplo: Em 22x25 = 5**50**.

Se o resto for "três", coloca-se 75 (=3x25) à direita.

4º exemplo: Em 23x25 = 5**75**.

Com relação aos cálculos de áreas de retângulos e quadrados e suas respectivas deduções, que também servem de reforço para o domínio da tabuada de multiplicar, podem-se usar quadradinhos feitos de cartolina formando as figuras citadas acima. Assim, pede-se aos estudantes para determinar o número de quadrados existentes no interior de cada uma das figuras. Com isso, leva-se a concluir as fórmulas de área do "retângulo e do quadrado" (que é a quantidade de quadradinhos existentes em cada figura). Ademais, é possível aumentar progressivamente essas quantidades, tanto na base como na altura, induzindo o aluno a ter uma boa habilidade na tabuada de multiplicar. Pode-se, ainda, através de dois quadrados de medidas distintas e dois retângulos, onde cada retângulo possui como base e altura as respectivas medidas dos lados desses quadrados diferentes e daí pedir que os estudantes deduzam as expressões principais de produtos de "produtos notáveis", assim como o quadrado da soma ou diferença de dois números e, até mesmo de cubos (representando através de cubinhos feitos de isopor ou de outro material).

A respeito dos triângulos retângulos, realizam-se em "oficinas pedagógicas" esses elementos geométricos contendo medidas formadas por Números Pitagóricos e seus múltiplos, tais como as ternas (3, 4 e 5; 5, 12 e 13; 8,15 e 17; 7, 24 e 25; 60, 11 e 61 etc.) e, com esse material, é possível que esses atores e autores do saber consigam comprovar a veracidade do "Teorema de Pitágoras - o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos em um mesmo triângulo" bem como as demais "relações métricas no triângulo retângulo" , noções de seno, cosseno e tangente nessa figura reconhecer elementos como catetos, hipotenusa, ângulos reto e agudo etc.

As aplicações com material concreto na Geometria Plana e Espacial.

A princípio, vale destacar, o uso de palitinhos representando os lados de triângulos comprovando a "condição de existência" e registrando em que situação isto ocorrerá, observando-se, assim, o fato de qualquer lado ter medida menor que a soma das medidas dos outros lados.

Exemplo: Nas medidas de palitos medindo 2 cm, 4 cm e 6 cm, tem-se que $2<4 + 6$, $4<2 + 6$, mas $6 = 2 + 4$ (não é menor).

Portanto, essas medidas não constituem lados de um triângulo. Já os palitos com as medidas 2cm, 4cm e 5cm, o triângulo existe.

Com material (palitos), pode-se, ainda, compor e classificar essas figuras quanto aos lados (equilátero: possui os três lados com medidas iguais; isósceles, com duas medidas e, escaleno, todas as medidas são diferentes). Pode-se, também, classificá-los quantos aos ângulos (triângulo obtusângulo: possui um ângulo maior que 90º; triângulo retângulo: possui um ângulo reto ou 90º; e triângulo acutângulo: todos os seus ângulos são agudos). Para se comprovar que um triângulo é acutângulo, faz-se necessário o uso de um esquadro e de um transferidor.

Convém, agora, falar de outro material (quadradinhos de papelão ou cartolina), proporcionando cálculos de perímetros e áreas de figuras planas.

Inicialmente, para se determinar o perímetro em um retângulo ou quadrado, bem como naquelas figuras que possuem ângulos retos em cada canto, basta marcar um dos cantos com uma caneta ou lápis e contornar com cuidado toda a figura até o ponto de partida. O total de quadrados envolvidos em todo contorno representa o "perímetro", em unidades iguais à medida do lado de um desses quadradinhos. Em caso de segmentos inclinados, podem-se usar as razões trigonométricas, Teorema de Pitágoras e, até mesmo, um pouco de raciocínio lógico.

No caso do cálculo de “área”, inicialmente, o aluno pode contar “um a um” e descobrir o total dessas figurinhas contidas no plano de área desejada - que é a área, em unidades iguais à área de um quadradinho. Em se tratando de retângulo ou quadrado, pode-se, ainda, multiplicar o número de quadradinhos da base pelo número deles na altura. Surge daí, a fórmula $\mathbf{A_R = b.h}$ (a área de um retângulo é igual ao produto da medida da base b pela medida da altura h). Em caso de um quadrado, $\mathbf{A_Q = l.l}$ (a área de um quadrado é igual à multiplicação da medida de um lado l por si mesmo ou essa medida elevada ao quadrado, isto é, $\mathbf{A_Q = l^2}$.

Removendo um triângulo de um local para outro, conclui-se, por compensação, que a área do paralelogramo também é igual a do retângulo (b.h).

Traçando-se uma das diagonais de um retângulo, percebe-se facilmente que o triângulo tem a metade da área de um retângulo. Portanto, $\mathbf{At = ½.b.h.}$

No losango, ocorre de forma semelhante. Difere só na nomenclatura. As denominações base e altura passam a ser chamadas, respectivamente, de diagonal maior “D” e diagonal menor “d”. Assim, essa fórmula passa a ser $\mathbf{A_L = ½.D.d}$.

Quanto ao trapézio, possui a seguinte classificação: escaleno (os dois lados não paralelos possuem medidas diferentes); isósceles (os dois não paralelos com mesma medida) e; retângulo (possui dois ângulos retos: ambos à direita ou à esquerda). Isto pode, também, ser constatado pelos palitinhos. Quanto à fórmula de sua área, basta perceber que ele pode ser transformado num retângulo de base de medida igual à base média $\mathbf{½.(B + b)}$ e sujeita a uma mesma altura. Assim sendo, sua área passa a ser determinada por $\mathbf{A_{Tr} = ½.(B + b).h.}$

Referindo-se ao círculo, observa-se facilmente que a relação existente entre “raio e diâmetro” é: a medida do raio é a metade da medida do diâmetro (R = ½.D). Analisa-se, ainda, a medida de seu comprimento. O cientista Arquimedes, por meio de vários objetos circulares, experimentalmente, descobriu que a razão entre a medida do comprimento de cada uma dessas circunferências observadas e a medida de seu respectivo diâmetro resultava sempre, aproximadamente, (π) 3,141592653589… (uma dízima não periódica que foi denominada pela letra grega chamada de π). Assim, a medida desse comprimento passou a ser determinada e expressa por C = π.D = 2.R.π. Pois a medida D é o dobro da medida do raio R. A maneira mais básica de se determinar a área de um desses círculos é o semiproduto do comprimento da circunferência pela medida de seu respectivo raio R. Assim sendo, A_O= ½.(2.π.R).R = $\pi.R^2$.

Vale destacar o cálculo de área de um setor circular (exemplificado por um pedaço de pizza padrão) podendo ser determinado pelo semiproduto da medida do comprimento l pela medida do raio R. Assim, Asc = ½.l.R e observando-se que Asc/A_o = **a**/360º, sabendo-se que Asc está submetido a um ângulo **a**. E, por esta proporção, conclui-se que Asc = $\pi.R^2$.**a**/360º. (Pois Asc é proporcional ao comprimento **l**e este comprimento é proporcional à medida do ângulo **a**– que é o arco compreendido pelo setor).

Ainda, referindo-se ao campo da Geometria, mais precisamente à Geometria Espacial, inicialmente, vem à mente os sólidos geométricos conhecidos como "Sólidos de Platão" ou "Poliedros de Platão". Destacam-se, desta vez, os cinco e únicos poliedros regulares e eles são: 1º) O "tetraedro regular" possuindo quatro faces (F = 4), formadas por triângulos equiláteros, seis arestas (A = 6) representada, em termos de material concreto, palitos de churrasquinho e quatro vértices, de onde partem, de cada um deles, três arestas (ou palitos); 2º) O "hexaedro regular" ou cubo, com seis faces quadradas (F = 6), doze arestas (A = 12) e oito vértices (V = 8), divergindo de um deles três arestas; 3°) O "octaedro regular", com oito faces (F = 8) constituídas por oito triângulos equiláteros, doze arestas (A = 12) e seis vértices, saindo de cada um deles, quatro arestas; 4º) O "dodecaedro regular" constando doze faces (F = 12) pentagonais, trinta arestas (A = 30) e vinte vértices, seguindo de cada deles três arestas; 5º) No "icosaedro regular", encontram-se vinte faces triangulares (F = 20) ou vinte triângulos equiláteros, trinta arestas (A = 30) e doze vértices, em que de cada um deles saem cinco arestas.

Observa-se, à proporção que cresce o número de faces, aumentar a dificuldade de se determinar a quantidade dos demais elementos de um mesmo sólido. Mas, isto também será possível usando regras práticas e lógicas, além da "Relação de Euler" (V + F – A =2 ou V + F = A + 2). Assim, no caso do primeiro destes sólidos, as quatro faces constituem quatro grupos de três arestas (totalizando doze), desta forma, todas ficam contadas em duplicidade. Assim sendo, A = (4x3):2 = 6. Como, por Euler, V + 4 = 6 + 2. Portanto, V =4; da mesma forma, no hexaedro regular, tem-se A = (6x4):2 = 12 e V + F (ou V + 6) = 12 + 2. Desta maneira, tem-se V = 8 (oito vértices no hexaedro); Já no octaedro, A = (8x3):2 = 24:2 = 12 arestas. Assim, V + F (ou V + 8) = 12 + 2. Portanto, o cubo possui V = 6 (seis vértices); No quarto sólido (o dodecaedro) tem A = (12x5):2 = 30 (ou trinta arestas) e V + F (ou V + 12) = 30 + 2. Onde o dodecaedro possui vinte vértices e, finalmente, no icosaedro A = (20x3):2 = 30 arestas. E, novamente, pela Relação de Euler, V + F (ou V + 20 = 30 + 2. Portanto, o icosaedro possui 12 vértices.

2.4 PRÁTICAS PEDAGÓGICAS VIVENCIADAS EM UM CEJA

Em maio de 2007, ao iniciou-se atividades pedagógicas na Educação de Jovens e Adultos José Walter, atendendo a uma solicitação do núcleo gestor desta instituição (escola estadual) sobre a elaboração de oficinas pedagógicas sobre o ensino da Matemática Básica no sentido de oferecer uma melhor formação àqueles alunos que apresentavam uma acentuada dificuldade em operar matematicamente, principalmente, nas tradicionais tabuadas da Aritmética (nas quatro operações básicas) e, assim, houve a necessidade de se enfatizar a abstração do assunto lecionado investindo bastante na formação do conceito de tudo que fosse sendo explorado.

Estas oficinas foram agendadas pela coordenação pedagógica de tal escola e, normalmente, funcionava na sala de aula dos alunos da Alfabetização de Jovens e Adultos – uma turma constituída de, aproximadamente, vinte alunos e, estas matrículas foram aumentando com o decorrer do tempo.

Na primeira prática (ocorreu num período de duas aulas de cinquenta minutos), foi trabalhado o tema "O ábaco, a leitura dos números arábicos, valores posicionais, operando a adição". Neste caso, cada equipe ficou operando um ábaco improvisado (ou QVL: quadro valor de lugar) construídos, anteriormente, por essas equipes com pedaços de isopor, palitos de churrasquinho, pequenos círculos retirados de garrafas PET e pincel – para anotações dos nomes das ordens.

Este público de alunos, reunidos em grupos de quatro, passou a reconhecer, de forma eficiente e eficaz, estas ordens em estudo, leituras de números, valores relativos e absolutos e algumas adições através deste instrumento, reforçando tal compreensão. Alguns, ainda, encontraram dificuldade de entender o motivo de dez unidades de certa ordem serem substituídas por uma unidade de ordem imediatamente superior. Assim sendo, a professora responsável por esta turma recebeu uma lista de exercícios de reforço para ser resolvida por eles, individualmente, sendo apenas mediada por nós professores e registrando os resultados para verificar se esta aprendizagem realmente ocorreu. E, então, oferecer um reforço específico àqueles que não obtiveram rendimento satisfatório.

Conforme agendamento, em agosto desse mesmo ano, ocorreu com essa turma uma nova oficina matemática com o tema "aprendendo a adição e a subtração com o uso de material dourado".

Cada uma das cinco equipes recebeu um kit de material dourado para que fossem realizadas algumas operações de adição apresentadas na oficina anterior além de algumas operações de subtração.

As adições realizadas foram:

1) 246 + 642;

2) 888 + 116;

3) 888 + 642;

4) 642 + 358;

5) 74074 + 37037.

A seguir, ainda com uso de material dourado, foram apresentadas as seguintes operações de subtração após eles serem orientados sobre os conceitos de “minuendo, subtraendo e resto (ou diferença)”:

1) 1996 – 116;
2) 1994 – 326;
3) 1944 – 666;
4) 1944 – 966;
5) 222222 – 37037.

No final de outubro de 2007, foi aplicada outra oficina pedagógica sob minha orientação e da professora formadora desta turma sob o tema “Multiplicar com o uso do material dourado e o ábaco”. Inicialmente, foi realizada a operação “2543x3” reforçando a informação de que cada dez unidades de uma determinada ordem serão substituídas por uma unidade de ordem imediatamente superior (da esquerda para a direita). Pois a multiplicação destacada acima, na triplicação da ordem das dezenas simples 3x4 = 12 (= 10 dezenas e 2 dezenas). Mas estas 10 dezenas serão substituídas por uma centena.

Da mesma forma, o produto 3x5 (= 15 centenas) acrescido de 1 centena (das 10 dezenas da ordem anterior), totalizando 16 centenas [(= 1 unidade de milhar + 6 centenas]; e, na ordem das unidades de milhares, tem-se 3x2 + 1 [3x2 = 6 milhares mais uma dessas unidades (correspondendo as dez centenas transformadas em uma milhar)]. Assim sendo, tem-se como resultado as 7 milhares, 6 centenas, 2 dezenas e 9 unidades simples.

Portanto, 2543x3 = 7629.

Com esta operação representada em “material dourado”, concluíram pela triplicação as 9 unidades simples, 4x3 dezenas (12 dezenas ou 1 centena e 2 dezenas) totalizando as 12 barrinhas - em que 1 barrinha corresponde a 10 cubinhos – (12 barrinhas = 1 quadrado + 2 barrinhas ou 1 centena + 2 dezenas); 5x3 (15 centenas ou 15 quadrados), que acrescida de 1 centena (da transformação das 10 dezenas da ordem anterior) ficam sendo 16 centenas ou 16 quadrados (= 10 centenas + 6 centenas ou 1 cubo maior – 1 unidade de milhar – e 6 centenas ou 6 quadrados); 2x3 (6 unidades de milhar ou 6 cubos maiores), que acrescidas de 1 unidade de milhar (da substituição das 10 centenas da ordem anterior em 1 unidade de milhar ou cubo). Assim sendo, tem-se no final, em cada ordem, 7 milhares (ou 7 cubos maiores), 6 centenas (ou 6 quadrados), 2 dezenas (ou 2 barrinhas) e 9 unidades simples (ou 9 cubinhos).

Portanto, 2543x3 = 7629.

Representando, agora, o processo desta multiplicação em um ábaco ou Q. V. L. (quadro valor de lugar) em que cada ordem aparece 9 círculos de uma mesma cor, distinguindo uma ordem de outra pela cor desses círculos.

Novamente, processando, no QVL, esta multiplicação já citada, tem-se 7 círculos com a cor da ordem das unidades de milhares, 6 das centenas, 2 das dezenas e 9 das unidades simples, e comprovando, mais uma vez, o resultado da multiplicação 2543x3.

Uma outra atividade ocorreu em abril de 2008 com o tema "Dividir usando o Material Dourado" por meio da operação 76:2. Inicialmente, definiu-se o dividendo 76 como 7 barrinhas (representando as 7 dezenas) e 6 cubinhos (representando as 6 unidades simples). Iniciou-se tentando repartir as sete barrinhas em duas partes iguais. Mas isto só foi possível, após transformar uma delas em dez unidades (ou dez cubinhos) e acrescentando as seis unidades já existentes na ordem das unidades simples. Desta forma, agora é possível repartir as seis barrinhas em duas partes iguais (igual a 3) e no caso da divisão dos 16 cubinhos (da ordem das unidades simples) resulta em 8 cubinhos. Assim sendo, obteve-se o quociente igual a 38.

Portanto, 76:2 = 38.

Em agosto de 2008, seguiu com o acontecimento da oficina com o tema "A tabuada de multiplicar (Tabuada Russa)" que é um método para multiplicar, sem memorização, nas tabuadas aritméticas de multiplicação envolvendo os fatores inteiros maiores que cinco, também conhecida pela denominação de "Tabuada Russa". Utilizou-se os exemplos 7x8; 6x6 e 6x7. Na multiplicação 7x8, procedeu-se da seguinte maneira: com relação aos números7 e 8, efetuaram-se, mentalmente, as diferenças 7 -5 = 2 e 8 – 5 = 3 e, assim, mantendo-se 2 dedos levantados na primeira mão e 3, na outra. Agora, somam-se os dedos levantados (2 + 3 = 5) para representar o algarismo da ordem dezenas. Em seguida, multiplicam-se as quantidades de dedos baixos: 3x2 = 6 (3 baixos na primeira mão e 2 dedos na segunda), constituindo o algarismo da ordem das unidades simples. Assim sendo, ao multiplicar 7x8, tem como produto resultado de 5 dezenas e 6 unidades, formando o número 56.

Portanto, 7x8 = 56.

Neste caso, foi necessário, também, pedir que, no final, cada aluno, em cada equipe, efetuasse estas multiplicações individualmente. Enfatizam-se, ainda, alguns produtos envolvendo o fator “seis”, em que se encontravam maiores dificuldades, tais como 6x6 e 6x7.

No caso de 6x6, tem-se 6 – 5 = 1 e, como o outro fator é 6, tem-se também, 6 - 5= 1, totalizando 1 + 1 = 2 dezenas e, como ficaram 4 dedos baixos em ambas as mãos, na ordem das unidades ficarão 4x4 = 16 (1 dezena e 6 unidades). Assim, na ordem das dezenas aparecerá o algarismo 3 (2 + 1 = 3 dezenas: total de dezenas) e, nas unidades ficará o algarismo 6 (as 6 unidades simples que restaram).

Portanto, 6x6 = 36.

No caso de 6x7, ficaram 6 – 5 = 1 e 7 – 5 = 2, totalizando 1 + 2 = 3 dezenas. E multiplicando as quantidades de dedos baixos, tem-se 4x3 = 12 (1 dezena e 2 unidades). Assim, o total de dezenas é 3 + 1 = 4 dezenas além das 2 unidades simples (1x2 = 2 representando as unidades simples: o produto das quantidades de dedos baixos). Desta forma, compõe-se o produto de 6x7 que é 42.

Portanto, 6x7 = 42.

Mais uma oficina foi executada em outubro de 2008 com o seguinte tema: “Noções sobre áreas de retângulos (ou quadrados) reforçando a multiplicação”. Inicialmente, foi definido a “área do retângulo” como o número de quadradinhos medindo 1 centímetro de lado (esta área do retângulo é expressa em centímetros quadrados). Cada equipe recebeu uma acentuada quantidade desses quadradinhos (feitos de cartolina) para formar diferentes retângulos e contar o número de quadradinhos existiam no interior destas figuras retangulares. Em seguida, esses alunos foram induzidos a concluir que o número total de quadradinhos existentes em um desses retângulos (ou quadrados) pode ser obtido pelo produto do número dessas figurinhas encontradas na base pelo número delas encontradas na altura do retângulo. Assim, num retângulo com 4 quadradinhos na base e 3 na altura, sua área seria 4x3 (medida da base multiplicada pela medida da altura).

Como reforço à tabuada de multiplicar, foram representados retângulos de áreas iguais a 2x1 até 9x9 (crescendo as medidas dos lados progressivamente) e, apresentando, no final, o de área igual a 1x1.

Analisando a avaliação feita, no final dessas experiências com tais oficinas pedagógicas, embora o resultado com estas práticas experimentais sido positivo, ainda houve resistência, por parte de alguns alunos mais conservadores, pelo fato de já terem assimilados e acomodados aos métodos tradicionais, adaptados às metodologias mais conservadoras.

3 ABORDAGENS PEDAGÓGICAS DE ENSINO

Antes de caracterizar a intenção do uso de técnicas de ensino utilizadas no CEJA Professor Neudson Braga com pedagogias mais modernas, inclusive aquelas em que o aluno exerça o papel de ator e autor, vale comentar, com destaque, sobre as abordagens "Tradicional, Humanista, Comportamentalista, Cognitivista e Sociocultural", além de se mencionar, em seguida, as eficientes e eficazes etapas da Sequência Fedathi.

3.1 ABORDAGEM TRADICIONAL

A Abordagem Pedagógica Tradicional é a prática educativa que tem fundamento na transmissão dos conhecimentos acumulados ao longo da história da humanidade, através do professor, que adota uma postura de detentor do saber, com o objetivo de formar os alunos, intelectual e moralmente, sem levar em consideração seus interesses e realidades sociais. Nessa abordagem, que tem como principais teóricos Durkheim e Herbart, a avaliação dos alunos é feita através de provas e tarefas orais e escritas.

Conhecida, também, como Pedagogia Tradicional e Pedagogia da Transmissão, essa Abordagem, no que diz respeito à metodologia aplicada, constitui-se de aulas expositivas, com conteúdos prontos e alunos na condição de meros espectadores, que aceitam passivamente os conteúdos como verdades absolutas. A motivação é extrínseca e depende das características pessoais do professor, que figura como sujeito do processo e os alunos como objetos. O assunto a ser ministrado é terminado com a conclusão do professor, prolongando-se apenas através de exercícios de repetição, aplicação e recapitulação. São privilegiados o verbal, o raciocínio abstrato e as atividades intelectuais. Há, ainda, a avaliação final visando conferir se ocorreu a assimilação do conteúdo comunicado em sala de aula.

A Abordagem Pedagógica Tradicional, por ter como papel principal a difusão do conhecimento, coloca a escola como a maior antagonista da ignorância, capaz de contribuir decisivamente para a redução da marginalidade, a despeito do aluno figurar no processo como um simples depositário ou aprendente passivo. Nesse entendimento, a instituição de ensino deve ser o local ideal para a transmissão desses conhecimentos que foram selecionados e elaborados por outros profissionais, deixando de lado aspectos de importância relevante como tradição, cultura, dentre outros. Nesta abordagem a aprendizagem significativa, conceito central da teoria da aprendizagem de David Ausubel não recebe o destaque merecido.

A formação de indivíduos passivos e obedientes são as consequências mais negativas da prática da Pedagogia Tradicional, contrariando uma das principais funções da escola que é promover a educação plena e não simplesmente o ensino, isto é, cuidar da formação de verdadeiros cidadãos, capazes de tomar decisões diante das mais diversas situações da vida, como indivíduos autônomos e críticos.

3.2 ABORDAGEM COMPORTAMENTALISTA

Na Abordagem Comportamentalista, que tem como principais teóricos Skinner, Mager, Prophan, Gerlach, Briggs e Glaser Papay, o homem é um produto do meio, portanto pode ser controlado e manipulado através da transmissão de conhecimentos pela sociedade ou por seus dirigentes nos mais diversos níveis, oportunizando, assim, a ocorrência de reforços positivo e negativo. Nessa abordagem o conhecimento é tido como uma descoberta, algo novo para quem a realiza, mesmo entendendo-se que o que foi “descoberto” já existia.

Para Skinner e outros comportamentalistas, que são contrários à utilização de elementos não observáveis para explicar a conduta humana, o conhecimento é adquirido direta e exclusivamente a partir da experiência. Qualquer relação com o transcendental, a introspecção e os aspectos filosóficos não são aceitos, porque o ser humano é considerado um ser homogêneo e não como um ser que é composto por corpo e mente e contempla o comportamento como uma forma funcional e reacional dos organismos vivos. O pressuposto de que o homem não é livre é condição *sine qua non* nesta abordagem para se aplicar um método científico no campo das ciências.

Sobre a sociedade, acredita-se que a ideal é aquela que implica num planejamento social e cultural e a cultura, por sua vez, é representada pelos usos e costumes dominantes, que são fortalecidos à medida que servem aos interesses das classes dominantes e do poder constituído. Qualquer ambiente, físico ou social, deve ser classificado levando-se em conta sua influência sobre o ser humano e o meio em que este está inserido.

No que se refere à educação, considera-se que está estreitamente ligada à transmissão de conhecimentos e também de comportamentos éticos e morais, práticas sociais e habilidades básicas para manipulação e controle social e do ambiente. Em suma, a educação tem como foco principal provocar mudanças nos indivíduos, que passarão a adotar comportamentos diferentes aos então existentes e por isso é também conhecida como a Pedagogia da Moldagem do Conhecimento ou Pedagogia Condutista. Nesta abordagem a instituição de ensino exerce o papel de agência educacional que deverá adotar forma específica de controle, ajustado aos comportamentos que pretende instalar e manter, utilizando-se de metodologias que incluem a aplicação de tecnologias educacionais e estratégias de ensino e também de recursos que fortaleçam a relação professor-aluno.

Considerando que cada indivíduo tem seu próprio ritmo de aprendizagem, a avaliação nesta abordagem consiste em verificar se o aluno aprendeu de forma significativa, atingindo os objetivos propostos definidos no programa que foi elaborado e conduzido pelo professor.

3.3 ABORDAGEM HUMANISTA

O enfoque nesta Abordagem Pedagógica é o ensino centrado no aluno, que participa como sujeito e principal responsável pela elaboração do conhecimento e não como mero espectador, como ocorre na Abordagem Pedagógica Tradicional. O aluno é um ser ativo, integrado ao processo ensino e aprendizagem e o professor, por sua vez, atua como um facilitador da aprendizagem, que trabalha com conteúdos programáticos selecionados a partir dos interesses dos alunos, destacando, ainda, como um dos pontos relevantes o estímulo ao desenvolvimento pleno e incentivo à autonomia.

Tendo como principais teóricos Carl Rogers, Neil, Mahoney, Erich Fromm, Combs, Karl Popper, John Dewey, Celestin Freinet, esta Abordagem, também conhecida como Pedagogia Nova, é considerada como a responsável pelo surgimento da postura antiautoritária, ao preconizar que o professor deve ser um estimulador e orientador da aprendizagem e que esta ocorre de forma natural e espontânea, em decorrência de um ambiente dialético e pela relação amistosa que se estabelece entre discentes e docente.

Nesta Abordagem Pedagógica o homem é considerado um ser inacabado, em constante processo de construção, que vive em um mundo globalizado, buscando sua autorrealização, através da descoberta e aplicação de suas inúmeras aptidões e potencialidades, muitas vezes desconhecidas.

Outra característica muito importante desta Abordagem diz respeito à escola, que deverá ser uma instituição que respeite as individualidades do aluno e que ofereça condições para que ocorra o seu desenvolvimento pleno. Não interferir no crescimento da criança e não exercer nenhuma pressão sobre ela também são palavras de ordem. A criança precisa se envolver naturalmente com o processo de ensino e aprendizagem.

Quanto à metodologia a ser trabalhada, cabe ao professor criar formas e métodos que venham estimular a aprendizagem, sem seguir um modelo padrão, levando em consideração o que ocorre em sala de aula, individual e coletivamente, respeitando o ritmo de cada aluno, com o objetivo de criar um ambiente agradável, onde todos se sintam bem. Nesta Abordagem o aluno é orientado sobre como avaliar sua aprendizagem e definir critérios para aplicar medidas de correção que possibilitem o alcance dos objetivos pré-estabelecidos.

3.4 ABORDAGEM COGNITIVISTA

Uma estreita ligação a processos organizacionais do conhecimento, suas formas, processamento, elaboração e tomada de decisão é uma das principais características desta Abordagem Pedagógica, que define a aprendizagem como sendo um produto do meio ambiente, das pessoas ou de fatores externos ao aluno - interacionismo entre sujeito e objeto. As relações sociais merecem atenção, mas a capacidade de aprendizagem do aluno é enfatizada de forma especial, por ser o homem considerado como um sistema aberto, sujeito a reestruturações permanentemente, em busca de um estágio final, nunca alcançado em sua totalidade.

Na Abordagem Pedagógica Cognitivista, também conhecida como Piagetiana, em função de sua forte influência e propagação na pedagogia em geral, a expressão "cognitivista" é empregada com a finalidade de identificar seus principais teóricos, Jean Piaget, Henri Wallon, Jerome Bruner e Emília Ferreiro, reconhecidos como os mais consagrados pesquisadores dos "processos centrais" do indivíduo - organização do conhecimento, processamento de informações, estilos de pensamento, estilos de comportamento, alteração de estruturas mentais existentes etc.

A transmissão de informações conteudistas não é o propósito desta Abordagem, como ocorre na Abordagem Pedagógica Tradicional. Seu objetivo é fazer com que o aluno aprenda a avaliar a autenticidade das informações recebidas e que ao mesmo tempo as repense e as recrie, dentro de sua realidade, construindo, desta forma, sua autonomia intelectual e capacidade crítica. Dentro dessa linha de pensamento recomenda-se que a instituição de ensino oportunize condições adequadas para que o aluno aprenda por si mesmo, através de uma firme motivação pessoal, que venha do interior para o exterior (automotivação).

O professor, por sua vez, deve ser empático, se possível altruísta, relacionando-se de forma horizontal com os alunos, uma postura que é capaz de estabelecer um elo de confiança, fazendo, desta forma, com que as aulas sejam dinâmicas, desafiadoras e provocativas, capazes de atrair ao máximo a atenção de cada discente individualmente.

Não existe uma metodologia padrão a ser seguida. O trabalho em equipe é recomendado como estratégia, seguindo a orientação de Piaget, para quem o ambiente educacional precisa ser desafiador, capaz de promover desequilíbrios, fazendo uso de uma didática que considere um ensino como uma construção de operações pelo aluno, baseada em investigações e experiências pessoais. A avaliação é realizada a partir de parâmetros extraídos da própria Abordagem, implicando em verificar se o aluno tem noções, se realizou operações, relações, em suma, se ocorreu aprendizagem significativa. O desempenho poderá ser avaliado de acordo como a sua aproximação com uma norma qualitativa pretendida.

3.5 ABORDAGEM SOCIOCULTURAL

Esta Abordagem, também conhecida como Abordagem Libertária, surgiu dentro de um contexto Pós-Segunda Guerra Mundial, ligada à problemática da democratização da cultura. Sua origem, estreitamente ligada à obra de Paulo Freire, seu principal inspirador, e ao movimento de cultura popular, tem ênfase especialmente na alfabetização de adultos, podendo ser caracterizada como uma Abordagem Interacionista, entre o sujeito e o objeto de conhecimento, a despeito de ter seu enfoque principal no sujeito como elaborador e criador do conhecimento.

Além de ser considerada Interacionista, a Abordagem Sociocultural elimina radicalmente a postura autoritária do professor, que passa a atuar como coordenador de círculos de cultura, tendo como tarefa principal a construção do diálogo. O educador, cujo campo fundamental de reflexão deve ser a consciência do mundo, cria, não obstante, uma pedagogia voltada para a prática histórica real.

Segundo FREIRE (1975), “ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo”, porque educador e educando são sujeitos de um processo em que crescem juntos. Nesta Abordagem a participação dos educandos deve ser livre e crítica, tendo o diálogo como sua essência, a exemplo do que ocorre na Abordagem Pedagógica Cognitivista, a relação educador-educando deve ser horizontal, sem imposições. Nesta relação o professor desmistifica e questiona com o aluno a cultura dominante, valorizando a linguagem e a cultura deste, criando condições para que cada um deles analise seu conteúdo e produza cultura.

Sobre educação, entendida como um ato político, precisa ser precedida de uma reflexão sobre o homem e uma análise sobre o meio de vida desse homem, ocorrendo enquanto processo em um contexto a ser considerado, que tenha importância na passagem das formas mais primitivas e de consciência crítica. A educação tem um caráter muito extenso e não é restrita à escola, que, por sua vez, deve ser um local que viabilize o crescimento do professor e dos alunos e é também uma instituição que existe num contexto histórico de uma determinada sociedade.

4 SEQUÊNCIA FEDATHI

Há várias propostas pedagógicas para auxiliar o ensino de Ciências e de Matemática. Entre elas, nesta pesquisa será abordada a Sequência Fedathi. Trata-se de uma proposta pedagógica desenvolvida por vários pesquisadores, docentes da Universidade Federal do Ceará (UFC). O termo Fedathi é uma sigla formada pelas sílabas iniciais dos nomes dos filhos do professor que coordenou a pesquisa que deu origem a essa proposta pedagógica (SOUSA et al., 2013).

De acordo com Sousa et al (Ibidem), tal proposta pedagógica para o ensino da Matemática consta de algumas etapas a serem sequencialmente desenvolvidas. São elas: "Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova" – serão, detalhadamente, mostradas a seguir:

A Tomada de Posição é a primeira etapa. Ocorre quando um problema se apresenta ao aluno, que, consequentemente, deve se posicionar. Com as palavras dos autores: "o professor exibe o problema para o estudante, que parte de uma situação genérica (generalizável) – passível de abstração de seu contexto particular transformando-se em modelos matematicamente genéricos" (SOUSA, 2013, p. 20). Desse modo, a abordagem do problema pode ser feita de várias formas.

Contudo, deve ser ressaltado que antes de o problema ser apresentado, o docente deve realizar uma avaliação diagnóstica sobre os conhecimentos prévios dos alunos a respeito do assunto que será ministrado. Esse é um erro muito comum no processo de ensino-aprendizagem, ou seja, o professor parte do princípio que todos possuem o mesmo nível de conhecimento acerca do tema da aula. Essa falha docente dificulta muito a compreensão dos alunos, muitas vezes deixando-os desmotivados. Verifica-se que muitos professores têm a ideia deturpada de que não devem "retroceder" no conhecimento ou no calendário de ensino. Contudo, de nada adianta avançar sozinho, pois o professor avança em seu calendário de aulas, porém o aluno não avança na aquisição do conhecimento. Portanto, averiguar, no sentido de diagnosticar os níveis de aprendizado dos alunos é de fundamental importância para as etapas do processo de aprendizagem, não apenas baseado nas indicações da Sequência Fedathi, mas em todas as metodologias educativas. O diagnóstico inicial é responsabilidade do professor. Com o diagnóstico efetivo o professor saberá os pontos fortes e fracos de seus alunos, respeitando a singularidade de cada um e assim poderá conseguir resultados mais eficazes no processo de ensino-aprendizagem.

Como sugestão para um caminho diagnóstico que será determinante para a organização e processamento das realizações didáticas do professor, Sousa (2013) cita: O professor deve definir quais os conhecimentos que os alunos precisam apreender, investigar quais alunos são detentores desse conhecimento, estabelecer regras para conduzir o trabalho de seus discentes, ter as realizações esperadas como parâmetro do ensino, as interações desejadas (entre alunos) e deve propiciar o trabalho interativo.

Depois da realização adequada do diagnóstico, deve-se intensificar um caminho multilateral entre professor e aluno. Isso significa que uma circunstância deve ser retirada de um contexto particular, mas que faça sentido para o aluno, ou seja, que tenha relação com algo familiar para ele. Essa circunstância deve ser projetada para um modelo matemático que, por sua vez, apresente um problema matemático a ser aprendido. Ter-se-á várias maneiras de resoluções, tais como o saber em jogo, assim como a manipulação de material concreto ou experimentações em algum software (individual e/ou em grupo), entre outros meios, para continuar o processo de ensino e aprendizagem.

A segunda etapa é a Maturação, que significa a compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. Nesta etapa, ocorre a discussão entre o docente e os discentes a respeito da situação-problema em questão, destacando-se os questionamentos, quando, então, o professor recebe uma retroalimentação dos alunos, necessária para certificar-se do aprendizado do aluno até aquele momento. Acontecem ainda reflexões, hipóteses e formulações na busca da solução do problema, a partir das quais os alunos buscam o professor para validar o caminho a percorrer e este deve potencializar e conduzir o desenvolvimento do raciocínio, fazendo perguntas com diferentes objetivos.

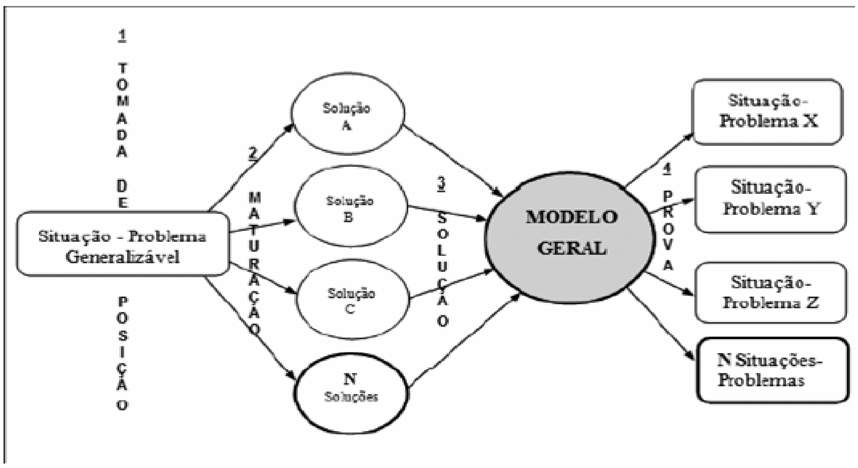
A Solução é a terceira etapa, que diz respeito a organizar e representar esquemas e modelos com o objetivo de solucionar problemas. Assim sendo, os estudantes organizam e representam modelos (que os conduzam a encontrar o que está sendo solicitado) podendo ser escritos em linguagem matemática por gráficos, desenhos, verbalizações e esquemas. É quando ocorrem a troca de ideias, opiniões e discussões dos pontos de vista e modelos propostos, sendo os alunos estimulados a explicar suas escolhas. É importante dar tempo aos alunos para que eles pensem e reflitam sobre as realizações, avaliem suas respostas por meio de ensaios, erros e tentativas e, junto ao professor, possam validar seus modelos criados. Torna-se importante a autonomia e a participação de cada um dos alunos. Destaca-se, também, o professor como um mediador, deixando claro ao grupo de alunos as lacunas e as falhas que não satisfazem à solução (SOUSA et al, 2013).

A quarta etapa é conhecida como Prova. Trata-se de um momento de apresentação seguido de formalização do modelo matemático que será ensinado. Nesta etapa, o professor apresenta o novo conhecimento que é apreendido como meio prático no processo de aprendizagem. Esse conhecimento levará o aluno à resposta do problema. Nesse exato momento, ter didática é de fundamental importância para o ideal de adquirir conhecimento, seja de um aluno individualmente ou do grupo. Essa didática, quando adequadamente empregada, garantirá a manutenção da atenção e da motivação do grupo. Por meio dessa didática o professor fará uma conexão entre os modelos apresentados e o modelo matemático, cujo objetivo a ser atingido é o aprendizado do aluno.

A prova pode, por exemplo, usar uma notação simbólica em linguagem matemática para que esse novo saber possa ser compreendido e aprendido pelo aluno. Logo, será possível ao aluno deduzir outros modelos simples e específicos, assim, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, tipo de pensamento desejado e necessário para resolver problemas matemáticos do dia a dia e ser o tipo de raciocínio relevante para o desenvolvimento científico. Na Sequência Fedathi a prova, que é a finalização do processo, proporciona ao aluno a possibilidade de elaborar o modelo geral do conhecimento que se pretende aprender. Esse modelo refere-se ao conceito final, representação genérica ou fórmula a ser apreendida - um objeto de conhecimento para a resolução do problema em questão e de outras situações-problema.

Abaixo, tem-se um gráfico que demonstra um exemplo de um desenvolvimento da Sequência Fedathi, desde a Tomada de Posição, que é a primeira etapa, até a Prova, que é a quarta e última etapa.

Figura 1- Etapas da Sequência Fedathi



Fonte: Maria José Araújo Souza/Sequência FEDATHI/2013

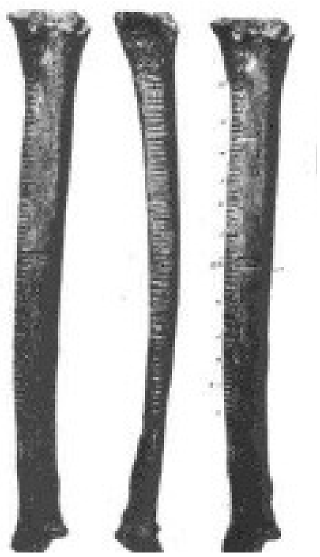
5 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

São conjuntos de símbolos e regras com o uso dos quais se conseguem se conseguem representar números ou é possível identificar quantidades.

Sobre esse assunto, Leite e Monteiro (2005) destaca que “[...] é a forma de representar dados numéricos através de números, caracteres ou símbolos, dependendo da forma de escrita utilizada”.

Para falar de sistemas de numeração, deve-se voltar ao seu início da civilização. Imagina-se que surgiram no tempo em que o *homo sapiens* ainda morava em cavernas. Sobre isso, muitas cavernas foram estudadas e pesquisadas por arqueólogos investigando informações sobre as culturas dos povos de um passado distante. Muitos desenhos encontrados mostram gravuras que foram representadas nesse período da história. Tais representações retratam como viviam os humanos nesse tempo. Deduz-se que eles se alimentavam caçando, colhendo frutos e raízes. Porém, não criavam animais ou mesmo não plantavam. Não usavam trocas, muito menos qualquer tipo de negociação com moedas. Logo, provavelmente, não usavam números. Entretanto, foi encontrado e pesquisado por arqueólogos, em 1937 na Europa, o conhecido “osso de lobo”. Há fortes indícios, de que esse objeto encontrado tenha sido usado por pessoas que viveram, na Europa, há cerca de 30000 anos. Ademais, nesse osso, havia pequenos riscos comprovando, talvez, o uso de números.

Figura 2- Primeiras contagens



Fonte: Ilustração do The Illustrated London News, publicada em 02/10/1937.

Comprova-se, também, com as experiências por pastores que controlavam suas ovelhas ao saírem para pastar, fazendo corresponder a cada animal saído para o pasto, uma pedrinha colocada num monte (correspondência biunívoca ou correspondência um a um). No final de cada dia, para cada animal ao voltar, faz-se corresponder novamente, retirando uma dessas pedrinhas do monte formado anteriormente para cada animal retornado no final da pastagem. Caso algumas dessas sobrassem, acarretaria no fato de alguns terem ficado para trás. [...] houve um tempo em que o humano não sabia contar. A prova: atualmente ainda existem homens incapazes de conceber qualquer número abstrato e que sabem nem que dois mais dois são quatro (IFRAH, 1992, p. 15).

O número era sentido? Responde-se: no passado, constatou-se que o número 3 significava "plural" – amontoado ou multiplicidade, ademais (além?) – um limite intangível (ou difícil de ser preciso). Isto acarreta que, no espírito humano, no surgimento dos números, realizou-se uma parada no número 2. Pois a criança, quando aprendendo a falar, diz: 1,2 – realizando uma pausa no número dois (IFRAH, 1992).

Observando-se pela natureza do ser humano, uma criança nos primeiros contatos com os números, tem dificuldade em dizer o 3 – pois ela fala 1, 2, 4! E casos semelhantes também ocorrem com animais. Segundo Ifrah (1992), referindo-se à captura de um corvo na torre de um castelo, um castelão e dois homens se esconderem nesse local e, imediatamente, o pássaro fugiu para uma árvore e não voltou, mesmo com a saída de somente um deles; agora numa estratégia com três deles e, com a saída de dois, ele também não retornou. Mas com quatro deles e, com a saída de três, dessa vez o animal retornou e foi capturado. Assim, conclui-se que provavelmente esse pássaro não reconhece a quantidade "quatro". Assim, constata-se que o olho não é um instrumento de medida preciso, percebe-se que muito raramente, ele ultrapasse o número "quatro".

O humano dispõe de dois modos na representação dos números: o primeiro, designado por cardinal, faz-se corresponder a cada quantidade, um símbolo representando um tanto de objetos e arbitrou desde o início um símbolo padrão e se baseando exclusivamente numa equiparação; e, o segundo, denominado de ordinal, onde cada número ou algarismo recebia um símbolo original e fundamenta-se em procedimento e sucessão. Daí tem-se uma sequência de símbolos sem ter nenhuma relação entre eles. No primeiro caso, traduz serem os quatro números caracterizados por quantas vezes ocorrer a repetição do número 1(um), ou tantos dedos, entalhes, traços, pedras – que indicam a unidade. 1: o dedo polegar ou um objeto; 2: o dedo indicador ou dois objetos; 3: o dedo médio ou três objetos; 4: o dedo anular ou quatro objetos. Estes dois modos representam, respectivamente, a correspondência e a sucessão.

5.1 PRIMEIRAS EXPERIÊNCIAS NA ARITMÉTICA

Estas experiências iniciaram com tão conhecida “correspondência um a um”, existindo em pensamentos espíritos sem provisão, a facilidade do possível ato de comparar dois conjuntos de elementos (ou objetos), não se baseando na contagem abstrata (IFRAH, 1992).

Baseado nessas experiências observa-se não ser a contagem um ato natural. Pois certos animais têm o atributo de possuir um tipo de sensação numérica – isso não significa que saibam contar de forma semelhante aos humanos. Também, pode-se destacar que a sequência crescente dos números inteiros, diferentes da unidade, com o acréscimo do 1 à unidade e a cada novo número encontrado é o que proporciona o surgimento de reais coleções abstratas. E aí, ocorre com destaque, o “Princípio de Recorrência” ou “Princípio de Indução Finita”.

Para Ifrah (1992), houve uma situação que deixou o homem praticamente impossibilitado de resolver problemas envolvendo contagem e, assim, fez a seguinte indagação: como designar (concretamente, oralmente ou, mais tarde, por escrito) números em contagem de quantidades elevadas com um mínimo de símbolos possível?

Entre as diversas formas de contagem, elas se distinguem pelo fato de cada Sistema de Numeração possuir sua base específica. Mas o que é Base de um Sistema de Numeração?

Surgiu então a necessidade de se usar uma base para cada um dos distintos sistemas de numeração. Assim, em cada um desses sistemas, representam-se dados (numéricos) utilizando algarismos, símbolos, caracteres, conforme o tipo de escrita usada e a quantidade desses objetos diferentes para cada um dos distintos sistemas de elementos disponíveis (algarismos, símbolos etc.) - o que representa a “base” desse sistema. Destacando que em cada ordem (ou posição), nesses números formados, terá como seu valor máximo, o número de elementos de sua base.

Como exemplo de Base, tem-se o Sistema Numérico Decimal, onde ela é representada por um conjunto de dez elementos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Neste sistema, cada posição (ou ordem) pode ser ocupada até pelo elemento de sua base (algarismo) de maior valor – que é 9. E, se adicionar a este mais uma unidade, nesta posição fica nula (o zero) e adiciona-se uma unidade na próxima casa à sua esquerda (na ordem imediatamente superior –

indo de unidade simples à dezena simples, ou dessa à centena simples, e assim por diante). Observando o número 905, neste sistema, conclui-se que ele possui 9 centenas simples, nenhuma (0) dezena simples e 5 unidades simples. E, ainda, nota-se que o valor (relativo) de cada algarismo é dado de acordo com a posição em que ele se encontra – este fato é chamado de "notação posicional". Percebe-se, neste exemplo, que 905 pode ser escrito na "forma polinomial" da seguinte maneira: $905 = 9x100 + 0x10 + 5x1 = 9x10^2 + 0x10^1 + 5x10^0$.

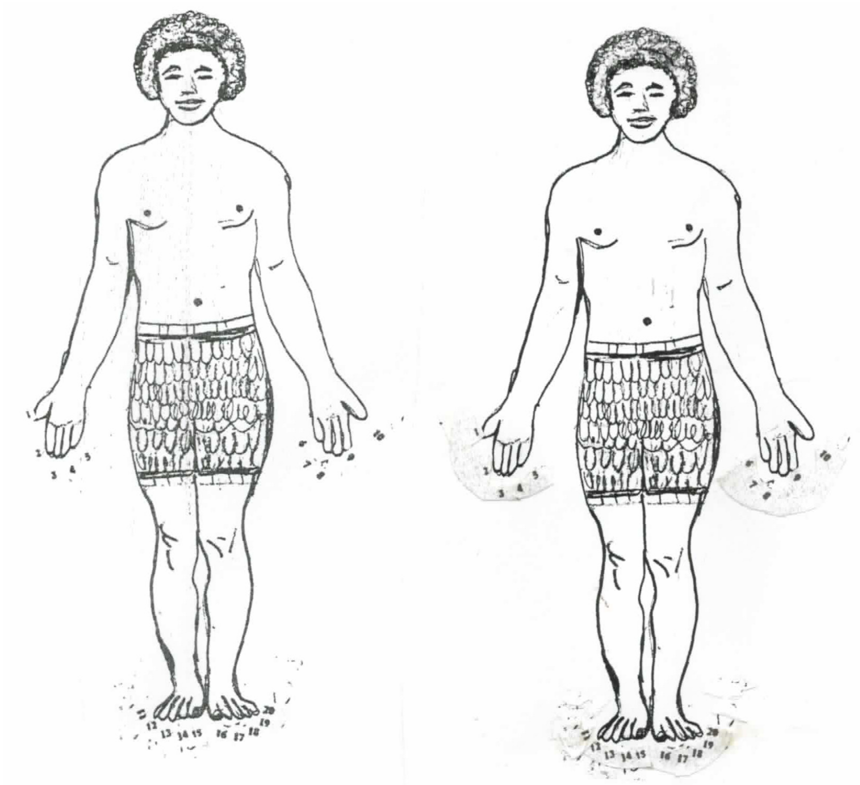
No sistema Binário, esse conjunto é {0, 1} – é muito utilizado nos computadores; o octal com oito elementos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; o hexadecimal com 16 elementos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F} – sendo estas duas últimas muito úteis em hardware e software. Pois são de uso mais fácil por usarem potências de base 2. No octal: $2^3=8$ e no hexadecimal: $2^4=16$ –> estas são usadas para visualizar valores; A sexagesimal (base 60): usadas, na Geometria, em medidas de ângulos (1^0=60' –> 1 grau igual a 60 minutos, 1'=60" –> 1minuto igual a 60 segundos) e nas medidas de tempo: 1h=60min –> 1 hora igual a 60 minutos, 1 min=60s –> 1minuto igual a sessenta segundos e ainda se tem que 1 dia igual à 24 horas; 1 mês igual a 30 dias e 1 ano igual a 12 meses – provavelmente sua origem veio da combinação das bases 5 e 12 - usada inicialmente, pelos indígenas antes do domínio dos sumérios (na Baixa Mesopotâmia), onde uns possuíam sistema de base 5 e outros, a de 12. Há, ainda, uma hipótese de que tenha sido influenciada pela nossa contagem manual utilizada no Oriente Próximo e pelos habitantes da Península Indo-Chinesa.

Com a base 12, deve-se refletir sobre os benefícios a serem obtidos através dos cálculos relacionados às divisões do tempo e na Geometria. Observa-se que: a medida do tempo de um ano corresponderia, em meses, uma quantia equivalente a esta base doze; um dia seria o dobro desse valor (dessa base); uma hora, em minutos, igual a cinco vezes esta base; e um minuto, em segundos, valendo este mesmo valor anteriormente citado. Verificando os benefícios ocorridos, facilitando para os estudiosos geômetras, no que diz respeito às medições de arcos e ângulos, tem-se: em graus, seriam em minutos, cinco vezes esta base; e quanto aos minutos, seria este mesmo valor anterior em segundos. E quanto à medida de uma circunferência, media trinta vezes à base doze e, no ângulo raso ou meia volta, teria medida equivalente a quinze vezes esta base (IFRAH, 1992). Lembra-se que se utiliza, ainda hoje, neste Sistema Duodecimal, uma chamada "grosa" (igual a doze dúzias ou cento quarenta e quatro unidades).

Segundo Leite e Monteiro (2005), a base 20 foi arbitrada pelos Astecas fazendo corresponder os cinco primeiros números aos cinco dedos de uma de suas mãos e os cinco dedos da outra mão corresponder aos cinco números (de 6 a 10); do 11º ao 15º corresponderão aos cinco dedos de um pé e do 16º ao 20º número estarão relacionados com os dedos do outro pé. Assim, tem-se a formação da base 20 ou vintena.

Como exemplo, para se representar o número 62, tem-se três homens completos (20 + 20 +20 = 60), além de dois dedos da primeira mão de um quarto homem, formando 62 = 20 + 20 +20 +2.

Figura 3 - Homem de Malenkê



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ademais, há a representação dos números 20 e 40, pelos Malenkê, de Senegal, que são respectivamente, "um homem completo (20)" e "uma colcha" significando um casal esticado sobre uma mesma colcha.

Destaca-se, ainda, a "base cinco" em que foram encontrados testemunhos deste uso em partes da África e na Oceania e, indianos que exercem a prática do comércio na região de Bombaim ainda hoje utilizam esta base. A regra prática usada nesta base é a seguinte: nos dedos da mão esquerda, contam-se as unidades de 1 a 5. E nos da mão direita, cada um destes corresponde a cinco unidades (contando 5, 10, 15, 20 e 25). Chegando ao número 25, pode-se contar ainda até 30 usando os cinco dedos, que agora ficaram livres, da mão esquerda. Continuando, ainda, pode chegar a contar até 50.

Após o avanço na pesquisa sobre os sistemas acima citados, convém destacar a importância disto: de modo a realizar contagens de forma que favoreça à prática de usar o princípio de base, levando o homem a saber operar avaliando e medindo distintas grandezas. Da mesma forma, ele concebeu e atingiu valores numéricos, até mesmo do domínio do conceito de infinito. Dessa forma, realizou-se variadas práticas operando concretamente, mentalmente e as práticas escritas determinando rudimentos primordiais da Aritmética, atuando de forma prática, mesmo antes de agir, de maneira abstrata e induzindo o surgimento da Álgebra (IFRAH, 1992).

5.2 A IMPORTÂNCIA DE CADA ALGARISMO NO SISTEMA POSICIONAL

Observando-se algumas características no Sistema Numérico Decimal, têm-se:

1) todo número inteiro positivo é representado como uma expressão polinomial em dez;

2) é um sistema posicional (cada dígito contribui com um valor relativo dependendo da posição ou ordem em que ele ocupa);

3) conforme esta base, os números a serem formados utilizam o seguinte conjunto de dígitos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Exemplo a ser colocado na forma polinomial.

1º exemplo: o número 835

8 é o número de centenas simples (será multiplicado por 100 ou 10^2);

3 é o número de dezenas simples (será multiplicado por 10 ou 10^1);

5 é o número de unidades simples (será multiplicado por 1 ou 10^0).

Assim, sua forma polinomial é $835 = 8x10^2 + 3x10^1 + 5x10^0$.

É de grande utilidade colocar um número em uma expansão ou forma polinomial, como no exemplo citado acima.

Quanto aos números de expoentes não positivos, todos os números decimais (fracionários) têm os expoentes formados por números inteiros não positivos.

Segundo Nagel (2013), a expansão decimal polinomial algébrica de número com potências de dez com expoentes inteiros não positivos é $N = a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \ldots$, sendo os coeficientes a_i números inteiros não negativos, (com expoentes de 10 inteiros não positivos, isto é, menores ou iguais a 0).

Para os números decimais, utilizam-se as potências negativas de dez e, dessa forma, as potências de 10 decrescem da esquerda para a direita (ou crescem em valor absoluto).

Exemplo: o número 0,427 explicitado abaixo:

4 é o número de vezes a potência 10^{-1} (1ª casa decimal);

2 é o número de vezes a potência 10^{-2} (2ª casa decimal);

7 é o número de vezes a ptência 10^{-3} (3ª casa decimal).

Assim, sua forma polinomial é $0{,}427 = 0x10^0 + 4x10^{-1} + 2x10^{-2} + 7x10^{-3}$.

Neste número, a parte inteira é 0 (zero).

A respeito de base, tem-se que o Sistema de Numeração Decimal tem sido empregado pela humanidade até mesmo em períodos muito remotos e fundamentado no fato de as mãos humanas serem constituídas por dez dedos. Assim, tem-se uma situação um algarismo tem valor rigorosamente posicional (não tem um valor por si mesmo). As dez unidades de uma certa ordem passam a compor uma unidade de ordem imediatamente superior. Exemplo: dez unidades passam a ser uma dezena e dez dezenas, uma centena. Assim sendo, considerando-se o número 835, escrito na base dez, é igual a $8x10^2 + 3x10^1 + 5x10^0$. De forma idêntica, pode-se, ainda, escrever números em bases de determinados sistemas de numeração que sejam diferentes da base dez. Tem-se, também, exemplo de outra base muito usada na atualidade em processadores de computadores, que é a base 2. Essa é uma base constituída de apenas dois algarismos: o 0 e o 1. Desta forma, o número 1011, escrito na base 2, ou seja, $[1011]_2$ poderá ser escrito da forma $1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$, representando o número 11 na base 10.

Exemplo de conversão da base decimal para outra base diferente de dez (10):

613 (na base decimal) para a base 5

613 = (5).212 + 3;

212 = (5).42 + 2;

42 = (5).8 + 2;

8 = (5).1 + 3;

1 = (5).0 + 1.

Assim sendo, anotam-se os restos de baixo para cima, obtendo-se o número 13223 (na base 5), ou $[13223]_5$.

Nota-se que com as mudanças de base, pode-se converter da base decimal para uma base não decimal:

Sejam dados os inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \ldots r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1.b + r_2b^2 + \ldots + r_nb^n$. (Veja Abramo. Aritmética, 2014, p. 68),

Demonstração:

Demonstrando este teorema, por indução completa sobre a, sendo $0 < a < b$ e tomando $n = 0$ e $r_0 = a$, tem-se que a unicidade da escrita é óbvia.

Supondo o resultado ser válido para todo número menor do que a, uma vez que $a \geq b$.

Provando para a, através da divisão euclidiana, existem q e r, sendo únicos, tais que $a = b.q+ r$, com $0 \leq r < b$. Mas sendo $0 < q < a$, tem-se existem números inteiros $n' \geq 0$ e $0 \leq r_1, \ldots, r_{n'+1} < b$, sendo $r_{n'+1} \neq 0$, univocamente determinados, de modo que $q = r_0 + r_1.b + r_2b^2 + \ldots + r_{n'+1}b^{n'}$.

Tomando-se as duas igualdades mencionadas acima, tem-se $a = bq + r = b.(r_1.b + r_2b^2 + \ldots + r_{n'+1}b^{n'}) + r$, concluindo que $r_0 = r$ e $n = n' +1$.

Genericamente, a representação acima referida é denominada de expansão relativa à base b. Se tomar $b = 10$, passa a se chamar de expansão decimal, para $b=2$ (expansão binária) e $b = 8$ (expansão octal) etc.

Agora, de modo genérico, vê-se um algoritmo determinando a expansão de um número qualquer relativo à base b:

$a = b.q_0 + r_0,\ 0 \leq r_0 < b;$

$q_0 = b.q_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b;$

e sendo $a > q_0 > q_1 > \ldots$ até que

$q_{n-1} = b.q_n + r_n$

decorrendo que $q_n = 0$, o que vai acarretar que

$0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \ldots$

E, assim, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \ldots$

Daí, tem-se $a = r_0 + r_1.b + \ldots + r_nb^n$.

A partir daí, deve-se comparar os dois números escritos, nas expansões de base b.

Há uma proposição afirmando que:

Sejam dados os números inteiros $b > 1$, $n, n' \geq 0$ e $0 \leq r'_0, \ldots, r'_{n'} < b$, tem-se que

i) $r_0 + r_1b + \ldots + r_nb^n < b^{n+1}$;

ii) $n > n'$ e $r_n \neq 0$ implicando que $r_0 + r_1b + \ldots + r_nb^n > r'_0 + r'_1b + \ldots + r'_nb^{n'}$;

iii) $n = n'$ e $r_n > + r'_n$ implicando que $r_0 + r_1b + \ldots + r_nb^n > r'_0 + r'_1b + \ldots + r'_nb^{n'}$. (Veja

Abramo. Aritmética, 2014, p. 68).

Demonstração:

i) Para todo $i = 0, 1, ..., n$, tem-se que $r_i b^i \leq (b-1)b^i = b^{n+1} - b^i$

Em ambos os membros da igualdade (desigualdade) apresentada acima, toma-se o somatório com i variando de 0 a n ($0 \leq i \leq n$).

Daí, tem-se $r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n \leq (b - b^0) + (b^2 - b^1) + ... + (b^{n+1} - b^n) = b^{n+1} - 1 < b^{n+1}$.

ii) Observando o item (i), tem-se $n > n'$ e $r_n \neq 0$, então $r'_0 + r'_1 b + ... + r'_n b^{n'} < b^{n'+1} \leq r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n$;

iii) Do item (ii), conclui-se que: $r_0 + r_1 b + ... + (r_n - r'_n) b^n > r'_0 + r'_1 b + ... + r'_{n-1} b^{n-1} . r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n$

Pois, assim, fica provado este resultado, uma vez que $r_n - r'_n > 0$. (Veja Abramo. Aritmética, 2014, p. 69-70).

Numa dada base b, a expansão fornece um método representando os números naturais, escolhendo-se um conjunto de símbolos $A = \{s_0, s_1, ... s_{b-1}\}$ e tomando $s_0 = 0$representando os números de 0 a $(b - 1)$.

Um determinado N natural, na base b, se escreve da seguinte forma $X_N X_{N-1} ... X_1 X_0$, onde $X_0, X_1, ..., X_N \in A$, com N variando e representando a expressão $X_0 + X_1 b + ... + X_N b^N$.

Em um sistema decimal (base b = 10), usa-se o conjunto de dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Sendo $b \leq 10$, são usados os símbolos (ou dígitos) do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...,(b – 1)}.

Sendo b > 10, usam-se os símbolos de 0 a 9 acrecidos dos novos símbolos 10,..., (b – 1).

Em um sistema binário (b = 2), utilizam-se os símbolos do conjunto {0, 1} e todo número natural é formado por uma sequência constituída pelos algarismos 0 e1.

Exemplo

O número 4 (na base 10) é representado por 100 (na base 2) ou 100_2, isto é, $4 = [100]_2$.

Usando a notação $[x_n...x_1x_0]_b$ significando que este número é $x_n...x_1x_0$ (na base b).

Pois, $[x_n...x_1x_0]_b = x_0 + x_1 b + ... + x_n b^n$.

E sendo 10 a base muito utilizada, deve-se denotar por $[x_n...x_1x_0]_{10}$ apenas por $x_n...x_1x_0$. Com tal notação, tem-se que

$[100]_2 = 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 4$ (na base 10), ou simplesmente 4;

$[10]_b = 1.b^1 + 0.b^0 = b$, isto é, b (na base 10);

$[1010]_b = 1.b^3 + 0.b^2 + 1.b^1 + 0.b^0 = b^3 + b$.

É válida a seguinte proposição:

Seja **a** = $r_n...r_1r_0$ um número representado no Sistema Decimal. Uma condição necessária e suficiente para que **a** seja divisível por 5 (e respectivamente por 10) é que r_0 seja 0 ou 5 [e,respectivamente (por 5 e por 10), $r_0 = 0$].

(Veja Abramo, Aritmética. 2014, p. 71).

Demonstração:

Sendo **a** = $10.(x_n...x_2x_1)+ r_0$, pois**a** na forma polinomial é **a** = $r_0 + r_1.10 + ... + r_n.10^n$ e tendo que **a** é divisível por 5. Se **a** é divisível por 5 (ou r_0 é múltiplo de 5), tem-seque $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$. Ademais, **a** é divisível por 10 se, e somente se, r_0 é divisível por 10 e, neste caso, ocorre somente se, $r_0 = 0$.

É válido afirmar a proposição seguinte:

Seja **a** = $r_n...r_1r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que **a** seja divisível por 3 (e respectivamente por 9, isto é, por 3 e por 9) é que $r_n+...+ r_1 + r_0$ seja um número divisível por 3 (e, respectivamente, por 3 e por 9 e esta soma seja divisível por 9].

(Veja Abramo, Aritmética. 2014, p. 72)

Demonstração:

Como **a** = $r_n...r_1r_0$, tem-se

a $- (r_n+... + r_1+ r_0) = r_n10^n + ...+ r_1.10 + r_0 - (r_n+... + r_1+ r_0) =$

$r_0 10^n - r_n + ... + r_1.10 - r_1 + r_0 - r_0 = r_n.(10^n - 1) + ...+ 9.r_1$.

Como o segundo membro da igualdade acima é divisível por 9. Pois as diferenças do tipo $(10^n - 1)$, para n inteiro não negativo, representam exemplos de de múltiplos de 9. Então, existe algum $k \in N$ tal que **a** $- (r_n+... + r_1+ r_0) = 9k$.

É válido uma proposição garantindo que:

Se x, y, z, m,n $\in Z$, então z|(mx + ny).

Em particular, para m = 1 e n = - 1, tem-se que z|(x – y). (Veja Abramo, 2014, p. 48). Assim, pode-se afirmar, com segurança, que $r_n+... + r_1+ r_0$ é divisível por 9 e, simultaneamente, esta soma representa um número múltiplo de 3.

Outro exemplo é o nove misterioso. Peça para alguém escolher, em segredo, um número natural com, pelo menos três algarismos (no sisterma decimal). Peça, ainda, que efetue uma permutação qualquer dos seus algarismos, obtendo um novo número, e que subtraia o menor do maior dois números. Finalmente, peça ao seu parceiro de jogo para reter um dos algarismos diferente de zero desse novo número e divulgar os restantes (dos algarismos). É possível advinhar o algarismo retido?

Sendo **a** = $r_n...r_1r_0$, o número secreto do problema e **a'** o número obtido ao permutar os algarismos de **a**. Conforme uma proposição demonstrada anteriormente, isto é, **a** $- (r_n+... + r_1+ r_0) = r_n10^n + ...+ r_1.10 + r_0 - (r_n+... + r_1+ r_0) = r_010^n - r_n + ... + r_1.10 - r_1 + r_0 - r_0 = r_n.(10^n - 1) + ...+ 9.r_1.$

Conforme uma proposição demonstrada anteriormente, existem k, k' $\in$ N de modo que **a** $= r_n+... + r_1 + r_0 + 9k$ e **a'** $= r_n+... + r_1+ r_0 + 9k'$.

Assim sendo, a diferença entre o maior e o menor (entre **a** e **a'**) é divisível por 9. Dessa forma, pode-se descobrir o algarismo que falta (dentre 1 a 9) e, assim, deve-se determinar o quanto se pode adicionar à soma dos algarismos divulgados para que o resultado desta nova adição seja um múltiplo de 9, com exceção de zero no algarismo retido, para que evite uma provável ambiguidade a ocorrer quando a soma divulgada (dos algarismos revelados) já seja um número divisível por 9. Assim sendo, o algarismo oculto pode ser tanto 9 quanto o zero.

Nota: Tem-se, aqui, alguns exemplos de números obtidos por esta subtração (que é o número encontrado no final das operações realizadas) citada acima. No número 524, após a diferença 5**24** – 5**42** = 18 = (500 + 40 + 2) – (500 + 20 + 4) = 9.(4 -2), (inverteram-se os algarismos das dezenas e unidades), ou seja, o resultado final foi igual a 9 vezes à diferença entre os algarismos permutados, ou melhor, (6 – 4)x(10 – 1), pois os algarismos permutados seriam os das ordens de "dezena e de unidades", justificando o surgimento do fator (10 – 1); quanto ao número 624, tem-se **6**2**4** – **4**2**6** = (600 + 20 + 4) - (400 + 20 + 6) = 198 = (6 – 4)x(100 - 1). Neste caso, foram envolvidos os algarismos das centenas e das unidades, justificando a diferença (100 – 1); e agora, num terceiro exemplo, ocorre a inversão dos algarismos das "unidades de milhar e das dezenas" justificando, na nova multiplicação, a existência do fator (1000 – 10). Assim, no exemplo **9**4**6**2 – **6**4**9**2 = (9000 + 400+ 60 +2) – (6000 + 400 + 90 + 2) = 2970 = (9 – 6)x(1000 – 10). Convém ressaltar que, coincidentemente, todos os resultados finais (as diferenças) são múltiplos de 9. Pois surgiram, respectivamente, na primeira, segunda e terceira subtração, os fatores 18, 198 e 990 que sãomúltiplos de nove. Assim sendo, como esses resultados tratam-se sempre divisores de 9, então o algarismo retido pelo parceiro de jogo é o que falta, além da soma dos algarismos não retidos, para completar em "múltiplo de 9". No caso da primeira subtração, se o algarismo retido fosse o 8, ficaria o 1 como não retido. Então, ele descobriria que faltaria 8 para completar um múltiplo de 9; na diferença 198, se o 1 fosse o oculto. Na soma dos restantes 9 + 8 = 17, faltaria 1 (o oculto) para completar um múltiplo de 9; E em 2970, se ocultasse o 2, ficaria a soma 9 +7 + 0 = 16. Assim, faltaria 2 para se encontrar um total que seja múltiplo de 9, que é 18. Portanto, o algarismo desconhecido procurado seria o 2.

Sejamos números $\mathbf{x} = a_n...a_1a_0 = a_n10^n + ...+ a_1.10 + a_0$ e $\mathbf{y} = a_0a_1..._{}a_n = a_0 + a_1.10 + ...+ a_n.10^n$, sendo que y é o número x com os algarismos escritos em ordem inversa. Daí, tem-se $x - y = a_n.(10^n - 1) + ...+ a_1.(10 - 1) + (a_0 - a_0) = 9.k$, onde k é um número inteiro e como $9|(10^n - 1)$. Conclui-se, então, que $\mathbf{x - y}$ é um múltiplo de 9, isto é, $9|x - y$.

A respeito do Sistema Binário (base 2), tem-se:

1) é posicional;

2) conforme esta base, os números a serem formados utilizam o seguinte conjunto de dígitos: {0, 1}.

Exemplo: $[1101]_2$

1 (primeiro algarismo da esquerda para a direita) é o número de vezes a potência 2^3;

1 (segundo algarismo da esquerda para a direita) é o número de vezes a potência 2^2;

0 (terceiro algarismo da esquerda para a direita) é o número de vezes a potência 2^1;

1 (quarto algarismo da esquerda, para a direita) é o número de vezes a potência 2^0;

Assim, sua forma polinomial é $[1101]_2 = 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 = 13$ (13 na base decimal). Um caso peculiar sobre a representação binária.

Há um corolário afirmando que: todo número natural é escrito unicamente como uma soma de potências distintas de 2. (Veja Abramo. Aritmética, 2014, p. 73)

A determinação de uma expressão binária de um número **a** é bem mais fácil que a determinação de sua expansão relativa a $b \neq 2$.

Assim sendo, ocorre uma lista de números iniciados por **a** acompanhada do quociente q_0 (na divisão de **a** por 2) bem como do quociente q_1 (na divisão de $q_0$por 2) e do quociente q_2 (na divisão de q_1 por 2) etc. Nessa sucessiva divisão euclidiana, tem-se que:

Sendo a um número ímpar, conclui-se que $r_0 = 1$ e, se a é um número par, $r_0 = 0$. Agora, tem-se $r_1 = 1$ quando q_0 é ímpar e $r_1 = 0$, se q_0 for par.

De modo genérico, $r_{i+1} = 1$ quando q_i é ímpar e $r_{i+1} = 0$, se q_i é par. Dessa forma, prossegue até surgir $q_{n-1} = 1$, quando $r_n = 1$.

Assim, segue-se que $a = r_0 + r_1.2 + ... + r_n.2^n$.

O Problema da moeda falsa:

Tem-se 2^n moedas, sendo uma delas falsa, com peso menor que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos (sem nenhum peso). Deve-se mostrar que é possível achar a moeda falsa com n pesagens. Pelo Princípio de Indução, tem-se:

i) Para n= 1 (é óbvio). Sendo 2 moedas ($= 2^n = 2^1 =2$). Neste caso, precisa-se apenas colocar uma moeda em cada prato e localizar qual é a falsa;

ii) Supondo, desta vez, o resultado ser válido para algum n natural e, em seguida, encontrar a moeda falsa num conjunto de 2^{n+1} moedas. Ao separar essas 2^{n+1} moedas em conjuntos de 2^n cada (colocando as 2^n moedas em cada prato). Dessa forma, descobre-se qual o prato que possui a moeda falsa. Desta vez, por Hipótese de Indução, é detectada qual a moeda falsa em n pesagens acrescida à pesagem já efetuada inicialmente, perfazendo um total de n + 1 pesagens.

Para uma quantidade arbitrária de moedas, tem-se a seguinte solução:

Sendo m o total de moedas em que uma delas é falsa e, escrevendo-se a expansão binária de m, tem-se $m = 2^{n1} + 2^{n2} + ... + 2^{nr}$, com $n_1 > n_2 > ... > n_r$.

Agora deve-se mostrar que em n_1 pesagens, consegue-se detectar, de modo suficiente, qual a moeda falsa. Uma outra solução obtida por meio de uma Indução Completa sobre n_1:

i) Para $n_1 = 1$, tem-se, no máximo, três moedas. Sendo posta uma moeda em cada prato. Conclui-se, de imediato, qual a moeda falsa. E, assim, o resultado é óbvio;

ii) Supondo o resultado verdadeiro para todo $n' > n_1$. Assim, com $m = 2^{n1} + 2^{n2} + ... + 2^{nr}$ moedas, tendo-se entre essas uma que é falsa. Separando-se as moedas de dois em dois lotes com 2^{n1} e $2^{n2} + ... + 2^{nr}$, respectivamente. De início, analisando o lote de 2^{n1} moedas e caso a moeda falsa esteja nesse lote (conforme a solução anterior acima), pode-se concluir qual a moeda falsa em n_1 pesagens (no máximo). Mas esse lote não contendo a falsa, conclui-se isto com apenas uma pesagem (metade delas em cada prato). Mas estando a balança equilibrada, a falsa não está nesses pratos. Assim, sobram ainda $2^{n2} + ... + 2^{nr}$ e, pela hipótese de Indução, com apenas n_2 pesagens, descobre-se a falsa e que junto com a pesagem anteriormente realizada, totalizam $n_2 + 1$ pesagens, sendo menor ou igual do que n_1.

5.3 A IMPORTÂNCIA DE ALGUNS SISTEMAS PARA A INFORMÁTICA

A princípio, no computador (a rigor), existe o Sistema Binário (que tem os 0's e 1's dentro de um chip da CPU ou de memória de um computador).

Quando se constrói textos, letras, algarismos, gráficos, imagens, sons etc. Estes são convertidos em sequências de 0's e 1's – chamado de digitalização. Um sistema eletrônico armazena os números 0 e 1, associando, respectivamente, às ideias de desligado e ligado – que é mais simples do que armazenar 10 estados: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. O sistema Octal é o binário elevado ao cubo (representam oito estágios diferentes). O Hexadecimal é o binário elevado a quarta potência (representam 16 estágios distintos). Verificam-se, agora, as características dos sistemas octal e hexadecimal.

Sistema octal:

1) É posicional;

2) conforme esta base, os números a serem formados utilizam o seguinte conjunto de dígitos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Exemplo: $15_{8.}$ (15 na base octal) para a base decimal.

1 representa o número de vezes a potência 8^1;

5 representa o número de vezes a potência 8^0.

$15_{8} = 1x8^1 + 5x8^0 = 1x8 + 5x1 = 8 +5 = 13$ (ou 13_{10}).

Sistema Hexadecimal:

1) É posicional;

2) conforme esta base, os números a serem formados utilizam o seguinte conjunto de dígitos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}.

Exemplo: $2B4_{16.}$ (2B4 na base hexadecimal) para a base decimal.

$2B4_{16} = 2x16^2 + 11x16^1 + 4x16^0 = 2x256 + 11x16 + 4x1 =512 + 176 + 4 = 692$;

2 representa o número de vezes a potência 16^2;

B (=11) representa o número a potência16^1;

4 representa o número de vezes a potência 16^2.

Observa-se que, em hexadecimal, B equivale a 11.

Vale destacar um "quadro resumo" com todos os elementos do conjunto da base hexadecimal, relacionados abaixo, mostrando sua equivalência em outras bases (nas bases decimal, binária e octal).

Figura 4- Exemplos de sistemas das principais bases

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Fonte: elaborado pelo autor

Vale ressaltar que a mão é o mais antigo meio usado como máquina de contar e de bastante aceitação por ser móvel, muito eficiente e eficaz – constitui o primeiro modelo de máquina de calcular de todas as épocas.

Assim, o ser humano conseguiu, de maneira segura, um extraordinário meio natural de se operar. E assim, o homem obteve, com máximo proveito, adquirindo a capacidade de trabalhar abstratamente, conseguindo uma melhor assimilação sobre o princípio de base (IFRAH,1992). Em destaque, vale comentar sobre o que se denomina de "cálculo digital", em que nos dias atuais, ainda se encontram vestígios de seu uso em lugares como, o Iraque, a Índia, a Sérvia, a Síria etc.

Um exemplo muito prático ainda é utilizado em tabuadas de multiplicar. Tomando o exemplo do produto 7x8 que se opera pelo cálculo digital da seguinte forma: dobra-se, em uma mão, a quantidade de dedos suplementar ao número nove em relação ao número de dedos de uma mão (em relação a cinco), isto é, 7 – 5 = 2 e na outra também uma quantidade semelhante suplementar a nove, que é 8 – 5 = 3. A soma destes valores encontrados representa o número de dezenas do resultado desta multiplicação, ou seja, 2 + 3 = 5 dezenas ou 50. Agora, adiciona-se a este resultado o produto das quantidades de dedos não dobrados nas duas mãos – 3x2 = 6. Assim, o resultado do produto 7x8 será (2 + 3) x10 + 3x2 = 50 + 6 = 56. 7x8 = 56.

Segue uma demonstração: como forma algebricamente esta regra, seguramente válida, supõe-se **x** e **y** números naturais situados entre 5 e 10 e **xy**, o produto deles. Dobrando-se os **x – 5** e **y – 5** dedos, respectivamente, tem-se um total de dezenas igual a (x – 5) + (y – 5) e as quantidades de dedos não dobrados são [5 – (x - 5)] = 10 –x e [5 – (5 – y)] = 10 – y. Então, o resultado de xy deve ser igual a [x – 5 +y – 5].10 +[(10 – x).(10 – y)] = 10x + 10y – 100 + 100 – 10x – 10y + xy. Após realizar todos os possíveis cancelamentos, terá como resultado o produto **x.y.** Portanto, está comprovada a afirmação acima.

Fundamentado no que foi destacado, diante do que foi comentado a respeito de diversas bases de sistema de numeração, vale ressaltar ter havido a preocupação por parte dos estudiosos em Matemática, em realizar uma conversão entre essas bases. Observa-se, a seguir, a "mudança da base decimal para uma base específica" e a "mudança de uma base específica para uma base decimal", onde são exemplificados alguns casos. Ademais, convém destacar a conversão de uma "base genérica b qualquer para a decimal" e da "decimal para a base genérica"; conversão envolvendo parte decimal e entre duas bases não decimais quaisquer.

Sobre o conceito de cálculo digital, enfatizando o conceito numérico, é válido dizer: a mão humana é meramente uma maneira refugiada de se registrar a definição sobre conceito de numeração, representando-se visualmente valores numéricos, mas não se mantém a memorização de forma segura. Ao se ampliar as comunicações entre as variadas sociedades, bem como o desenvolvimento do comércio e do artesanato, o humano, mesmo ainda não dominando a "escrita", realizava o controle contábil de seu patrimônio e movimentação econômica. Daí, defrontava-se diante de um problema: "como manter por maior período de tempo o fato de lembrar de um de meio de recordar uma enumeração"? E como nada foi encontrado em sua civilização que resolvesse esse problema, então, ele teve que procurar um novo recurso – mo da criatividade. (IFRAH, 1992).

Observam-se as mudanças de uma base decimal para uma base específica qualquer. Exemplo: converter 964 (na base 10) para a base octal. Basta dividir 964 por 8, encontrando quociente igual a 120 e resto (4). Em seguida divide-se o quociente 120 novamente por 8, achando quociente 15 e resto (0); e dividindo o quociente 15 por 8 achando quociente 1 e resto (7); e, finalmente, divide-se o quociente 1 por 8, encontrando resultado 0 e resto (1). E anotando-se os restos calculados, da direita para a esquerda (do último resto para o primeiro), obtém-se o resultado 1704 (na base 8 ou octal). Portanto, $964_{10} = 1704_{8.}$

Mudança de uma base específica (não decimal) para a base decimal. Exemplo: 1704_8 (na base octal) para a base decimal. $1704_8 = 1x8^3 + 7x8^2 + 0x8^1 + 4x8^0 = 1x512 + 7x64 + 0x8 + 4x1 = 512 + 448 + 0 + 4 = 964$ (ou 964_{10}).

Em 964_{10}, tem-se:

9 representa o número de vezes a potência 10^2;

6 representa o número de vezes a potência 10^1;

4 representa o número de vezes a potência 10^0

Em $1704_{8,}$ tem-se:

1 representa o número de vezes a potência 8^3;

7 representa o número de vezes a potência 8^2;

0 representa o número de vezes a potência 8^1;

4 representa o número de vezes a potência 8^0;

Conversão de números que apresentam parte fracionária (números decimais).

Exemplo: 0,85 equivale aproximadamente a que número na base 2 (com cinco algarismos na parte decimal)?

Com aproximação de cinco dígitos, na parte decimal:

$0{,}85x2 = \underline{1}{,}7$

$0{,}7x2 = \underline{1}{,}4$

$0{,}4x2 = \underline{0}{,}8$

$0{,}8x2 = \underline{1}{,}6$

$0{,}6x2 = \underline{1}{,}2$.

A parte dos algarismos decimais (fracionária) é formada pelos algarismos da parte inteira de cima para baixo:

Portanto, $0{,}85 = 0{,}11011_2$.

Na conversão entre duas bases quaisquer (ambas não decimais), de uma base **A** para uma base B, é necessário converter da base **A** para a decimal, em seguida, passa-se da base 10 para a base **B**.

5.4 SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANA

Figura 5- Exemplos de conversão entre o Sistema Romano e nosso sistema.

Sistema Romano	Nosso Sistema
MCCXXXII	1.232
MCDXXXI	1.431
CXXXII	132
CDXXV	425
MMMCCXX	3.220

Fonte: Elaborado pelo Autor

Diante do que foi argumentado, afirma-se que algarismos gregos, além dos romanos, não eram utilizados para se operar aritmeticamente. Mas sim, para usar em abreviações realizando-se anotações de números. Assim sendo, os romanos, ao realizar contagens, e os egípcios do período da Idade Média, ao efetuar cálculos, constantemente ussavam “ábacos de fichas” nessas operações (IFRAH, 1992, p. 185).

O Sistema de Numeração Romana regia o princípio da adição e tinha os seguintes algarismos, nos quais, a seguir, mencionam-se as respectivas correspondências em nosso Sistema: I = 1; V = 5; X = 10; L = 50; D = 500; e M =1000. Eram independentes entre si e a justaposição destes algarismos gerava uma soma.

A respeito dos algarismos romanos, observa-se que eles não facilitavam ao efetuar cálculos. Pois uma simples adição torna-se praticamente impossível se, antes, não se efetuar a correspondente tradução para o nosso sistema de numeração atualmente utilizado. Porém eram muito usados devido a forte influência do Império Romano.

Exemplo: CCCLXVI (=100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 6 = 366).

A denominada “Numeração Romana” - utilizada por pastores que já conheciam símbolos, entre os quais, os já conhecidos até hoje, de forma tradicional, na representação de agrupamentos nas variadas contagens e que ocorriam de tamanhos diferentes e, não mantinham a mais destacada característica dos atuais sistemas de numeração – organiza grupamentos limitados a igual tamanho. Tais como os exemplos a seguir: as simbologias I, II, III e IIII equivaliam, respectivamente, às quantidades simbolizadas por 1, 2, 3 e 4; o símbolo representado por V equivalia a 5 (cinco idênticas unidades); e X, L, C, D e M eram equivalentes, respectivamente, 10, 50, 100, 500 e 1000 unidades; à proporção que os símbolos existentes não fossem satisfatórios para a nova quantidade a se representar, novas simbologias iam sendo criadas (BORGES NETO, DIAS).

Nota-se, ainda, que todo algarismo romano posicionado à esquerda de outro de valor superior é subtraído desse último. Assim sendo, os valores relacionados a números do tipo 4, 9, 40, 90, 400, 900, são assim traduzidos: IV = (5 - 1 = 4) ao invés de IIII; e, semelhantemente, IX = (10 - 1 = 9); XL = (50 - 10); XC = (100 - 10); CD = (500 - 100); CM = (1000 - 100).

Exemplo: CDXLIX = (500 – 100 + 50 – 10 + 10 – 1 = 449).

Em consequência disto, acabou se caracterizando como um sistema complicado, praticamente impedido na realização de operações, constituindo em heranças de um passado bem distante, quando o pensamento lógico ainda não chegou a conquistar um pleno desenvolvimento e, provavelmente, com esses algarismos realizou-se cálculos fundamentados no alfabeto latino.

Sendo a maioria desses sistemas (de numeração), no período da Antiguidade, representada pelo sistema romano e tendo-se como principal regra o “princípio da adição”, mantendo-se a seguinte correspondência, quanto aos algarismos: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 e M = 1000 e ocorrendo uma independência entre eles com uma justaposição acarretando em uma adição dos símbolos (ou de quantias correspondentes), tais como exemplo: CCCLXXXVII = 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 387. Dessa forma, o povo romano provocou consequentemente, operações mais difíceis e complicadas com este seu sistema ao utilizar a regra de subtrair quando um símbolo de menor valor fosse colocado à esquerda de outro de maior (SOUSA; BORGES NETO).

Em escolas, costuma-se usar a escrita do sistema de numeração romano do período da Idade Média e estes usados apenas na indicação de páginas especiais e capítulos (em capítulos de livros), nas leituras de datas em que foram construídos os antigos prédios e só são exigidas suas puras e simples memorizações. A respeito desses números, vale ressaltar, que seus algarismos iniciais foram evoluindo graficamente, chegando aos atualmente conhecidos.

Conforme o que já foi mencionado acima, sem dúvida alguma, por um longo período de tempo, algarismos etruscos e romanos foram originados sobrevivendo ao praticar o “entalhe”. Pensando na maneira em que um pastor registrava a quantidade de seus animais, conforme tal técnica pré-histórica, sendo que, a partir daí, determinava-se essas quantidades conforme prática herdada de seus ancestrais – cravava ininterruptamente em um recorte de madeira (ou osso), uma quantidade de entalhes equivalente a tantas unidades representadas pelo número usado nessa contagem. Dessa forma, não sendo um método facilmente prático, tal pastor se limita obrigatoriamente a contar novamente o conjunto desses entalhes no bastão, sempre que necessitar determinar o número total dessas cabeças (IFRAH, 1992, p. 189-190).

É válido dizer que as faculdades do homem para identificar visualmente os números vão até o número quatro. Além deste, torna-se confuso procurando a contagem abstrata para se chegar ao número exato de sua contagem desejada. Além do mais, pode-se destacar que a ideia de inventar símbolos gráficos tem sempre sua limitação.

Diante do exposto, afirma-se que embora tal pastor não consiga, de modo visual, identificar uma quantidade de quatro símbolos idênticos, obterá isto com a ajuda da talha e ele distinguirá facilmente, as quantidades equivalentes a 50, 100, 500 ou 1000, sem a necessidade de fazer a contagem de todas as unidades. Por motivos materiais, o uso desse bastão a partir da unidade, não chegar a contar esses números, bastando apenas, tantos entalhes forem necessários para essa contagem. (IFRAH, 1992).

Percebe-se uma notação cardinal monótona. É possível amenizar obstáculos com a ideia de representar os ordinais - muito prática e resumida comparada com algumas anteriores. Ao citar os números de 1 a 4, convém mencionar seus correspondentes cardinais que são, respectivamente, I, II, III e IIII. Logo, o símbolo “V” basta-se a si próprio, embora não sejam necessárias as quatro gravações por meio de traços anteriores a ele. Dessa forma, em vez de se indicar por IIIIV, precisa-se apenas de simbolizar por ”V” (IFRAH, 1992).

Prosseguindo com o que se comentou anteriormente, pode-se dizer que o número 6 (que é um traço após o número V) é escrito da seguinte forma VI - abandonando a escrita anterior: IIIIVI; no 7, o símbolo V seguido de dois traços verticais e assim, seguindo este raciocínio, vai até o número nove (=VIIII, substituído por IX).

Dessa forma, o símbolo X representa o décimo termo dessa série. Os números romanos que representavam, em nosso sistema, 11, 12, 13, 14 foram, respectivamente, expressos por XI, XII, XIII, XIIII. Já o 15 se traduz colocando o V após o X (XV). E segue-se num raciocínio análogo para os números que se seguem.

Entretanto, nos números a seguir, processa-se um procedimento um pouco distinto do anterior. O número 4 (escrito com quatro traços) agora passa a ser traduzido por IV - aparece antes de V com raciocínio subtrativo (5 - 1); o 9 (que era VIIII) passou a ser escrito por IX; prossegue-se com raciocínio semelhante ao número 14 (XIV = 10 + 5 - 1) e assim segue com este raciocínio.

Dessa forma, destaca-se que distintos povos, utilizaram por longo período de tempo, a prática do entalhe em madeira (ou osso), independente da cultura latina ou etrusca, através de escritos gráficos e matemáticos dessas culturas (romanas e etruscas), com uma transparente suposição e dispensada da necessidade de comprovações, embora existam inúmeros testemunhos. Pastores dálmatas, toscanos, húngaros, alpinos e germânicos utilizavam o entalhe, desde os tempos mais remotos e, dessa forma, chegando a símbolos iguais (IFRAH, 1992, p. 196).

No que tange à análise prática exercida com entalhes, os arqueólogos têm ficado sempre cada vez mais curiosos. No que tange à análise prática exercida com entalhes, os arqueólogos têm ficado sempre cada vez mais curiosos.

Sobre esse assunto, sabe-se que algarismos etruscos e romanos são provindos das atividades práticas do entalhe – heranças da Aritmética primitiva – que é mais antiga que a própria escrita e é uma das práticas tradicionalmente comuns aos ambientes da área rural. É provável a descoberta, por arqueólogos, de pedaços de madeira ou osso significando números semelhantes aos algarismos anteriormente citados (IFRAH, 1992, p. 199-200).

Observa-se, que neste sistema romano, o algarismo de valor mais elevado, não chega a ultrapassar a 1000. Atualmente um determinado símbolo romano nunca se repete mais de três vezes. No caso, dos milhares, usa-se um traço horizontal sobre a simbologia usada indicando que se multiplica por mil, o valor do símbolo utilizado (sobrescrito). Assim, constata-se nos exemplos abaixo:

IV (com um traço sobrescrito) = 4x1000 = 4.000;

V (com um traço sobrescrito) = 5x1000 = 5.000;

IX (com um traço sobrescrito) = 9x1000 = 9.000;

X (com um traço sobrescrito) = 10x1000 = 10.000;

IV (com dois traços sobrescritos) = 4x1000x1000 = 4.000.000.

A respeito das operações dos pastores romanos, pode-se dizer: o Sistema de Numeração caracteriza-se, com destaque, pelos grupos ordenados, unidos em certa quantidade de elementos e formando-se, inicialmente, grupos até determinada quantidade a se estipular. Com tais grupos, surgem posteriores grupamentos até tal quantidade surgida passar a ser superior ao que foi previamente estabelecido, formando uma ordem superior à anterior. Os algarismos romanos não seguem essa prática regularmente citada, mas se aplicam, de forma muito eficiente, à formação de grupamentos – o que é muito próximo do raciocínio infantil. Dessa forma, um certo número de objetos vai se formando em grupo e se reagrupando em variadas ordens, até chegar a uma forma, que no final desse processo, vai proporcionando sua manipulação e operação, de maneira mais fácil (BORGES NETO; DIAS).

Destacam-se, aqui, exemplos de algumas operações romanas, de forma mais simples. Assim, representam-se grupos provindos de operações básicas fundamentais:

Adição: XXVIII + XVIII

XXX VV IIIII

Como VV = X, IIIII = V, tem-se

XXXXVI

E como VV = X. Daí, vem XXXX V I e sendo XXXX = XL, tem-se XLVI

Portanto,

XXVIII + XVIII

LVI

Subtração:

LVI - XVIII

XXXVIII

Como L = XXXXX, tem-se LVI = XXXXX VI

Daí vem que XXXXXVI – XVIII = XXXX – II. E como X = VV = VIIIII, tem-se XXXVIIIII - II = XXXVIII.

Portanto, LVI – XVIII = XXXVIII

Multiplicação:

XI vezes VI.

Neste caso, transforma-se a multiplicação numa adição de seis parcelas iguais a “XI”:

XI

XI

XI

XI

XI

XI

XXXXXX IIIIII

Como XXXXX = L e IIIII = V.

Assim, tem-se XI + XI + XI + XI + XI +XI = LX VI = LXVI.

Divisão:

XXIV dividido por V

No caso da divisão, basta ficar subtraindo V sucessivas vezes.

Verifica-se quantas vezes a subtração ocorreu (o quociente) e, se ainda permanecer algum valor, deve ser o resto da divisão.

(I)1ª subtração:

XXIV – V = ?

Como IV = V – I = IIII, tem-se XXIIII – V e XXIIII = X VV IIII = XV IIIIIIIII – IIIII = XV IIII;

(II) 2ª subtração:

XV IIII – V = XV IIII – IIIII. Como V = IIIII, tem-se

XIIIIIIIII – IIIII = XIIII;

(III) 3ª subtração:

XIIII – V, como X = V + V e V = IIIII, tem-se

V V IIII – IIIII = V IIIIIIIII – IIIII = VIIII;

(IV) 4ª subtração:

VIIII – V, como V = IIIII, tem-se

IIIIIIIII – IIIII = IIII que é igual a IV.

Pelo fato de ocorrer 4 subtrações, conclui-se que o quociente é quatro e, no final, restou quatro.

Portanto, XXIV dividido por V é igual a 4 e o resto é quatro.

Diante do que foi comentado anteriormente, essas fáceis maneiras, que se operando, ocorreram após a Idade Média, e não se propagando e se socializando esperados conhecimentos, dessa forma, limitando sua acessibilidade a variados grupos sociais mais populares a um inovador meio de se operar com as novas criações representadas. Através de um trabalho desses autores Sousa e Borges Neto, eles sugerem a prática de se reutilizar por pastores romanos, com ideias ingênuas, além de acatar etapas de compreensão e raciocínio, levando-se a um conhecimento sistematizado, proporcionando o acesso a tal conhecimento. Assim, avançando na tentativa de provar que os algarismos romanos servem, com bastante efeito, ao se representar agrupamentos – muito usados no sistema de numeração posicional – e operando com esses agrupamentos. Numa tentativa de se compreender o que se propõe, é importante não se utilizar, nos cálculos, os tradicionais algarismos arábicos, nem na memória, e deve existir, ainda, um desligamento deles, supondo-se conhecer apenas os símbolos romanos (SOUSA; BORGES NETO).

5.5 NÚMEROS P-ÁDICOS

Sistema dos Números p-ádicos foi descrito por Hensel, em 1897. Seja um número primo p, denomina-se um número p-ádico como uma soma infinita:

$a = a_{-n}.p^{-n} + a_{-n+1}.p^{-n+1} + ... + a_{-1}.p^{-1} + a_0 + a_1.p + a_2.p^2 + ...$, com $a_i \in Z$ e $0 \leq a_i \leq p - 1$ – o que é muito estudado na Teoria dos Números.

Exemplo: caso particular para p = 2, trata-se uma expansão binária.

Seja $a \in Z$, $a = a_0 + a_1p^1 + a_2p^2 + ... + a_n.p^n$ (base p), sendo $a_i \in Z$ e $0 \leq a_i \leq p - 1$.

Observe os exemplos: tomando p = 3 (base 3), tem-se

Sendo a = 24 = 24_{10} (base 10) ocorrerá que

A =24 = (3).8 + 0;

8 = (3).2 + 2;

2 = (3).0 + 2.

Anotando-se os restos de baixo para cima, tem-se que 24 = 24_{10} = 220_3= 220 (base 3) = $0.3^0 + 2.3^1 + 2.3^2$ = (de modo genérico: $2.p^1 + 2.p^2$).

Genericamente, pode-se expressar uma fração da seguinte forma $a/b = Q_{-n}.p^{-n} + Q_{-n+1}.p^{-n+1} + ... + Q_{-1}.p^{-1} + Q_0 + Q_1.p + Q_2.p^2 + ...$, com $Q_i \in Z$ e $0 \leq Q_i \leq p - 1$.

Para p = 10 (Sistema decimal), note que:

...99999 + ...00001 = ... 00000, isto é, ...99999 = ...00000 (= 0) - ...00001 (=1) = -1, ou organizando as parcelas de outra forma comprovando mais uma vez esta soma de resultado nulo:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ \ \\ ...9\ 9\ 9\ 9\ 9 \\ \underline{+...00001} \\ ...00000 \end{array}$$

Note que:

1 + 9 = 10 ≡ 0 (MOD 10)

Logo, ...99999 = -1, nesta base 10.

Pois, dessa forma, conclui-se que ...99999 é o inverso aditivo de ...00001 (=1).

Definição: um número inteiro p-ádico β e escrito, de modo formal, como uma série de potência $\beta = \sum_{i=0, \infty} (a_i p^i)$, com $0 \leq a_i \leq$ p-1), sendo a_i coeficientes inteiros. Observa-se a existência de restrições para os termos com potências não negativas de p. Qualquer número inteiro positivo pode representar por um número p-ádico. Assim sendo, a citada série é uma expansão p-ádica de tal inteiro positivo e ela será sempre finita para números inteiros positivos.

Considere, ainda, a série 1 + 9 + 90 + 900 + ... Ela não converge em R, mas pode-se decompô-la em sequências de somas parciais:

$S_0 = 1 = 10^0$;

$S_1 = 1 + 9 = 10^1$;

$S_2 = 1 + 9 + 90 = 10^2$;

$S_3 = 1 + 9 + 90 + 900 = 10^3$;

$S_k = 1 + 9 + 90 + 900 +.... = 10^k$.

E, assim, verifica-se que o k-ésimo elemento da sequência (S_k) possui k dígitos (zeros) à direita. E fazendo k tender a ∞, percebe-se que essa série converge para zero, e acarretando em:

1 + 9 + 90 + 900 +... = 0, ou seja, 1 + ...99999 = ...00001+ ...99999 = 0.

De modo genérico, para uma dada base p, tem-se, através da conjectura abaixo, que:

- se p = 2, tem-se ...11111 = -1, isto é, 1 + ...1111 = 0. Assim, ...1111 = 0 – 1 = -1. E, analogamente,

- se p = 3, tem-se ...22222 = -1;
- se p = 4, tem-se ...33333 = -1;
- se p = 5, tem-se ...44444 = -1;
- se p = 6, tem-se ...55555 = -1;
- se p = 7, tem-se ...66666 = -1;
- se p = 8, tem-se ...77777 = -1;
- se p = 9, tem-se ...88888 = - 1;
- se p = 10, tem-se ...99999 =-1;

Como, para uma base p = 10, tem-se 1 + ...99999 = 1 + (9 + 90 + 900 +...) = 1 $+9.10^0 + 9.10 + 9.10^2 + ... = 1 + (10 – 1).10^0 + (10 – 1).10^1 + (10 – 1).10^2 + ... = 1 + (... 9.10^2 +9.10^1 +9.10^0) = 1 + (-1) = 0$.

Analogamente, utiliza-se uma base genérica p,

$1 + (p -1).p^0 + (p -1).p^1 + (p -1).p^2 + (p -1).p^3 + ... = 0$ ou ainda que $(p -1).p^0 + (p - 1).p^1 + + (p -1).p^2 + (p -1).p^3 + ... = -1$.

Desta igualdade acima, pode-se concluir que:

$[1 + (p -1).p^0] + (p -1).p^1 + (p -1).p^2 + (p -1).p^3 + ... =$

$p + (p -1).p^1 + (p -1).p^2 + (p -1).p^3 + ...=$

$[p.(1 + p - 1)] + (p - 1).p^2 + (p - 1).p^3 + ... =$

$p^2 + (p - 1).p^2 + (p - 1).p^3 + ... =$

$[p^2.(1 + p - 1)] + (p - 1).p^3 + ... =$

$p^3 + (p - 1). p^3 + ... = 0$ ou $\equiv 0(MOD\ p)$.

Assim, conclui-se que $(p - 1).p^0 + (p - 1).p^1 + + (p - 1).p^2 + (p - 1).p^3 + ... =$

$(p - 1).p^0 + (p - 1).p^1 + (p - 1).p^2 + (p - 1).p^3 + ... = 0 - 1 = - 1$.

E tomando, novamente em particular, para p = 10, tem-se:

$9.10^0 + 9.10 + 9.10^2 + ... = ...99999 = -1$.

Observações e alguns exemplos de números inteiros positivos e decimais (ou fracionários) para a base p =2:

1º) $[10101]_2 = 1.2^4 + 1.2^2 + 1.2^0 = 16 + 4 + 1 = 21$. Assim, $10101_2 = 21_{10} = 21$;

2º) $[111,1]_2 = 1.2^{-1} + 1.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2 = ½ + 1 + 2 + 4 = 7,5$.

$111,1_2 = 7,5 = 7,5_{10}$;

3º) $[100101,001011]_2 = 1.2^{-6} + 1.2^{-5} + 1.2^{-3} + 1.2^0 + 1.2^2 + 1.2^5$.

Nota-se que para números inteiros pares na base decimal, indo para a base binária, terminam em 0 (zero) e, no caso de números ímpares, terminam em 1 (um).

Observações importantes:

Os números inteiros p-ádicos são os escritos em uma base p, podendo se estender infinitamente para a esquerda;

Não existe sinal negativo, mas também não precisa.

Observa-se que a adição e a multiplicação de dois números p-ádicos são definidas usando os algoritmos de soma e multiplicação em N;

Notam-se as observações abaixo para a base p = 5:

Adição:

...30223 + ...12214 = ...42432

...30223

+ ...12214

= ...42432;

Multiplicação:

...1312X ...2041=

...1312

X...2041

...1312

...303

...00

...2

...1342

Observa-se, na adição abaixo, a presença de inverso aditivo:

...2312

...2133

...0000

Pois ...2312 é o “inverso aditivo” de ...2133.

Uma observação importante:

Multiplicação:

...1212

...1212

...2424

...212

...24

...2

...4444 = -1 (assunto já visto anteriormente).

Neste caso, nota-se que $(...1212)^2 = -1$ (=...4444).

Daí, conclui-se que, em números p-adicos, existe número x tal que $x^2 = -1$. Conforme foi visto acima, isto ocorre para x = ...1212.

Isto garante que $\sqrt{-1}$ (raiz quadrada de -1) é um número p-ádico (5-ádico).

Pois ...4444 + ...0001 = ...0000, acarretando em ...4444 = 0 – 1 = -1

Na divisão, é problemático para p =10, mas usando um número primo sempre dá certo. “É sempre possível realizar a divisão entre dois números p-ádicos, exceto a divisão por zero”.

Fazendo uma análise algébrica da série de potências de p, deve-se supor que as bases p são não negativas para as respectivas potências p^i. Convém enfatizar que é válido dizer que:

Seja p $\in$ ***N****, p > 1. Para todo n* $\in$ ***N****, existe uma expressão polinomial* em p, chamada de desenvolvimento p-ádico de n, do seguinte tipo $n = \sum_{i=0,\,t}(a_i p^i) = a_t p^t + a_{t-1} p^{t-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0$, donde $a_i \in Z$ (ou $a_i \in N$), $0 \leq a_i \leq p-1$. Este desenvolvimento é único, no seguinte sentido: se $\sum_{i=0,\,t}(a_i p^i) = \sum_{j=0,\,h}(a_j p^j)$, $0 \leq i,j \leq t = h$ e $a_t \neq 0 \neq b_h$, então t = h e $a_i = b_i$, para todo $1 \leq i \leq t=h$. Neste caso, diz-se que $(a_t a_{t-1} a_{t-2} \ldots a_1 a_0)_p$ é o desenvolvimento de n na base p. (Veja Soares, 2008. Métrica e Geometria P-ádica, p. 8).

Deve-se mostrar que para todo **a** pertencente a Z_p, existe $0.p^0 + 0.p^1 + 0.p^2 + ... = 0$, tal que a + b = 0 ou **b** = **-a** e supondo que **a** = 1, ou seja, **a =** $1 + 0.p + 0.p^2 + 0.p^3 + \ldots$ e **b =** $(\mathbf{p}-1).p^0 + (\mathbf{p}-1).p + (\mathbf{p}-1).p^2 + (\mathbf{p}-1).p^3 + \ldots$ Assim, **a + b =**$[\ldots + \mathbf{0.p^3 + 0.p^2 + 0.p + 1}] + [\ldots + (\mathbf{p}-1).p^3 + (\mathbf{p}-1).p^2 + + (\mathbf{p}-1).p + (\mathbf{p}-1)]$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad 1 \qquad 1 \qquad 1 \\
\mathbf{a + b = \ldots + 0.p^3 + 0.p^2 \quad + \quad 0.p \qquad + \ 1} \\
\underline{\ldots + (\mathbf{p} - 1).p^3 + (\mathbf{p} - 1).p^2 + (\mathbf{p} - 1).p + (\mathbf{p} - 1)} \\
\qquad\quad \ldots + (\mathbf{p}).p^3 + (\mathbf{p}).p^2 + (\mathbf{p}).p + (\mathbf{p}) \equiv 0 \ (MODp) \\
\qquad\quad \ldots + (0).p^3 + \quad (\mathbf{0}).p^2 + (\mathbf{0}).p + \quad (\mathbf{0})
\end{array}
$$

Mas sendo $\mathbf{p = 0} \equiv 0$ (MODp) em Z_p, significando que **b** é o inverso aditivo de **a** = 1 e, portanto, será assim sua denotação:$(\mathbf{p}- 1) + (\mathbf{p}- 1).p + (\mathbf{p}- 1).p^{22} + (\mathbf{p}- 1).p^3 + \ldots = -1$.

Pois, $[\ldots + (\mathbf{p} - 1) + (\mathbf{p} - 1).p + (\mathbf{p} - 1).p^{22} + (\mathbf{p} - 1).p^3] + [\mathbf{\ldots + 0.p^3 + 0.p^2 + 0.p + 1}] = \ldots + \quad (0).p^3 + \quad (\mathbf{0}).p^2 + (\mathbf{0}).p + \qquad (\mathbf{0})$. Então, b = $(\mathbf{p} -1).p^0 + (\mathbf{p} -1).p + (\mathbf{p} - 1).p^2 + (\mathbf{p} - 1).p^3 + \ldots = -1$.

Agora, sendo **a** algum inteiro p-ádico, tem-se **a =** $a_0 + a_1p^1 + a_2p^2 + a_3p^3 + \ldots$, definindo-se, assim, da seguinte forma de modo mais genérico:

T(**a**) = $(\mathbf{p}- a_0) + (\mathbf{p}- a_1).p + (\mathbf{p}- a_2).p^2 + (\mathbf{p}- a_3).p^3 + \ldots$ Vê-se que T(**a**) **+ a =** $[(\mathbf{p} - a_0) + (\mathbf{p} - a_1).p + (\mathbf{p} - a_2).p^2 + (\mathbf{p} - a_3).p^3 + \ldots] + [a_0 + a_1p^1 + a_2p^2 + a_3p^3 + \ldots = (\mathbf{p}- a_0 + a_0) + (\mathbf{p}- a_1 + a_1).p + (\mathbf{p} - a_2 + a_2).p^2 + (\mathbf{p}- a_3 + a_3).p^3 + \ldots = p + p^2 + p^3 + p^4 + \ldots \equiv \mathbf{0}$ **(MODp).** Assim sendo, tem-se T(**a**) **+ a** = 0. Então, **-a** = T(**a**) **ou T(a) = -a,** para todo **a.**

Para Nagel (2013), A expansão decimal p-ádica de $a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \ldots$ (número real) e números p-ádicos têm sua expansão p-ádica (Veja Nagel, 2013. O que são os números p-ádicos e como fazer cálculo sobre eles. P. 2).

Segundo Nagel (2013), resumidamente, pela primeira afirmação acima, é válido dizer que os números p-ádicos se escrevem de maneira única. ∑aipi (i ≥ -N) = a-Np-N + … + a0p0 + a1p1 +..., com 0 ≤ ai ≤ p-1, isto é. ai □ {0, 1, 2, ..., (p – 1)} (Veja Nagel, 2013. O que são os números p-ádicos e como fazer cálculo sobre eles. p. 2).

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Diante dos problemas apresentados acerca das dificuldades detectadas no processo de aprendizagem de matemática, sabe-se que é urgente a apresentação de propostas de superação. No âmbito acadêmico, essas propostas estão continuamente sendo refletidas, contudo, pouco se verifica a aplicação delas na prática. Logo, a defasagem que no ensino público é ainda mais problemática, ainda possui grande incidência. Quando se trata da educação de jovens e adultos, a urgência em refletir, propor e experimentar efetivamente novos métodos de ensino de matemática é ainda maior. Sabe-se que os Centros de Educação de Jovens e Adultos, nasceram com o objetivo de ofertar a esse público a possibilidade de completar os estudos e assim, não apenas terem seu direito à educação assegurado, não importando sua idade, mas, sobretudo, ter chances de uma melhor colocação no mercado de trabalho, com a conclusão de seu processo educacional formal.

Nesta pesquisa, tomou-se como exemplo os instrumentos de ensino utilizados no CEJA Professor José Neudson Braga além das oficinas pedagógicas realizadas no Centro de Educação de Jovens e Adultos (CEJA) José Walter, em Fortaleza-Ce, também destacadas neste trabalho. Sobre esses estabelecimentos de ensino, mostrou-se, também, como as aplicações foram sendo pensadas. E, tal como se apresentam, imagina-se que elas poderiam ter uma eficácia maior. Além disso, entende-se que instâncias de administração superiores não apenas pensam em métodos de superação, mas também fazem com que eles cheguem às escolas, como se viu por meio das propostas do CEJA acima citado.

Contudo, nem sempre essas aplicações estão sendo efetivadas com êxito. Muitas vezes, por falta de preparo dos professores e, outras vezes, por não haver interesse desses profissionais em utilizar ferramentas diferenciadas. Há as dificuldades institucionais, tais como sala de aulas lotadas, distribuição inadequada de tempo e espaço, entre outras. Há ainda, as dificuldades dos próprios alunos, que muitas vezes, já chegam aos espaços escolares desmotivados ou cansados. Essa falta de motivação, por vezes, decorre de outros momentos de aprendizagem desses indivíduos que se davam por meio de métodos engessados e retrógrados. Assim, eles chegam ao CEJA já com resistências ao processo de aprendizagem.

Há muitos métodos de ensino eficiente, ou seja, não são novidades, tal como os aqui discutidos por meio de diversas abordagens, são eles: a Sequência Fedathi, associada à utilização de instrumentos concretos em oficinas pedagógicas ocorridas por agendamento da coordenação. Todos eles podem mostrar-se eficientes. E não se discutiu o contrário. A intenção ao exemplificá-las nesta pesquisa, foi mostrar que não há apenas um caminho para o processo de ensino e aprendizagem. Há vários que já existem, assim como há outros que surgirão. Há também os que foram recentemente criados e experimentados, mas que devem ser ainda mais aplicados com a finalidade de não apenas difundir seu processo, mas adequá-los de acordo com as realidades dos diversos contextos sociais, é o caso da Sequência Fedathi, que, como já dito, foi desenvolvida no Ceará, no âmbito acadêmico. Esta proposta pedagógica não é melhor ou pior do que outros métodos, mas é um método que procura adequar-se às realidades das dificuldades apresentadas no Estado do Ceará.

A Sequência Fedathi, tal como foi compreendida, pode ser aplicada para o processo de ensino-aprendizagem de várias ciências, entre elas a matemática. No âmbito desta disciplina, pode ser utilizada no ensino dos mais diversos tópicos que esse saber possui. Aqui, pensou-se em discutir a utilização da Sequência Fedathi no ensino de Sistemas de Numeração, no caso, por meio da subdivisão entre números arábicos, romanos e números p-ádicos.

Por meio dos passos da Sequência Fedathi, acredita-se que numa aula introdutória sobre "Sistema de Numeração" envolvendo informações sobre "ordens, classes, leitura de números com algarismos arábicos e suas primeiras operações básicas". Como se tem a intenção de utilizar em aula prática (com uso de material concreto), as etapas da proposta metodológica da Sequência Fedathi, inicia-se, então, pela Tomada de Posição caracterizada por uma avaliação diagnóstica (teste de sondagem) colhendo, por parte do professor, os conhecimentos já vivencialmente adquiridos pelos alunos sobre Sistema de Numeração e, com destaque, o assunto a ser ensinado, como já foi citado anteriormente.

É importante enfatizar, também, trabalhos em equipe usando material dourado e QVL (Quadro Valor de Lugar). Apresenta-se para cada uma dessas equipes um problema envolvendo perguntas práticas sobre o assunto a ser explorado. Deve-se incentivar e orientar para que em cada um da equipe trabalhe com o outro e nunca contra o outro, valorizando a cooperação e a solidariedade, surgindo, a seguir, a fase da Maturação, quando ocorrem os questionamentos, apresentando exemplos e contra/exemplos.

Diante das soluções propostas apresentadas pelas equipes, enfatiza-se provocações para surgirem discussões desenvolvendo assim o senso crítico e a reflexão. Há de se destacar a clareza quanto às dúvidas a serem solucionadas com a mediação do professor. O professor-facilitador deve apresentar as respostas obtidas e esclarecer os meios utilizados para se chegar às soluções encontradas e sujeitas a análises das equipes, mesmo as insatisfatórias entre as apresentadas.

E, na fase Prova (ou quarto etapa), valoriza-se a objetividade e clareza nas atividades realizadas, destacando-se o domínio do conhecimento sobre “ordens, classes, leituras de números e as primeiras operações básicas”, com esta moderna metodologia aqui destacada, sejam rotineiramente um trabalho executado na escola em suas atividades realizadas com alunos. Ademais, pode suscitar para os docentes um meio de trabalhar com modernas, eficientes e eficazes opções de didática, tornando o professor um mediador (professor-facilitador) e esses alunos investigadores e questionadores nos modos de realizar suas atividades.

Vale salientar, que nestes dois CEJAs acima citados, têm-se percebido por meio de experiências com oficinas pedagógicas e atividades rotineiras ocorridas espontaneamente, evidentes deficiências dos alunos nos processos de aprendizagem. Logo, conclui-se poder, com a Sequência Fedathi, potencializar o aprendizado desses estudantes e contribuir na superação dessas deficiências cognitivas, no que tange à Matemática.

Foram feitas avaliações das oficinas pedagógicas, experimentalmente, realizadas nos CEJAs. Analisou-se no final dessas experiências pedagógicas que, embora o resultado com estas práticas experimentais tenha sido positivo, ainda houve resistência por parte de alguns alunos mais conservadores, por já terem se adaptado aos métodos mais conservadores e tradicionais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Identificar: por meio da identificação destes recursos, foi possível verificar o estudo sobre Sistema de Numeração e permitir aos alunos um melhor domínio deste assunto, de forma prazerosa e significativa, minimizando, inclusive, as dificuldades existentes na realização das operações básicas.

Conhecer: Através conhecimento sobre as aplicações da proposta pedagógica Sequência Fedathi no sentido de maximizar a eficiência do processo de ensino/aprendizagem para alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), que permitiu a esse público de alunos, exercitar tais práticas dessa moderna metodologia, embora tenham surgido alguma resistência, tanto dos discentes quanto de colegas professores, por manterem uma postura mais conservadora do ensino tradicional.

Descrever: analisando-se uma descrição sobre a Sequência Fedathi, como proposta pedagógica, neste processo de ensino e aprendizagem aplicada sobre conceitos de Sistema de Numeração, em atividades realizadas por alunos da EJA, envolvendo leituras de números, conhecimentos sobre ordens, classes, valores posicionais (absolutos e relativos) e as primeiras operações básicas, inclusive as conhecidas tabuadas, manuseando com o auxílio de materiais manipulativos, como material dourado, ábacos (Q. V. L. : quadro valor de lugar) e cálculo digital – usando os dedos das mãos.

Frente aos estudos bibliográficos, compreende-se que a Sequência Fedathi, enquanto ferramenta de ensino para o Sistema de Numeração é uma proposta metodológico-pedagógica, que amplia o leque de possibilidades para o aprendizado de forma mais eficaz. Dessa forma, percebeu-se que a aplicação dessa ferramenta no ato de ensinar Matemática (Sistema de Numeração) tornará este trabalho mais eficiente e eficaz, proporcionando conjuntamente com os alunos do CEJA José Neudson Braga, uma experiência formativa e de aprendizagem mais satisfatória. Isto é muito gratificante para um profissional da educação que exerce sua profissão com ética, respeito e dedicação, principalmente, usando essa prática educativa e formadora. Esta proposta metodológica, juntamente com o apoio constituído de acessórios composto de materiais concretos existentes no CEJA, acima citado, contribuirá bastante para esta prática pedagógica. E, apesar do ensino tradicional, continuará sendo bastante utilizado neste CEJA, ainda é de grande valia, pois nenhuma pedagogia se basta a si própria.

Vale ressaltar que, se inspirando nas Abordagens Pedagógicas, tais como as da Educação Tradicional, Comportamental, Humanista, Cognitivista e Sociocultural, acrescidas do uso desse inovador material pedagógico, a Sequência Fedathi, composta de suas quatro etapas, que são a Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova, tem-se objetividade e clareza nas atividades, o domínio do conhecimento sobre o assunto explorado, com destaque, Sistema de Numeração, que compreende ordens, classes, leituras de números, as primeiras operações básicas e valores posicionais (relativos e absolutos), auxiliado por essa gama de instrumentos concreto-pedagógicos, utilizados no CEJA José Neudson Braga, com aceitação motivadora por parte dos alunos e dos professores. Assim sendo, enfatiza-se o uso de um material, como material dourado, QVL (quadro valor de lugar) e outros utilizados no estudo de Sistemas de Numeração. Destaca-se, também, que é promissor usar estes materiais seguindo a orientação da proposta pedagógica da Sequência Fedathi. Ademais, ressalta também, um tirocínio adquirido em minha experiência profissional. Dessa forma, há de reforçar a aplicabilidade da Sequência Fedathi acrescida de minha experiência em utilizar materiais concretos em Centros de Estudos para Jovens e Adultos (CEJA) e sendo fundamentada a partir de uma experiência real. Ademais, com esta experiência de vida profissional e inspirando-se (e utilizando-se) os parâmetros sugeridos pelos inovadores métodos de ensino e abordagens pedagógicas, tem-se, seguramente, promissores resultados proporcionando, aos alunos, neste processo de ensino, uma aprendizagem prazerosa e significativa, induzindo-os a construírem sua própria aprendizagem. Tal construção pode ser obtida por meio de QVL e material dourado (no estudo de Sistemas de Numeração), composição de perímetros e áreas por meio de quadradinhos de cartolina, compor sólidos geométricos com palitos e massa de modelar etc.

Refletindo e analisando o que anteriormente foi destacado e sobre o que esta pesquisa trouxe como possibilidades de se aplicar no processo de ensino/aprendizagem, tem-se que a Sequência Fedathi se mostra como instrumento didático com possibilidades de contribuir para o processo de ensinar e aprender de forma mais eficiente e eficaz.

Vale lembrar que o lugar do professor, como detentor do saber, com um ensino descontextualizado, está cada vez mais restrito. Além disso, diante do que está sendo organizado, tornam tais atividades cada vez mais efetivamente produtivas.

Espera-se que este trabalho venha contribuir com novas pesquisas, com a intenção de se expandir, principalmente, no que diz respeito a esses sistemas advindos de números p-ádicos - de grande importância histórica e útil à humanidade.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. de C. **Um mito da história da matemática.** São Paulo: EdUNESP, 2003.

_________. **Um mito da história da matemática.** Curitiba:EdPUCPR,2013.

ALVES, R. de O**.** Inéditos-viáveis constituídos por professoras que ensinam matemática nos anos iniciais da EJA. In: **Educação matemática na contemporaneidade**: desafios e possibilidades. São Paulo:[s.n],2016.

BESERRA, V.; BARRETO, M. O. Trajetória da educação de jovens e adultos: histórico no Brasil, perspectivas atuais e conscientização na alfabetização de adultos. **Cairu em Revista**, São Paulo, v.3, n. 4, p.164-190, jun. 2014.

BORGES NETO, H.; DIAS, A. M. I. **De como os pastores ensinaram a operar...ou e assim:** a história se repete (os algarismos romanos revisitados). Fortaleza: EdUFC, 2001.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **PCN+**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: SEMT, 2002.

BRUNO, M. **Educação de jovens e adultos é desafio no Ceará**. Fortaleza:[s.n],2009. Disponível em: <http://diariodonordeste.verdesmares.com.br/cadernos/cidade/educacao-de-jovens-e-adultos-e-desafio-no-ce-1.57150>. Acesso em: 19 fev. 2017.

BRASIL. Presidência da República casa Civil, Subchefia para Assuntos Jurídicos. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm>. Acesso em: 21 fev. 2017.

CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática. **Rev. Psicopedagogia**, São Paulo, v. 27, n. 83, p. 298-309, jun.2015.

DIÁRIO DE SANTA MARIA. **Por que 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender o esperado em matemática?** Santa Maria:[s.n], 2012. Disponível em: <http://www.clicrbs.com.br/dsm/rs/impressa/4,38,3931455,20690>. Acesso em: 02 dez. 2013.

FONSECA,M.C.F.R. Lembranças da matemática escolar: a constituição dos alunos da EJA como sujeitos da aprendizagem. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.27,n.2, p.339-354, jul.2001. Disponível em:< http://www.sielo.br/sielo.php?script=sci_S1517-970220010002000&ing=pt&nrm=iso>. Acesso em:28 set.2017.

GONÇALVES, M. D. S. História das ideias pedagógicas no Brasil. **Cad. Pesqui.,** São Paulo, v.39, n.136, p.34-39, jan. 2009.

IFRAH, G. **Os números:** história de uma grande invenção**.** 4.ed. São Paulo: Globo, 1992.

JANUARIO, G.; FREITAS, A. V.; LIMA, K. Pesquisas e documentos curriculares no âmbito da educação matemática de jovens e adultos. **Bolema,** Rio Claro, v. 28, n. 49, p.536-556, ago. 2014.

LEITE, C. A.; MONTEIRO, R. A. **Sistema de numeração**. Osasco: FIEO, 2005.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Nacional. Brasília:MEC, 1996.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino:** as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

NAGEL, E. **O que são os números p-ádicos e como fazer cálculos sobre eles**. Rio de Janeiro: EdUFRJ, 2013.

NEVES, S. P.; FARIA, L. Auto-eficácia acadêmica e atribuições causais em Português e Matemática. **Análise Psicológica**, Lisboa, v.4, n.25, p.635-652, jun.2016. Disponível em: <httppedagogiaaopedaletra.com/abordagens-pedagogicas-de-ensino-tradicional-comportamentalista-humanista-cognitivista-sociocultural>. Acesso em: 19 abr. 2017.

PINHEIRO, N. V. L.; VITALLE, M. S. de S. Quando o ensino-aprendizagem de Matemática se torna um desafio. **Adolescência & Saúde**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 3, p. 65-71, set.2012.

SILVA, H. T. R. da; MOURA, T. M. S. Educação de jovens e adultos – EJA: desafios e práticas pedagógicas. **Interdisciplinar: Revista Eletrônica da Univar**, São Paulo,v. 3, n. 9, p.31-36, jul. 2013.

SANTOS, P. F. dos; RODRIGUES, V. C. S. As duas faces da moeda: uma conversa com professores de matemática e educandos da EJA. In: **Educação matemática na contemporaneidade**: desafios e possibilidades. São Paulo:[s.n],2016.

SILVA, J. J. da. Objetos intencionais e existência objetiva**. Trans/Form/Ação**, São Paulo, v. 14, n.6,p.155-164, out.1991.

SILVEIRA NETO, J. C. da; ANDRADE, M. C. N. Os jovens e os adultos que fogem da escola. A escola que expulsa os jovens e os adultos: reflexões sobre o abandono na EJA**. Revista Tempo e Espaços em Educação**, Rio de Janeiro, v.5, n.8, p.193-206, nov.2010.

SOARES, J. S. **O professor de matemática em início de carreira na EJA:** dificuldades e dilemas. São Paulo:[s.n],2016.

SOARES JÚNIOR, C. A**. Métrica e Geometria P-ádica**. Cuiabá: EdUFMT, 2008.

SOUSA et. al (Org.) **Sequência FEDATHI:** uma proposta pedagógica para o ensino de ciências e matemática. Fortaleza: EdUFC, 2013.

SOUSA, F. E. E. de; BORGES NETO, H. **Sequência Fedathi:** os algarismos romanos revisitados na formação contínua de professores de matemática**.** Fortaleza: EdUFC, 2001.