GRUPO FEDATHI

Grupo de Pesquisa em Educação Matemática

Cadernos de Aritmética

FRAÇÕES

Cleiton B. Vasconcelos*
Gerardo O. Barbosa**

---

* Cleiton Batista Vasconcelos é Mestre em Matemática, Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Ceará -UECE- , e responsável pela área de Matemática do Programa Cearense de Educação Básica da UECE.

** Gerardo Oliveira Barbosa é Mestrando em Educação, Professor dos Departamentos de Matemática das Universidades Estadual do Ceará e Federal do Ceará.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de fração é um conceito bastante antigo. Os babilônios e os egípcios, cerca de 2.000 anos antes de Cristo já utilizavam frações nos seus cálculos. Nas escolas romanas, boa parte do estudo da aritmética era destinado ao cálculo com frações .

Apesar de muito importante e útil (as frações surgem com bastante frequência no dia à dia), este conceito não vem sendo trabalhado de forma adequada, nas escolas.

Boa parte dos professores, por desconhecer que este conceito requer da criança a um raciocínio mais complexo do que os já estudados, acha que é melhor partir logo para problemas e/ou operações com frações, deixando o conceito mal trabalhado e, conseqüentemente, mal compreendido.

Alguns outros fatores também têm contribuído do para o insucesso do ensino das frações. Entre eles podemos destacar:

- na maioria das escolas o estudo das frações já parte da representação no papel, ou seja, não se preocupam com a fase concreta;

- o professor dá mais importância a nomes, tais como, numerador, denominador, traço de fração, etc., do que aos conceitos;

- são introduzidos conceitos que não apresentam muita importância para o momento, tais como o de mínimo múltiplo comum (m.m.c.), fração própria, fração imprópria, fração aparente, entre outros;

- são apresentadas várias regras para operar com frações, sem que a criança a compreenda o que está fazendo;

- o professor alegando falta de tempo para trabalhar melhor o conceito ou pensando que as criança já sabem o que é uma fração, começa o ensino das operações ou a proposição de problemas;

- o assunto é estudado de forma desvinculada dos assuntos anteriores.

Este texto tem como objetivo mostrar que tais problemas podem ser superados ou, pelo menos, minimizados.

2. GRANDEZAS: DISCRETAS E CONTÍNUAS

É comum, quando trabalhamos com frações, falarmos em grandezas discretas e contínuas. As coleções de tampinhas de refrigerante, de palitos de picolé , de bilas (bolas de gude) são grandezas discretas, enquanto a areia, a água, o chocolate são grandezas contínuas.

Mas o que é mesmo grandeza contínua ou grandeza discreta?

Começaremos definindo grandeza.

Uma definição bastante razoável é a que segue:

"grandeza é tudo aquilo ao qual podemos associar um valor numérico".

Se o valor associado for resultado de uma contagem dizemos que a grandeza é **discreta*.*** Caso contrário, dizemos que a grandeza é **contínua.**

Convém assinalar que cada um dos conceitos abordados no texto pode e deve ser explorado com grandezas discretas (tampas de refrigerante ou palitos de picolé , por exemplo), e com grandezas contínuas (água ou areia, em copos descartáveis, por exemplo).

3. CONCEITO DE FRAÇÃO

3.1 RETOMANDO O CONCEITO DE METADE

Um dos conceitos que a maioria dos alunos já conhece e que pode, se bem trabalhado, levar ao conceito de fração, é o conceito de metade.

Lembre que o aluno já possui alguma noção do conceito de metade, um vez que todos já ouviram falar em meio pão, meio litro de leite, meia lata de creme de leite, meio copo de leite, um metro e meio, etc.

Lembre ainda que, paralelamente ao estudo do conceito de dobro de um número inteiro, o professor pode e deve ter trabalhado o conceito de metade desse número (multiplicar por 2 e dividir por 2).

E o que é mesmo METADE?

Introduziremos o conceito de metade, através do uso de líquidos.

O uso da água é bastante apropriado para esse momento uma vez que, além de ser material de fácil aquisição, com o uso da água em copos descartáveis, fica mais fácil a divisão em partes iguais que, como veremos é um dos princípios pios fundamentais para a existência de frações.

Como proceder?

Pega-se um copo cheio de água e outros dois (iguais) vazios. Em seguida pede-se ao aluno para dividir a água do copo cheio pelos dois copos vazios, obedecendo às seguintes condições :

1. não pode sobrar água no copo que estava cheio;

2. os dois copos que estavam vazios devem ficar com a mesma quantidade de água;

3. se juntarmos a água dos dois copos, no copo que agora está vazio, devemos ter a mesma quantidade inicial.

OBSERVAÇÃO: Estas condições são três dos princípios explicitados por Carraher, a partir da teoria de Piaget, para que se tenha o conceito de fração.

Essa mesma experiência deve ser repetida várias vezes até o aluno concluir que:

metade do copo d'água é cada uma das duas partes iguais em que foi dividido o copo d'água.

cada um dos dois copos com água representa metade do copo d'água.

Pode-se então o trabalhar o mesmo conceito com outras grandezas contínuas como **uma folha de papel, um pedaço de cordão, areia, etc.**

A partir de experiência dessa natureza, repetidas várias vezes, chega-se ao conceito de metade. Isto é conclui-se que

metade de algo é cada uma das duas partes iguais em que dividimos esse algo.

Esse algo é chamado de **todo.**

Cada uma de suas duas metades é representada por **1/2**, que se lê :

um meio ou metade.

Deve-se agora trabalhar o conceito de metade com grandezas discretas.

Por exemplo, tomemos uma coleção de 10 tampinhas de refrigerante e procuremos encontrar a metade dessa coleção.

O todo agora é formado pelas 10 tampinhas e para encontrarmos sua metade basta separar essas 10 tampinhas em duas partes iguais, como foi feito anteriormente.

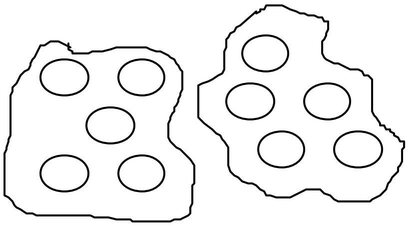


FIG. 1

Assim, cada coleção de 5 tampinhas representa metade da coleção de 10 tampinhas ou, simplesmente, metade das 10 tampinhas.
E se fosse uma coleção de 10 palitos de picolé?

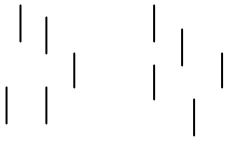


FIG.2

Ora, para encontrarmos a metade de um todo basta separarmos esse todo em duas partes iguais. Assim, por exemplo:

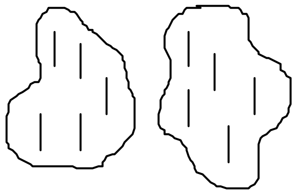


FIG.3

O aluno deve perceber que, dividindo uma coleção de 10 palitos de picolé em duas partes iguais, ficaremos com duas de 5 palitos, cada, como no caso da coleção de 10 tampinhas e que, portanto, tanto faz termos uma coleção de 10 palitos, 10 tampinhas, 10 canetas, etc., que sua metade sempre terá 5 desses objetos.

Expressamos isso dizendo que

a metade de 10 é 5.

Para fixar o conceito de metade o professor deve fazer vários outros exemplos com grandezas discretas.

OBSERVAÇÃO : Neste momento o professor deve ter o cuidado de não iniciar o problema com um número ímpar de objetos, para podermos repartir, em partes iguais, esgotando o todo, sem destruirmos a natureza dos objetos que compõem esse todo. Mas se isso não for possível, isto é , se algum aluno escolher uma quantidade ímpar de objetos, essa falsa "impossibilidade" deve ser trabalhada.

Depois destes exemplos o aluno deve perceber que:

1. De acordo com a conceito de metade, cada todo possui exatamente duas metades;

2. Se juntarmos as duas metades de um mesmo todo, obteremos o todo novamente.

Isto pode ser muito bem explorado quando trabalhamos com qualquer grandeza discreta ou com grandezas contínuas como água ou a areia. Com outras grandezas contínuas, o professor deve ter bastante cuidado. Por exemplo, se trabalhar com papel ou barbante, estes não devem ser cortados pois, caso

contrário, o aluno pode não aceitar que, quando juntarmos as duas metades obteremos o todo novamente. Nestes casos o professor pode simplesmente dobrá-los.
O uso de material concreto é muito importante pois, com ele, o aluno percebe que metade não tem tamanho. Por exemplo:

- a metade de 10 é 5 enquanto a metade de 6 é 3;

- cada metade de um copo grande de água é maior do que cada metade de um copo pequeno.

Uma outra vantagem em usarmos água ou areia é que o aluno, além de perceber que metade não tem tamanho, percebe também que metade não tem forma uma vez que estes materiais assumem a forma do recipiente que os contém.

O professor pode concluir esta etapa do trabalho fazendo a leitura e a escrita das fracão 1/2 e 2/2 e observando que a fração 2/2 representa o próprio todo. Além disso, pode aproveitar para introduzir os conceitos de denominador (número de partes em que o todo foi dividido) e de numerador (número de partes tomadas).

3.2 O CONCEITO DE FRAÇÃO

Após trabalharmos bem o conceito de metade podemos passar ao conceito de fração.

Usaremos novamente água e copos descartáveis.

Tomemos um copo cheio de água e dividamos essa água em copos (iguais) vazios, obedecendo aos princípios:

1. não pode sobrar água no copo que estava cheio;

2. nos copos que estavam vazios devemos colocar a mesma quantidade de água;

3. se juntarmos a água dos copos, deveremos ter a mesma quantidade inicial.

A água de cada um desses copos representa uma fração da água do copo cheio.

Por exemplo, se repartirmos a água do copo cheio em três copos iguais, obedecendo aos princípios anteriormente descritos, cada um dos três copos conterá a fração correspondente a

um terço ou a terça parte;

se forem quatro copos, cada um conterá a fração correspondente a

um quarto ou a quarta parte;

se forem cinco copos, teremos

um quinto ou a quinta parte;

e assim por diante.

Neste momento é importante que o aluno tire algumas conclusões, tais como:

1. o conceito de um terço, de um quarto, de um quinto, etc.;

2. que o todo possui exatamente

três partes iguais a um terço
quatro partes iguais a um quarto
cinco partes iguais a um quinto,

ou, em outras palavras,

três terços
quatro quartos
cinco quintos;

3. que nós podemos tomar

- uma, duas ou três partes iguais a um terço ou as frações um terço, dois terços e três terços;

- uma, duas, três ou quatro partes iguais a um quarto ou as frações um quarto, dois quartos, três quartos e quatro quartos;

- uma, duas, três, quatro ou cinco partes iguais a um quinto ou as fração um quinto, dois quintos, três quintos, quatro quintos e cinco quintos.

Tiradas essas conclusões, o professor explora a representação e a leitura das fração , sempre lembrando que:

1/3: representa uma das três partes iguais em que o todo foi dividido;

2/3: representa duas das três partes iguais em que o todo foi dividido;

3/3: representa três das três partes iguais em que o todo foi dividido;

1/4: representa uma das quatro partes iguais em que o todo foi dividido;

e assim por diante.

O professor deve ainda, ressaltar sempre que as frações

2/2, 3/3, 4/4, 5/5, ...

representam o próprio todo. Além disso deve retomar os conceitos de numerador (número de partes que foram tomadas) e de denominador (número de partes em que o todo foi dividido) utilizando-se de exemplos como:

- em 2/3, 2 é o numerador e 3 é o denominador,

- em 1/4, 1 é o numerador e 4 é o denominador.

OBSERVAÇÃO: Nesse momento podemos introduzir as primeiras noção de adição e subtração de fração com o mesmo denominador. De fato, o professor pode ir juntando ou retirando os copos de água que representam as fração com o mesmo denominador e vendo que fração do todo essa água representa.
Por exemplo, para encontrarmos 1/3 do copo de água devemos dividir essa água em 3 copos, obedecendo aos princípios das fração . Assim, depois de feita essa divisão, ficaremos com 3 copos contendo, cada um, água correspondente à fração 1/3.
Se juntarmos dois desses copos ficaremos com a fração 2/3 ou, em outras palavras,

$$1/3 + 1/3 = 2/3.$$

Se juntarmos mais um copo, aos 2/3 que já tínhamos, ficaremos com 3/3, ou seja,

$$2/3 + 1/3 = 3/3.$$

Se tirarmos dois desses copos, por exemplo, ficaremos novamente com 1/3, isto é,

$$3/3 - 2/3 = 1/3.$$

E assim por diante.
Esse procedimento deve ser repetido com várias fração, com o mesmo denominador.

O próximo passo é estender todos esses conceitos e observações às grandezas discretas.

4. COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES DE UM MESMO TODO

4.1 COMPARANDO FRAÇÕES

Comparar fração é perceber que existem quantidades semelhantes e diferentes em relação a um mesmo todo.

Com isso em mente vamos tentar responder qual a relação que existe entre as frações $^1/_4$ e $^2/_4$.
Trabalhando com material concreto (água, areia, papel, barbante, palitos, tampinhas, bilas, etc.) ou com material semi-concreto (o desenho no papel) podemos fazer com que o aluno perceba inicialmente que as fração 1/4 e 2/4 são diferentes, não somente por conta dos símbolos, mas por representarem quantidades diferentes de um mesmo todo. Podemos na realidade fazer com que eles concluam que a fração 1/4 é menor do que a fração 2/4.

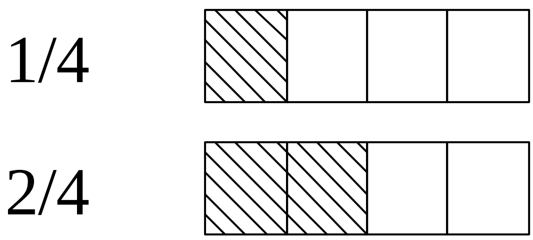


FIG.4

Mas nós não podemos nos restringir ao material concreto. Devemos insistir com o aluno até que ele conclua alguma coisa do tipo:

1. tanto em 1/4, quanto em 2/4, o todo foi dividido em quatro partes iguais, e assim nós estamos com quatro partes do mesmo tamanho;

2. se, de quatro pedaços do mesmo tamanho, eu tomar um deles (1/4) e você tomar dois deles (2/4) é claro que você fica com mais do que eu.

Feito isso o aluno perceberá, independente de material concreto ou semi-concreto, que 1/4 é menor do que 2/4 pois, nós dividimos o todo em **quatro** partes iguais e, em 1/4, tomamos **uma** delas, em 2/4, tomamos **duas** delas, e desde que 1 é menor do que 2, temos que 1/4 é menor do que 2/4.

Após vários exemplos, comparando frações com o mesmo denominador, o aluno deverá concluir que:

de duas frações com o mesmo denominador, a maior é a que tiver maior numerador.

OBSERVAÇÃO: O professor deve trabalhar vários exemplos dessa natureza para que um maior número de alunos possa tirar essas conclusões.

Analisemos agora as frações 2/3 e 2/4.

Que relação existe entre elas?

OBSERVAÇÃO: O aluno deverá compreender que a conclusão anterior não se aplica neste caso pois o todo, em cada fração (2/3 e 2/4), foi dividido em partes diferentes.

Como podemos perceber, essas frações têm denominadores diferentes e, portanto, a conclusão anterior não se aplica a elas.

Recorrendo mais uma vez ao material concreto ou ao desenho

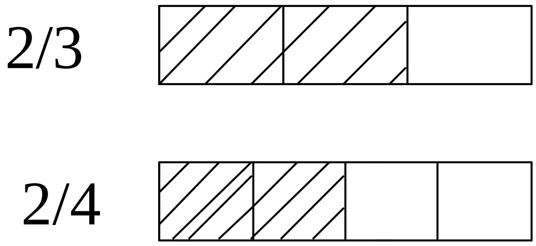


FIG. 5

podemos perceber que 2/3 é maior do que 2/4.

Surge, então, outra pergunta:

Será que não existe um raciocínio semelhante ao anterior para, através de uma análise, podermos concluir que 2/3 é maior do que 2/4, sem fazermos uso de material concreto ou de desenho?

Vamos analisar cada uma das frações, separadamente.

Para obtermos a fração 2/3 devemos dividir o todo em três partes iguais e tomarmos duas delas, enquanto para obtermos a fração 2/4 devemos dividir o todo em quatro partes iguais e tomarmos, também, duas delas.

Assim, no primeiro caso devemos dividir o todo em três partes iguais e, no segundo caso, o todo deve ser dividido em quatro partes iguais.

Sendo o todo, nos dois casos, do mesmo tamanho, quando o dividimos em três partes obtemos pedaços maiores do que quando o dividimos em quatro partes. Isto é, o pedaço correspondente à fração 1/3 é maior do que o pedaço correspondente é fração 1/4 e, portanto, quem ganhou dois pedaços de 1/4, ou seja, quem ganhou 2/4 ganhou menos do que quem ganhou dois pedaços de 1/3, ou seja, do que quem ganhou 2/3.

Feita essa análise, o aluno será capaz de concluir que 2/3 é maior do que 2/4 pois, muito embora cada um tenha ganho **dois** pedaços, **os pedaços em 2/3 eram maiores do que os pedaços em 2/4**.

OBSERVAÇÃO: Outros exemplos dessa natureza, isto é, de comparações de frações com o mesmo numerador devem ser realizados para que os alunos possam, eles mesmos, tirarem suas conclusões. Essas conclusões devem ser discutidas pelo professor até que se eliminem todas as dúvidas.

Ao final dessa discussão os alunos deverão concluir que

de duas frações com o mesmo numerador, a maior é a que tiver menor denominador.

Até agora nós já comparamos frações com o mesmo numerador e frações com o mesmo denominador e, em ambos os casos, descobrimos que, depois de analisarmos atentamente, é possível compará-las, sem a necessidade de material concreto ou semi concreto.

Tomemos agora frações com numeradores e denominadores diferentes.

Ainda assim, em alguns casos, é possível compará-las, apenas com uma análise da situação.

Como exemplo, tomemos as frações 2/3 e 1/4.

Em **2/3**, o todo foi dividido em **três** partes iguais, enquanto que, em **1/4**, o todo foi dividido em **quatro** partes iguais. Assim, **cada parte em 2/3** é maior do que

cada parte em 1/4, e como em 2/3 foram tomadas duas partes e em 1/4 tomamos apenas uma parte podemos concluir que 2/3 é maior do que 1/4.

Será que esse mesmo raciocínio se aplica às frações 2/3 e 3/4? Num primeiro momento parece que sim. Mas, analisando atentamente o aluno deverá concluir que não. Mesmo assim, algumas conclusões podem ser tiradas. Vejamos algumas delas.

1. Em 2/3, o todo foi dividido em três partes;

2. Em 3/4, o todo foi dividido em quatro partes;

3. Cada parte em 2/3 é maior do que cada parte em 3/4;

4. O número de partes tomadas em 2/3 (duas partes) é menor do que o número de partes tomadas em 3/4 (três partes);

OBSERVAÇÃO: Estas observação es devem ser bem trabalhadas para que o aluno perceba a diferença entre esta situação e as anteriores, e também para que ele perceba a necessidade de reduzirmos o problema a dos casos anteriores.

Fazendo uso do material concreto ou do desenho, podemos concluir que 3/4 é maior do que 2/3.

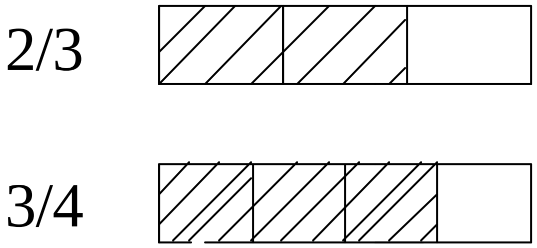


FIG.6

OBSERVAÇÃO: O professor deve trabalhar as várias situações apresentadas, ressaltando a diferença entre elas e mostrando a necessidade de estudarmos as frações equivalentes.

4.2 FRAÇÕES IGUAIS OU EQUIVALENTES

Este é dos conceitos da maior importância no estudo das frações muito embora os professores normalmente não "percam" muito tempo com ele. Ele será muito utilizado na comparação de frações e nas operações, especialmente na adição e subtração de frações com denominadores diferentes e na divisão de frações.

Ele surge quando comparamos frações como 1/2 e 2/4 2/3 e 4/6 1/2 e 3/6 por exemplo .

Em cada caso, as frações, embora construídas de forma diferente e simbolizadas com grafias diferentes, representam a mesma parte do todo.

O aluno pode perceber isso, inicialmente fazendo uso do material concreto. Depois, professor e aluno podem partir para análises do tipo:

1. Em 1/2, o todo foi dividido em duas partes iguais e tomamos uma delas;
2. Em 1/2, a parte tomada e a parte não tomada são do mesmo tamanho;
3. Em 2/4, o todo foi dividido em quatro partes iguais e tomamos duas delas;
4. Em 2/4, duas das partes foram tomadas e duas não;
5. Em 2/4, a parte tomada e a parte não tomada são do mesmo tamanho;

OBSERVAÇÃO: O mesmo procedimento deve ser adotado para os outros exemplos, até que o aluno venha perceber que existem várias maneiras de você representar a mesma fração de um todo, isto é, que existem frações que quando comparadas com outras não são nem maiores nem menores do que estas, são exatamente iguais.

Frações que representam a mesma parte de um todo são ditas

frações iguais ou equivalentes.

O próximo passo é descobrimos uma maneira de obter frações equivalentes é uma fração dada.

Através de vários exemplos, os alunos deverão concluir que existem 3 maneiras de obtermos frações equivalentes a uma fração dada. Por exemplo:

- a fração 4/6 é equivalente à fração 2/3, pois pode ser obtida desta, multiplicando-se o numerador (2) e o denominador (3) por um mesmo número inteiro (no caso, 2);

- a fração 1/2 é equivalente à fração 3/6, pois pode ser obtida desta, dividindo-se o numerador (3) e o denominador (6) por um mesmo número inteiro (no caso, 3);

- a fração 9/15 é equivalente à fração 6/10, pois pode ser obtida desta, dividindo-se o numerador (6) e o denominador (10) por um mesmo número inteiro (2) e a seguir, multiplicando-se esses resultados por um outro número inteiro (no caso, 3).

Estas são as três maneiras de se obter frações equivalentes é uma fração dada. Mas como chegarmos a elas?

Comecemos com a fração 2/3.

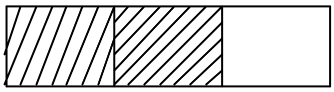
2/3 

FIG.7

Podemos dividir cada uma destas 3 partes em qualquer quantidade de partes (2, 3, 4,...).

Vamos dividir em 4 partes, como exemplo.

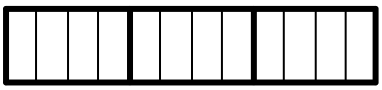
2/3 

FIG.8

Assim, o nosso todo que estava dividido em 3 partes ficou, agora, dividido em 3 * 4, ou seja, em 12 partes, e cada uma dessas partes representa 1/12 do todo. O número de partes tomadas, que era 2, passou a ser 2 * 4 , 8 partes.

Com isso, podemos concluir que as frações 2/3 e 8/12 representam a mesma quantidade do todo, isto é, são equivalentes.

OBSERVAÇÃO: Para mostrarmos que 4/6 é equivalente a 2/3 devemos dividir cada uma das 3 partes em 2 partes iguais, obtendo assim, 3 * 2 partes.

Tomemos agora a fração 9/12.

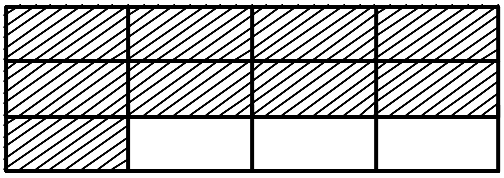


FIG.9

Agrupando essas 12 partes de 3 em 3 ficaremos com 4 grupos de 3, uma vez que 12 : 3
= 4 e, portanto, o todo ficou agora dividido em 4 partes.

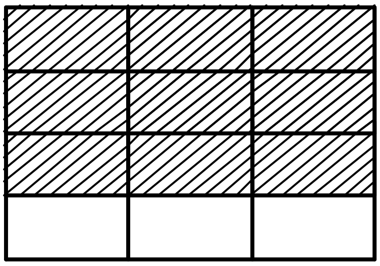


FIG.10

O número de partes tomadas, que era 9, representa agora 3 destas novas partes, pois $9 \div 3 = 3$. Assim, as frações 9/12 e 3/4 representam a mesma quantidade do todo, isto é, são equivalentes. A terceira maneira é, simplesmente, uma combinação dessas duas.

4.3 CONCLUINDO

Agora, de posse do conceito de frações equivalentes, fica fácil compararmos duas frações. Basta encontrarmos duas frações com o mesmo denominador e que sejam equivalentes às frações dadas e depois contarmos o número de partes tomadas em cada uma delas, já que este é o caso mais simples de comparação de frações.

5. OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

5.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

O caso mais simples de adição e subtração de frações, isto é, o caso em que as frações possuem o mesmo denominador, já deve ter sido estudado anteriormente (Ver pág. 09).

Assim, nesta etapa, nossa preocupação deve estar toda voltada para dois pontos:

1. Soma e subtração de frações com denominadores diferentes;

2. O aparecimento das frações impróprias.

Para o primeiro ponto, o professor, com o uso da água, pode mostrar ao aluno que a única dificuldade na adição de frações com denominadores diferentes está na hora de representarmos, através de símbolos, o resultado final. Isto é, ele pode, perfeitamente, juntar em um copo, 1/5 da água com 1/4 da água mas, diferentemente de quando os denominadores eram iguais, ele não saberá dizer que fração da água temos no copo.

OBSERVAÇÃO : O professor deve explorar que isso se deve ao fato de as partes não serem do mesmo tamanho (os denominadores são diferentes) pois, se estas fossem do mesmo tamanho bastava juntá-las e depois contar o número de partes que foram juntadas. Com isso o professor leva o aluno a descobrir a importância das frações equivalentes na adição e subtração de frações, deixando de lado o conceito de mínimo múltiplo comum (m.m.c.) que, a nosso ver, é prejudicial nesse momento.

Assim, para transformarmos a adição e a subtração de frações em operações já conhecidas, devemos substituir tais frações, por frações equivalentes, e que tenham o mesmo denominador.

Por exemplo:

- para calcularmos 1/5 + 1/4, devemos procurar frações equivalentes a 1/5 e frações equivalentes a 1/4 e que tenham o mesmo denominador. Como

1/5 = 2/10 = 3/15 = 4/20 = 5/25 = ...

1/4 = 2/8 = 1/12 = 4/16 = 5/20 = ..., teremos

1/5 + 1/4 = 4/20 + 5/20 = 9/20;

- para calcularmos 2/3 + 1/6 devemos procurar frações equivalentes a 2/3 e frações equivalentes a 1/6 que tenham o mesmo denominador. Como

2/3 = 4/6 = 8/12 = 10/15 = 12/18 = 14/21 = 16/24 = ...

1/6 = 2/12 = 3/18 = 4/24 = 5/30 = ... , teremos

$2/3 + 1/6 = 4/6 + 1/6 = 5/6$, ou

$2/3 + 1/6 = 8/12 + 2/12 = 10/12$, ou

$2/3 + 1/6 = 12/18 + 3/18 = 15/18$, ou ainda

$2/3 + 1/6 = 16/24 + 4/24 = 20/24$.

O aluno deverá perceber que os resultados obtidos, aparentemente diferentes, são, na verdade, os mesmos, pois as frações 5/6, 10/12, 15/18 e 20/24 são equivalentes.

OBSERVAÇÃO: Como dissemos anteriormente não temos necessidade de tomar o menor múltiplo comum (m.m.c.) de 3 e 6. Podemos tomar qualquer outro múltiplo comum, isto é, podemos trabalhar com quaisquer frações equivalentes às frações dadas, bastando que elas tenham o mesmo denominador.

- para calcularmos 1/2 - 1/3 basta observarmos que

1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10 = 6/12 = ...

1/3 = 2/6 = 3/9 = 4/12 = 5/15 = ..., e, portanto,

$1/2 - 1/3 = 3/6 - 2/6 = 1/6$, ou

$1/2 - 1/3 = 6/12 - 4/12 = 2/12$.

Aqui, novamente, o professor deverá chamar atenção para o fato que as frações 1/6 e 2/12 são equivalentes.

OBSERVAÇÃO: Sugerimos que o professor inicie estas operação es com frações onde os denominadores, apesar de diferentes, sejam múltiplos um do outro, como no segundo exemplo. Estes casos facilitam a compreensão e fazem com que o aluno perceba a necessidade do uso de frações equivalentes.

Para o segundo ponto, o uso da água ou de areia parece bastante favorável. Se o aluno pretender juntar 2/3 com 3/4, da água, em um único copo, facilmente perceberá a impossibilidade. Verá que precisaremos de mais de um copo.

Esta impossibilidade deverá ser bem trabalhada para levar ao conceito de frações impróprias, isto é, frações onde o numerador é maior do que o denominador.

Tais frações, como veremos a seguir, representam mais de um inteiro e por isso recebem
esse nome, pois são, impropriamente, chamadas de frações.

Lembremos que fração é parte de um todo que foi dividido em partes iguais, esgotando o todo.

Por exemplo, vamos somar as frações 2/3 e 3/4.

Temos que 2/3 = 8/12 e 3/4 = 9/12 e assim

2/3 + 3/4 = 8/12 + 9/12 = 17/12 , e, desde que, 17 = 12 + 5 teremos, 17/12 = 12/12 + 5/12.

Como 12/12 é 1 inteiro, vemos que a fração imprópria 17/12 é maior do que 1 inteiro, como afirmamos anteriormente.

5.2 MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

O que é multiplicar duas frações? Ou melhor, o que esperamos obter quando multiplicamos duas frações? Será que podemos obter um significado para a multiplicação de frações a partir da multiplicação de números naturais?

Vamos recordar a multiplicação de números naturais.

Quando multiplicamos números naturais estamos efetuando uma adição de parcelas iguais. Assim:

$$2 * 3 = 3 + 3$$
$$3 * 4 = 4 + 4 + 4$$

que nós lemos **duas vezes três é igual a três mais três três vezes quatro é igual a quatro mais quatro mais quatro.**

Mas, representando no papel, nós podemos observar que $2 * 3$ significa **duas séries de três unidades**, enquanto $3 * 4$

significa **três séries de quatro unidades**. E, portanto, nós podemos ler:

2 * 3 : duas séries de três

3 * 4 : três séries de quatro

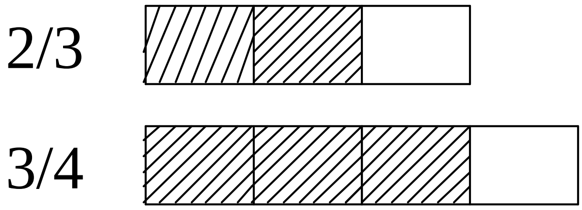


FIG.11

Vamos tentar ler e interpretar a multiplicação de frações dessa mesma forma.

Inicialmente observemos que na multiplicação de frações podemos destacar três casos:

Caso 1: multiplicação de um número natural por uma fração

Caso 2: multiplicação de uma fração por um número natural

Caso 3: multiplicação de uma fração por outra fração

Mostraremos que nos três casos é possível fazermos isto e que, portanto, a multiplicação de frações nada mais é do que uma extensão da multiplicação de números naturais.

Caso 1: MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO NATURAL POR UMA FRAÇÃO

Tomemos como exemplo o produto 3 * 1/2 que, como sabemos é 3/2.

A pergunta é:

Podemos olhar 3 * 1/2 como sendo o resultado de 3 séries de 1/2?

É claro que podemos.

Três séries de 1/2 significam, como mostra o desenho, 1/2 + 1/2 + 1/2, que é igual a 3/2.

3 x 1/2

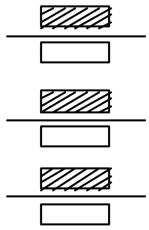


FIG.12

Caso 2: MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO NATURAL

Tomemos como exemplo o produto 2/3 * 2.

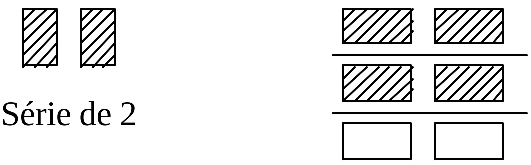
Notemos que neste caso, embora possamos representar da mesma forma, no papel, a leitura deve ser um pouco diferente pois não faz sentido lermos

dois terços série de dois.

Assim devemos arranjar uma outra maneira de ler esse produto, mas que não seja muito diferente da anterior.

A leitura adequada seria **terços de uma série de dois.**

O diagrama a seguir nos mostra que o resultado era o esperado.



2/3 x 2

FIG.13

Caso 3: MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRAÇÃO POR OUTRA FRAÇÃO

Neste caso a leitura deve ser feita da mesma forma que no caso anterior e então o resultado se repete.

Por exemplo, se o produto 1/2 * 3/4 for interpretado como um meio de uma série de três quartos teremos que 1/2 * 3/4 é igual a 3/8.

3/4

1/2 x 3/4

FIG.14

Aconselhamos que sejam feitos vários exemplos, de cada um dos casos, até que os alunos possam tirar suas conclusões e descobrir, por eles mesmos, uma maneira mais prática de efetuar a multiplicação de frações.

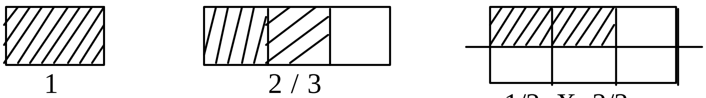
OBSERVAÇÃO: O professor deve trabalhar muito bem os três casos, sempre mostrando a relação entre a multiplicação de números naturais e a multiplicação de frações. Deve, ainda, ter o cuidado de estudar caso a caso, evitando confusão para os alunos.

Finalmente o professor deve chamar atenção para a comutatividade da multiplicação de frações.

A melhor maneira é através de exemplos, deixando que os próprios alunos constatem essa comutatividade.

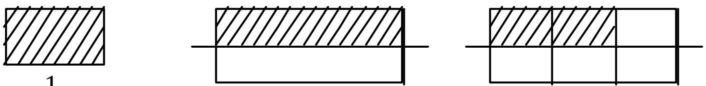
Vejamos um exemplo.

Vamos mostrar que 1/2 * 2/3 = 2/3 * 1/2.



1 2 / 3 1/2 X 2/3

Fig. 15



1 2 / 3 2/3 X 1/2

Fig. 16

5.3 DIVISÃO DE FRAÇÕES

Antes de começar a dividir frações o aluno deve ter um significado para isto. Ele deve saber o que vai encontrar quando dividir duas frações, ou seja, ele deve dar um sentido a essa divisão.

Recordemos, primeiramente, qual o sentido da divisão de dois números naturais.

Como sabemos, a divisão de números naturais envolve dois conceitos: repartir e comparar.

Assim quando dividimos 7 por 3, por exemplo, podemos estar querendo repartir sete objetos em três partes iguais ou querendo saber quantos grupos de três nós temos, se tivermos sete, ou em outras palavras, quantos três cabem dentro do sete.

Será que podemos dar estes dois sentidos é divisão de frações?

A resposta a esta pergunta é sim.

OBSERVAÇÃO: O professor pode perfeitamente chamar atenção deste fato pois, fazendo isto, ele estará transformando um conceito "novo" em um conceito já aprendido e trabalhado pelo aluno, o que facilitaria o aprendizado.

Veremos isto, analisando os três casos de divisão de frações:

Caso 1: divisão de uma fração por um número inteiro

Caso 2: divisão de um número inteiro por uma fração

Caso 3: divisão de uma fração por outra fração.

Detalharemos aqui apenas os casos 1 e 3, uma vez que os casos 2 e 3 são inteiramente análogos. Mas lembramos que o professor deve explicar os três casos, dosando o grau de dificuldade.

Caso 1: DIVISÃO DE UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO INTEIRO
(com o sentido de repartir)

Neste caso procede-se exatamente como no caso da divisão de dois números inteiros. Ou melhor, neste caso podemos encarar a divisão como o processo de repartir.

Por exemplo, em 3/4 : 2, podemos pensar que temos três quartos de determinada coisa e queremos repartir essa quantidade em dois grupos de quantidades iguais.

Assim essa divisão se torna fácil de efetuar, como mostramos no desenho a seguir:

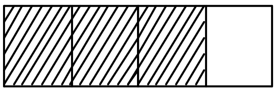
3/4 

FIG.17

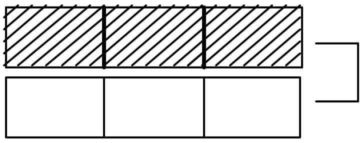
3/4 : 2 

FIG.18

A figura 17 representa os três quartos que queremos repartir por dois, enquanto a figura 18 representa quanto deve ficar em cada grupo.

Portanto, cada grupo deve ficar com metade dos três quartos, que corresponde a 3/8 do total.

Caso 1: DIVISÃO DE UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO INTEIRO
(com o sentido de comparar)

Podemos ver o caso anterior de uma outra forma.

De fato, consideremos as figuras a seguir:

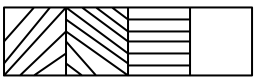


Fig. 19

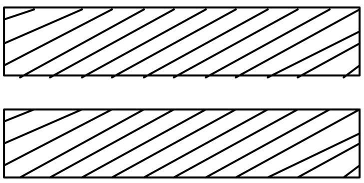


Fig. 20

Elas representam, respectivamente, os três quartos que queremos dividir e o dois, que é por quanto devemos dividir.

Vamos comparar essas duas figuras.

É claro que não podemos perguntar **quantas vezes o dois cabe dentro do três quartos?**
nem podemos perguntar **quantos dois eu posso tirar de três quartos?** pois, em ambos os casos, a resposta seria **nenhum(a).**

Mas como podemos perceber, a primeira figura (FIG.19) representa uma fração da segunda (FIG.20).
Portanto nós podemos fazer a pergunta:

que fração é essa?

Isto é,

que fração de 2, 3/4 representa?

A figura a seguir representa o dois dividido em quatro partes iguais.

FIG.21

e assim cada retângulo pequeno

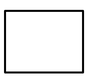


FIG.22

representa um oitavo da figura 20.

Como em 3/4 temos três desses retângulos podemos dizer que **3/4 representam 3/8 de 2,** que é o mesmo resultado de 3/4 : 2, encontrado anteriormente.

Observemos que, para facilitar a comparação substituímos o 2 pela fração equivalente 8/4, mostrando, mais uma vez, a importância do conceito de frações equivalentes.
OBSERVAÇÃO: O professor deve fazer bastante exemplos para que o aluno venha a compreender todos os resultados. Deve, ainda, estar consciente de que este é o único caso em que os dois conceitos da divisão de números inteiros (repartir e comparar) podem ser explorados.

Caso 3: DIVISÃO DE UMA FRAÇÃO POR OUTRA FRAÇÃO

Como dissemos anteriormente, neste caso, só podemos pensar a divisão como comparação entre as duas frações.

Sugerimos ainda que os primeiros exemplos sejam de divisão entre duas frações com o mesmo denominador pois, nestes casos, fica bem destacada a necessidade de trabalharmos com frações equivalentes.

Efetuemos a divisão 3/4 : 2/4.

Os desenhos a seguir representam os três quartos e os dois quartos, de um mesmo todo.

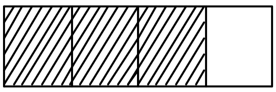
3/4 

FIG.23

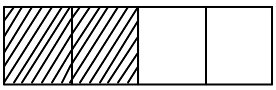
2/4 

FIG.24

Como queremos comparar as duas frações, para respondermos que fração 3/4 representa de 2/4, devemos observar, inicialmente, que, 2/4 é composto de dois pedaços e que em 3/4 temos três desses pedaços.

Em outras palavras, podemos pensar que o todo (2/4) **foi dividido em duas partes** e que
tomamos três dessas partes.

Assim, **3/4 : 2/4 é igual 3/2**. Ou seja **3/4** representa **3/2** de **2/4**.

OBSERVAÇÃO: Este exemplo é muito importante. Com ele o professor deve fazer o aluno perceber que só foi possível fazer a comparação dessa forma simples porque os pedaços eram do mesmo tamanho. Isto é, as frações tinham o mesmo denominador.

Todos os outros exemplos podem ser reduzidos a este caso, através da utilização das frações equivalentes.

Lembramos mais uma vez que todos os casos devem ser explorados com bastante exemplos, para que os alunos tirem as suas próprias conclusões.

6.BIBLIOGRAFIA

Borges Neto, H. & Iório Dias, A.M. Desenvolvimento do raciocínio matemático na pré-escola. Material Didático da Secretaria da Educação do Ceará (SEDUC), 1991

Barbosa Jr., R. & Pereira, J.M. As quatro operações fundamentais. Notas de treinamento realizado para professores da rede estadual de ensino do Ceará, 1991-92.

Rocha, M.A. & Frota, C. Sistemas de numeração. Notas de treinamento realizado para professores da rede estadual de ensino do Ceará, 1991-92.

Kamii,C. & DeClark,G. Reinventando a aritmética - Implicações da teoria de Piaget, Ed. Papirus, 4ª Edição,1991.

Lovell, K. O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança. Artes Médicas, Porto Alegre, 1988.

Piaget, J. & Garcia, R. Psicogênese e história das ciências. Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1987.

Ifrah, G. Os números - História de uma grande invenção. Ed.Globo, 1989.

Carraher, T.N.(org.) e outros. Aprender pensando. Ed. Vozes, Petropólis,1990.

Boyer, C.B. História da matemática. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.