PERMUTAÇÃO SIMPLES: REFLEXÕES DE ENSINO À LUZ DA SEQUÊNCIA FEDATHI

José Airton de Oliveira Faustino[1]
Carlos Henrique Delmiro de Araújo[2]
Daniel Brandão Menezes[3]
Hermínio Borges Neto[4]

Resumo:
O presente estudo representa uma pesquisa na área de Educação Matemática com ênfase no conteúdo de permutações no ensino de combinatória, sob a perspectiva da proposta metodológica Sequência Fedathi (SF), que tem sido disseminada em instituições públicas e privadas, no âmbito estadual e federal. Destacam-se, ainda como justificativa para o estudo, as demandas surgidas em encontros de pesquisas realizados no Laboratório de Pesquisa Multimeios da Universidade Federal do Ceará sobre reflexões acerca da aplicação da SF em sala de aula. O objetivo desta pesquisa foi investigar os impactos no comportamento dos alunos quando participaram de uma sessão didática com aplicação da SF. Utilizou-se a SF como metodologia de ensino e, para uma análise teórica, foi realizado uma revisão de literatura de obras brasileiras no contexto do ensino de matemática. Por fim, foi possível observar como a turma se comportou perante à utilização da SF pelo professor e de que forma o aluno possa vir a construir seu próprio conhecimento por meio de uma participação ativa.

Palavras-chave: Sequência Fedathi; Combinatória; Permutação Simples; Prática de ensino.

[1] Universidade Federal do Ceará: airton@multimeios.ufc.br
[2] Laboratório Multimeios: delmiro@multimeios.ufc.br
[3] Universiadade Estadual Vale do Acaraú: danielbrandao@multimeios.ufc.br
[4] Universidade Federal do Ceará: herminio@multimeio.ufc.br

1. Introdução

Este trabalho foi desenvolvido a partir das vivências de um dos autores em lecionar o conteúdo de Permutação Simples na escola de educação profissional Dona Creusa do Carmo Rocha do Estado do Ceará. Após algumas observações, percebeu-se a dificuldade que os alunos enfrentavam em entender o termo fatorial e como podem ser formados subconjuntos trocando a posição dos elementos do conjunto.

Diante do ensino de Combinatória, em que está inserido o conteúdo Permutações Simples, Borba e Azevedo (2010) trabalharam com o software Diagramas de Árbol e sugerem sua utilização em sala de aula no intuito de oportunizarem aos alunos a manipulação de combinações em formas de árvores. As autoras Borba, Pessoa e Rocha (2013) investigaram como crianças, entre 9 e 12 anos, resolveram problemas de combinatória, compreendem o assunto abordado e qual a perspectiva de professores de séries iniciais sobre o conteúdo matemático trabalhado. Uma análise do conhecimento dos professores das séries iniciais sobre a utilização do Princípio Fundametal da Contagem – PFC na resolução de problemas é realizado por Lima e Borba (2015).

Os três trabalhados acima citados compreendem que, apesar da aplicação da pesquisa ter sido feito, ora em crianças, ora em professores, é no Ensino Médio que o estudo sobre Combinatória, em particular Permutações Simples, é realmente sistematizado. Por outro lado, tais pesquisas se preocuparam com o modo que o aluno entende o assunto e aplica na resolução de problemas e, também, a respeito da visão que professores das séries iniciais possuem do assunto no currículo. Com isso, notou-se a possibilidade de investigar a ação docente em sala de aula com o intuito de orientar o professor a usar uma estratégia de ensino para esse conteúdo. Diante disso, relatou-se uma experiência sobre a postura que um professor em sala de aula de acordo com a proposta metodológica Sequência Fedathi – SF para trabalhar o conceito de Permutação Simples.

Esse artigo possibilita uma alternativa de ensino de Permutações Simples sob a perspectiva da SF e uma reflexão sobre a prática docente. Embora já existam pesquisas utilizando a SF como proposta de ensino, percebe-se a necessidade de mais estudos a respeito da aplicabilidade de tal método em sala de aula.

A importância de ter o saber sobre o conteúdo “permutações” se dá pelo fato de que tal raciocínio possa auxiliar na resolução de anagramas, preenchimento de cartelas de loteria, organização das máquinas de costura de uma fábrica de roupas, maneiras de vestir um número de calças e camisas sem repetição de peças, ordenar casais homem-mulher e na formulação de placas de automóveis. Essas são algumas situações em que o conhecimento de permutações auxilia na resolução de problemas.

O trabalho relata uma maneira de abordar o assunto matemático Permutações Simples, em que o aluno possa manupular o objeto e sintetize, com a mediação do professor, o conceito que foi abordado.

Utilizou-se um levantamento bibliográfico de obras brasileiras do ensino médio – Hazzan (2004), Morgado et al. (2006), Iezzi et al. (2016) e Dante (2016) – no intuito de compreender se o livro didático pode influenciar a prática docente. As sessões didáticas foram realizadas em 18/09/2018 e em 18/02/2019, na Escola Estadual de Educação Profissional Dona Creusa do Carmo Rocha e na Universidade Federal do Ceará – UFC, respectivamente.

Na primeira aplicação, houve uma tentativa de aplicação da SF, porém, ocorreram pontos da metodologia que o docente não utilizou e que acarretaram em entraves por parte dos estudantes. Em contrapartida, na segunda aplicação, utilizando a SF de maneira coerente, houve uma maior participação e debates por parte dos discentes.

O artigo é dividido em sessões que comentam sobre a SF como metodologia de ensino, um levantamento de livros voltados para o Ensino Médio que abordam o assunto Permutações Simples e duas descrições de aulas realizadas.

2. Sequência Fedathi: metodologia de ensino

A sequência Fedathi é uma proposta metodológica que transpõe o método científico para o ensino (BORGES NETO, 2016). Sua formalização, contudo, foi realizada na década de 90 no Laboatório de Pesquisa Multimeios, que se encontra na Faculdade de Educação – FACED da UFC. O desenvolvedor da metodologia foi o professor Dr. Hermínio Borges Neto e sua ideia inicial era colocar o estudante de matemática, em sala de aula, no papel de um pesquisador matemático. Esse intuito é oriundo de sua formação acadêmica, matemática pura, tanto a nível de mestrado, como de doutorado, e também por acreditar que a experimentação do matemático, com a valorização do erro, seja eficaz no processo de aprendizagem do ser humano.

Seguindo o modelo geral de sessão didática proposto por Borges Neto (2018), a SF possui análise ambiental, análise teórica e vivência.

Na análise ambiental, o professor necessita saber qual é a turma que conduzirá a aula, qual o conteúdo será trabalhado, quanto tempo demandará a sessão didática e quais materiais serão necessários no decorrer da aula.

No momento da análise teórica, o conhecimento esperado que o aluno apreenda é definido como o objetivo da sessão didática. Os conhecimentos prévios necessários para a participação efetiva é chamado de plateau. E que em uma aula baseada na SF, os materiais devem ter seu uso justificado.

A vivência na sala de aula é a aplicação *in locu* da SF que deve ser planejado de forma bem arrojada, pois é composto pelo nivelamento do plateau, e as quatro fases da SF que são: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

O nivelamento do plateau faz um exíguo exercício com a finalidade de os alunos relembrarem seus conhecimentos necessários para a realização das atividades futuras na aula.

A tomada de posição é caracterizada, principalmente, pela apresentação do problema para a turma. Ressalta-se que os problemas abordados nesta fase da SF devem ser generalizáveis e como afirma Menezes (2018, p. 43): "É uma situação generalizável, ou seja, que seu modo de executar possa também solucionar outras inúmeras situações."

Na maturação, o aluno coloca a "mão na massa", isto é, cria hipóteses, experimenta, erra, manipula, acerta, falha para conseguir chegar em um ou mais resultados possíveis para o problema apresentado na tomada de posição do professor. Para as dúvidas dos alunos, o docente não deve responder de imediato o que foi pedido, mas sim indagar com uma nova pergunta ou contraexemplo com o intuito de realizar a mediação para que o discente possa refletir sobre o assunto.

A terceira fase da vivência é denominada solução, de caráter não exclusivo, ou seja, o aluno debate com o professor e seus colegas de turma o resultado encontrado. Além disso, o professor realiza uma arguição com os alunos para entender quais foram os pensamento aflorados no caminho de resolução. Tais debates e arguições são essenciais para dar o pontapé à última fase da SF.

O momento em que o professor apresenta a sistematização das soluções dos alunos, sintetiza e organiza de maneira formal o conteúdo abordado na tomada de posição, é chamado de prova. A necessidade do problema generalizável na tomada de posição se dá pelo fato de que na prova, o professor generaliza o algoritmo, ou a maneira de resolução do problema, para inúmeros outros casos.

Apesar de conter etapas (análise ambiental, análise teórica, vivência) e fases (tomada de posição, maturação e prova), a SF não se resume a estes passos. Princípios relevantes da SF se dão a todo o momento na aplicação da sessão didática. São denominados de: pedagogia mão no bolso, situação adidática, contraexemplo, perguntas, mediação, acordo didático e concepção do erro. Outro ponto de diferenciação da SF para as demais metodologias de ensino é o foco no professor já que a sequência visa a forma com que ele atuará em sala de aula e, como consequência, sua influência na aprendizagem do aluno. Com isso, percebe-se que a SF difere da heurística de Polya (1995) no fato de a primeira ter seu foco na postura do professor, enquanto que na segunda o foco é o aluno. Assim, pode-se utilizar o método de Polya nas fases da maturação e solução como auxílio na execução da Sequência Fedathi.

3. Permutação nos livros

Em Hazzan (2004, p.16), primeiramente, o autor define o que é um arranjo como: “Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r $(1 \leq r \leq m)$ a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M, todos distintos.” A partir daí, ele define uma fórmula para arranjos e mostra um exemplo de aplicação de arranjos para depois definir uma permutação como um arranjo em que o número de elementos do conjunto é o mesmo número de elementos que serão arrnjados, isto é, $m = r$, onde m é o número de elementos do conjunto e r é o número de elementos a serem arranjados. Em seguida, ele traz a fórmula de como calcular uma permutação e exemplos de aplicação da mesma.

No livro de Dante (2016), a abordagem segue com a defininição de Permutação Simples como sendo as várias formas de ordenar todos os elementos de um mesmo conjunto. Com isso, ele apresenta um exemplo de aplicação e o resolve usando o diagrama de árvores, para depois definir uma fórmula para o número de Permutações Simples. Essa fórmula é introduzida após o autor generalizar o problema.

Essa abordagem traz alguns princípios da SF, como a tomada de posição feita por meio do exemplo generalizável e a sistematização do conteúdo ao final da solução do autor. Porém, falta a fase da maturação e da solução onde são trabalhados o erro e a criatividade do aluno, por exemplo. Para introduzir essas fases, o autor poderia ter levantado algumas perguntas a fim de realizar a mediação, com o intuito de gerar a reflexão do aluno sobre o problema proposto.

Em Iezzi et al.(2016), podemos observar que o conteúdo é introduzido mediante apresentação de um problema seguido de sua resolução, usando como método de resolução o Princípio Fundamental da Contagem – PFC, cujo os autores afirmam ser um dos métodos mais eficazes para a resolução de problemas de contagem, e também para definir uma fórmula para Permutação Simples.

A abordagem de Permutações Simples em Morgado et al. (2006), se dá pela introdução através de um problema que parte do geral para o particular. Logo em seguida, é resolvido, e depois os autores definem uma fórmula para a sistematização das ideias.

4. Primeira aplicação

A aula foi planejada de acordo com os moldes da SF, orientando as etapas conforme o modelo geral em Borges Neto (2018). Essa sugestão de elaboração de uma sessão didática é vivenciada pelo docente pela análise ambiental, análise teórica, vivência e referências, como já mencionado.

O público da sessão didática foram alunos de uma turma do segundo ano do ensino médio da Escola Estadual de Educação Profissional Dona Creusa do Carmo Rocha e tinha como objetivo fazer com que os discentes compreendessem o conceito de Permutação Simples e uma possível aplicabilidade no cotidiano.

O conhecimento prévio necessário para essa nova aprendizagem é a noção da operação de multiplicação. Ressalta-se que o professor não fez o nivelamento do plateau com a turma, pois já tinha ciência do conhecimento da turma em relação à operação de multiplicação.

Na tomada de posição foi apresentado o seguinte problema: “Quantas filas podemos formar com n pessoas?”

Após a tomada de posição, os alunos, incialmente, não tiveram a ideia de trabalhar com casos particulares. Por outro lado, especularam trabalhar diretamente com a variável, o que resultou em “chutes” para deduzir uma fórmula, porém sem justificativas lógicas. Nesse ponto percebe-se a primeira falha do professor em relação a SF, pois o docente acreditava que o problema deveria ser generalizado,enquanto o que acontece em uma boa execução da metodologia é que o problema deve ser generalizável. Perante essa situação, o docente iniciou a sua mediação a partir das demandas discentes por meio de perguntas no intuito de incentivar a encontrar uma solução. As perguntas foram: (i) “o que é preciso para formar uma fila?”, (ii) “qual a quantidade mínima de pessoas para formar uma fila?”, (iii) “existe alguma forma de simplificar este problema?”, (iv) “quantas filas podemos formar com uma pessoa?”, (v) “e com duas?” e (vi) “com três?”.

Como resposta para a (i), foi dito que precisamos de pessoas para formar uma fila; no caso de (ii) houve um consenso, entre os discentes, de que é necessário duas pessoas para formar uma fila, pois no senso comum é preciso mais de uma pessoa para se ter uma fila. Porém, eles ficaram surpresos quando o professor lhes disse que basta uma pessoa para se ter uma fila. Para (iii), foi afirmado pelos discentes que seria melhor se o n fosse substituído por um número. Diante dessa reflexão dos alunos, o professor começou a fazer as perguntas (iv), (v) e (vi).

As respostas da turma, na SF, estão ligadas a fase da solução. Para (iv), (v) e (vi), eles fizeram a mesma experimentação, isto é, utilizaram os colegas para montar a fila, obtendo as respostas satisfatórias para cada indagação. Mediante essas respostas, o professor fez, novamente, a pergunta da tomada de posição que era: “Quantas filas podemos formar com n pessoas?”

Porém, mesmo tendo refletido para os casos particulares, a maior parte da turma não conseguiu fazer a generalização do problema. Mas um deles conseguiu chegar ao resultado esperado pelo professor, que era o produto de n pelos seus antecessores, ou seja, $n.(n-1).\cdots.3.2.1$.

Diante de tal resposta generalizada do aluno, o professor iniciou a fase denominada prova, em que sistematizou o conteúdo abordado através da definição formal que é encontrada no livro didático.

De acordo com a SF, o seu mal uso concentrou-se na escolha do problema apresentado na tomada de posição que foi generalizado e não generalizável, e o fato de o professor não ter conseguido envolver a turma na resolução do problema. A ideia de problemas generalizáveis se dá pelo fato de serem manipuláveis, o que atribui uma maior interação da turma com o problema, conduzindo à fase de maturação.

5. Segunda aplicação

Em outro momento, os autores deste relato participaram de uma sessão didática na Faculdade de Educação – UFC, na disciplina intitulada “Sequência Fedathi: na pesquisa e no ensino”, disciplina obrigatória a nível de mestrado e doutorado, referente ao semestre 2019.1. A sessão trabalhou, novamente, a definição da Permutação Simples.

Como plateau da turma, o professor tinha em mente que todos os presentes sabiam a operação multiplicação, e com isso, não necessitou de um nivelamento de plateau. Porém, foi definido que bastava uma pessoa para formar uma fila.

Partindo para a vivência, o professor teve como tomada de posição o seguinte problema: com duas pessoas são possíveis formar quantas filas? A turma, de imediato, respondeu que apenas duas filas. Diante disso, o professor convidou duas alunas para ficarem na frente da turma e exemplificar como elas poderiam formar duas filas. Perante a certeza da turma, o professor perguntou se permutando a posição das duas alunas não poderia formar infinitas filas. Com isso, a turma definiu que não poderia ocorrer repetição de filas.

Em seguida, o professor fez um novo questionamento: e com três pessoas, quantas filas são possíveis de formar? Novamente, a maioria da turma foi convicta em responder que poderiam formar, neste caso, 6 filas. No entanto, uma discente respondeu que poderia formar 8 filas, pois o caso geral seria 2 elevado ao número de pessoas. O contraexemplo utilizado foi que com duas pessoas não seriam quatro filas, isto é, o resultado não é 2 elevado a 2.

Dando continuidade a sessão didática, o professor indagou a turma da seguinte forma: e com quatro pessoas, teremos quantas filas? Este foi o momento de maior discussão entre os alunos. Até então, com duas ou três pessoas, os discentes tiveram facilidade, em geral, para manipular e encontrar a solução do problema. Porém, com quatro pessoas ocorreram diversas divergências em respostas. Alguns alunos responderam que bastava multiplicar o número de pessoas atual com o número de pessoas que utilizou no caso anterior, ou seja, para quatro pessoas bastava multiplicar 4 por 3, que resultaria em 12 filas. Diante de um debate intenso da turma, o professor pediu a palavra e os indagou novamente, questionando-os que se fixasse uma pessoa, teria o grupo de 3, e com 3 pessoas, todos saberiam responder. Com tal mediação e reflexições, a turma chegou no consenso de que com 4 pessoas seria possível formar 24 filas.

Antes mesmo de uma nova pergunta do professor, a turma deduziu que bastava, então, multiplicar o número de pessoas atual pelo resultado anterior de filas. Por exemplo, tomando duas pessoas, tínhamos o G2, com três pessoas o G3, com quatro pessoas, o G4, e assim por diante. Em G2, vimos que podemos formar 2 filas. No raciocínio da turma, em G3, basta multiplicar 3 (número de pessoas) pelo resultado de G2, ou seja, 3 vezes 2 que resulta em 6. Para G4, 4 (número de pessoas) vezes 6 (número de filas possíveis do caso anterior). Isto caracterizou a fase de solução, na SF.

Por fim, na prova, utilizando o último raciocínio exposto pela turma, o professor afirmou que para o Gn, isto é, para n pessoas, bastava fazer n vezes $\mathrm{G}(\mathrm{n}-1)$. Como $\mathrm{G}(\mathrm{n}-1)$ é igual a $(\mathrm{n}-1)$ vezes $\mathrm{G}(\mathrm{n}-2)$, e seguindo por indução, concluíram o caso geral $Gn = 2.3.\cdots.(n-1).n = n.(n-1).\cdots.3.2.1 = n!$

6. Considerações Finais

O trabalho, apesar de utilizar duas sessões didáticas, não visa estabelecer comparações, pois conforme explicitado na primeira sessão, o erro primordial na possível utilização da SF foi de que na tomada de posição o professor não optou por um problema generalizável, e sim partiu do caso geral.

Vale ressaltar, que o professor da primeira sessão didática sofre grande influência do livro de Morgado et al (2006), pois tomou o problema contido no livro em sua aula. O que podemos constar que o livro didático possui influência na ação docente.

Por outro lado, na segunda sessão didática, pôde-se perceber que o professor não se preocupou se estava enquadrado em alguma fase da vivência. Pelo contrário, conduziu a aula de acordo com os princípios da SF, e com isso, de maneira natural foi percebendo a fase em que a aula se encontrava.

Enfatizamos que a SF, exige sim, que o professor passe por todas as fases da vivência, sem pulos, como por exemplo, da tomada de posição para a solução, ou prova. No entanto, é comum, o professor que se apodera da SF em sua aula, recorrer a retornar a uma fase anterior, como por exemplo, na solução ocorrer a volta para a maturação.

Por fim, esperamos ter contribuído para a comunidade Educação Matemática no tocante de uma aplicação de metodologia no ensino de origem brasileira, em especial, cearense.

7. Referências

BORBA, R. E. S. R.; AZEVEDO, J. Construindo Árvores de Possibilidades para Compreensão de Relações Combinatórias. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 31, n. 31, p.24-32, nov. 2010. Trimestral. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr/article/view/191/182>. Acesso em: 16 mar. 2019.

BORBA, R. E. S. R.; PESSOA, C. A. S.; ROCHA, C. A. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 15, n. 4, p.895-908, nov. 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/17752/pdf>. Acesso em: 16 mar. 2019.

BORGES NETO, H. **Uma proposta lógico-construtiva-dedutiva para o ensino de Matemática.** 2016. 28f. Tese (Ascenção a Professor Titular) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

BORGES NETO, H. (Org). **Sequência Fedathi:** fundamentos. v.3. Curitiba: CRV, 2018.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: ática, 2016. 2 v.

POLYA, G. **A Arfe de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar:** combinatória, probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004. 5 v.

IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. 2 v.

LIMA, A. P. B.; BORBA, R. E. S. R.. Reconhecendo o Princípio Fundamental da Contagem como Estratégia na Resolução de Problemas Combinatórios. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 17, n. 4, p. 694-714, nov. 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/22410/pdf>. Acesso em: 16 mar. 2019.

MENEZES, D. B. **O Ensino do Cálculo Diferecial e Integral na Perspectiva da Sequência Fedathi:** Caracterização do Comportamento de um Bom Professor. 2018. 127 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/37124>. Acesso em: 17 mar. 2019.

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006. 343 p.