

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

**DO NOVO PC AO VELHO PC - A PROVA NO ENSINO DE
MATEMÁTICA A PARTIR DO USO DE RECURSOS
COMPUTACIONAIS**

Dissertação apresentada por
José Rogério Santana

**Núcleo: Educação, Currículo e Ensino
Área de Concentração: Educação Matemática**

Orientador: Hermínio Borges Neto

Laboratório Multimeios

Fortaleza
Abril- 2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

DO NOVO PC AO VELHO PC
A PROVA NO ENSINO DE MATEMÁTICA A PARTIR
DO USO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

José Rogério Santana

Orientador: Hermínio Borges Neto

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação, na área de Educação Matemática, à banca examinadora da Universidade Federal do Ceará, sob orientação do Prof. Dr. Hermínio Borges Neto.

Fortaleza (CE)
2002

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto

Prof. Dr. Aldir Chaves Brasil Júnior

Prof(a) Dr(a). Eliane Dayse Pontes Furtado

Prof. Dr. John Andrew Fossa

MESTRANDO

José Rogério Santana

Fortaleza, _____ de _____ de 2002.

AGRADECIMENTOS

À minha querida companheira Vânia Marilande Ceccatto e ao meu filho Ângelo Ceccatto Cruz Santana, pelo apoio, compreensão e amor que fortaleceu meu espírito nos momentos difíceis, bem como, pela alegria que a existência de vocês podem me proporcionar.

Ao Professor Dr. Hermínio Borges Neto pela sua orientação e pela sua palavra amiga nas horas mais necessárias.

Aos professores. Dr. Aldir Chaves Brasil Júnior, Dr(a). Eliane Dayse Pontes Furtado e John Andrew Fossa pela colaboração e ao Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa por suas sugestões.

Aos estudantes do Projeto Manut-LIE/Multimeios por sua disposição em ajudar na resolução de problemas de hardware nas horas mais difíceis.

A todos os pesquisadores e estudantes do Laboratório Multimeios FACED/UFC pela colaboração e companheirismo na coleta de dados, nas discussões acadêmicas e em todos os momentos.

Ao meu amigo Moacir Farias por ser um incentivador do meu trabalho e por debater vigorosamente todos os fins de semana possíveis.

A todos os professores do Núcleo Tecnológico Educacional da cidade de Quixadá, pelo apoio no desenvolvimento do curso de formação de professores de matemática do Ensino Médio, que permitiu conhecer situações discutidas neste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), agradeço o apoio financeiro concedido ao meu projeto de pesquisa.

E aos demais, que de alguma forma contribuíram na elaboração desta dissertação.

Aos meus amados Ângelo e Vânia
Aos meus pais, pelas suas alegrias e tristezas.
Ao que é, foi, e sempre será.

A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.”

Bento de Jesus Caraça

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações.....	i
Lista de Tabelas.....	iii
Lista de Símbolos.....	iv
Resumo.....	vi
Abstract	vii
Résumé.....	viii
Introdução	001
Organização do Trabalho.....	003
Capítulo 01 – Epistemologia dos processos de validação matemática.....	006
1.1 – Sobre demonstrações Matemáticas.....	006
1.2 – Demonstrações e os processos dedutivos.....	012
1.3 – Demonstrações e os processos heurísticos.....	022
Capítulo 02 – Os processos de validação usuais em matemática.....	030
2.1 – Terminologia usual	030
2.2 – Método do labirinto: Avançando-retrocedendo.....	031
2.3 – Método contrapositivo	033
2.4 – Prova por contradição: Prova indireta e redução ao absurdo.....	034
2.5 – Manipulação e visualizações.....	039
2.6 – Regras de inferência.....	042
2.6.1 – <i>Modus Ponens</i> (MP).....	043
2.6.2 – <i>Modus Tollens</i> (MP).....	044
2.7 – Prova direta.....	046

2.8 – Indução matemática.....	048
2.9 – Prova automática de teorema.....	052
Capítulo 3 – O uso do computador no contexto educacional.....	061
3.1 – Informática educativa.....	061
3.2 – Informática educativa e ensino de matemática.....	064
Capítulo 4 – Software educativo e ensino de matemática.....	070
4.1 – Software educativo.....	070
4.2 – Manipulação simbólica.....	073
4.3 – Geometria dinâmica.....	079
4.4 – Projeto Tele-Cabri/Multimeios.....	083
4.5 – GeoMeios: Desenvolvimento de software em Java.....	084
Capítulo 5 – Do Novo ao Velho PC: A experiência matemática por meio de demonstrações como didática reflexiva	090
5.1 – Propondo o uso do computador para gerar uma experiência matemática significativa ao aluno por meio de demonstrações.....	090
5.2 – Reflexão-na-ação e a experiência matemática com uso do computador.....	091
5.3 – O papel do professor reflexivo na passagem do Novo ao Velho PC.....	095
5.3.1 – Dificuldades na passagem do Novo ao Velho PC com respeito à prática-reflexiva e a relação ensino-aprendizagem.....	097
5.3.2 – A ensinagem e a seqüência Fedathi.....	101
Capítulo 6 – Situações surpresa que surgem no Novo PC.....	104
6.1 – Procedimentos metodológicos.....	104
6.2 – Resultados.....	109
6.2.1 – Situação 01 – Mal entendidos em geometria dinâmica: Situação relativa às transformações isométricas no <i>Cabri Géomètre II</i>	109
6.2.2 – Situação 02 – A soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180º graus.....	112
6.2.3 – Situação 03 – O efeito elástico na divisão de um segmento em partes iguais.....	117

6.2.4 – Situação 04 – Uma reta é infinita quando há um <i>looping</i>	120
6.2.5 – Situação 05 – Um problema métrico: $d(AB) \neq \text{abs}(B) - \text{abs}(A)$	121
6.2.6 – Situação 06 – Comparando dois programas por meio de uma atividade.....	124
6.2.7 – Situação 07 – Quando retas paralelas se encontram no plano euclidiano.....	126
6.2.8 – Situação 08 – Manipulação da reta restrita a zona-de-desenho.....	128
6.2.9 – Situação 09 – A conjectura da elipse a partir do Novo PC.....	129
Capítulo 7 – Considerações Finais.....	135
Bibliografia.....	139
Bibliografia Referencial.....	139
Bibliografia Consultada.....	141
Programas de Computador.....	142
Anexos.....	143
Anexo A.....	143
Situação 01.....	144
Situação 02.....	146
Situação 03.....	147
Situação 04.....	151
Situação 05.....	152
Situação 06.....	155
Situação 07.....	156
Situação 08.....	157
Situação 09.....	160
Anexo B.....	162
Anexo B1.....	163

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

	Pág
Figura 001 – O triângulo ABC é equilátero com a medida de lado 3,45 cm.....	006
Figura 002 – Construção geométrica de um triângulo equilátero.....	007
Figura 003 – Esquema proposto por MACHADO (1997:30) para explicar os sistemas formais axiomáticos.....	013
Figura 004 – Esquema do processo heurístico de Lakatos segundo Davis & Hersh (1985).....	025
Figura 005 – A área do triângulo XYZ é $z^2/4$	031
Figura 006 – O labirinto é uma metáfora para o método avançando-retrocedendo para SOLOW (1982)....	032
Figura 007 – Segmentos comensuráveis entre si.....	035
Figura 008 – Segmentos incomensuráveis entre si.....	036
Figura 009 – A Soma dos ângulos internos de um triângulo.....	039
Figura 010 – Uma visualização mal elaborada.....	040
Figura 011 – Aritmética do relógio 5.....	041
Figura 012 – Construção geométrica sobre o teorema de Pitágoras.....	046
Figura 013 – Processo de indução como prova automática.....	051
Figura 014 – Resolução de problemas em manipulação simbólica computacional.....	074
Figura 015 – Resolução do problema proposto no <i>software Mathematica</i>	076
Figura 016 – Gráfico de $[\text{Sem}(x)/x]$ no intervalo entre $-\pi$ e π	077
Figura 017 – Interface do Software Modellus no desenvolvimento de uma atividade.....	078
Figura 018 – Construção do ponto médio M do segmento AB.....	080
Figura 019 – Algoritmo existente na primitiva da construção do ponto médio M do segmento AB.....	081
Figura 020 – Protótipo do software Geomeios desenvolvido em 2001.....	085
Figura 021 – Modelo do software GeoMeios integrado ao Tele.....	086
Figura 022 – Esquema da metodologia utilizada no desenvolvimento do <i>software GeoMeios</i>	087
Figura 023 – Quando o ponto P é movimentado T também se move.....	110
Figura 024 – Esquema de Alfa, Teta e Iota sobre a soma dos ângulos internos.....	115

Figura 025 – Um <i>bug</i> pelo recurso de animação do <i>Cabri Géomètre II</i>	120
Figura 026 – À distância entre os segmentos A1B1 e A1B2 são equivalentes.....	123
Figura 027 – Um algoritmo que resultou em dois lugares geométricos distintos.....	124
Figura 028 – Retas paralelas e coincidentes?.....	127
Figura 029 – A reta e o rato, ruptura conceitual na ação.....	129
Figura 030 – A construção: O lugar geométrico P pressupõe uma elipse.....	130
Figura 031 – Os focos F1 e F2 implementados da construção reestruturada.....	133
Figura 032 – À medida que o ponto A aproxima-se do ponto C, a soma $v(AB) + v(BC)$ tende a zero.....	134

LISTA DE TABELAS

	Pág
Tabela 001 - Tipos de notação para representar um argumento na lógica proposicional.....	018
Tabela 002 – Exemplificação dos termos da implicação formal.....	019
Tabela 003 – A implicação $L \Rightarrow a$ torna o argumento L / a dedutível.....	019
Tabela 004 – Método do labirinto como técnica de prova.....	032
Tabela 005 – Método contrapositivo como técnica de prova.....	034
Tabela 006 – Regras de inferência representada em termos simbólica.....	042
Tabela 007 – <i>Modus ponens</i> caracterizando a regra de inferência condicional.....	044
Tabela 008 – Apresentando o <i>modus tolens</i> pela tabela-verdade.....	045
Tabela 009 – Etapas do algoritmo de representação clausal.....	056
Tabela 010 – Tabela-verdade na lógica de primeira ordem com predicativos.....	059
Tabela 011 – Alunos matriculados no início de 2001 no Estado do Ceará segundo MEC/INEP.....	065
Tabela 012 – O algoritmo obtido pela primitiva do arquivo “pmedio.car” e seus comentários.....	081
Tabela 013 – A passagem do Novo ao Velho PC como reflexão-na-ação uso do computador em aula.....	094
Tabela 014 – Algoritmo da atividade apresentada pela situação 01.....	109
Tabela 015 – algoritmo da situação 05 que apresenta um problema métrico no <i>Cabri Géomètre II</i>	121
Tabela 016 – O algoritmo utilizado na situação 06 nos programas <i>Cabri Géomètre II</i> e <i>Dr. Geo</i>	125
Tabela 017 – Algoritmo de construção de paralelas utilizado na situação 07.....	126
Tabela 018 – Algoritmo da situação 09 sobre a suposta elipse.....	130

LISTA DE SIMBOLOS

MEDIDAS

cm Centímetros (unidade para medida de comprimento)

° Graus (unidade para medição de ângulo)

SIMBOLOS ARITMÉTICOS

+ Adição

- Subtração

x Multiplicação

* Multiplicação

. Multiplicação

/ Divisão

^ Exponencial

$\text{sqr}()$ Raiz quadrada

$\sqrt{\quad}$ Radiciação

$\text{abs}()$ Valor absoluto ou módulo

| | Valor absoluto ou módulo

= Igualdade

≠ Desigualdade

≅ Aproximadamente

≥ Maior ou igual que

≤ Menor ou igual que

± Mais ou menos

> Maior que

- < Menor que

- \forall Quantificador universal (para todo)

- \exists Quantificador existencial (existe)

- Σ Somatório (letra grega sigma)

- Δ Indica variação (letra grega delta)

- π Número pi (letra grega minúscula pi)

- Π Usado neste trabalho para designar o plano (letra grega maiúscula pi)

OPERADORES LÓGICOS

- \wedge Conjunção (operação lógica “e”)

- \vee Disjunção (operação lógica “ou”)

- \rightarrow Condicional (operação lógica do tipo “Se ... então ...”)

- \leftrightarrow Bicondicional (operação lógica do tipo “se e somente se”)

- \Rightarrow Implicação material

- \vdash Dedução lógica

- \Leftrightarrow Equivalência

- \equiv Equivalência

- \in Pertence

- \notin Não pertence

- () Colchetes

- [] Parênteses

- { } Chaves

RESUMO

Este trabalho é um estudo sobre a passagem do Novo PC (Personal Computer) ao Velho PC (Papel e Caneta), que corresponde ao aparecimento inusitado de situações surpresa por meio do computador, que permitem questionar a validade de enunciados matemáticos oriundos das novas tecnologias de ensino através do raciocínio reflexivo com base em demonstrações matemáticas. As primeiras situações-surpresa foram observadas no Laboratório Multimeios FACED/UFC, e se pode observar que tais casos permitiam a observação de problemas antigos sobre novas perspectivas educacionais, bem como, houve algumas situações-surpresa em que surgiram problemas legítimos de demonstração que envolveram várias pessoas. Para compreender melhor tais situações é apresentado neste trabalho um estudo sobre os procedimentos de validação usados em relação ao saber matemático, considerando questões epistemológicas e técnicas que envolvem o raciocínio dedutivo fundamentado em concepções formalistas, e também se procurou analisar os aspectos que envolvem o raciocínio heurístico no ensino de matemática. Também foram discutidos os pressupostos que fundamentam a informática educativa e o ensino de matemática, considerando os empecilhos à construção de um modelo de ensino assistido por computador que tome como base a passagem do Novo ao Velho PC. Por fim, são analisados os aspectos relativos aos softwares de manipulação simbólica e geometria dinâmica, considerando concepções sobre o ensino prático-reflexivo e o uso de demonstrações na didática da matemática através da seqüência Fedathi, e para uma reflexão prática sobre as situações-surpresa são apresentados os resultados de investigação na forma de nove situações oriundas no Novo PC, e a partir destas é feita uma breve discussão sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC, considerando os limites e possibilidades das tecnologias computacionais no ensino de matemática na atualidade.

ABSTRACT

This work is a study on the passage of New PC (Personal Computer) to Old PC (Paper and Pen), that corresponds to the unusual emergence of situations-surprise through the computer, that they allow to question the validity of mathematical statements originating from of the new teaching technologies through the reflexive reasoning with base in mathematical demonstrations. The first situation-surprise was observed at the Laboratory Multimeios FACED/UFC, and she can observe that such cases allowed the observation of old problems on new educational perspectives, as well as, there were some situation-surprise in that legitimate problems of demonstration that involved several people appeared. To understand such situations better it is presented in this work a study on the validation procedures used in relation to the mathematical knowledge, considering subjects philosophics and techniques that involve the deductive reasoning based in conceptions formalists, and she also tried to analyze the aspects that involve the heuristic reasoning in the mathematics teaching. The presuppositions that base are science about the use of computer in teaching and the mathematics teaching were also discussed, considering the difficulties to the construction of a teaching model attended by computer that takes as base the passage of the New to Old PC. Finally, the relative aspects are analyzed to the softwares of symbolic manipulation and dynamic geometry, considering conceptions on the practical-reflexive teaching and the use of demonstrations in the didacticism of the mathematics through the sequence Fedathi, and for a practical reflection on them situation-surprise the investigation results are presented in the form of nine proceeding situations in New PC, and starting from these it is made an abbreviation discussion on the passage of New PC to Old PC, considering the limits and possibilities of the new technologies at the present time in the mathematics teaching.

RÉSUMÉ

Ce travail est une étude sur le passage de Nouveau PC (personal computer) à Vieux PC (Papier et Cahier), cela correspond à l'apparition exceptionnelle de situations surprise à travers l'ordinateur à qu'ils permettent de questionner la validité de déclarations mathématiques qui proviennent des nouvelles technologies de l'enseignement à travers le raisonnement réfléchi avec base dans les démonstrations mathématiques. La première situation surprise a été observée au Laboratoire Multimeios FACED/UFC, et elle peut observer ces tels cas ont autorisé l'observation de vieux problèmes sur les nouvelles perspectives pédagogiques, aussi bien que, il y avait quelque situation surprise dans ces problèmes légitimes de démonstration qui a concerné plusieurs gens parus. Comprendre de telles situations améliorent il est présenté dans ce travail une étude sur les procédures de la validation utilisées par rapport à la connaissance mathématique, étant donné soumet épistémologiques et techniques qui impliquent le raisonnement déductif basées dans les formalistes des conceptions, et elle a aussi essayé d'analyser les aspects qui impliquent le raisonnement heuristique dans l'enseignement des mathématiques. Les présuppositions que la base est science au sujet de l'usage d'ordinateur dans apprendre et le mathématiques apprendre a aussi été discuté, étant donné les difficultés à la construction d'un modèle de l'enseignement assistée par ordinateur qui prend comme base le passage du Nouveau à Vieux PC. Finalement, les aspects relatifs sont analysés au logiciels de manipulation symbolique et géométrie dynamique, étant donné conceptions sur l'enseignement pratique réfléchi et l'usage de démonstrations dans le didacticism des mathématiques à travers la séquence Fedathi, et pour une réflexion pratique sur eux situation-surprise que les résultats de l'enquête sont présentés dans la forme de neuf situations de la façon d'agir dans Nouveau PC, et commencer de ceux-ci il est fait une discussion de l'abréviation sur le passage de Nouveau PC à Vieux PC, étant donné les limites et possibilités des nouvelles technologies à présent dans l'enseignement des mathématiques.

INTRODUÇÃO

A ferramenta que atualmente conhecemos como computador, desde seus primórdios, está associada ao conhecimento matemático. O próprio nome “computador” deriva do verbo *computar* que segundo FERREIRA (1993: p. 134) significa *efetuar o cômputo de algo* ou *contar*. Neste contexto, os primeiros nomes da história dos computadores, apresentam o nome de matemáticos-construtores. Inicialmente Wilhelm Schickard (1592-1635) por volta de 1623 fez o primeiro autômato computacional¹. Dezenove anos depois, Blaise Pascal (1623 – 1662) construiu a sua máquina aritmética automática que efetuava cálculos com grande precisão. O que impressionava as pessoas daquela época, era o fato de tais máquinas permitirem a realização de operações matemáticas sem necessidade de lápis e papel. O homem apresentava os dados numéricos, escolhia a operação desejada e a máquina efetuava os algoritmos apresentando os resultados².

Desde a época de Pascal até nossos dias muitas coisas mudaram, e as máquinas computacionais deixaram de ser mecânicas para se tornarem eletrônicas, o processamento de informações ultrapassou as fronteiras da aritmética, alcançando variadas formas de expressão intelectual e ao final dos anos 1980, grandes massas utilizavam as tecnologias computacionais no mercado de trabalho por sua capacidade da automação informática que resulta na simplificação de processos complexos. Surgia um movimento na sociedade pela disseminação dos computadores digitais na efetuação de muitas tarefas para resolução de problemas. Passagem esta a qual doravante chamaremos como: **“do Velho PC (Papel Caneta) para o Novo PC (Personal Computer)”**.

No processo educacional, o uso de ferramentas computacionais, coloca em cena um problema de natureza epistemológica com respeito à validação do conhecimento ensinado no ambiente escolar. Enquanto as pressões sociais tornam necessário o contato do aluno com o computador em função do mercado de trabalho, os professores enfrentam um novo desafio na sua própria formação didática em disciplinas escolares. Afinal, como usar o computador como um recurso didático integrado ao conhecimento discutido em sala-de-aula?

¹ O’CONNOR, John J. & ROBERTSON, E. MacTutor History of Mathematics: Wilhelm Schickard. Turnbull WWW Server/SMCS - University of St Andrew. Scotland. Disponível em: <<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schickard.html>> Acesso em: 30.out.2001.

² PASCAL, Blaise. Pensamentos. Tradução: Olívia Bauduh. São Paulo-SP: Nova Cultural, 1999. (Coleção os Pensadores). p.5-9.

Na maioria das vezes é difícil para um professor do Ensino Fundamental, e mesmo Médio, entender o que é possível desenvolver com os estudantes em um LIE³, pois poucos conhecem o potencial didático dos computadores. Em grande parte das atividades realizadas, a visão que acaba prevalecendo consiste em levar o aluno do Velho PC para o Novo PC. Ou seja, o aluno é colocado diante de uma tarefa que é apresentada como um problema, e após realizar a tarefa, a atividade é concluída. Não há questionamentos sobre a natureza da atividade, não há discussão. Ao ser realizada uma atividade pelo aluno no computador para muitos professores houve a aprendizagem, no entanto, nem sempre o aluno aprendeu o que se pretendia ensinar. Neste contexto, muitas atitudes presentes em nas salas-de-aula tradicionais se repetem no LIE, e o distanciamento entre o conhecimento que se quer ensinar e a aprendizagem do aluno que se pretende obter é estabelecida através de um contrato didático implícito neste sistema. Por outro lado, ao se deparar com o computador, é comum ao professor atribuir a sua autoridade epistemológica à ferramenta computacional. Em certos momentos, o simples fato de uma atividade ter sido executada sem erros computacionais pode ser o suficiente para que o professor considere que um conhecimento representado pelo computador esteja correto. Em muitos casos, o professor simplesmente responde ao aluno uma determinada dúvida, com a seguinte frase: *“Funcionou no computador, então está correto!”*

Os problemas acima expostos foram observados desde 1998 no Laboratório Multimeios/FACED-UFC⁴. E os primeiros questionamentos ocorreram em um curso piloto de Geometria com uso do computador, durante a preparação de atividades para um curso com uso de recursos computacionais. Neste período, houve uma construção geométrica realizada em um programa computacional, em que se apresentou uma situação problema, a qual exigia a prova de uma conjectura gerada a partir do computador. Inicialmente, tentou-se trabalhar com as ferramentas computacionais possíveis no processo de validação, e os resultados experimentais apontavam para uma demonstração. No entanto, ao manipular a construção geométrica por simulação, ocorreu um pequeno travamento, que forçou uma outra prova da conjectura proposta. No entanto, a nova prova só pode ser realizada no Velho PC. Daí que pela primeira vez havíamos pensado na passagem do Novo PC para o Velho PC como uma alternativa educacional ao ensino de matemática.

³ Laboratório de Informática Educacional.

⁴ Faculdade de Educação – Universidade Federal do Ceará.

Diante do quadro exposto, neste trabalho discutiremos questões sobre o uso educacional dos computadores no ensino de Matemática com respeito à validação deste saber, a partir de provas e demonstrações. Neste contexto, os objetivos da pesquisa desenvolvida consistiram em:

- a) Compreender o papel do computador na Didática da Matemática, através da análise de situações que surgem no processo de manipulação de programas de computador voltados ao ensino;
- b) Verificar os tipos de limitação que podem ocorrer ao se tentar usar o computador no processo de validação matemática;
- c) Explicitar o papel da demonstração no desenvolvimento de atividades apropriadas ao ensino de matemática com uso do computador;
- d) Discutir a relação entre a prova matemática e a formação do raciocínio crítico do estudante com respeito aos recursos computacionais.

Para o desenvolvimento da investigação em questão, foi necessário participar e elaborar cursos de formação de professores no NTE⁵ de Quixadá, no estado do Ceará, bem como, a participação no desenvolvimento de atividades em cursos piloto realizado no Laboratório Multimeios entre 1997 e 2001, na pesquisa sobre o uso do computador no ensino de Geometria (entre 1997 e 1999) e no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente que visou o desenvolvimento de um curso à distância de construções geométricas com uso do computador (este realizado entre 1999 e 2001). Além destas situações, o processo de construção de atividades matemáticas para os cursos realizados, permitiu o desenvolvimento de experimentos no computador que viabilizaram a discussão sobre o processo de validação matemática e a passagem do Novo PC para o Velho PC.

ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

⁵ Núcleo Tecnológico Educacional.

Este trabalho foi organizado em sete capítulos, sendo que no Capítulo 1, é apresentada uma discussão epistemológica sobre o processo de validação do saber matemático, considerando o significado do termo demonstração mediante abordagens dedutivas e heurísticas.

No Capítulo 2, são apresentadas algumas técnicas usuais de prova, com objetivo em explorar o caráter técnico das demonstrações frente abordagens heurísticas e dedutivas no trabalho prático do matemático. Ao final do capítulo, é feita a apresentação da prova automática de teorema, como procedimento que permite a construção de argumentos dedutivos no computador, através da construção de funções por meio do universo e do teorema de Herbrand. Pela prova automática de teorema, se pretende exibir aspectos relativos aos procedimentos dedutivos com respeito à computação, de modo que seja possível compreender alguns pontos relativos à estrutura do Novo PC.

No Capítulo 3, se inicia a discussão sobre a informática educativa no ensino de matemática, procurando inicialmente mostrar algumas concepções conceituais sobre o campo de atuação da informática educativa na prática escolar, abordando a seguir o ensino de matemática. Também são apresentadas questões sobre o ensino de matemática no contexto escolar brasileiro, em que são enfocadas carências e necessidades presentes atualmente no Estado do Ceará.

No Capítulo 4 são apresentados os conceitos sobre *software*⁶ educativo, destacando algumas propostas em termos de programas educacionais, e ao longo do texto é discutido o papel dos programas apropriados à manipulação simbólica e geometria dinâmica no ensino de matemática. Além disto, é feita uma breve apresentação de projetos que envolvem o desenvolvimento de recursos para *Internet*, e nisto são destacados o projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente realizado no Laboratório Multimeios da FAGED/UFC, ressaltando a construção do *software* de geometria dinâmica GeoMeios que é construído como um mini-aplicativo para *Internet* por meio da linguagem *Java*. Nesta discussão sobre *software* educativo, um dos objetivos é apresentar as tendências de trabalho didático com uso de computadores na *Internet*, apresentando a necessidade de formação didática para os profissionais que estão desenvolvendo tais tecnologias de comunicação.

No Capítulo 5, inicia-se uma discussão sobre o ensino prático reflexivo em relação ao saber matemático através de SCHÖN (2000), sendo apresentada a Seqüência

⁶ Programa de Computador.

Fedathi como uma proposta metodológica para o ensino assistido por computador. Neste tópico, procura-se discutir a relevância do uso do computador como instrumento que permite ao aluno viver uma experiência matemática significativa, e também o papel do professor reflexivo com uso das novas tecnologias educacionais no ensino de matemática. Neste contexto, é proposto o neologismo “ensinagem” como uma crítica à postura psicologista existente nos meios educacionais. Assim, neste capítulo se relaciona a prática reflexiva ao processo de validação matemática a partir da passagem do Novo ao Velho PC, levando em consideração questões relativas à negociação professor-aluno no ensino de matemática com uso do computador.

No Capítulo 6, são apresentados os resultados da investigação por meio de situações problemas que são denominadas por “situação surpresa”, pois apresentam características específicas que devem ser consideradas. Estas situações tiveram origem no Novo PC e a cada situação apresentada é feita uma discussão sobre os limites e dificuldades que surgem no computador enquanto possibilidades didáticas.

O Capítulo 7 traz as considerações finais, e após este capítulo são apresentadas as referências bibliográficas e os anexos contendo detalhes sobre as situações matemáticas apresentadas no Capítulo 6.

Este trabalho é uma abordagem sobre a educação matemática e informática educativa, que procura apresentar uma proposta teórico-metodológica para o ensino assistido por computador, e neste texto está sendo apresentadas as bases teóricas e os primeiros estudos sobre a passagem do Novo ao Velho PC. Portanto, não se trata de um estudo conclusivo e finalizado, mas é o início de uma discussão que deverá ser levada a diante nos anos seguintes.

CAPÍTULO 1 – EPISTEMOLOGIA DOS PROCESSOS DE VALIDAÇÃO MATEMÁTICA

1.1 – Sobre Demonstrações Matemáticas

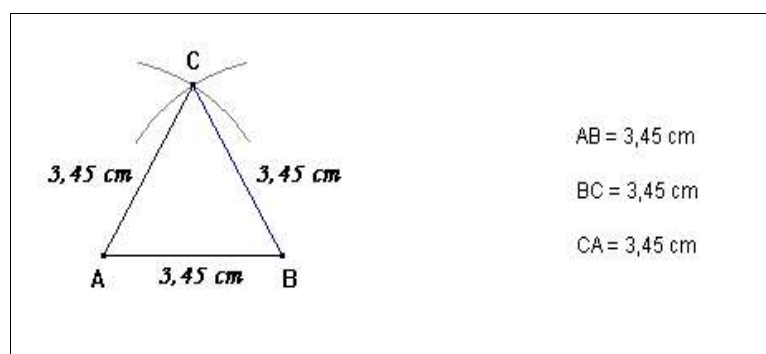


Figura 001 – O triângulo ABC é equilátero com a medida de lado 3,45 cm.

Construção com régua e compasso

1. Traçar um segmento de reta AB;
2. Construir uma circunferência c_1 com centro em A e medida de raio AB;
3. Construir uma circunferência c_2 com centro em B e medida de raio BA;
4. Marcar um ponto de interseção das circunferências c_1 e c_2 ;
5. Nomear o ponto de interseção marcado como C;
6. Traçar os segmentos BC e CA.

Nem todos os teoremas podem ser divididos naturalmente em hipótese e conclusão. Assim, é praticamente impossível dividir dessa maneira o teorema: “Há uma infinidade de números inteiros”.

POLYA (1978: p. 125)

Porém, tomando como base o enunciado do exemplo 001, com base nos triângulos equiláteros é proposto um novo exemplo na forma condicional:

Exemplo 002: Problemas de Demonstração

Se o triângulo ABC é equilátero, então a medida dos lados $AB=BC=CA$.

Hipótese: ABC é equilátero.

Conclusão: A medida dos lados $AB=BC=CA$.

O problema de demonstração consiste em mostrar que as medidas dos lados AB, BC e CA são iguais⁷, no entanto, não se deve utilizar um instrumento físico para o mesmo. É preciso recorrer aos instrumentos racionais para responder a questão. Neste caso, considere que a concepção de ferramenta em matemática difere das concepções existentes no mundo físico. A ferramenta matemática é parte do saber matemático reconhecido. Pode ser uma teoria, uma definição, pode ser um teorema conhecido. Neste caso se recorrerá ao saber que se possui sobre circunferências através de uma definição.

Considerando o algoritmo apresentado para o exemplo 001 anteriormente, se sabe que o segmento AB possui uma medida qualquer d . Entretanto, estabelecida a medida de AB, o que se quer mostrar é que BC e CA devem ser iguais à medida d . Dando continuidade à prova, se deve admitir uma definição reconhecida no saber matemático sobre a circunferência.

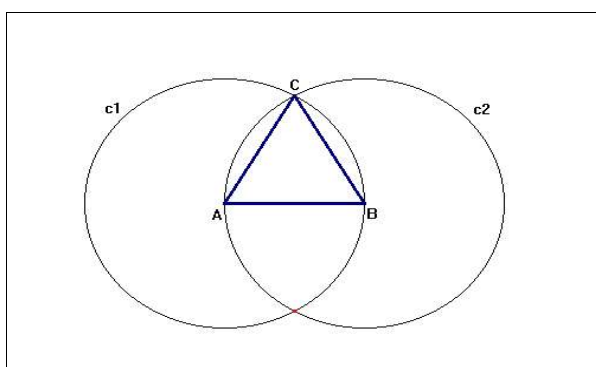


Figura 002 – Construção geométrica de um triângulo equilátero.

O lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância conhecida d de um ponto C é a circunferência de centro C e raio d .

RESENDE & QUEIROS (2000: p. 191.).

⁷ Um segmento só pode ser igual a si mesmo, portanto podemos dizer que há segmentos congruentes, mas não se pode confundir congruência com igualdade. Por outro lado, como a medida é um número atribuído ao segmento, posso falar em medidas iguais. Em outros termos, se pode dizer que o triângulo ABC é equilátero se tiver lados congruentes, mas com medidas iguais entre si.

Pela definição apresentada por RESENDE & QUEIROS, é possível considerar que uma circunferência possui como propriedade a medida do seu raio constante. Com base em tal informação e pela figura 002, é possível concluir que:

- i) O segmento AB e CA são raios da circunferência c_1 ;
- ii) O segmento AB e BC são raios da circunferência c_2 ;
- iii) Se pela definição 001, os raios de uma circunferência possuem a mesma medida d independente de sua posição, então considere que $d=AB=CA$ na circunferência c_1 , e $d=AB=BC$ na circunferência c_2 ;
- iv) Se AB pertence à circunferência c_1 e c_2 , e $d=AB=CA$, assim como, $d=AB=BC$, é possível concluir que $d=AB=BC=CA$;
- v) Como os segmentos AB, BC e CA formam o triângulo ABC, temos que a hipótese e a conclusão propostas são verdadeiras.

Portanto, pelo uso de argumentos racionais no exemplo 002, foi possível compreender que o algoritmo proposto no exemplo 001 é válido em termos matemáticos para construção de um triângulo equilátero, em decorrência da definição de circunferência apresentada por RESENDE & QUEIROS.

Portanto, o que é possível compreender com base nos exemplos 001 e 002, é que o processo de validação por demonstração está associado ao entendimento dos fatos matemáticos, enquanto que o processo de validação por verificação explicita uma incógnita, mas não explica os procedimentos utilizados. E foi a diferença entre verificação e demonstração, que em termos históricos, tornou a demonstração uma grande ferramenta para o desenvolvimento da Matemática entre os gregos antigos.

A gênese das demonstrações matemáticas ocorreu na Grécia no período conhecido como Antigüidade Clássica. Porém, a Matemática não surgiu entre os gregos, afinal, desde os primórdios da origem humana várias tribos faziam uso do raciocínio matemático para sobrevivência. E relatos e achados arqueológicos mostram que no terceiro milênio antes de Cristo, as civilizações dos egípcios e babilônios estavam acostumadas ao trabalho com o cálculo de áreas e volumes, enquanto os chineses separadamente do Ocidente⁸, efetuavam muitos avanços em termos matemáticos.

⁸ Entretanto, alguns estudiosos ao considerar que houve um contato significativo entre a China e a Índia, devem considerar possibilidades de acesso à cultura do Ocidente através dos indianos, visto que os mesmos tinham contatos estreitos com o Oriente Médio. Mesmo assim se houve relação entre os chineses e a cultura ocidental através dos indianos, muito disto está no campo da especulação histórica.

A Matemática desenvolvida nas civilizações do Oriente Médio e Extremo na Antiguidade Clássica, segundo BOYER (1974: p.143) correspondiam à construção de coleções de problemas como o *Chui-Chang Suan-Shu* que revelam pontos comuns entre as culturas matemáticas dos egípcios e babilônios, como se pode acompanhar no trecho transcrito abaixo:

Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades de triângulos retângulos. Ao passo que os gregos da mesma época estavam compondo tratados logicamente ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos babilônios e egípcios de compilar coleções de problemas específicos [...]

Em certos aspectos, a matemática oriental se caracterizou pela compilação de problemas de determinação, e por tais motivos é possível que a Matemática do Oriente Médio e Extremo, fosse meramente cumulativa e vinculada à tradição ancestral. Enquanto, na mesma época, os gregos efetuavam trabalhos alicerçados em uma metodologia argumentativa, sistemática e expositiva, com uso de demonstrações.

Não que a matemática egípcia, babilônica ou chinesa não fosse desenvolvida. Pois em termos de abrangência em conhecimentos matemáticos, indiscutivelmente, as civilizações orientais eram capazes de uma rica abordagem sobre diversos assuntos. Porém, segundo LÉVY (1998: p.79–82) a diferença da cultura matemática dos gregos em relação às civilizações existentes na Antiguidade Clássica, estava no ato de validar seus argumentos com base em pressupostos racionais aceitáveis.

Para LÉVY o mérito dos gregos antigos não foi a invenção da Geometria, mas sim, a descoberta da verdade geométrica.

Ao mencionar o relato que abre *O Timeu de Platão*⁹, LÉVY expressa a postura dos gregos com respeito ao conhecimento matemático. Segundo o texto de Platão, quando um sacerdote egípcio de Saís (cidade entre as bifurcações do delta do Nilo) questiona Sólon é dito que:

“Vós gregos, sois eternas crianças! Não há um único velho” E quando Sólon lhe pergunta o que quer dizer com isso, o sacerdote continua: “Jovem todos vós o sois com alma; pois a vossa alma

⁹ PLATÃO. *Timeu*. São Paulo-SP: Nova Cultural, 1987. (Coleção os Pensadores).

não encerra nenhuma opinião antiga, nenhuma tradição remota, nenhum saber embranquecido pelo tempo”.

LÉVY (1998: p. 81)

Nesta perspectiva, o que havia de inovador na matemática grega era a descoberta da demonstração. Pois o processo de validação por demonstração transformou a natureza do saber matemático em uma abordagem racional argumentativa que foi capaz de superar os obstáculos postos pela limitação dos instrumentos de verificação¹⁰ e pela preservação das tradições. A demonstração, sobretudo, é uma abordagem racional sobre o conhecimento humano e sobre a verdade.

O saber do grego não vem da tradição. O conhecimento é reatualizado a cada geração. A verdade não é herdada, ela deve ser fundada aqui e agora. A alma grega é sempre jovem, pois fica próxima à eclosão sempre reiterada do saber. Quando um egípcio aprende a calcular o volume de uma pirâmide, ele está herdando. Quando Theetete acompanha a demonstração de Teodoro, está assistindo ao nascimento de um Teorema.

LÉVY (1998: p. 81)

Com o processo de validação por demonstração, não se poderia fazer mais qualquer afirmação, sem um argumento racional e procedente. A Matemática deixaria de ser um saber teocêntrico associado às tradições para se tornar antropocêntrico e centrado na razão humana ao longo dos anos.

Segundo SINGH (2000: p. 64 - 74), os próprios gregos sentiram o impacto do processo de validação por demonstração, quando um contra-exemplo colocou em cheque as concepções matemáticas de Pitágoras e seus discípulos sobre a comensurabilidade de segmentos. Para Pitágoras todos os segmentos eram comensuráveis entre si, entretanto, SINGH menciona uma história que diz que Hipaso, discípulo de Pitágoras, tentando encontrar uma fração equivalente que tornaria a medida do segmento da diagonal de um quadrado comensurável em relação à medida do segmento do lado, viu que não existia uma fração equivalente para esta circunstância, e assim se apresentaria um caso em que existiam dois segmentos incomensuráveis entre si. SINGH menciona que Pitágoras teria condenado Hipaso à morte por afogamento por ter revelado sua descoberta, no entanto, tal versão dos fatos não é uma unanimidade entre historiadores da matemática.

¹⁰ O uso de instrumentos físicos e de processos aritméticos simples baseados em algoritmos na verificação dos resultados.

Uma demonstração sobre o assunto devidamente estruturada foi apresentada dois séculos depois em *Os Elementos* de Euclides ao final do século IV a.C. ou no início do século III a.C. A contribuição do trabalho de Euclides para o saber matemático e para o processo de validação por demonstração foi o estabelecimento de um modelo formal que permitiu a caracterização do conhecimento matemático através de proposições racionais. Em Euclides, os postulados e axiomas são verdades evidentes que originam a cadeia de razões das definições e dos teoremas. As definições explicam o significado dos objetos matemáticos e os teoremas são proposições demonstradas através de provas.

Segundo BOYER (1978: p.77-78) é possível que as concepções de Euclides sobre os postulados e axiomas tenham por influência as idéias de Aristóteles que fez distinção entre axiomas e postulados. Para Aristóteles os axiomas (ou noções comuns) devem ser convincentes por eles mesmos, ou seja, verdades comuns para todos os estudos. Entretanto, os postulados são menos óbvios, pois dizem respeito aos assuntos específicos. Mesmo sabendo que nos manuscritos encontrados de *Os Elementos* ocorre distinção entre os postulados e axiomas, não se pode afirmar que Euclides compartilhava exatamente o mesmo ponto de vista que Aristóteles quando apresentou seus postulados e axiomas. Porém, na atualidade, os matemáticos não distinguem axiomas e postulados, considerando tais palavras como sinônimos.

O fato de Euclides ter estabelecido uma estrutura organizada em que axiomas, definições e teoremas estão devidamente relacionados entre si, fazem da demonstração um ato condicionado ao saber matemático estabelecido e reconhecido. Sendo assim, para se poder provar alguma afirmação, não se pode partir de enunciados desconhecidos, é necessário estabelecer relações entre os novos e antigos argumentos de forma racional, e este aspecto é o que fundamenta uma definição plausível sobre demonstração matemática. Segundo SANTOS (1963: p.422), sistematizar o significado do processo de validação por demonstração, exige que seja distinguido o que se mostra (mostração) e o que se demonstra (demonstração).

Mostração da verdade é a iluminação da mesma, que se revela per se (per se notas) ao exame de um juízo, que a exhibe pela intuição imediata de seu objecto.

A demonstração já é o processo lógico pelo qual a verdade se mostra por meio de outra, da qual é inferida. Exige, pois, o termo médio.

SANTOS (1963: p. 423)

Neste sentido, o que se *mostra* ocorre sem intervenção de um termo médio, por outro lado, o que se *demonstra* é feito por meio de algo que corresponde ao saber matemático reconhecido¹¹. Além disto, SANTOS considera que uma prova fundamentada em termos racionais pode ser imediata e mediata, visto que a prova mediata é aquela que é de interesse do matemático:

A prova racional pode ser imediata e mediata. A imediata é aquela por cujo processo adquirimos a certeza de alguma coisa que se manifesta por si mesma à nossa mente, como a que surge da análise imediata dos conceitos e dos factôres. A mediata não se manifesta por si mesma ao intelecto, mas é aquela que captamos através do processo intelectual, pelo emprego de meios, como se processa no raciocínio, na argumentação, na demonstração. A prova mediata é, propriamente, a demonstração, a qual pode ser directa ou indirecta. É directa quando adquirimos certeza de alguma coisa, não que ela se manifeste per si ao intelecto. A indirecta é a que usa outro processo, como seja o emprego das negativas, dos contrários, etc.

SANTOS (1963: p. 432)

Portanto, mediante as concepções de SANTOS (1963: p. 434), na Matemática a demonstração é a prova mediata e esta pode ser direta ou indireta. Quanto à prova imediata, esta seria decorrente do processo de especulação dos conceitos que fundamentam o saber humano. Portanto, a prova imediata está relacionada ao estudo das condições e possibilidades para o saber humano através da razão, e nisto, a prova racional imediata é um campo de interesse para o saber filosófico. Por outro lado, os postulados e axiomas de Euclides não poderiam ser validados por demonstração, pois são os fundamentos do sistema formal estabelecido para construção do edifício matemático. Deste modo, em *Os Elementos* houve a intenção em se construir uma Geometria fundada em demonstrações com base no saber matemático reconhecido, mas as demonstrações não poderiam atingir os postulados e axiomas, pois estes seriam razões primeiras mostráveis e inquestionáveis do ponto de vista matemático. Deste modo, o modelo euclidiano apresentado em *Os Elementos* não só foi um parâmetro para Geometria durante mais de dois mil anos, mas apresentou um modelo de sistema formal axiomático e procedimentos de demonstração que influenciaram outros campos do saber humano, no transcorrer dos séculos. No entanto, no século XIX com as geometrias não-euclidianas, e as propostas

¹¹ O termo imediato, neste caso, é compreendido como "sem mediação", ou seja, trata-se de algo que se revela sem uma explicação prévia, pois é compreensível para percepção humana facilmente.

metamatemáticas, ocorreu uma mudança de postura dos matemáticos frente as concepções sobre Geometria, sistema axiomático e demonstração que serão discutidos no próximo tópico.

1.2 – Demonstrações e os Processos Dedutivos

Com o passar dos tempos, o modelo axiomático euclidiano ia sendo incorporado em várias áreas da matemática, de modo que as teorias formais poderiam ser descritas conforme MACHADO (1997: p. 30) a partir de termos primitivos, regras para formação de fórmulas, axiomas, regras de inferência e teoremas. Para MACHADO, os termos primitivos descrevem os objetos concretos tratados por uma teoria, enquanto as regras de formação das fórmulas, distinguiriam as *formulas bem estruturadas* daquelas que exigem significado. Quanto aos axiomas ou postulados, estes seriam verdades básicas que careceriam de evidência empírica, enquanto as regras de inferência distinguem dentre as fórmulas *bem estruturadas* quais são os teoremas, enquanto verdades demonstráveis a partir dos axiomas.

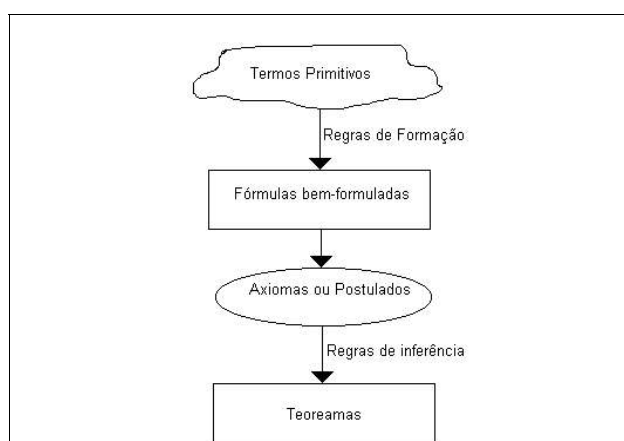


Figura 003 – Esquema proposto por MACHADO (1997:30) para explicar os sistemas formais axiomáticos.

No caso do sistema formal axiomático euclidiano, os termos primitivos são as noções de ponto, reta e plano, e a partir destes, se obtém todas as outras relações. Euclides enunciou em seu sistema cinco postulados que caracterizaram sua geometria. São estes os postulados euclidianos:

P1. É possível traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.

P2. Qualquer segmento de reta finito pode ser prolongado indefinidamente para construir uma linha reta.

P3. Dado um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada.

P4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.

P5. Se uma reta cortar duas outras de modo que dois ângulos interiores de um mesmo lado tenham soma menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzarão, se prolongadas indefinidamente, do lado da primeira reta em que se encontram os dois ângulos citados.

MACHADO *apud* EUCLIDES (1997: p. 31-32)

O postulado P5 inquietou muitos matemáticos durante anos, pois não parecia este ser tão evidente quanto os outros postulados. O postulado P5 parecia ser mais um teorema como os muitos que foram enunciados e demonstrados em *Os Elementos*.

Durante muito tempo, comentaristas árabes e gregos de Euclides, tentaram a eliminação do postulado P5, tentando-o apresentar como um teorema que poderia ser obtido a partir dos quatro primeiros postulados, mas tal empreitada foi insatisfatória. Segundo MACHADO (1997: p.33), o italiano Sacchieri no século XVIII, investigou a independência do P5 em relação aos outros postulados. Sacchieri pensou que iria chegar a alguns absurdos, e curiosamente obteve muitos resultados considerados “estranhos”, mas não encontrou nenhuma inconsistência. Porém, foi no século XIX que a independência do P5 em relação aos outros postulados pôde ser estabelecida. Através dos trabalhos independentes de Gauss, Lobachevsky e Bolyai, que averiguaram novas possibilidades de geometrias alternativas consistentes.

Lobachevsky e Bolyai publicaram trabalhos independentes sobre esses novos modelos de geometrias. E um pouco adiante Riemman, de modo independente também publicou um trabalho em que uma nova geometria estava sendo fundamentada. No exemplo de Riemman, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior que dois ângulos retos. Entretanto, em Lobachevsky, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois ângulos retos.

A partir dos resultados de Lobachevsky e Riemman, surgiu como necessidade à demonstração da consistência das novas geometrias frente o sistema formal axiomático da geometria euclidiana, por outro lado, caso não fosse feito tal trabalho, poderia

ser posto em dúvida a eficiência do modelo formal axiomático euclidiano. Portanto, o problema das geometrias não-euclidianas, colocaria em evidência aspectos relativos a consistência do saber matemático. Assim, o problema se resumia em mostrar a consistência das geometrias não-euclidianas em relação ao sistema formal axiomático euclidiano, mas, quais os procedimentos que permitiriam tal feito?

Existem pelo menos duas maneiras. A primeira consiste em encontrar uma interpretação dos termos primitivos da teoria na qual todos os axiomas se mostrem evidentemente verdadeiros e, em consequência disso, todos os teoremas. A dificuldade desta empreitada é a verificação da veracidade dos axiomas interpretados. Outro método de verificação de consistência é o estabelecimento da consistência relativa, isto é, a demonstração de que se um sistema formal A for consistente, então o sistema formal B também o será. Consegue-se isso mostrando que se existir uma interpretação I_A capaz de revelar a consistência do sistema formal A, então existirá também uma interpretação I_B que revelará a consistência do sistema B.

MACHADO (1997: p.34)

Pelo estabelecimento de consistência relativa, foi possível demonstrar que as geometrias de Riemman e Lobachevsky se somam a geometria euclidiana. No caso da geometria de Riemman, o que ocorreu foi que se adotou os termos primitivos da geometria euclidiana, que são ponto, reta e plano para que fossem interpretados em uma superfície esférica euclidiana que corresponderia ao plano riemmaniano. Ocorreu que cada postulado de Riemman se transformou em um teorema de geometria euclidiana. Logo, como a interpretação do plano riemmaniano foi válida na geometria euclidiana, isso tornou as concepções de Riemman consistentes. O mesmo ocorreu com a proposta de Lobachevsky. Tais reformulações da Geometria representaram o maior avanço desta área desde *Os Elementos de Euclides*. Porém, estes avanços só foram possíveis mediante o questionamento de um dos postulados de Euclides.

A partir das geometrias não-euclidianas, surgiu um novo olhar sobre as concepções acerca da noção de sistema axiomático. De certo modo, houve uma ruptura com o idealismo matemático, e aos poucos foi se instituindo concepções sobre a necessidade de organização e estruturação do saber matemático. Afinal, seria possível que enunciados tidos como corretos ao longo dos séculos, apresentassem incoerência em seus termos. Pois durante séculos o saber matemático foi sendo produzido, sem critérios de

ordenação adequados. Neste sentido, ao final do século XIX, surgiu o movimento logicista coordenado por Bertrand Russell e Gottlob Frege.

Segundo MACHADO (1997: p. 26-27), a tese logicista consistia em mostrar que a Matemática é redutível aos princípios da Lógica e, na obra clássica de Russell e Whitehead o *Principia Mathematica*, se pretendia obter as leis da Aritmética a partir dos princípios formais da Lógica. Para tanto, era necessário aos logicistas mostrar que todos os enunciados matemáticos poderiam ser expressos em termos lógicos, e que todos os enunciados matemáticos verdadeiros eram resultantes de verdades lógicas. Deste esforço, houve o surgimento da teoria dos conjuntos, de modo que foi possível uma equiparação entre esta e a lógica proposicional em suas regras básicas, no entanto, alguns enunciados apresentavam contingências das quais não era possível decidir se uma proposição bem formulada era verdadeira ou falsa. Estas eram proposições indecidíveis, que tornavam em certas situações um sistema formal axiomático paradoxal. Um exemplo de enunciado contingente usado atualmente é a famosa expressão: “*Tudo é relativo*”. Neste caso, ao afirmar que a expressão tudo é relativo é verdadeira, ela acaba por se contradizer, pois se trata de uma expressão absoluta. O problema das proposições contingentes não pôde ser superado entre os logicistas, mas segundo MACHADO (1997: p. 29), o problema não era apenas a superação destes paradoxos, mas sim, a viabilidade do programa logicista.

Diante das insatisfações existentes no programa logicista, por volta do final do século XIX e início do século XX, surgiu um novo movimento conhecido como *formalismo*, que tinha a sua frente o matemático David Hilbert. Segundo MACHADO (1997: p. 36), na proposta de Hilbert, a Matemática é visto como um saber independente da Lógica, mas no formalismo, é possível a utilização da Lógica como uma linguagem para a Matemática, e com base nestas idéias, os objetivos dos formalistas eram:

- (a) Cabe ao saber matemático descrever objetos e construções concretas e não-lógicas;
- (b) Tais construções devem ser estruturadas em teorias formais, em que a Lógica é uma ferramenta fundamental;
- (c) O trabalho do matemático deve ser o estabelecimento de teorias formais consistentes, que busquem a completude até que seja possível a formalização completa da Matemática.

Ao delimitar o campo de atuação da Matemática e da Lógica, com respeito ao trabalho matemático, Hilbert propôs a Lógica como uma ferramenta para estruturação dos sistemas formais, mas o que é um sistema formal bem estruturado? Como foi apresentado anteriormente, um sistema formal possui termos primitivos, regras de formação, fórmulas bem-formuladas, axiomas e teoremas. E qualquer sistema formal dicotômico viável, obedece duas regras básicas, a primeira é a lei de não-contradição, e a segunda é a não trivialidade.

Segundo COSTA (1993: p. ix – x), a lei de não-contradição ou lei do terceiro excluído, afirma que um sistema formal dedutivo K que contenha em seus termos a operação lógica negação (\sim), é considerado inconsistente se, no conjunto dos seus teoremas, existe pelo menos dois deles em que um seja a negação do outro. Portanto, se em K existem os teoremas T e $\sim T$, é possível afirmar que o sistema formal K é inconsistente, caso isto não aconteça em K , se diz que o sistema formal dedutivo K é consistente.

Quanto à trivialidade, um sistema formal dedutivo X é trivial, quando os conjuntos de suas fórmulas são coincidentes com seus teoremas, em outros termos, caso seja possível obter em X todos os enunciados bem-formulados segundo a linguagem de X , não é possível distinguir o que é demonstrável do não-demonstrável. Afinal, se em um sistema tudo pode ser provado como um teorema, o sistema formal deixa de ter interesse lógico por não distinguir o verdadeiro do falso. Sendo assim, o sistema formal X é considerado trivial, por não permitir a separação entre verdadeiro e o falso.

Portanto, se um sistema formal axiomático obedece à lei de não-contrariedade e não é trivial, o mesmo é consistente, Além disto, deve ser possível através de regras de inferência do sistema a dedução de teoremas.

Em que consiste o termo dedução utilizado para os sistemas formais?

As Deduções ou derivações nos campos da lógica formal proposicional, segundo OLIVEIRA (1996: p. 54), correspondem intuitivamente às concepções de demonstração em Matemática. Grosso modo, uma dedução representa uma relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas.

Segundo HOFSTADTER (2001: p. 213), a diferença entre derivações e demonstrações, está na artificialidade das derivações. Pois os métodos do cálculo proposicional empregado nos sistemas formais dedutivos, permitem a construção de estruturas artificiais que se assemelham ao processo de validação por demonstração. No entanto, Hofstadter considera que nas demonstrações, há uma informalidade que a

caracteriza como um produto genuinamente do pensamento humano, escrito em linguagem humana.

Todos os tipos de aspectos complexos do pensamento podem ser empregados em demonstrações e, embora eles possam “parecer corretos”, pode-se sempre cogitar se eles podem ser defendidos logicamente. É para isso, na verdade que a formalização existe. Uma derivação é uma contrapartida artificial de uma demonstração e seu propósito é o de alcançar o mesmo objetivo, mas por meio de uma estrutura lógica cujos métodos são não só totalmente explícitos, mas também muito simples.

HOFSTADTER (2001: p.213)

Se por um lado, nas demonstrações a informalidade caracteriza aspectos do raciocínio humano correspondentes ao Velho PC, por outro, na simplicidade dos enunciados simbólicos, são construídas poderosas ferramentas de inferência, que fazem do cálculo proposicional um meio eficiente para obtenção de conclusões. No entanto, não se pode desconsiderar que no processo lógico-proposicional na obtenção de deduções ocorre a superação da sintaxe em relação à semântica.

Entretanto, os conceitos de derivação e demonstração implicam em um entendimento mais aprofundado, dos processos lógicos implícitos na construção de deduções como método de validação por demonstração. Quanto aos aspectos técnicos, o processo de dedutibilidade está relacionado às concepções básicas sobre o cálculo proposicional, e também com a definição atribuída ao termo argumento.

Segundo OLIVEIRA (1996: p. 15-16), um argumento pode ser concebido como uma seqüência finita de proposições em uma determinada linguagem, e suas partes são as premissas e a conclusão. As premissas são proposições simples ou compostas que são subsídios para uma conclusão. A conclusão é uma proposição simples ou composta resultante das premissas.

Dado o conjunto das premissas: $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n\}$ considerando que $n \geq 1$, e tendo a conclusão X, em termos simbólicos, as notações usadas para representar um argumento são apresentadas na tabela 001.

Tabela 001 - Tipos de notação para representar um argumento na lógica proposicional.

Notação 01	Notação 02	Notação 03
$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n}{X}$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n / X$	$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline X \end{array}$

Se o conjunto das premissas $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n\}$, e a conclusão é X , então se pode dizer que as premissas P resultam em X . No entanto, o simples ato de escrever um argumento não permite que se conheça a validade ou invalidade deste. Torna-se necessário um teste que permita saber em que situações um argumento pode ser válido ou não. Este teste compreende o entendimento do termo implicação na lógica proposicional.

Uma implicação corresponde a uma relação entre um antecedente e um conseqüente. Em termos de argumentos lógicos, os antecedentes são as premissas, e o conseqüente é sua conclusão. Portanto, ao considerar um argumento com o conjunto de premissas $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n\}$ e uma conclusão X , que pode ser escrito como P/X , e pode ser lido como P resulta em X ; ocorre a implicação, quando os antecedentes correspondem ao conjunto P , e o conseqüente é a conclusão X . Sendo assim, se lê que P implica em X , e se escreve $P \Rightarrow X$, tal que, o símbolo (\Rightarrow) representa a relação de implicação¹².

Um argumento P/X é válido quando da implicação $P \Rightarrow X$, se sabe que o valor lógico do conseqüente X é verdadeiro independente do valor lógico do antecedente P , ou ainda, quando os valores lógicos do antecedente P e do conseqüente X são

¹² Para alguns autores como DAGHLIAN (1986: p. 47), na lógica proposicional o termo condicional (\rightarrow) e implicação (\Rightarrow) se assemelham, mas são coisas distintas. Enquanto o condicional é uma operação lógica sobre proposições, a implicação expressa uma relação entre conjuntos de proposições. Tanto condicional como implicação são operacionalizáveis, e uma implicação pode ser um condicional, no entanto, um condicional não pode ser uma implicação.

simultaneamente falsos. Um argumento P/X é inválido quando da implicação $P \Rightarrow X$, se sabe que o valor lógico do conseqüente X é falso quando o valor lógico do antecedente P é verdadeiro.

Tabela 002 – Exemplificação dos termos da implicação formal.

Nomenclatura	a	b	$K(a \vee b)$	$L(a \wedge b)$	$X(L \wedge K)$
Caso 01	V	V	V	V	V
Caso 02	V	F	V	F	F
Caso 03	F	V	V	F	F
Caso 04	F	F	F	F	F

Considerando a tabela-verdade¹³ apresentada (tabela 002), e o argumento K/X correspondente à implicação $K \Rightarrow X$, se pode observar que o argumento é válido para os casos 01 e 04, quando são comparadas as tabelas-verdade de K e X , mas é inválido para os casos 02 e 03, pois nestes casos $V(K)=V$ e $V(X)=F$. Portanto, a implicação $K \Rightarrow X$ é válida nas situações em que $V(X)=V$ ou quando $V(K)=F$ e $V(X)=F$ ¹⁴.

Quando a implicação de um argumento é válida para todos os valores lógicos possíveis dos antecedentes e dos conseqüentes, se diz que o argumento é uma tautologia em todos os casos, portanto, se pode dizer que o argumento é uma dedução ou derivação. Com base na tabela 002, a implicação $L \Rightarrow a$, é uma tautologia para todas as suas possibilidades, portanto, se diz que do argumento L/a é possível escrever $L \vdash a$, que é lido como L deduz a , de modo que o símbolo (\vdash) representa o processo de dedução ou derivação.

Em linhas gerais, o argumento L / a é dedutivo ou derivável, pois é possível escrever que a implicação de $L \Rightarrow a$ é uma tautologia, pois é verdadeiro para todos os casos da tabela-verdade abaixo (Tabela 003). Portanto, neste caso, se escreve $L \vdash a$.

Tabela 003 – A implicação $L \Rightarrow a$ torna o argumento L / a dedutivo.

Nomenclatur a	a	b	$K(a \vee b)$	$L(a \wedge b)$	$L \Rightarrow a$
Caso 01	V	V	V	V	V
Caso 02	V	F	V	F	V
Caso 03	F	V	V	F	V
Caso 04	F	F	F	F	V

¹³ A tabela-verdade é uma técnica para obtenção de todos os valores lógicos possíveis em operações proposicionais. O seu equivalente gráfico é a árvore de possibilidades, e são meios de aferir o conhecimento lógico formal.

¹⁴ Ao expressar $V(X)=F$ se quer dizer que "o valor lógico da proposição X é falso". Ao dizer $V(X)=V$ se diz que "o valor lógico da proposição X é verdadeiro".

No entanto, em um argumento dedutível, segundo DAGHLIAN (1986: p.62), as premissas correspondem às demonstrações e a conclusão é chamada por teorema. Os argumentos simples dedutíveis são conhecidos como regras de inferência.

Em certo sentido, o processo dedutivo pelo formalismo, hoje é parte do desenvolvimento matemático, e em muitos momentos permite compreender uma demonstração. No entanto, o procedimento dos matemáticos, segundo DAVIS & HERSH (1985: p.384) em muitos casos não corresponde à prática formalista e ao processo dedutivo.

Como uma filosofia da matemática, o formalismo não é compatível com a maneira de pensar dos matemáticos praticantes. Mas isso não foi um problema para os filósofos da ciência positivistas. Como sua principal orientação era para a física teórica, podiam considerar a matemática simplesmente como uma ferramenta e não como um assunto vivo e crescente por si próprio. Do ponto de vista de um usuário, é possível, e por vezes mesmo conveniente, identificar a própria matemática com sua apresentação axiomática nos textos. Do ponto de vista do produtor de matemática, a apresentação axiomática é secundária. É somente um refinamento que é fornecido após o trabalho primário, o processo de descoberta matemática, ter sido efetuado.

Na maior parte das vezes, o matemático não questiona se o modelo que está usando é formalista ou não, ele usa o raciocínio que serve a questão que está desenvolvendo. Neste sentido, se as regras de inferência atendem suas necessidades, elas serão utilizadas, caso seja necessário usar outros meios, para o matemático não é um problema adotar um ponto de vista novo.

Ao questionar os métodos metamatemáticos de Hilbert, adotados para construção de sistemas formais não interpretados, se pretendia exibir consistência relativa e completude da Matemática, mas por volta de 1931, Kurt Gödel estabeleceu que completude e consistência são incompatíveis, mostrando que em sistemas que englobam a aritmética elementar é impossível o estabelecimento de consistência lógica interna. Em outros termos, Gödel mostrou que completude e consistência são incompatíveis. Por outro lado, o trabalho de Gödel não afirmou que os sistemas axiomáticos são inconsistentes. SINGH *apud* WEIL (2000: 153-154) expressou a situação em um tom bem humorado afirmando:

Deus existe já que a matemática é consistente e o Diabo existe já que não podemos prová-lo.

Com base em OLIVEIRA (1996: p.213), uma apresentação breve dos teoremas de incompletude de Gödel, permitem compreender do ponto de vista lógico-aritmético o problema das contingências nos sistemas formais axiomáticos.

1º Metateorema de incompletude de Gödel

Se os axiomas da aritmética elementar são verdadeiros, então existem verdades que não são teoremas.

Considere que há uma expressão $p(k)$ que será chamada por sentença de Gödel. A sentença $p(k)$ só é verdadeira, se e somente se, $p(k)$ não é teorema da aritmética elementar; portanto, se $p(k)$ fosse teorema, $p(k)$ seria falso, contrariando a suposição de que os teoremas são verdadeiros, portanto $p(k)$ não é teorema, mas é verdadeiro. No mais, $p(k)$ sendo verdadeiro $\sim p(k)$ é falsa, portanto, também $\sim p(k)$ não pode ser teorema. Portanto, existem verdades na aritmética elementar que não são teoremas.

As existências de tais enunciados desafiam a completude de um sistema formal axiomático, e exhibe a incompatibilidade entre completude e consistência. Além disto, como o saber matemático está fundado na Aritmética, basta considerar o princípio de indução matemática, há muitas conseqüências que afetam este saber com respeito as contingências, e diante destes fatos o próprio formalismo foi fortemente afetado e o primeiro atingido foi o trabalho de Hilbert.

2º Metateorema de incompletude de Gödel

Se T é uma teoria com um sistema decidível de axiomas, contendo a aritmética elementar, e consistente, então existe uma sentença aritmética que exprime “ T é consistente” que não é teorema de T .

Em outras palavras, há uma interpretação sintática da aritmética básica em T , de modo que os axiomas e teoremas da aritmética básica sejam escritos na forma de T , que segundo OLIVEIRA (1996: p. 215) corresponde às modernas teorias axiomáticas de conjuntos ou de classes. Como o formalismo adota como linguagem a teoria dos conjuntos, então é possível concluir que não há algum tipo de método lógico que prove que uma teoria axiomática, baseada na aritmética básica, seja consistente. Por outro lado, Gödel não disse em momento algum que a Matemática é inconsistente, mas mostra que os sistemas formais

axiomáticos, fundados na aritmética básica, e por conseqüência, em pressupostos da lógica proposicional, são limitados diante da completude e da consistência.

A lição que é possível extrair das idéias logicistas, formalistas e dos teoremas de Gödel mostram que a Matemática é um campo de conhecimentos autônomo, que atualmente usa a lógica formal como uma linguagem simbólica e interpretativa, mas que tal linguagem ainda é uma limitação ao avanço do saber matemático que se poderá obter futuramente. Por outro lado, se não fosse o avanço nas concepções da metamatemáticas, o saber matemático estaria ainda em um patamar próximo ao que existia antes do século XIX.

Com respeito às demonstrações, os teoremas de Gödel apresentam um questionamento a mais, pois se existem conjecturas bem construídas em um sistema formal, é necessário antes de demonstrar, saber se tais conjecturas são passíveis de demonstração. Ou seja, em certos momentos é possível que se esteja trabalhando sobre uma contingência, acreditando que à mesma seja uma proposição demonstrável. Por outro lado, é necessário o desenvolvimento de novas abordagens formais em termos de técnicas de demonstrações, de modo que seja possível, a superação dos limites existentes na atualidade.

No entanto, o processo de desenvolvimento das novas tecnologias estão associados aos avanços na lógica formal, e o processo dedutivo foi essencial ao desenvolvimento tecnológico computacional. Sendo assim, é possível prescrever limitações computacionais com respeito às contingências em termos operacionais pois o computador é uma máquina lógica, e tais implicações interferem no ensino de matemática assistido por computador. Quando se trabalha com o computador no ensino, não se pode deixar de lembrar que o Novo PC é uma máquina dedutiva que trabalha sobre problemas de determinação. As suas restrições tecnológicas, podem não permitir uma abordagem significativa em certos problemas matemáticos se for proposta apenas a passagem do Velho ao Novo PC. Por outro lado, uma mudança na forma de olhar os problemas matemáticos a partir do computador, com base na passagem do Novo PC para o Velho PC, pode ser um processo significativo que reúna às técnicas usuais de prova, na construção de uma nova abordagem sobre os problemas de demonstração, de modo que a capacidade criativa humana, seja estabelecida através do rompimento entre os procedimentos experimentais e os procedimentos matemáticos propriamente. No entanto para que seja possível avançar no contexto do Novo PC, a seguir é apresentado um breve estudo sobre a Heurística no contexto da Matemática.

1.3 – Demonstrações e os Processos Heurísticos

A tentativa em compreender como funcionam as operações mentais relacionadas ao processo solucionador de problemas, é conhecido como Heurística.

Segundo POLYA (1978: p. 86), a Heurística é uma área do saber humano que não era bem delimitada, e estava relacionada aos estudos de Lógica, Filosofia e Psicologia. Os objetivos da Heurística consistiam em compreender os métodos e as regras da invenção e da descoberta humana. Alguns dos indícios sobre este saber podem ser encontrados em comentaristas de Euclides.

No saber Matemático, um dos mais antigos fragmentos que falam sobre a Heurística, é o texto do *Livro VII das Collectiones* do matemático grego conhecido como PAPPUS que viveu por volta de 300 d.C.

A chamada Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para uso daqueles que, depois de terem estudado os Elementos comuns, desejam adquirir a capacidade de resolver problemas matemáticos e somente serve para este fim. É resultado do trabalho de três homens: Euclides, o autor dos Elementos, Apolônio de Perga e Aristeu, o Antigo. Ela ensina os procedimentos da análise e da síntese [...]

POLYA *apud* PAPPUS (1978: p. 104).

Para PAPPUS os estudos da Heurística, estavam relacionados ao desenvolvimento da capacidade para resolver problemas matemáticos, de modo que só serviria para tal fim, no entanto, para POLYA (1978: p.106), a Heurística pode se prestar também à resolução de problemas não matemáticos. Pappus considerava que a heurística matemática antiga apresentava dois tipos de abordagens que consistiam em procedimentos de análise e de síntese.

A análise, neste contexto, se inicia por aquilo que é necessário e que é admitido como correto, e disto se obtém conseqüências, e desta se deduz outras conseqüências até que se chegue em um ponto de partida para a síntese. No entanto, na síntese, também conhecida como resolução construtiva ou raciocínio regressivo, se adota como ponto de partida o último ponto da análise, que foi considerado verdadeiro, e disto se deduz o caminho inverso de modo que se chegue à resolução de um problema de determinação ou demonstração.

Nos processos heurísticos, segundo Pappus, ocorreriam dois tipos de análise, uma seria voltada aos problemas de determinação, e outra voltada aos problemas de demonstração. A diferença é que na análise voltada aos problemas de determinação, se pretende mostrar em que situação uma incógnita satisfaz um determinado condicionante, enquanto que na análise voltada aos problemas de demonstração se pretende saber se uma conjectura é ou não um teorema.

Em suma, tanto para os problemas de determinação como de demonstração, na heurística de Pappus, a análise corresponde à conversão de um enunciado em outro, a partir de uma seqüência de enunciados $\{01, 02, 03, \dots, n\}$ de modo que em n se pretende obter algum tipo de evidência matemática. Enquanto na síntese, se procura a partir da evidência matemática obtida pelo enunciado n , para averiguar o conjunto de enunciados conversíveis $\{n, \dots, 03, 02, 01\}$ de forma reversa, deve ser possível obter alguma resposta que confirme ou não um problema de determinação ou demonstração.

Para Polya na heurística de Pappus, é possível considerar a análise de um processo teórico que resulta na síntese que consiste na prática. Para contextualizar tais idéias seja considerado um exemplo não matemático apresentado por POLYA, de modo que seja compreensível o processo heurístico de Pappus.

Um homem primitivo deseja atravessar um riacho, mas não pode fazê-lo da maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso, a travessia tornou-se o objeto de um problema: “a travessia do riacho” é o x deste problema primário. O homem pode lembrar-se de já ter atravessado algum outro riacho por uma árvore caída. Ele procura ao redor uma árvore caída que lhe sirva, a qual se torna a sua nova incógnita, o seu y . O homem não encontra nenhuma nessas condições, mas há muitas árvores em pé à margem do riacho; ele deseja que uma delas caia. Ser-lhe-ia possível fazer uma árvore cair atravessada sobre o riacho? Surgem uma grande idéia e uma nova incógnita: por que meios poderia o homem derrubar a árvore sobre o riacho? Esta seqüência de idéias deve chamar-se análise, se aceitamos a terminologia de Pappus. Se o homem primitivo conseguir concluir a sua análise, ele poderá tornar-se o inventor da ponte e do machado. Qual seria a sua síntese? A tradução das idéias em ações. O ato final da síntese será a passagem do homem por sobre a árvore através do riacho.

POLYA (1978: p. 106).

Em suma, os procedimentos heurísticos estão próximos à lógica do descobrimento, revelando algo além da estrutura dedutiva logicista e formalista. Afinal, neste

processo, o significado supera a sintaxe. Entretanto, há outras questões presentes na Heurística que devem ser considerados.

Segundo POLYA (1978: p. 132-133), o raciocínio heurístico não se considera conclusivo, sendo algo provisório e aceitável, nele é possível obter uma estimativa que permite saber se o trabalho matemático está avançando. Para se chegar em uma demonstração matemática é necessário o raciocínio heurístico. Entretanto, não se deve em hipótese alguma, considerar que tal raciocínio seja correspondente ao processo de validação por demonstração.

O raciocínio heurístico vale por si próprio. O que é mau é confundir-lo com a demonstração rigorosa. Pior ainda é fazer passar um raciocínio heurístico por uma demonstração rigorosa.

POLYA (1978: p. 133).

Afinal, se uma demonstração é válida, isto se deve ao saber matemático, e em nenhuma instância a Heurística pode corresponder à demonstração, pois no ato de provar uma afirmação já ocorre à subordinação de uma conjectura aos axiomas e teoremas existentes em um sistema formal. No entanto, é no processo heurístico que as concepções intuitivas e o processo criador estão sendo gerados. Em suma para POLYA *apud* PAPPUS, enquanto os processos matemáticos heurísticos caminham entre a hesitação e a pretensão, os procedimentos de validação por demonstração na Matemática, estruturam este saber de modo que seja possível a eliminação de ambigüidades por procedimentos metodológicos calcados na Lógica.

No trabalho intitulado *A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações*, LAKATOS (1978) apresenta o desenvolvimento do processo heurístico ao longo da história da matemática. No texto, é apresentado um problema de demonstração em uma sala-de-aula em que há um professor com seus alunos, e através da conjectura vetor algébrico Descartes-Euler¹⁵ para os poliedros, se discute os procedimentos estratégicos para resolução da conjectura proposta.

¹⁵ A conjectura Descartes-Euler para os poliedros pode ser escrita como: $V - A + F = 2$, de modo que [V] é a quantidade de vértices de um poliedro, [A] a quantidade de arestas, [F] a quantidade de faces.

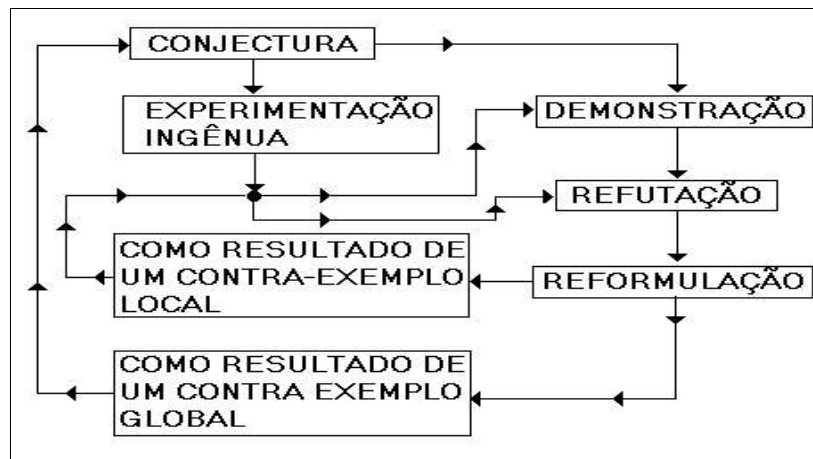


Figura 004 – Esquema do processo heurístico de Lakatos segundo Davis & Hersh (1985).

Ao longo da discussão, os alunos expõem suas concepções sobre o assunto, e ao mesmo tempo revelam o desenvolvimento do problema em termos históricos, reproduzindo soluções apresentadas por vários matemáticos ao longo dos anos, por outro lado, ao dialogar com seus alunos, o professor revela aos poucos “a lógica do descobrimento matemático”, mostrando como funciona o trabalho do matemático ao tentar validar uma conjectura.

Na figura apresentada acima (Figura 004), são apresentados os procedimentos heurísticos e a terminologia adotada por LAKATOS em *Provas e Refutações*, e o processo de validação por demonstração a partir de uma conjectura dada como um problema de demonstração. Com base neste enunciado, o matemático com pouca experiência, pode optar por manipulações e experimentos que correspondem aos problemas de determinação e são conhecidos por manipulação ingênua, que podem ajudar *a priori* no desenvolvimento da demonstração. Entretanto, caso o matemático seja experiente, é provável que este trabalhe diretamente no processo de validação por demonstração, ignorando inicialmente a experimentação ingênua. No entanto, há momentos em que um problema pode ser tão complexo, que seja necessário o uso da experimentação ingênua para uma melhor visualização do problema proposto através da conjectura.

No processo de validação por demonstração, ocorrem as técnicas de prova, que revelam aspectos dedutivos e conceituais. Neste processo, é possível considerar a estrutura logicista e formalista, no entanto, a demonstração é vista por LAKATOS como parte do processo heurístico. Após o término da demonstração proposta, ocorre o processo de refutação que corresponde ao questionamento da prova proposta por parte da

comunidade matemática, e deste procedimento decorre a reformulação das concepções e idéias matemáticas.

Na reformulação, o problema pode ser reconstruído, a partir da apresentação dos contra-exemplos locais, que correspondem à crítica de uma prova, com base no saber matemático. No texto de Lakatos, desenvolvido em um estilo que lembra Platão, em um dos diálogos um dos alunos questiona o professor perguntando se a prova proposta seria desprezada mediante um contra-exemplo local.

ALFA: Neste caso, o senhor despreza a sua prova?

PROFESSOR: De modo algum. Crítica não significa necessariamente destruição. Aperfeiçoarei minha prova, de modo que ela suporte a crítica.

LAKATOS (1978: p. 25)

Portanto, a apresentação de contra-exemplos locais, exige o retorno aos procedimentos experimentais e/ou processo de validação por demonstração. No entanto, há contra-exemplos que refutam a conjectura principal, de modo que não ocorra mais dúvida sobre o problema em questão, e se saiba que a conjectura não é um teorema. Entretanto, caso uma prova resista à todos os tipos de contra-exemplos locais e ao fim, ao contra-exemplo global, então se sabe que a prova apresentada transforma a conjectura dada em um novo teorema.

No trabalho de Lakatos, se destaca a valorização dos procedimentos de desenvolvimento matemático, e neste sentido, o processo de validação por demonstração, é o que sugere a compreensão dos conceitos matemáticos. Por outro lado, LAKATOS considera a heurística matemática como “metodologia da matemática”.

O objetivo destes ensaios é focar alguns problemas da metodologia da matemática. Emprego a palavra “metodologia” em sentido análogo ao de “heurística”, de Polya e Bernays, e “lógica do descobrimento” ou “lógica situacional”, de Popper. A recente expropriação do termo “metodologia da matemática” para servir como sinônimo de “metamatemática” tem, fora de dúvida, um toque formalista. Indica que na filosofia formalista da matemática, não há lugar adequado para metodologia como lógica do descobrimento. De acordo com os formalistas, matemática é matemática formalizada. Mas que se pode descobrir numa teoria formalizada? Duas espécies de coisas. Primeiro, pode-se descobrir a solução de problemas que a máquina de Turing devidamente programada poderia resolver em tempo finito (como por exemplo: certa pretensa prova é ou não uma prova?). Nenhum matemático tem interesse em obedecer ao monótono “método”

mecânico preconizado por tais processos decisórios. Segundo, pode-se descobrir soluções para problemas (tais como: será teorema certa fórmula numa teoria não conclusiva) em que só se pode ser orientado pelo “método” do “vislumbre indisciplinado e boa sorte”.

LAKATOS (1978, p. 15-16)

Segundo o olhar de LAKATOS, a heurística matemática é a metodologia matemática por excelência, pois permite o descobrimento e como conseqüência, o avanço da matemática. Não que os procedimentos formalistas devam ser desprezados, mas em LAKATOS existe à crítica da valorização excessiva do processo dedutivo enquanto demonstração matemática. Por outro lado, na heurística matemática existe a possibilidade em trabalhar uma matemática investigativa através da lógica situacional. O que teria ocorrido no formalismo, é a substituição da metodologia matemática histórica, por procedimentos de sistematização e organização da linguagem expressos na lógica formal, sendo assim, a Matemática formalista, se adotada de forma sistemática, é uma atividade sem significado e sem História, descontextualizada e desconexa em si mesma.

Ora, essa fria alternativa entre o irracionalismo da máquina e o irracionalismo da suposição cega não prevalece no caso da matemática viva: uma investigação de matemática não-formal ensinará fecunda lógica situacional para matemáticos operosos, lógica situacional que nem é mecânica nem irracional, mas que pode ser reconhecida e muito menos estimulada pela filosofia formalista.

LAKATOS (1978, p. 17)

Mediante as considerações apresentadas, é possível relacionar o Velho PC, em termos de atividade matemática, aos procedimentos heurísticos matemáticos, e o Novo PC, aos procedimentos logicistas e formalistas. Tanto no Novo como no Velho PC, a demonstração é relevante, mas está associada aos aspectos heurísticos e dedutivos. No Novo PC, os procedimentos dedutivos são vistos como processo de validação por demonstração, mas no Velho PC através da heurística matemática, se observa que a demonstração consiste em uma tentativa de compreensão do significado dos conceitos matemáticos.

Como já mencionamos, o estilo dedutivista rompe as definições geradas pela prova dos antepassados, apresentando-as no vazio, de modo artificial e autoritário. Ele oculta os contra-exemplos

globais que levaram ao seu descobrimento. Pelo contrário, o estilo heurístico acentua esses fatores. Dá ênfase à situação problemática: acentua a “lógica” que deu nascimento ao novo conceito.

LAKATOS (1978: p. 188)

Com respeito ao ensino de matemática assistido por computador, a passagem do Velho PC ao Novo PC, o que é feito tradicionalmente, inviabiliza o desenvolvimento da lógica situacional, de modo que o estudante se restringe à implementação de um algoritmo em um problema de determinação. O que acaba ocorrendo, é que ao terminar a execução do algoritmo no computador, o problema é dado como solucionado, sem questionamentos e sem a compreensão dos conceitos. Por outro lado, ao se passar do Novo PC para o Velho PC, é cabível o desenvolvimento da lógica situacional, através das possibilidades de manipulação e animação do Novo PC, de modo, que seja viável a visualização de uma situação conhecida e tida como trivial como algo interessante por meio de um novo olhar.

Em termos gerais, os procedimentos heurísticos e dedutivos são atualmente parte dos procedimentos matemáticos, e com desenvolvimento do computador o aspecto dedutivo foi valorizado, de modo, que em 1976 Kenneth Appel e Wolfgang Haken, demonstraram a conjectura das quatro cores, com auxílio de um computador, devido à complexidade dos cálculos envolvidos no processo, conforme é apresentado por DAVIS & HERSH (1985: p. 423 – 430)¹⁶. Sendo assim, tanto o uso do Velho como do Novo PC, estão enunciando uma nova Matemática. Entretanto, ainda ocorre a valorização exacerbada dos pressupostos logicistas e formalistas, sobre a heurística matemática. Por outro lado, será que a valorização exagerada heurística sobre o formalismo, seria uma contribuição útil para o desenvolvimento da Matemática? Neste sentido, o estudo sobre métodos e processos que permitam compreender o uso adequado, dos enfoques dedutivistas e heurísticos, podem auxiliar tanto no desenvolvimento de novas possibilidades matemáticas como didáticas, com respeito à educação matemática. Como a passagem do Novo para o Velho PC, está relacionado aos procedimentos de validação por demonstração, compreender os processos dedutivos e heurísticos, e seus aspectos técnicos, podem revelar os limites e as possibilidades das ferramentas computacionais com respeito ao saber matemático.

¹⁶ O teorema das quatro cores, serve para demonstrar que qualquer mapa sobre uma superfície plana ou esférica, pode ser colorido sem que se use mais de quatro cores, de modo, que não haja duas regiões do mapa com fronteira comum e a mesma cor.

CAPÍTULO 2 – OS PROCESSOS DE VALIDAÇÃO USUAIS EM MATEMÁTICA

2.1 – Terminologia Usual

No capítulo anterior foram apresentados alguns aspectos epistemológicos da demonstração matemática enquanto processo de validação e foi discutido o enfoque dedutivo e heurístico, com base em seus limites e possibilidades. Entretanto, correlato aos olhares dedutivistas e heurísticos, também foi apresentado aspectos da passagem do Novo PC ao Velho PC, enquanto método de investigação instrumental para o matemático, e conseqüentemente para o estudante de matemática.

Neste capítulo, o objetivo é uma breve apresentação das técnicas usuais de prova, utilizadas por matemáticos no seu cotidiano, de modo que seja possível a exibição dos aspectos dedutivos e heurísticos, sendo visível o automatismo e a lógica da descoberta, no processo de validação por demonstração. Através do uso de exemplos que se desenrolará com a discussão a seguir, mas antes sejam feitas algumas considerações sobre a terminologia e as definições usadas em demonstrações.

Nas demonstrações matemáticas, são utilizados com freqüência os termos apresentados a seguir:

- A. Termos primitivos:** São elementos básicos de uma teoria formal que não se definem. Por exemplo, na Geometria, tais termos são ponto, reta e plano.
- B. Proposição:** É uma sentença afirmativa declarativa.
- C. Axioma:** É uma proposição aceita sem demonstração. São os princípios fundamentais de uma teoria matemática.
- D. Conjectura:** É uma proposição que carece de demonstração.
- E. Teorema:** É uma proposição demonstrada.
- F. Corolário:** É uma proposição de fácil demonstração a partir de um teorema referido.
- G. Lema:** É uma proposição demonstrada que prepara um teorema que deve ser demonstrado.
- H. Definição:** É a explicação e/ou enumeração de alguma coisa de modo que seja possível determinar sua extensão e os limites. Na Matemática a definição de algo é conhecida através de axiomas e teoremas.

Segundo FOSSA (1990: p. 09-13) do ponto de vista formal não há diferenças entre lemas, corolários e teoremas, pois se tratam de proposições demonstradas. No entanto, os termos F e G são substituíveis na maioria das vezes pelo E, para simplificação do trabalho matemático. Entretanto, dada a terminologia usual em demonstrações matemáticas, procurar-se-á discutir as técnicas mais comuns de prova matemática.

2.2 – Método do Labirinto: Avançando-Retrocedendo

O procedimento descrito a seguir é conhecido como *forward-backward*, cuja tradução corresponde ao termo avançando-retornando, mas que foi nomeado como método do labirinto, devido à representação gráfica apresentada a seguir. É um processo que possui enfoque heurístico, por valorizar o uso de conceitos matemáticos ao invés dos procedimentos dedutivos. É utilizado desde a antiguidade, e no capítulo anterior foi

apresentado algo ao seu respeito, ao se discutir as concepções heurísticas de Pappus. Para compreender o método do labirinto, seja considerado o exemplo 003 apresentado a seguir, extraído do livro *How to read and do proofs*, obra de SOLOW (1982: p. 8-18).

Exemplo 003 – Método do Labirinto

Se o triângulo retângulo XYZ com lados de medida x e y, e hipotenusa z possuem uma área de $z^2/4$, então o triângulo XYZ é isósceles.

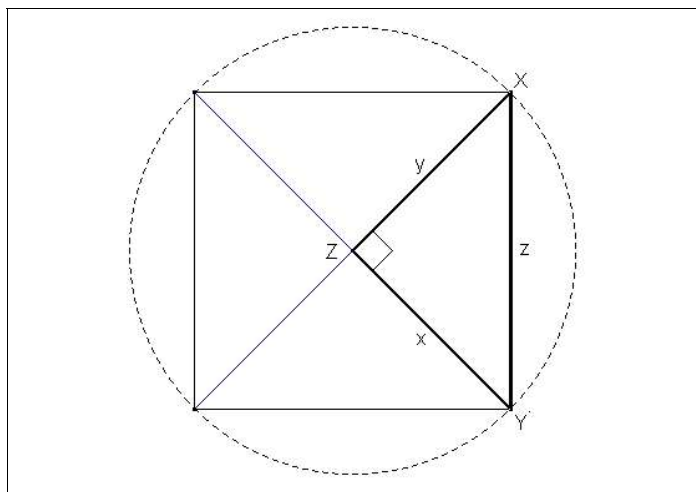


Figura 005 – A área do triângulo XYZ é $z^2/4$.

No enunciado acima, ocorre o uso de um condicional, de modo que sendo escrito “Se A então B”, é possível obter:

A: O triângulo retângulo XYZ com lados de medida x e y, e hipotenusa z possuem uma área de $z^2/4$.

B: O triângulo XYZ é isósceles.

Para provar o enunciado, o enunciado proposto pelo método do labirinto, se deve assumir que a área de XYZ é correspondente a $z^2/4$. Com base nesta afirmação se desenvolve uma cadeia de razões que deve permitir sair da proposição A até a proposição B. Como é apresentado na tabela quatro a seguir.

Tabela 004 – Método do labirinto como técnica de prova.

	DESENVOLVIMENTO	EXPLICAÇÃO
A	A área de XYZ é $z^2/4$	Dados do problema.
A1	$(x.y) / 2 = z^2 / 4$	Área = (base).(altura) / 2
A2	$x^2 + y^2 = z^2$	Teorema de Pitágoras
A3	$(x.y) / 2 = (x^2 + y^2) / 4$	Substituição de A2 em A1
A4	$2(x^2 + y^2) = 4(x.y)$ $2(x^2 + y^2) - 4(x.y) = 0$ $2x^2 - 4xy + 2y^2 = 0$ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$	Procedimentos Algébricos

A5	$(x - y)^2 = 0$	Fatoração de A4
B2	$(x - y) = 0$	Raiz quadrada de A5
B1	$y + (x - y) = 0 + y$ $x + (y - y) = 0 + y$ $x = y$	Adicione y em ambos os lados de B2
B	XYZ é isósceles	Pois B1 é verdadeiro.

Entretanto, o que caracteriza o método do labirinto é que da mesma forma que é possível dizer “Se A então B”, deve ser possível dizer “Se B então A”, em outras palavras, é um tipo de demonstração em que ocorre a reversibilidade. Por tal motivo que tal processo se chama avançando-retrocedendo ou método do labirinto.

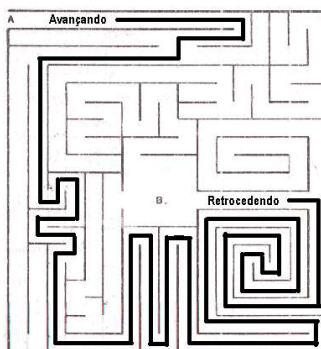


Figura 006 – O labirinto é uma metáfora para o método avançando-retrocedendo para SOLOW (1982).

Ao adotar a metáfora do labirinto, SOLOW (1982: p. 18), expressa o caráter heurístico-construtivo deste tipo de demonstração, pois é possível tomar vários caminhos diferentes, de modo que se pode considerar que neste processo ocorre muita tentativa e frustração até que se chegue a algum tipo de resposta que refute ou demonstre o enunciado proposto. Por outro lado, deve ocorrer a reversibilidade neste processo, permitindo que seja possível a partir do conseqüente do condicional demonstrar o antecedente e vice-versa.

Entretanto, não se deve confundir a existência de um só caminho no labirinto, como uma única abordagem para o problema, neste caso pelo teorema de Pitágoras, foi possível estabelecer um processo racional válido que desencadeou em manipulação algébrica e resultou na demonstração dada. Por outro lado, a demonstração poderia ser obtida mediante procedimentos da geometria euclidiana plana, no entanto, um procedimento pode ser conversível no outro, de modo que a relação existente na prova seja a mesma.

Além destes aspectos, neste tipo de prova há uma estrutura dedutiva logicista e formalista, entretanto, o enfoque heurístico se destaca em relação ao dedutivismo, e além disto, na prática matemática se utiliza, geralmente, as ferramentas disponíveis para a resolução do problema seja este de demonstração ou determinação. Além disto, é necessário que se admita o antecedente como verdadeiro, seja o antecedente A para a expressão “Se A então B”, ou B para a afirmação “Se B então A”.

2.3 – Método Contrapositivo

O método contrapositivo é uma forma do método do labirinto, em que se afirma a negação do conseqüente para que seja possível avançar rumo ao antecedente. Portanto, ao ocorrer uma expressão “Se negação de A então negação de B”, se toma como verdadeira a negação de B avançando rumo a negação de A, de modo que seja possível obter uma expressão correlata “Se negação de B então negação de A”, em que se afirma a negação de A, e se avança rumo a negação de B. Para exemplificar este processo, seja tomado o exemplo 004 apresentado a seguir, com base em SOLOW (1982: p. 72-76).

Exemplo 004 – Método contrapositivo

Se p e q forem números reais positivos, tal que \sqrt{pq} não é igual a expressão $(p + q)/2$, então p e q não são iguais entre si.

Tabela 005 – Método contrapositivo como técnica de prova.

	DESENVOLVIMENTO	EXPLICAÇÃO
Negação de B	$p = q$	Dados do problema.
Negação de B1	$\sqrt{pq} = \sqrt{pp}$	Relação de igualdade pela negação de B
Negação de B2	$\sqrt{pp} = \sqrt{p^2} = p$	Simplificação exponencial
Negação de A1	$p = [1p / 1] = [2p / 2] = [(p + p) / 2]$	Escrevendo p na forma fracionária $p/1$, de modo que seja possível multiplicar por $2/2 = 1$.
Negação de A	$[(p + p) / 2] = [(p + q) / 2] = \sqrt{pq}$	A negação de A1 é verdadeiro.

Portanto, como $[(p + q) / 2] = \sqrt{pq}$ então $p = q$, que resulta na negação de B verdadeira, enquanto B é falso.

Ao afirmar a negação do conseqüente, tomando-o como antecedente para a demonstração, se propõe um novo olhar sobre o problema, de modo que seja possível chegar a negação do antecedente. No exemplo 004, foi possível compreender o que ocorre com os números p e q quando são iguais, bem como, a relação correlata destes com os números $[(p + q) / 2]$ e \sqrt{pq} . Neste aspecto, o enfoque heurístico permite a apreensão de novas concepções, pela mudança de postura. Por outro lado, este método difere em alguns aspectos da prova por contradição apresentada a seguir.

2.4 – Prova por Contradição: Prova Indireta e Redução ao Absurdo

Segundo POLYA (1978: p.52) há diferenças entre a prova indireta e a redução ao absurdo, de modo que neste tópico ambos procedimentos serão discutidos conjuntamente como formas de prova por contradição, mediante duas versões para o mesmo questionamento por meio de exemplificações.

POLYA menciona que a demonstração por absurdo busca um absurdo flagrante, já a prova por contradição ou prova indireta, consiste em demonstrar a falsidade da suposição oposta para mostrar a verdade da afirmativa posta.

São procedimentos diferentes, porém correlatos.

A demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia, que é o procedimento predileto do satirista. A ironia adota, com todas as aparências, uma determinada opinião, que é exagerada e repetida até conduzir a um manifesto absurdo.

A demonstração indireta estabelece a verdade de uma afirmativa por revelar a falsidade da suposição oposta. Deste modo, ela apresenta certa semelhança com a astúcia do político que procura firmar os méritos de um candidato pela demolição da reputação do seu oponente.

POLYA (1978: p. 52)

Para ilustrar as diferenças entre a prova indireta e a redução ao absurdo, seja considerado o exemplo 005 apresentado a seguir, em que são apresentadas inicialmente, algumas idéias básicas sobre comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos, para que se possa contextualizar o problema proposto.

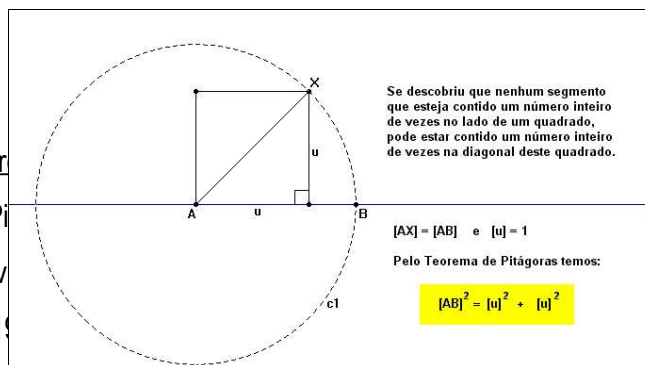
Exemplo 005 – Pr

Pi

eram comensuráv

Segundo LIMA (19

são comensuráveis entre si, quando é fixado o segmento unitário com medida u , de modo que se obtenha um segmento AB cuja medida é um número racional m/n , quando existe um segmento w que esteja contido n vezes em u e m vezes em AB . Desde que, m , n e w sejam números inteiros positivos.



os de reta.

segmentos de reta

le de segmentos?

que dois segmentos

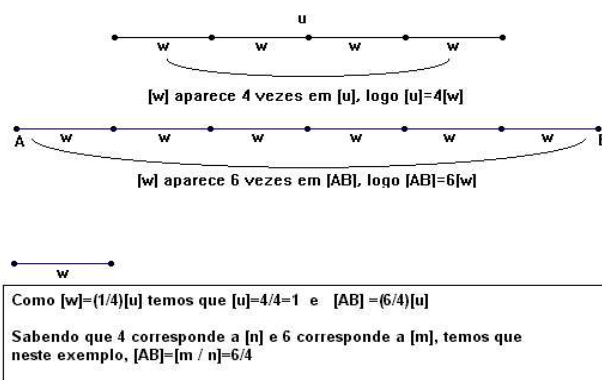


Figura 007 – Segmentos comensuráveis entre si.

Na figura 007, há uma ilustração que mostra w contido 4 vezes em u e 6 vezes em AB , logo se pode dizer que $AB = 6/4 u$. Neste caso w é um submúltiplo comum para as medidas dos segmentos u e AB , e graças a este submúltiplo, os segmentos u e AB são comensuráveis, de modo que $AB = (m/n)(u)$. Todos os números racionais podem ser escritos como fração, e para os pitagóricos o universo havia sido definido em termos de números racionais, ou seja, só poderiam existir segmentos comensuráveis entre si, haja vista tamanha perfeição. Entretanto, entre os gregos foram encontrados dois segmentos incomensuráveis entre si, e diz a tradição histórica que Hipaso aluno de Pitágoras foi o realizador de tal proeza.

Figura 008 – Segmentos incomensuráveis entre si.

Em uma das provas sobre a incomensurabilidade de segmentos, a demonstração indireta exibe uma contradição explícita que abalou as concepções matemáticas generalistas sobre a comensurabilidade entre os pitagóricos. Para compreender esta prova é preciso acompanhar o desenvolvimento da demonstração conforme é proposto abaixo. Com base na figura 008, considere o segmento diagonal AX do quadrado de lado u, equivalente em medida ao segmento AB, pois a medida do segmento do raio da circunferência $c_1 = AX = AB$;

Tendo tal relação estabelecida é possível dizer que:

- a) O segmento de reta $u = 1$;
- b) A medida w é submúltiplo de u e AB ;
- c) A medida de w está contido m vezes em AB ;
- d) A medida de w está contido n vezes em u .

Dados u e AB e considerando os dados apresentados é possível escrever o enunciado que diz: “Se u e AB são comensuráveis, então $AB = (m / n)$ ”.

Utilizando o Teorema de Pitágoras ao considerar o item (a), sabe-se que o triângulo dado é retângulo e que possui lado de medida u com medida unitária conforme (b), assim se obtém:

$$AB^2 = u^2 + u^2 \Rightarrow AB^2 = 1^2 + 1^2$$

Mas, como se considera que $AB = (m / n)$ então se têm que:

$$AB^2 = (m / n)^2 = 1^2 + 1^2$$

$$(m / n)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m \text{ deve ser par, ou seja, } m=2x, \text{ se } x \text{ for inteiro.}$$

Substituindo $2x$ por m se obtém a seguinte expressão:

$$(2x / n)^2 = 2 \Leftrightarrow [4x^2 / n^2] = 2 \Rightarrow n = 2x$$

Portanto, como $n = 2x$ é possível dizer que $1 = 2$, contradição. Fato que mostra, que não se pode escrever $AB = (m / n)$. Portanto, como $AB \neq (m / n)$, se deduz que u e AB são incomensuráveis entre si.

No exemplo 005, o enunciado apresenta uma estrutura condicional contraditória em relação ao conseqüente, e dele se obtém uma contradição, conforme a

expressão $\{[4x^2 / n^2] = 2 \rightarrow (1 = 2)\}$. No entanto, o antecedente é afirmado para que seja possível o estabelecimento da relação. Neste tipo de prova, uma proposição enuncia outra que é sua derivação, sendo assim é que se obtém a contradição, portanto, é este fato que caracteriza o procedimento de prova indireta, como uma forma de prova por contradição que expõe de forma explícita uma estrutura contraditória. No entanto, no processo conhecido como redução ao absurdo, surgem diferenças peculiares.

Exemplo 006 – Redução ao Absurdo: Números irracionais a prova de Euclides.

Segundo SINGH (2000: p. 293 – 295), o objetivo de Euclides foi mostrar que raiz de dois, não poderia ser escrita como uma fração. No caso da incomensurabilidade entre os segmentos u e AB , raiz de dois surge pelo teorema de Pitágoras, como pode ser visto no exemplo 005. No entanto, ao estabelecer a sua prova por contradição, a primeira coisa que Euclides faz, é escrever que raiz de dois equivale a uma fração. Sabendo que a e b pertencem ao conjunto dos números inteiros, considere o enunciado abaixo:

Sabendo que os números racionais são frações redutíveis, Euclides escreve a expressão $\sqrt{2} = (a / b)$. E a partir disto se inicia a demonstração.

Passo 01: $\sqrt{2} = (a / b)$.

Passo 02: Elevando toda expressão ao quadrado se obtém:

$$2 = (a / b)^2 = a^2 / b^2.$$

$$2 = a^2 / b^2.$$

Passo 03: Organizando a expressão é possível escrever:

$$2b^2 = a^2$$

Pela expressão atual é possível dizer que a^2 é um número par. Também a deve ser par, pois ao se tomar um número e multiplica-lo por 2, então o novo número deve ser par, por tal motivo a deve ser par, e se a é par, então pode ser escrito como $a=(2k)$. Isto levando em conta que $k \in \mathbb{Z}^+$.

Passo 04: Reescrevendo a expressão:

$$2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2$$

Passo 05: Dividindo ambos os lados da expressão por dois.

$$b^2 = 2 k^2$$

Entretanto, pelos mesmos argumentos usados no passo 03, se sabe que b^2 e b , devem ser números pares. Portanto, b pode ser escrito como $2s$, tal que, $b=2s$, sendo $s \in \mathbb{Z}^+$.

Passo 06: Voltando ao início, e se torna possível escrever que:

$$\sqrt{2} = (a / b) = (2k / 2s).$$

$$\sqrt{2} = (2k / 2s).$$

$$\sqrt{2} = (k / s).$$

Sendo assim, de (a / b) se obteve uma fração simplificada (k / s) , mas (k / s) pelo processo descrito pelos seis passos apresentados, pode deduzir uma fração (x / y) e desta pode se obter outra, e até mesmo obter (a / b) de modo que o processo nunca termine, ou seja, se obteve uma fração infinitamente redutível. Sabendo que uma característica dos números racionais está na obtenção de frações irredutíveis, através de frações simplificáveis, por exemplo, uma fração $(250/1000)$ é simplificável de modo que sua forma irredutível seja $(1/4)$. Portanto, é possível concluir uma contradição que revela uma redução ao absurdo.

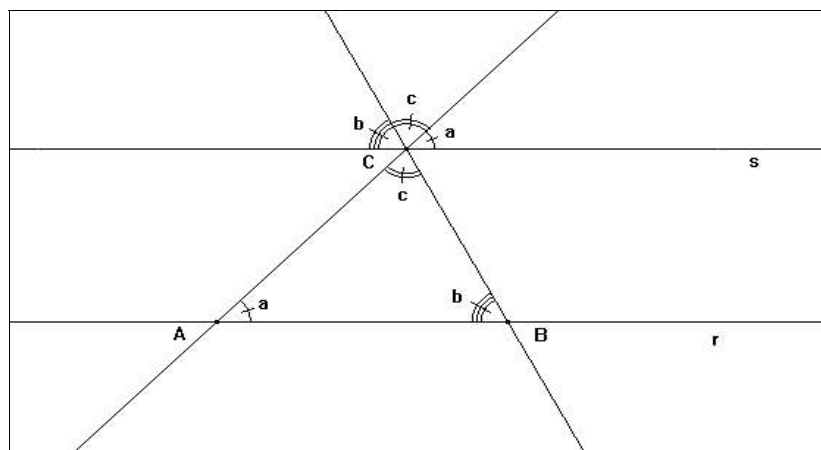
É relevante notar, que tanto a prova indireta como a redução ao absurdo, são mecanismos que levam o sujeito à elaboração de uma prova por contradição. No entanto, a prova indireta busca invalidar uma proposição exibindo sua contradição. Já a redução ao absurdo exhibe a contradição ao longo do processo, de modo que não ocorra de imediato uma contradição neste ou naquele termo. O que exige do indivíduo a capacidade em sair do procedimento de demonstração. Em muitos casos é comum que se confunda a prova contrapositiva com as provas por contradição, mas são procedimentos diferentes do ponto de vista matemático. Na prova contrapositiva, está presente o método do labirinto em que ocorrem avanços e retrocessos com uma ênfase mais heurística que dedutiva, já na prova por contradição a ênfase é mais dedutiva que heurística, pois tanto a prova indireta como a redução ao absurdo tratam de problemas de validade dos enunciados em questão.

2.5 – Manipulação e Visualizações

As visualizações e manipulações são procedimentos instrumentais que recorrem ao uso dos desenhos, animações e simulações, de modo que seja possível, através destes meios construir um sentimento de evidência que viabilize a construção de demonstrações. Neste sentido, o uso de régua e compasso em construções geométricas, os esquemas explicativos elaborados para uma aula, um desenho construído no computador e

o próprio experimento mental, devem ser tratados como procedimentos informais de validação por demonstração.

Certamente, nem todas as formas de manipulação e visualizações são eficientes na construção de evidências, e dependendo do esquema, é possível que seja, bem mais simples se compreender uma demonstração formal que uma visualização mal elaborada. Afinal, uma interpretação errônea de um esquema induz à compreensão equivocada de um problema de demonstração.



Na figura 009 apresentada acima, é exposto um desenho que mostra um dos problemas clássicos de demonstração. A questão consiste em mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é equivalente a dois ângulos retos. Pela figura se sabe que os ângulos internos do triângulo ABC são a , b e c . Pode-se observar que o lado AB pertence à reta r que é paralela a reta s , e pela extensão dos lados de ABC, se obtém com a reta s paralela a r , um ângulo raso que pelas propriedades de congruência de triângulos, correspondem à soma de $a + b + c$. Sabendo que um ângulo raso equivale a dois ângulos retos, é possível concluir que a soma dos ângulos internos de ABC seja 180° graus que equivale a dois ângulos retos.

Neste caso, a visualização propôs um enunciado através da figura 009, exigindo que o saber matemático fosse mobilizado na tentativa de justificar o questionamento desenvolvido. Em outras palavras, a figura 009 apenas colocou um problema de demonstração em uma linguagem esquemática informal. No entanto, a

resolução do problema somente ocorreu mediante a mobilização do saber matemático. Entretanto, uma visualização mal contextualizada pode dificultar a compreensão de um problema matemático proposto.

Ao apresentar como questionamento que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero ABCD é quatro ângulos retos, torna-se provável que muitas pessoas justifiquem a colocação apresentada, cogitando que pela figura 010, apresentada a seguir, é visível que o quadrilátero ABCD é formado pelos triângulos ABD e CBD, e como em cada triângulo a soma dos ângulos internos equivale a dois ângulos retos, é de se supor que nos quadriláteros a soma dos ângulos internos seja equivalente a quatro ângulos retos.

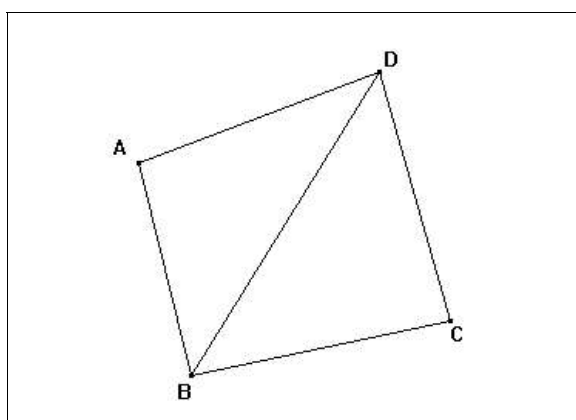


Figura 010 – Uma visualização mal elaborada.

No entanto, a hipótese proposta não corresponde à visualização da figura apresentada, pois na figura dez o quadrilátero ABCD é côncavo, pois caso fosse um quadrilátero convexo, a soma dos ângulos internos ABCD seria variável e diferente de quatro ângulos retos. Deve-se notar que muito de uma visualização depende do problema de demonstração proposto, e depende do meio que expressa a representação, por exemplo, em um computador, talvez o problema da figura 010 fosse viável e perceptível mediante a manipulação em relação ao ensino. Entretanto, em uma lousa ou no papel, a falta de interação torna mais difícil a construção de uma demonstração a partir da figura 010.

No entanto, em certas áreas da Matemática o conceito de visualização é diferente do que até aqui foi apresentado. Por exemplo, ao se falar em figuras multidimensionais, em muitos casos é necessário recorrer aos instrumentos lógicos e a intuição, pois as evidências existentes no mundo sensível, como a visão humana, são

instrumentos que comportam no máximo três dimensões, deste modo, os instrumentos simbólicos e racionais devem ser utilizados na construção de novas evidências, como ocorre no caso da álgebra. No trabalho do matemático, ao se tentar desenvolver uma demonstração rigorosa de algo que está associado à conjuntos com uma infinidade de elementos, se faz necessário o uso de ferramentas de manipulação que permitem compreender aspectos relativos ao questionamento que se pretende explicitar. Um exemplo disto é a aritmética do relógio utilizada por Andrew Wiles para o conhecimento e estudo de equações elípticas. Segundo SINGH (2000: 177 – 181), na aritmética do relógio, a reta numérica que associa cada número com um ponto da reta, é dobrada sobre si mesma, e é cortada em um determinado valor numérico, a partir desta estrutura, se obtém um conjunto finito de números dos quais é possível a obtenção de todos os resultados possíveis dentro do conjunto.

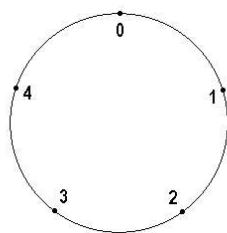


Figura 011 – Aritmética do relógio 5.

Pela figura 011, é possível observar que existem cinco números, tal que o conjunto numérico $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A partir destes números é possível estruturar operações como a adição em que se pode obter:

a) $0 + 1 = 1$

b) $1 + 2 = 3$

Entretanto, ao trabalhar com $2 + 3$, as coisas ficam mais confusas, pois ao considerar o movimento de sentido horário do “relógio” na figura 011, é possível obter que:

c) $2 + 3 = 0$

d) $3 + 4 = 2$

Como se trata de uma estrutura finita, é possível enumerar todas as soluções possíveis para a adição, e de modo correlato trabalhou Andrew Wiles.

Como a aritmética do relógio lida apenas com espaço limitado de números, é relativamente fácil calcular todas as soluções

possíveis para uma equação elíptica em uma dada aritmética do relógio.

SINGH (2000: p. 178)

Neste sentido, os instrumentos matemáticos de manipulação e visualização possibilitam o experimento matemático, em que é possível a aprendizagem de técnicas e métodos de demonstração. Portanto, ao se falar nestes instrumentos, se faz referência a procedimentos didáticos que servem ao pesquisador como processo de descoberta matemática. Em termos gerais, os procedimentos de manipulação e visualização, estão relacionados com problemas de determinação e demonstração, de modo que o enfoque heurístico se sobrepõe ao dedutivo, no entanto, tais processos na maioria das vezes são estruturados como rascunhos no cotidiano de trabalho do matemático. Na matemática escolar a tentativa e erro, são vistos como algo menosprezível, no entanto, ao pesquisador é um elemento útil para a lógica do descobrimento por demonstrações matemáticas.

2.6 – Regras de Inferência

Tabela 006 – Regras de inferência representada em termos simbólica.

Regra de Inferência	Descrição Proposicional		
	Forma do Argumento	Forma Proposicional	
União (U)	$(p \wedge q) / (p \wedge q).$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q).$	
<i>Modus Ponens</i> (MP)	$\{(p \rightarrow q), p\} / q.$	$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q.$	
<i>Modus Tollens</i> (MT)	$\{(p \rightarrow q), \sim q\} / \sim p.$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim p \Rightarrow \sim p.$	
Adição (A)	$p / (p \vee q).$	$p \Rightarrow (p \vee q).$	
Simplificação (S)	$(p \wedge q) / p.$	$(p \wedge q) \Rightarrow p.$	
Silogismo Hipotético (SH)	$\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)\} / (p \rightarrow r).$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r).$	
Silogismo Disjuntivo (SD)	$\{(p \vee q), \sim p\} / q.$	$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q.$	
Regras do Bicondicional (BIC)	a	$\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow p)\} / (p \leftrightarrow q).$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Rightarrow (p \leftrightarrow q).$
	b	$(p \leftrightarrow q) / \{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\}.$	$(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$
Dilema Construtivo (DC)	$\{(p \rightarrow q), (r \rightarrow s), (p \vee r)\} / (q \vee s).$	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s).$	
Dilema Destrutivo (DD)	$\{(p \rightarrow q), (r \rightarrow s), (\sim q \vee \sim s)\} / (\sim p \vee \sim r).$	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r).$	
Dupla Negação (DN)	$\sim(\sim p) / p$ ou $p / \sim(\sim p).$	$\{\sim(\sim p) \Rightarrow p\} \vee \{p \Rightarrow \sim(\sim p)\}.$	
Regras de Absorção (RA)	$(p \rightarrow q) / \{p \rightarrow (p \wedge q)\}.$	$(p \rightarrow q) \Rightarrow p \rightarrow (p \wedge q).$	
Simplificação Disjuntiva (S+)	$\{(p \vee r), (p \vee \sim r)\} / p.$	$(p \vee r) \wedge (p \vee \sim r) \Rightarrow p.$	

2.6.1 - *Modus Ponens* (MP)

São argumentos do tipo $\{(p \rightarrow q), p\} / q$. Em que a proposição condicional composta $(p \rightarrow q)$ e a proposição simples p correspondem às premissas, enquanto a proposição simples q corresponde à conclusão. Este tipo de argumento é conhecido como afirmação do antecedente condicional, mas usualmente é reconhecido pelo termo latino *modus ponens*. Para ilustrar os princípios proposicionais do *modus ponens*, uma prova, com base em FOSSA (1990: p. 16) é apresentada através do exemplo 007.

Exemplo 007: O *Modus Ponens*

Se um número é múltiplo de 3 então é divisível por 3.

Em termos simbólicos, é possível reescrever a conjectura dada, como uma proposição condicional composta, de modo que as proposições simples a e b , sejam:

a: Um número é múltiplo de 3.

b: Um número é divisível por 3.

Como a conjectura apresentada fala sobre o mesmo sujeito em a e b , sendo que em b , o sujeito estava oculto. É possível, tornar a e b apresentáveis. Em termos simbólicos, basta renomear o sujeito “um número” pela letra x , atribuir ao verbo “é” o símbolo de igualdade ($=$), e tornar o atributo “múltiplo de 3” uma expressão do tipo “ $3n$ ” em que n pertença ao conjunto dos números inteiros positivos. Sendo assim, as proposições a e b e o enunciado apresentado são reescritos em termos simbólicos de modo que se obtenha um argumento de fácil operacionalização.

Proposições simples:

$a = (x = 3n)$.

$b = [(x/3) = n]$.

Proposição composta:

Conjectura: $(a \rightarrow b) = \{(x = 3n) \rightarrow [(x/3) = n]\}$.

Com base nos dados acima, é possível escrever um argumento *modus ponens*, de forma que:

Premissas:

P1: $(a \rightarrow b) = \{(x = 3n) \rightarrow [(x/3) = n]\}$

P2: $a = (x = 3n)$

Conclusão:

$$C: b = [(x/3) = n]$$

Como um argumento pode ser construído como uma implicação lógica. Através da implicação se pode construir uma tabela-verdade pelo argumento dado, que é a expressão $\{(a \rightarrow b), a\} / b$ que pode ser apresentada pela implicação $[(a \rightarrow b) \wedge a] \Rightarrow b$. A tabela-verdade desta implicação resulta em:

Tabela 007 – Modus ponens caracterizando a regra de inferência condicional.

Nomenclatura	a	b	$(a \rightarrow b)$	$P = [(a \rightarrow b) \wedge a]$	$P \Rightarrow b$
Caso 01	V	V	V	V	V
Caso 02	V	F	F	F	V
Caso 03	F	V	V	F	V
Caso 04	F	F	V	F	V

Pela tabela 007 é possível concluir que $P \Rightarrow b$ é dedutível, e se pode obter a expressão $P \vdash b$. Como $P = [(a \rightarrow b) \wedge a]$, e a e b respectivamente correspondem às expressões apresentadas acima $a = (x = 3n)$ e $b = [(x/3) = n]$, então é possível dizer que:

$$\{(x = 3n) \rightarrow [(x/3) = n]\} \wedge (x = 3n) \vdash [(x/3) = n].$$

Tal expressão significa dizer que:

“Se um número é múltiplo de 3 então é divisível por 3”.

“Um número é múltiplo de três”.

“Deduz que um número é divisível por 3”.

Pelo fato do *modus ponens* ser uma tautologia, não importa o valor lógico de a e b, sabe-se que em todos os casos o argumento é dedutível. Neste aspecto, o que se constata é a mera comparação de tabelas-verdade, um dos aspectos que torna o dedutivismo uma estrutura de pensamento automatizado. No entanto, mesmo para um matemático formalista, a compreensão sobre a multiplicidade é mais relevante neste exemplo que os aspectos dedutivos.

2.6.2 – Modus Tollens (MT)

São argumentos condicionais do tipo $\{(p \rightarrow q), \sim q\} / \sim p$. Em que a proposição condicional $(p \rightarrow q)$ e a proposição $\sim q$ correspondem às premissas, enquanto a

proposição $\sim p$ corresponde à conclusão. Este tipo de argumento é conhecido como negação do conseqüente condicional, mas usualmente é reconhecido pelo termo latino *modus tollens*. Para ilustrar os princípios proposicionais do *modus tollens*, uma prova é apresentada pelo exemplo 008.

Exemplo 008: Apresentação do *modus tollens*.

Condições:

$$(x \in \mathbb{R}) \wedge \{0, 1, 2, 3, \dots, n\} \in \mathbb{Z}.$$

Dados: a: $(x^n / x^n) = 1$ e b: $x^0 = 1$.

Conjectura: $\{(x^n / x^n) = 1\} \rightarrow (x^0 = 1)$ que equivale dizer:

Se $[(x^n / x^n) = 1]$ então $(x^0 = 1)$.

Modus tollens

Premissas:

$$K: (a \rightarrow b) = \{(x^n / x^n) = 1\} \rightarrow (x^0 = 1)$$

$$\sim b: \sim(x^0 = 1) = (x^0 \neq 1)$$

Conclusão:

$$\sim p: \sim[(x^n / x^n) = 1] = (x^n / x^n) \neq 1.$$

No exemplo 008, a conclusão corresponde à negação do antecedente, em e a negação do conseqüente do argumento é tão forte, em termos dedutivos, que pode negar o antecedente do condicional. Como o *modus tollens* é um argumento, pode ser escrito na forma de tabela-verdade para a implicação $[(a \rightarrow b) \wedge \sim b] \Rightarrow \sim a$, que pode ser resumida como $K \Rightarrow \sim a$, visto que $K = [(a \rightarrow b) \wedge \sim b]$.

Tabela 008 – Apresentando o *modus tollens* pela tabela-verdade.

Nomenclatura	a	b	$\sim a$	$\sim b$	$(a \rightarrow b)$	$K [(a \rightarrow b) \wedge \sim b]$	$K \Rightarrow \sim a$
Caso 01	V	V	F	F	V	F	V
Caso 02	V	F	F	V	F	F	V
Caso 03	F	V	V	F	V	F	V
Caso 04	F	F	V	V	V	V	V

Pela tabela verdade é possível concluir que $K \Rightarrow \sim a$ é uma tautologia e de modo que é possível escrever que $K \vdash \sim a$. Como $K = [(a \rightarrow b) \wedge \sim b]$, então se obtém a

expressão $[(a \rightarrow b) \wedge \sim b] / \sim a$ é dedutível e o *modus tollens* é válido p

Entretar

alça à evidência matem

manipulada em termos c

$[(x^n / x^n) = 1] = [x^n / x^n] = (x^n = 1)$

$b) \wedge \sim b] / \sim a$ é dedutível e o

a dedutiva do argumento não

cionais, $[(x^n / x^n) = 1]$ pode ser

$(x^0 = 1)$.

Portanto, tanto o *modus ponens* como o *modus tollens* e as outras regras de inferência são procedimentos formais dedutivos que expressam o automatismo da lógica proposicional, bem como revelam as estruturas lógicas de uma dedução. Entretanto, ainda assim, para o matemático, mesmo que tais procedimentos sejam úteis, os mesmos não devem ser supervalorizados, de modo que se desconsiderem os procedimentos heurísticos matemáticos. Portanto, neste sentido, quando o *modus ponens* é usado no método do labirinto (o avançando-retrocedendo), ele representa uma ferramenta lógica para o matemático estabelecer uma cadeia de razões, no entanto, a demonstração é acatada e aceita, mediante o conhecimento matemático que se pode obter.

2.7 – Prova Direta

Em uma prova direta ocorre o desenvolvimento de uma série de proposições, de modo que seja possível o estabelecimento de deduções ao longo do caminho, a qual possa permitir obter uma conclusão sobre uma conjectura proposta. No caso apresentado a seguir, o objetivo é a demonstração do teorema de Pitágoras, através de um processo construtivo, em que seja possível o estabelecimento de razões que permitam o entendimento do enunciado $BC^2 = AB^2 + AC^2$, apresentado no exemplo 009.

Figura 012 – Construção geométrica sobre o teorema de Pitágoras.

Exemplo 009: Prova Direta do Teorema de Pitágoras.

Para desenvolver a prova apresentada a seguir, se está tomando como base a demonstração do teorema de Pitágoras segundo DAVIS & HERSH (1985: p. 178-180).

Proposição: Nos triângulos retângulos, a área do quadrado que está sobre o segmento da hipotenusa, é igual a soma dos quadrados que estão sobre os outros dois lados restantes deste polígono.

Passo 01 – Considere o triângulo retângulo ABC, em que a hipotenusa é BC, e os outros lados são BA e CA. O ângulo reto está no vértice A.

Passo 02 – Construa um quadrado BCDE com medida de lado BC.

Passo 03 – Construa um quadrado BAFG com medida de lado BA.

Passo 04 – Construa um quadrado CAKH com medida de lado CA.

Passo 05 – Traçar os segmentos AD e FC.

Passo 06 – Traçar o segmento AL paralelo a BD ou CE. Marcar X como ponto de intersecção entre BC e AL.

Passo 07 – O ângulo BAC = ângulo BAG = 90° graus, pois G, A e C são colineares e, e H, A e B são colineares de modo que, BA é perpendicular a GA e AC.

Passo 08 – O ângulo DBC = ângulo FBA = 90° graus.

Passo 09 – (DB = BC) e (FB = BA) resultam em (ABD = FBC), com os segmentos AD = FC e os ângulos ABD = FBC.

Passo 10 – Como os triângulos FBA e FBC estão no mesmo paralelogramo FBCE então as áreas de FBA = FBC.

Passo 11 – Como os triângulos XBD e ABD estão no mesmo paralelogramo BDLA então as áreas de XBD = ABD.

Passo 12 – Como a área de FBA é metade da área de (FBAG), e as áreas de FBA = FBC, é possível dizer que a área de FBAG = 2(FBC).

Passo 13 – Como a área de XBD é metade da área de (BDLX), e as áreas de XBD = ABD, é possível dizer que a área de BDLX = 2(ABD).

Passo 14 – Pelo passo 09, as áreas de $ABD = FBC$, logo se sabe que o quadrado $FBAG = 2(FBC) = 2(ABD) = BDLX$.

Portanto a área do retângulo $BDLX =$ a área do quadrado $FBAG$.

Passo 15 – Semelhantemente, aos passos anteriores, AE e BK são unidos.

Passo 16 – Da união de B e K , se obtém que os triângulos ACK e BCK estão no mesmo paralelogramo $CKHB$ e então as áreas de $ACK = BCK$.

Passo 17 – Da união de A e E , se obtém que os triângulos XCE e ACE estão no mesmo paralelogramo $CELA$ e então as áreas de $XCE = ACE$.

Passo 18 – Como $CE = BC$ e $CA = CK$ os ângulos $ACE = KCB$.

Passo 19 – Como a área de XCE é metade da área de $(CEXL)$, e as áreas $XCE = ACE$, é possível dizer que a área $CEXL = 2(ACE)$.

Passo 20 – Como a área ACK é metade da área de $(CKHA)$, e as áreas $ACK = BCK$, é possível dizer que a área $CKAH = 2(BCK)$.

Passo 21 – Como $CKAH = 2(BCK) = 2(ACE) = CEXL$ então é possível dizer que:

A área do quadrado $CKAH =$ a área do retângulo $CEXL$.

Portanto, a área do quadrado $BCDE = [(BDLX) + (CEXL)]$

E como $(CKAH = CEXL)$ e $(BDLX = FBAG)$.

É possível concluir que $BCDE = [(FBAG) + (CKAH)]$

Sabendo que:

- 1) $FBAG$ é o quadrado sobre AB .
- 2) $CKAH$ é o quadrado sobre AC .
- 3) $BCDE$ é o quadrado sobre BC .

Portanto:

$$BCDE = [(FBAG) + (CKAH)] \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Neste contexto, a visualização de uma figura até colabora para obtenção de evidências, mas aos poucos as propriedades vão sendo reveladas uma a uma, de modo que ao final seja possível obter o conhecido teorema de Pitágoras. Além disto, deve ser observado que neste processo a prova, expressa aspectos heurísticos e dedutivos de forma equilibrada em que a descoberta matemática aos poucos vai ocorrendo mediante à lógica existente nas concepções matemáticas do sistema axiomático.

2.8 – Indução Matemática

O procedimento conhecido como indução matemática, é uma ferramenta utilizada no processo de validação por demonstração que se caracteriza por explorar propriedades dos números naturais e inteiros, utilizando o princípio da contagem, para o estabelecimento de generalizações de concepções matemáticas. No entanto, em nenhuma hipótese se deve confundir o processo de indução científica com a indução matemática. Pois nunca se pode ter certezas absolutas sobre as proposições científicas.

A indução é o processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente.

POLYA (1978: p.91)

SANTOS (1998: p. 1-2) ao apresentar a teoria dos números, chama a indução matemática como princípio de indução finita (PIF), que depende de outro enunciado conhecido como princípio de boa ordem (PBO) que consiste em dizer que: “Todo conjunto não vazio de inteiros positivos contém um elemento mínimo”.

A partir do PBO, a indução matemática na teoria dos números, pode ser enunciada em termos matemáticos, do seguinte modo:

Seja B um subconjunto dos inteiros positivos. Se B possui as duas seguintes propriedades

(i) $1 \in B$

(ii) $k + 1 \in B$ sempre que $1, 2, \dots, k \in B$

então B contém todos os inteiros positivos.

SANTOS (1998: p.02)

Para averiguação da indução matemática, considere o exemplo 010 apresentado a seguir.

Exemplo 010: A indução matemática na teoria dos números.

A indução matemática assume o PBO como um postulado. A prova consiste em mostrar que se B é um subconjunto dos inteiros positivos, com propriedades (i) e (ii),

então, B deve conter todos os inteiros positivos. Ao supor que mesmo possuindo as propriedades (i) e (ii), o conjunto B não contém todos os inteiros positivos. É considerado que existe um conjunto A, que contém os inteiros positivos que não estão contidos em B. Pelo PBO é possível enunciar que em A existe o número mínimo de a . Entretanto, este é maior que 1, pois $1 \in B$. Com base nestes dados, se sabe que o número $(a - 1) \in B$. Como B satisfaz (ii) então o sucessor de $(a - 1)$ é a . Portanto, $a \in B$, mas isso é uma contradição, visto que a é o menor elemento de A. Sendo assim, deve-se concluir que A é um conjunto vazio. A essência da indução matemática, neste caso, está na possibilidade de tornar dedutiva uma generalização. Segundo HEFEZ (1993: p.42-43) este procedimento é utilizado desde a antiguidade, mas foi devidamente apresentada por Francisco Maurolycus em 1575. Após publicação do *Traité du triangle arithmétique* por Blaise Pascal em 1665, este procedimento foi disseminado e valorizado.

Embora a indução matemática seja uma das mais poderosas e usadas técnicas de demonstração em toda a matemática, o seu princípio básico é muito simples, como a seguinte analogia mostrará. Suponha que colocamos várias pedras de dominó em pé, formando uma fila em que cada pedra é separada da próxima por uma pequena distância. Para derrubar todas as pedras, basta dar um empurrão na primeira porque esta derrubará a segunda que, por sua vez, derrubará a terceira e assim por diante até o fim da fila. O resultado final, claro, é que a queda de todas as pedras de dominó da fila.

FOSSA (1990: p. 56)

Em termos dedutivos, a metáfora do dominó mostra que na indução matemática, um argumento corresponde a estruturas condicionais, em que se obtém a sentença seguinte a partir da anterior. De modo que, ao considerar um conjunto de sentenças abertas P, é possível escrever um argumento com vários condicionais, que concluem P(n).

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow \dots \rightarrow P(n-1) \rightarrow P(n)$$

$$P(1) \rightarrow P(n)$$

Portanto, P(n).

Segundo SOLOW (1982: p. 50–58), a indução matemática é um tipo de prova quantificacional, que corresponde à uma forma primitiva da prova automática de teorema. Para exemplificar tais questionamentos, é proposto a seguir o exemplo 011 com base em SOLOW.

Exemplo 011: Prova por indução matemática

Para todo número inteiro $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$.

Tomando como base as concepções presentes na metáfora do dominó, sejam consideradas várias sentenças abertas P de modo que:

$$P(1) = \sum_{k=1}^1 k = 1(1+1)/2 = 1(2)/2 = 1;$$

$$P(2) = \sum_{k=1}^2 k = 2(2+1)/2 = 2(3)/2 = 3;$$

:

$$P(n) = \sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2 = (n^2 + n)/2.$$

No entanto, se $P(n) = (n^2 + n)/2$, $P(n+1)$ deve ser uma expressão correspondente a $[(n+1)(n+2)]/2$, visto que:

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1)[(n+1)+1]/2 = [(n+1)(n+2)]/2.$$

Portanto, ao acrescentar $(n+1)$ a expressão dada pela sentença aberta P, tal que, $P(n) = (n^2 + n)/2$, se obtém:

$$\begin{aligned} P(n) + (n+1) &= [(n^2 + n)/2] + (n+1) = [(n^2 + n)/2] + [(2n+2)/2] = \\ &= [(n^2 + 3n + 2)/2] = [(n+1)(n+2)]/2 = P(n+1) \end{aligned}$$

Sabendo que $P(n)+(n+1) = P(n+1)$, se deduz que $P(n)$ é verdadeiro, de

modo que para todo número inteiro $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$.

O processo de indução matemática é uma técnica dedutiva que possui duas partes, primeiramente há uma sentença aberta $P(1)$, tal que, a mesma é o antecedente de todos os condicionais, e por fim há uma sentença aberta $P(n)$, correspondente ao conseqüente do condicional. Em suma, no exemplo 011 poderia ter sido adotado apenas $P(1)$, $P(n)$ e $P(n+1)$ para o desenvolvimento da prova, afinal, é $P(n+1)$ quem vai mostrar se $P(n)$ é válido como $P(1)$ foi válido para $P(n)$. Em suma, se pode dizer que a indução matemática é um processo dedutivo finito, que permite deduzir estruturas generalizáveis no contexto matemático conforme é dito por FOSSA (1990: p. 56).

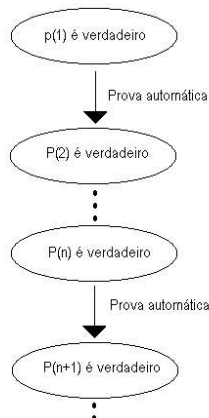


Figura 013 – Processo de indução como prova automática.

Segundo SOLOW (1982: p. 52-56), a indução matemática é uma técnica muito poderosa e aplicável e constitui uma das técnicas automáticas de prova. No entanto, mesmo que a indução enuncie aspectos relativos com a prova automática, não se deve confundir a indução matemática com a prova automática de teoremas, que será discutida e apresentada a seguir.

2.9 – Prova Automática de Teorema

A prova automática de teorema é um procedimento dedutivo utilizado na lógica predicativa de primeira ordem, e além disto, é um método de computação, que contribui com estudos em Inteligência artificial atualmente.

Segundo CHANG & LEE (1973: p. 45), a prova automática de teorema foi desenvolvida por Herbrand em 1930. Em seus estudos foi possível definir, que uma fórmula válida é uma fórmula verdadeira sob todas as interpretações. Herbrand desenvolveu um algoritmo para encontrar uma interpretação que pudesse falsificar uma fórmula dada sob todas as interpretações. Entretanto, se a fórmula dada for válida, chega um ponto em que nenhuma interpretação pode existir e seu algoritmo é finalizado após um número finito das experimentações. O método de Herbrand é considerado a base para a maioria de procedimentos automáticos modernos da prova.

Na década de 1960, Gilmore foi uma dos primeiros pesquisadores que implementou os procedimentos de Herbrand em um computador. Pode-se averiguar em termos computacionais, que uma fórmula é válida, se e somente se, a sua negação é

inconsistente, pois Gilmore projetou um *software* para detectar a inconsistência da negação de uma fórmula.

Segundo CHANG & LEE, na execução do programa de Gilmore, as fórmulas proposicionais são geradas e testadas periodicamente para encontrar inconsistência. Caso a negação da fórmula dada seja inconsistente, seu programa detectava tal fato. Gilmore conseguiu provar algumas fórmulas simples, mas encontrou dificuldades de decisão na maioria das fórmulas da lógica de primeira ordem.

Em pouco tempo, alguns estudos sobre o programa de Gilmore mostraram que o seu método não era muito adequado para efetuação de testes de inconsistências para fórmulas proposicionais. No entanto, o método de Gilmore foi aperfeiçoado por Davis e Putnam em poucos meses. Entretanto, ainda, se apresentavam problemas nos avanços apresentados, de modo que, várias fórmulas da Lógica de primeira ordem não foram bem executadas pelo processo de prova automática. Por volta de 1965, os maiores avanços foram feitos por Robinson, ao introduzir o princípio que ficou conhecido como resolução. Este procedimento era mais eficiente que os anteriores, e desde a introdução do princípio de Robinson, diversos refinamentos foram propostos na tentativa de melhorar seus procedimentos de prova. No entanto, a base dos estudos sobre prova automática de teorema teve como fundamento o teorema de Herbrand.

Um dos maiores problemas ao se trabalhar com prova automática de teorema, com respeito a estrutura da lógica de primeira ordem, está relacionado à preparação de expressões para o teste de prova automática, sem que as mesmas percam os seus significados originais. Este aspecto é realmente relevante, visto que um autômato pode ser modelado com respeito à conjunção e à disjunção, no entanto, as expressões usuais em demonstrações geralmente são estruturas condicionais que envolvem quantificadores, fórmulas, variáveis e constantes. Portanto, para se obter uma prova automática, as expressões devem apresentar o formato mais simples possível que é denominado, nesta área de estudo, como cláusula. Diante de tal necessidade, foi desenvolvido um algoritmo de representação clausal, e a partir de um exemplo a seguir, procurar-se-á apresentar os conceitos envolvidos no teorema de Herbrand.

Exemplo 012: Algoritmo de Representação Clausal

Se todo número n é natural, então existe o sucessor de b .

Pela lógica de primeira ordem um enunciado como este pode ser apresentado nos termos da linguagem lógica, de modo que seja possível reverter o

processo, obtendo a expressão apresentada. Entretanto, neste momento, o objetivo é preparar a expressão apresentada, em termos clausais, que será reescrita para que se torne manipulável, e assim se obtém em termos proposicionais:

$$\forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(b)]$$

Nesta expressão os símbolos \forall e \exists são respectivamente os quantificadores universal e existencial, que podem ser lidos como (\forall) “para todo” e (\exists) “existe um único”, N representa uma função que expressa os números naturais e S é a função de sucessão, tal que, $S(b)=b+1$, as letras n e b são variáveis da expressão e o símbolo \rightarrow representa a operação lógica condicional.

Em uma lógica de primeira ordem, podem ocorrer constantes, variáveis, predicados, conectivos lógicos, funções e quantificadores universais. Tais estruturas são conhecidas como termos, e estão relacionadas na construção de expressões e fórmulas. Uma fórmula é conhecida também como átomo, e envolvem predicados, funções, variáveis e também podem envolver constantes. A expressão $\forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(b)]$ é uma fórmula, e duas fórmulas em interação formam outra fórmula. Entretanto, a expressão apresentada acima apenas foi colocada em termos proposicionais, e ainda é necessário simplificar a expressão proposicional obtida para ser manipulável em termos clausais.

Segundo CHANG & LEE (1973: p. 46-47), uma fórmula da lógica de primeira ordem, pode ser colocada na forma *pronex* que corresponde a uma expressão cujo prefixo da expressão é um conjunto de quantificadores, de modo que, na expressão não ocorra quantificadores existenciais, e a expressão seja uma forma normal conjuntiva que é conhecida como matriz. No caso da expressão $\forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(b)]$, o que se pretende fazer é a remoção da estrutura condicional. Para efetuar isto, basta utilizar uma das equivalências lógicas De Morgan, em que se transforma uma condicional em uma disjunção, através da negação proposicional, ou seja, dadas duas proposições A e B, tal que, $(A \rightarrow B)$, esta expressão é equivalente à expressão $(\sim A \vee B)$. Tomando este fundamento, é possível transformar a fórmula proposicional de modo que se obtenha uma expressão na forma *pronex*.

$$\forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(b)] \equiv \forall(n)\exists(b) [\sim N(n) \vee S(b)]$$

$$\forall(n)\exists(b) [\sim N(n) \vee S(b)].$$

Pela forma *pronex* foi possível a eliminação do condicional, de modo que se pode obter a expressão $\forall(n)\exists(b) [\sim N(n) \vee S(b)]$.

Mesmo tendo ocorrido a eliminação do condicional, através das leis De Morgan, ainda é necessária a eliminação de quantificadores, e um dos meios para se fazer isto é através das funções Skolem. CHANG & LEE, mencionam que a função Skolem é usada para eliminação de quantificadores existenciais no prefixo de expressões na forma *pronex*, mas para que isto seja feito, se deve substituir uma variável por uma função.

No caso da expressão $\forall(n)\exists(b) [\sim N(n) \vee S(b)]$, é possível substituir a variável b pela função $f(n)$, de modo que seja obtida uma nova expressão como:

$$\forall(n)\exists(b) [\sim N(n) \vee S(b)] \equiv \forall(n) [\sim N(n) \vee S(f(n))]$$

$$\forall(n) [\sim N(n) \vee S(f(n))]$$

Como pode ser visto, pela função Skolem foi possível à eliminação da variável b , no entanto, há certos cuidados que devem ser considerados ao se trabalhar com este processo, quando se envolve mais que uma variável.

Chang & Lee, consideram que uma expressão na forma *pronex* $\exists(x)\forall(y)\forall(z)\exists(u)\forall(v)\exists(w)P(x,y,z,u,v,w)$ com quantificadores existenciais para as variáveis x , u e w , de modo que $\exists(x)$ não é precedido por nenhum quantificador universal, $\exists(u)$ é precedido por $\forall(y)$ e $\forall(z)$, e $\exists(w)$ é precedido por $\forall(y)$, $\forall(z)$ e $\forall(v)$, deve ter a variável x substituída por uma constante c , bem como, u deve ser substituído por uma função $f(y,z)$, e w é substituído por outra função $g(y,z,v)$, de modo que :

$$\exists(x) \forall(y) \forall(z) \exists(u) \forall(v) \exists(w) P(x,y,z,u,v,w) \equiv \forall(y) \forall(z) \forall(v) P(c,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)).$$

É possível perceber que em uma expressão com poucas variáveis, as funções de Skolem, apresentam pouca complexidade, mas a medida em que se aumenta a quantidade de variáveis, as situações apresentam maior grau de dificuldade.

Entretanto, seria possível simplificar mais a expressão $\forall(n) [\sim N(n) \vee S(f(n))]$? Como o quantificador universal agora é o mesmo para a variável n , mesmo que ela esteja em $f(n)$, é possível desprezar o quantificador. Como existem duas funções em forma normal de modo que se obteve uma disjunção, é possível eliminar o símbolo de disjunção pela vírgula transformando a expressão em uma cláusula.

$$\forall(n) [\sim N(n) \vee S(f(n))] \equiv (\sim N(n), S(f(n)))$$

$$(\sim N(n), S(f(n))).$$

Definição – Uma cláusula é uma disjunção finita de zero ou mais literais.

CHANG & LEE (1973: p. 48).

O termo literal é um sinônimo para a palavra cláusula quando é conveniente, e se trata de uma disjunção com finitos termos, podendo não ter nenhum termo ou vários. O procedimento realizado acima corresponde ao algoritmo de representação clausal, e seu objetivo é a obtenção de uma expressão capaz de preservar o significado original da expressão inicial, de modo que seja uma expressão simples. Pela tabela apresentada a seguir, se procurará apresentar as etapas do algoritmo comentado anteriormente, de forma sucinta.

Tabela 009 – Etapas do algoritmo de representação clausal.

Etap a	Expressão	Forma
01	Se todo número n é natural, então existe o sucessor de a.	Forma Natural
02	$\forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(b)]$	Forma Proposicional
03	$\forall(n)\exists(b) [\sim N(n) \vee S(b)]$	Forma <i>Pronex</i>
04	$\forall(n) [\sim N(n) \vee S(f(n))]$	Função Skolem
05	$(\sim N(n), S(f(n)))$	Representação Clausal

Quando uma cláusula é vazia, não pode satisfazer uma interpretação, sendo considerada falsa, e se costuma representar uma cláusula vazia como \perp . Quanto à disjunção da fórmula $[\sim N(n) \vee S(f(n))]$, esta é considerada uma forma *standard*, pois um conjunto S de cláusulas, é como uma forma conjuntiva normal de todas as cláusulas em S, em que toda variável de S é governada pelo quantificador universal. Sendo assim, é convencionalizado que uma forma *standard* pode ser representado por um conjunto de cláusulas.

Teorema - Considerando S um conjunto das cláusulas que representa uma forma standard de uma fórmula F. Então F é inconsistente se e somente se S for inconsistente.

CHANG & LEE (1973: p. 48).

Segundo o teorema apresentado, $F=S$ em uma interpretação I. No entanto, para exibir o que tal fato significa, considere que existe uma fórmula F1 e seu respectivo conjunto de cláusulas S1, de modo que F1 e S1 atuem sobre um conjunto domínio $D=\{1,2\}$.

$$F1: \exists(x)[P(x)] \quad e \quad S1:[P(k)]$$

Observa-se que $S1$ é a forma *standard* de $F1$, no entanto, ao levar em conta o domínio D , e ao operacionalizar $F1$ e $S1$, se obtém:

$$k = 1$$

$$P(1) = \text{Falso}$$

$$P(2) = \text{Verdadeiro}$$

Pelo teorema apresentado, se sabe que, se uma das estruturas é consistente e a outra é inconsistente, pois $F1 \neq S1$ que implica em concluir que a interpretação dada é falsa em I . O fato que torna a interpretação I falsa, é que não houve a remoção do quantificador existencial através da substituição da variável através da função Skolem, ou seja, caso uma expressão não opere sobre a mesma relação, torna-se inviável a prova automática.

Definição - Considerando que S seja um conjunto de cláusulas, o universo de Herbrand para S é $H(S)$, e é o menor conjunto tal que:

- a) Toda constante que ocorre em S pertence a $H(S)$. Caso não ocorra nenhuma constante, então se escolhe uma constante para $H(S)$ arbitrariamente.
- b) Se f é um símbolo funcional n -ário que ocorre em S , de modo que t_1, \dots, t_n pertençam a $H(S)$, então o termo $f(t_1, \dots, t_n)$ também pertence a $H(S)$.

Portanto, dada a representação clausal obtida no exemplo 012, é possível estabelecer o universo de Herbrand a partir da expressão $(\sim N(n), S(f(n)))$, como será apresentado a seguir.

Exemplo 013: Universo de Herbrand

$$S = \{(\sim N(n), S(f(n)))\}$$

$$H_0 = \{s\}$$

$$H_1 = \{s, f(s)\}$$

$$H_2 = \{s, f(s), f(f(s))\}$$

:

$$H_n = \{s, f(s), f(f(s)), f(f(f(s))), \dots\}$$

Neste exemplo, como não ocorre uma constante para a expressão clausal apresentada, foi feita a escolha de uma constante s . Entretanto, em certas cláusulas podem ocorrer uma ou mais constantes.

Exemplo 014: Universo de Herbrand – Expressão clausal com duas constantes.

Seja considerada a expressão $S = \{K(g(x), a, m(y), b)\}$

$H_0 = \{a, b\}$

$H_1 = \{a, b, g(a), g(b), m(a), m(b)\}$

$H_2 = \{a, b, g(a), g(b), m(a), m(b), g(g(a)), g(g(b)), g(m(a)), g(m(b)), m(g(a)), m(g(b)), m(m(a)), m(m(b))\}$

:

segue até H_n

O universo de Herbrand funciona como uma base de construção para outras estruturas que permitem obtenção da interpretação de I de S em relação a F , entretanto, no universo de Herbrand ocorre uma relação entre constantes, variáveis e funções de modo que o significado predicativo está ausente, e para obtenção de uma interpretação, se faz necessário a obtenção do predicado. Para compreender melhor este aspecto, se faz necessárias algumas definições sobre o universo de Herbrand com respeito às estruturas clausais.

Definição – Se S é um conjunto de cláusulas. Ocorre o conjunto de átomos de base na forma $P^n(t_1, \dots, t_n)$ para todos os predicados de ordem n que ocorrem em S , quando os termos são t_1, \dots, t_n . Os predicados P^n são elementos do universo de Herbrand, e são denominados como átomo da base de Herbrand em S .

Definição – Uma instância base de uma cláusula C , de um conjunto S de cláusulas, é uma cláusula obtida por representar todas as variáveis em C por membros do universo de Herbrand de S .

Portanto, dada uma expressão $S = \{P(X), Z(f(Y) \vee K(y))\}$, tendo $C = P(X)$, se sabe que C é uma cláusula em S . Tendo $H = \{d, f(d), f(f(d)), \dots\}$ que é o universo de Herbrand de S . Portanto, se pode concluir com base nas definições acima que: $P(b)$ e $P(f(f(b)))$ são instâncias base de C . Aparentemente, tais definições parecem sem sentido, mas é através delas que se estabelece a possibilidade uma interpretação I de S em H .

Definição – Se S é um conjunto de cláusulas; H é o universo de Herbrand de S ; e I uma interpretação de S sobre H . Diz-se que I é uma H -interpretação de S , se são satisfeitas as seguintes condições: 01 – I mapeia todas as constantes em S e em si mesmo; 02 – Se f uma função n -ária e n_1, \dots, n_n elementos de H . Em I se sabe que f é associada a uma função que mapeia (h_1, \dots, h_n) (um elemento de H^n) para $f(h_1, \dots, h_n)$ (um elemento de H).

Exemplo 015 – H-Interpretação

Seja considerado um conjunto $S = \{(\sim N(n), S(f(n)))\}$, correspondente a expressão clausal obtida no exemplo 012. O universo de Herbrand $H(S)$ é $H = \{s, f(s), f(f(s)), \dots\}$ é o universo de Herbrand de S . Existem dois símbolos predicados $\sim N$ e S . Com base nestes símbolos o conjunto de átomos de S é:

$$A = \{\sim N(s), S(f(s)), \sim N(f(s)), S(f(f(s))), \sim N(f(f(s))), S(f(f(f(s))))\dots\}$$

Considerando um átomo, $A1 = \{\sim N(s), S(f(s))\}$ pertencente ao conjunto A , é proposto comparar esta H-interpretação de S , com uma expressão não *pronex* condicional, obtida a partir do condicional $\forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(b)]$, apresentado no exemplo 012. Como se sabe $b=f(s)$ e considerando $n=s$, é possível que a expressão possa ser reescrita como um condicional $\forall(n)\exists(b) [N(s) \rightarrow S(f(s))]$, sem perder seu significado, mas também sem estar na forma *pronex*. Deste modo, surge uma conjectura que consiste em afirmar:

Se $\forall(n)\exists(b) [N(s) \rightarrow S(f(s))]$ é correspondente a $A1 = \{\sim N(s), S(f(s))\}$, então $A1$ é uma interpretação de $\forall(n)\exists(b) [N(s) \rightarrow S(f(s))] = B$, tal que, $A1=B$. Para averiguar tal proposição, é necessário saber o valor lógico da fórmula $A1$, mediante um domínio. Portanto, é possível considerar que:

$$B = \forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(f(s))]$$

$$A1 = \{\sim N(s), S(f(s))\}$$

$$\text{Domínio: } \{1,2\}$$

Tabela 010 – Tabela-verdade na lógica de primeira ordem com predicativos.

f(1)		f(2)	
1		2	
N(1)	N(2)	S(f(1))	S(f(2))
V	F	V	F

Sabendo que o domínio usado é $\{1,2\}$, mapeia cada constante de uma fórmula, se pode obter em $A1$ e B , interpretações de $A1$ e B , para os valores $s=1$ e $s=2$ pelo domínio $\{1,2\}$, e se as interpretações I_{A1} e I_B , são iguais então $A1=B$. Então basta transformar a cláusula $A1$ em uma forma conjuntiva normal, de modo que seja possível a operacionalização. Assim, considerando a tabela dez, se obtém:

Caso 1 – Se $s=1$, então:

$$A1 = \{\sim N(s), S(f(s))\} = \sim N(s) \vee S(f(s)) = \sim N(1) \vee S(f(1)) = (F) \vee (V) = (V).$$

$$B = \forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(f(s))] = N(1) \rightarrow S(f(1)) = (F) \rightarrow (V) = (V).$$

No caso um, as interpretações I_{A1} e I_B são equivalentes. Entretanto, ainda falta o segundo caso.

Caso 2 – Se $s=2$, então:

$$A1 = \{\sim N(s), S(f(s))\} = \sim N(s) \vee S(f(s)) = \sim N(2) \vee S(f(2)) = (V) \vee (F) = (V).$$

$$B = \forall(n)\exists(b) [N(n) \rightarrow S(f(s))] = N(2) \rightarrow S(f(2)) = (F) \rightarrow (F) = (V).$$

Pelos casos um e dois, as interpretações $I_{A1} = I_B$, de modo que se pode dizer que $A1=B$. Como $A1$ é um subconjunto de A , de forma que parte do universo de Herbrand, obtido com base em S , e como $S=A1=\{\sim N(s), S(f(s))\}$, é possível concluir que $B=S$ e $S=B$, que permite concluir que há uma interpretação B que é satisfeita em relação a S .

Lema – Se uma interpretação I sobre um domínio D satisfaz um conjunto S de cláusulas, então há uma H-interpretação I^ correspondente a I que satisfaz S .*

Teorema de Herbrand – Um conjunto S de cláusulas é insatisfável se e somente se, é falso sob todas as H-interpretações de S .

CHANG & LEE (1973: p. 55).

O conjunto $B=A1=A=S$, apresentado acima é satisfável, pois o conjunto de H-interpretações I_{A1} pelo domínio $\{1,2\}$, é baseado no conjunto de átomos A , que apresenta H-interpretações de S , com base no universo de Herbrand. Em outras palavras, se pode dizer que ao colocar o condicional em uma estrutura clausal, é possível averiguar a validade de uma conjectura mediante a comparação de resultados verdadeiros e falsos da estrutura simbólica.

Em suma, é possível transformar uma conjectura escrita em linguagem natural, de modo que a mesma possa ser interpretada, pela terminologia simbólica clausal, que pode ser automatizada em termos físicos, através do uso de circuitos integrados como os *chips*.

Em síntese, a prova automática de teorema, faz a passagem do Velho PC para o Novo PC, no entanto, se deve ter em mente que este é um procedimento meramente dedutivo e formal. Na realidade, um dos objetivos em exibir a prova automática de teorema neste trabalho, se relaciona a possibilidade de compreensão da estrutura teórica que fundamenta alguns campos da teoria computacional. Assim como as teorias físicas fundamentaram a mecânica, nos séculos XVII e XVIII, permitindo o desenvolvimento de tecnologias automotivas e modificaram a forma de pensar e agir dos seres humanos dos

séculos XIX e XX. No caso da teoria dedutiva desenvolvida nos séculos XIX e XX, estas permitem o desenvolvimento de tecnologias computacionais, que estão transformando a forma de pensar e atuar da humanidade novamente, entretanto, neste processo, a passagem do Velho PC para o Novo PC, apresenta como tendência o desenvolvimento de uma estrutura de pensamento em que a ação dos autômatos é sobrevalorizada em relação à ação humana. No caso do ensino de matemática e no desenvolvimento da matemática, procedimentos heurísticos e dedutivos, nas ações práticas demonstrativas, atuam juntos há muito tempo, mas com respeito ao uso do computador, em muitos aspectos, ocorre a valorização dos processos dedutivos e automáticos, fator este que exige maior reflexão por parte de pesquisadores, professores e administradores educacionais.

CAPÍTULO 3 – O USO DE COMPUTADORES NO CONTEXTO EDUCACIONAL

3.1– Informática Educativa

Nos dois capítulos anteriores foram apresentados questionamentos e concepções epistemológicas envolvendo alguns procedimentos de demonstração centrados no Novo PC e no Velho PC. O objetivo foi exibir os fundamentos teóricos do processo de validação no saber matemático.

Neste capítulo, o objetivo está relacionado à explicação sobre os campos de atuação da informática educativa, enquanto um saber pedagógico, de modo que sejam possíveis o estabelecimento de relações desta com o ensino de matemática. O ponto de partida, neste caso, faz uso da seguinte pergunta: *O que é informática educativa?*

Um dos problemas de demarcação da informática educativa diz respeito ao uso do computador na escola, e o entendimento sobre a natureza do trabalho desenvolvido

a partir dele. Neste aspecto, reside uma das dificuldades conceituais, que os atores sociais da escola e muitos pesquisadores possuem com respeito ao uso de tecnologias computacionais na escola.

No cotidiano escolar, se confunde o ensino de informática com o uso didático do computador, de modo que tais tecnologias acabam sendo subutilizadas por professores e administradores da escola. Deste modo, em função das dificuldades impostas no cotidiano escolar, BORGES NETO (1999: p.135-138) apresenta uma definição de informática educativa, com base em uma classificação sobre a natureza do trabalho escolar com o uso do computador.

Segundo BORGES NETO (1999), a natureza do trabalho com uso do computador na escola, se classifica em: Informática aplicada à educação, informática na educação, informática educacional e informática educativa.

a) A informática aplicada à educação, na escola, visa o uso do computador, para o desenvolvimento de trabalhos burocráticos necessários ao bom andamento administrativo da escola, e a maioria das ações desenvolvidas correspondem à digitação de ofícios, avisos, cartazes, emissão de boletim, fluxo de caixa entre tantas outras funções.

Neste contexto, os recursos geralmente utilizados são: os pacotes de trabalho que são programas como: editor de texto e imagem, planilha de cálculo, apresentação de *slides* e os recursos de diagramação.

Por outro lado, a informática aplicada à educação, também pode ser usada com fins de pesquisa educacional. Por exemplo, ao se usar um *software* de análise estatística e/ou qualitativa, neste caso, o computador está sendo usado como um recurso de análise de dados coletados, no entanto, tal uso não corresponde ao uso didático do computador para fins de ensino.

b) A informática na educação, é o uso do computador por meio de *software* de suporte e auxílio ao trabalho educacional, por exemplo, ao efetuar buscas na *Internet* o computador não está sendo usado, necessariamente, com finalidade educativa, mas pode se tratar de um recurso que contribui para o desenvolvimento de uma atividade didática.

De forma geral, a aprendizagem de aplicativos pelo aluno, contribui para o manuseio do computador, no entanto, tal fato não garante que o estudante esteja tendo acesso ao computador para o desenvolvimento de idéias científicas com base em disciplinas escolares. O fato de o estudante conhecer como se usa um editor de texto, não assegura que ele aprendeu como deve ser feita uma redação. Nas práticas escolares. Muitos

professores confundem informática na educação com informática educativa. Neste caso, os recursos utilizados são: mecanismos de busca, tutoriais, livros multimídia, editores de texto entre outros.

c) Quanto à informática educacional, o computador é ferramenta auxiliar na resolução de problemas; e na escola, as atividades desenvolvidas correspondem ao trabalho do aluno ou professor sozinho frente o computador, de modo que o mesmo pode recorrer ao auxílio de um professor não especialista, ou a um monitor. O que caracteriza, na escola, a informática educacional, é que neste processo um professor especialista não faz intervenções junto aos alunos.

Na informática educacional, o estudante faz uso dos recursos disponíveis, para solucionar seus problemas e na escola, estes problemas correspondem à “lição de casa” que é proposta em sala-de-aula. Em muitos casos, pode até haver um projeto escolar para o uso do computador, no entanto, tais práticas não são correspondentes à informática educativa.

d) A informática educativa corresponde ao uso dos recursos computacionais como ferramenta de ensino-aprendizagem por parte dos professores e seus alunos. Neste caso, ocorre a presença de um professor especialista que busca explorar os limites e possibilidades do computador para o ensino dos saberes científicos propostos em termos escolares. SOUZA *apud* BORGES (2001: p.54), ao definir informática educativa apresenta a seguinte reflexão:

A Informática Educativa se caracteriza pelo uso pleno da informática como um instrumento a mais para o professor utilizar em suas aulas. Aqui o professor especialista deve utilizar os recursos informáticos disponíveis, explorando as potencialidades oferecidas pelo computador e pelos softwares, aproveitando o máximo possível suas capacidades para simular, praticar ou evidenciar situações, geralmente, não possíveis de serem apreendidas desta maneira por outras mídias. Neste modelo, a informática exerce o papel de agente colaborador e meio didático na propagação do conhecimento, colocada à disposição da educação, através do qual o professor interage com seus alunos no processo de construção do conhecimento objetivado.

Na informática educativa, o computador é apenas mais um recurso disponível ao professor, e o trabalho didático está centrado nas concepções do professor

especialista, de modo que seja possível que uma determinada estrutura de ensino contribua a formação científica do estudante.

Neste caso, os recursos utilizados pelo professor, correspondem à sua necessidade didática em ensinar algum conteúdo escolar, e neste aspecto até mesmo um *software* propriamente não educativo, pode ser usado como um recurso educacional, pois tudo dependeria da abordagem do professor com respeito à formação que se pretende trabalhar com os respectivos alunos. Diante desta perspectiva, a tecnologia não é o centro do trabalho didático, mas o que se pretende é desenvolver no estudante o senso crítico e reflexivo com respeito aos conhecimentos científicos. Neste caso, o computador seria um agente que permitiria o desenvolvimento de um novo olhar por parte dos estudantes. Entretanto, nem sempre isto ocorre, pois a maioria dos professores desconhece a tecnologia, e diante deste desconhecimento, optam por estruturar sua didática em função da tecnologia ao invés do aluno. Neste trabalho a passagem do Novo PC ao Velho PC, corresponde ao questionamento didático sobre o uso do computador no ensino de matemática com base na informática educativa a partir de considerações sobre a teoria das demonstrações mediante procedimentos heurísticos e dedutivos.

3.2– Informática Educativa e Ensino de Matemática

O uso da informática educativa no ensino de matemática, segundo SOUZA *apud* FOSSA & MENDES (2001: p. 47), é uma das tendências e diretrizes atuais para o estabelecimento de novos programas educacionais que venham modificar a postura educacional dos professores com relação ao saber matemático e sua didática.

Segundo SOUZA *apud* BORGES NETO *et al* (2001: p. 48), a relevância no uso da tecnologia computacional, está relacionada ao potencial interativo e à simulação como processo experimental, pois pelo computador é possível praticar e simular questões matemáticas de difícil visualização para estudantes e professores. Por outro lado, é uma necessidade que as escolas atuais façam uso das novas tecnologias, pela necessidade da formação dos estudantes para os novos paradigmas do trabalho na atualidade. No entanto, colocar o computador na escola é apenas parte do processo, é preciso conscientizar a sociedade sobre a natureza do trabalho com uso do computador na escola. Que há uma

necessidade de preparação de estudantes para os paradigmas novos é um fato. Segundo LÉVY (1998: p.104), o uso dos computadores está causando modificações novas nas ciências de modo geral.

A prática da simulação por computador está se estendendo nos campos mais diversos: matemática, física nuclear, eletrônica da aviação, gestão, economia, demografia, história, etc. Um dos primeiros efeitos do uso de simulação digital é conferir um caráter experimental a disciplinas que não o tinham, como a cosmologia ou a demografia [...].

No entanto, como a tecnologia computacional revolucionou a postura humana frente o saber, é preciso não esquecer que as “maravilhas” do poder computacional são decorrentes do desenvolvimento científico da matemática e da lógica nos séculos XIX e XX, e LÉVY (1998: p. 85) destaca este fato dizendo que:

Os trabalhos de Boole, Herbrand, Church, Post, bem como muitas pesquisas sobre outras lógicas que os padrões convencionais, antecedem a aparição dos computadores. A informática seria impossível sem a lógica matemática e esta última é a culminação de uma tradição ocidental multissecular.

Deste modo, é também uma função da informática educativa, exhibir os limites da tecnologia computacional para formação do raciocínio crítico com respeito ao saber científico ensinado nas escolas. No entanto, este é um dos paradigmas presentes atualmente no meio educacional, pois muitos professores temem o uso das novas tecnologias devido à mudança de postura que os recursos tecnológicos exigem.

Segundo PENTEADO *apud* MUNDAY *et al* (1999: p. 305), é necessário aos docentes reconhecer que alguns estudantes podem ter um desenvolvimento frente o uso de tecnologias, além das habilidades dos professores, de modo que o professor não deva tomar isso como uma ameaça à sua autoridade, mas sim, como uma possibilidade de enriquecimento de uma aula tanto para o docente como para os alunos.

Em termos regionais, uma das maiores dificuldades no desenvolvimento de um programa de informática educativa, com respeito ao ensino de matemática no estado de Ceará, está relacionado à formação dos professores dos Ensinos Fundamental e Médio. Há, atualmente, um déficit na quantidade dos licenciados em matemática em relação à

quantidade de estudantes existentes nos sistemas estaduais e municipais de educação pública.

Segundo dados do Censo Educacional 2001, realizado pelo INEP/MEC¹⁷, no Estado do Ceará, o total de alunos matriculados no primeiro semestre nos Ensino Fundamental, de quinta à oitava série (ou ciclo III e IV), e no Ensino Médio correspondem ao total de 1.137.680 (um milhão e cento e trinta e sete mil e seiscentos e oitenta) alunos dos sistemas de ensino estadual, federal, municipais e privados¹⁸.

Tabela 011 – Alunos matriculados no início de 2001 no Estado do Ceará segundo MEC/INEP.

Dependência Administrativa	Ensino Fundamental		Ensino Médio	Totais
	1ª a 4ª Séries	5ª a 8ª Séries		
Estadual	63.540	304.411	232.831	600.782
Federal	0	558	3.204	3.762
Municipal	834.244	454.947	2.072	1.291.263
Privada	108.780	89.459	56.185	254.424
Totais	1.006.569	849.388	294.292	2.150.249

No entanto, segundo o documento *Panorama dos recursos humanos em Matemática no Brasil: Premência de crescer*, apresentado por BARBOSA *et al* (2001: p. 24) representando a SBM¹⁹ e o IMPA²⁰, a quantidade de alunos de graduação em matemática que participaram do Exame Nacional de Cursos em 2000, correspondeu no Ceará a 152 (cento e cinquenta e dois) estudantes. Portanto é possível considerar que, se todos os alunos matriculados no Ceará no Ensino Fundamental de quinta à oitava séries juntamente com os alunos do Ensino Médio em 2001 fossem distribuídos para cada recém formado em Matemática em 2000, resultaria desta relação um fator x que corresponderia a:

$$x = (1.137.680 \text{ alunos} / 152 \text{ formados em matemática})$$

$$x \cong (7484 \text{ alunos} / 1 \text{ formando em matemática})$$

No entanto, hipoteticamente, considere que se formem 152 estudantes por ano. Sejam consideradas 30 turmas de formandos em matemática, ou seja, 4560 formandos em 30 anos. Se os diversos sistemas educacionais recebessem toda essa mão-de-obra no Estado do Ceará, o fator x corresponderia a aproximadamente 249 alunos por formando em matemática. Entretanto, nem todos os formandos são licenciados, e além disto, como as

¹⁷ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais/ Ministério da Educação.

¹⁸ MEC/INEP. Censo Escolar 2001: Ceará – Alunos Matriculados. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/censo/Escolar/Matricula/censoescolar_2001.asp> Acesso em: 01 jan 2001.

¹⁹ Sociedade Brasileira de Matemática.

²⁰ Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

escolas particulares pagam os melhores salários, há uma tendência da mão-de-obra licenciada ser absorvida pelos grandes e médios colégios particulares nas cidades principais do Estado. Mediante estes dados, é possível deduzir que há um déficit na formação dos estudantes, pois a maior parte dos professores de matemática do Estado do Ceará não é especialista, pois muitos não possuem ainda graduação, e os que possuem graduação são licenciados em pedagogia.

Portanto, se pode concluir que se o pedagogo hoje se faz presente nas salas-de-aula das escolas públicas cearenses, como professor de matemática, isso ocorre devido a carência por professor especialista licenciado em matemática. Caso fosse possível obter quarenta alunos por professor de matemática nos Ensino Médio e Fundamental de quinta à oitava série, seria necessário que os sistemas de ensino tivessem cerca de 28.442 (vinte e oito mil e quatrocentos e quarenta e dois) professores licenciados, para o atendimento da demanda em sala-de-aula.

Diante de tal dificuldade, a implementação de um projeto de informática educativa deve considerar a escassez dos recursos humanos matemáticos no Estado do Ceará, nas esferas municipal, estadual e particular, tendo em vista a exigência de mão-de-obra especializada para o trabalho docente com o computador. Além disto, ao usar o computador é necessária a mudança de postura do professor, fato que exige uma formação de qualidade que instigue no graduando a flexibilidade de raciocínio. Daí a necessidade de programas em informática educativa, que inicialmente contemplem a formação docente para melhoria do nível dos próprios professores.

Segundo BARBOSA *et al* (2001), um dos motivos da incapacidade do cidadão em lidar com dados matemáticos que envolvem gráficos, escalas e juros, reside no fato de que as estruturas matemáticas que deveriam ser amadurecidas em idade escolar não o são. De modo que ao ingressar na universidade, é necessário retomar os conteúdos do Ensino Médio, e em muitos casos do Ensino Fundamental.

Entre as causas responsáveis por esse quadro dramático certamente estão a deficiência de formação dos professores de ensino médio e a escassez de professores de matemática, principalmente nas escolas públicas. Não bastará entretanto melhorar o nível dos cursos de licenciatura em matemática: já existe um enorme contingente de professores mal formados atuando nos ensinos fundamental e médio. Para esse grupo serão necessários Programas específicos de aprimoramento e atualização, produção de material bibliográfico e criação de uma rede de referência (virtual ou presencial) que promova o

intercâmbio entre professores e as instituições formadoras mais qualificadas. Esses Programas deverão incluir atividades com material de computação, com objetivo de introduzir recursos pedagógicos modernos no ensino de matemática.

BARBOSA *et al* (2001: p.14)

Mediante tais dados, se pode concluir que um programa eficiente em informática educativa, para estados como o Ceará, devem considerar que é necessário o aprimoramento na formação do professor para a sala-de-aula, bem como, considerar a formação do estudante. Neste sentido, a exploração de recursos computacionais podem ser uma nova abordagem ao ensino de matemática atual. No entanto, o desconhecimento das limitações e possibilidades da tecnologia computacional podem, em certos aspectos, ser algo prejudicial ao aluno e ao professor, caso o professor não tenha uma formação centrada no conhecimento matemático e na didática com uso das novas tecnologias na escola.

Mesmo frente às exigências educacionais e a dificuldade na formação de professores e estudantes, é comum questionamentos sobre a disponibilidade dos laboratórios de informática das escolas. HENRIQUES *apud* BORBA (1999: p.49) acha ser provável o desenvolvimento de dois tipos de culturas escolares em que o computador seja mal utilizado por professores e alunos, ao passo em que os laboratórios estejam chegando nas escolas.

[...] é possível que tenhamos dois cenários quando algumas escolas venham a ter amplo acesso a computadores: o primeiro é que os professores podem apenas tratar os velhos tópicos de forma igual, simplesmente trocando de mídia. Neste caso, o computador é visto somente como um caderno e/ou livro mais rápido. O segundo cenário é que os computadores simplesmente não serão utilizados. Uma imponente sala-ou diversas salas-de computadores da escola estará empoeirada e só será utilizada quando algum projeto especial com presença de um especialista acontecer na escola ou na aula de computação.

Entre 1997 e 1998, teve início O Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO), desenvolvido pelo MEC/SEED²¹ com a finalidade de beneficiar cerca de 6 mil escolas brasileiras na sua primeira etapa. Na estrutura inicial do programa, ocorreu a formação de professores multiplicadores para que os mesmos pudessem trabalhar nos respectivos NTE²². A idéia governamental partia do pressuposto de que estados e

²¹ SEED: Secretária de Educação a Distância.

²² NTE: Núcleo Tecnológico Educacional.

municípios criariam seus próprios NTE, a partir de professores especialistas formados nas universidades federais de cada estado. Também seria de alçada estadual o desenvolvimento do programa de informática estadual. No caso do Ceará, o documento *Tempo de Aprender: Programa estadual de informatização das escolas públicas* tem sido uma das diretrizes adotadas para implementação de laboratórios de informática nas escolas, desde 1997, além disto, no sexto anexo do documento, é possível ver uma relação de escolas informatizadas ou em estado de informatização em 1997, e naquela época havia cerca de 135 (cento e trinta e cinco) laboratórios de informática em escolas cearenses²³.

Um histórico breve sobre o desenvolvimento da informática educativa no Brasil e, no Estado do Ceará, pode ser visto em SOUZA (2001: p.51-69), que discute o papel da informática educativa no ensino de matemática.

Em síntese, se pode dizer que os laboratórios de informática estão chegando às escolas públicas e particulares. A distribuição dos equipamentos, em certos casos, tem sido desigual entre municípios e regiões. No entanto, ao contrário das expectativas dos professores que diziam “que nunca os computadores chegariam”, ocorre que os computadores estão entrando nas escolas. O problema mais complexo é a implementação de projetos que envolvam a informática educativa. Atualmente, no ensino de matemática, os maiores problemas estão na formação dos professores, e seria a partir desta questão, que um projeto de formação de professores para o ensino assistido por computador poderia atingir os alunos de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio. Uma formação que contemple os aspectos epistemológicos do saber que se pretende ensinar, os aspectos tecnológicos da ferramenta que se pretende usar, e os aspectos pedagógicos desta nova prática de ensino, são os elementos necessários para formação de um especialista que pretende trabalhar com a informática educativa com o intuito de ensinar e formar o estudante para o desenvolvimento de um espírito científico aguçado, no entanto, atualmente no Estado do Ceará as dificuldades são obstáculos que devem ser superados através principalmente por um projeto político para formação de professores especialistas que contemple a informática educativa na realidade escolar dos professores e seus respectivos alunos.

²³ SEB/Ceará. Tempo de aprender: Programa estadual de informatização das escolas públicas. Fortaleza-CE: Governo do Estado do Ceará, 1997. Tomo I. Anexo 6.

CAPÍTULO 4 – SOFTWARE EDUCATIVO E ENSINO DE MATEMÁTICA

4.1 – *Software* Educativo

São considerados *softwares* educativos os programas de computador cuja finalidade é oferecer condições e possibilidades aos professores para o desenvolvimento de atividades didáticas assistidas, junto aos seus alunos em laboratório de informática escolar. Em outras palavras, um *software* considerado educativo carrega consigo uma proposta educacional, que são referenciais teóricos daqueles que o desenvolvem.

Por outro lado, um professor devidamente preparado, que conhece a sua disciplina e os recursos de que dispõe em um computador, pode se apropriar de um

software que não seja necessariamente educativo, para o desenvolvimento de uma seqüência de ensino devidamente adequada às necessidades dos seus alunos. Do mesmo modo, um engenheiro pode usar um *software* educativo que lhe permita trabalhar com formas geométricas, para elaboração de desenhos de peças automotivas.

Portanto, entender o que é um *software* educativo depende de uma análise que considere o ponto de vista daqueles que trabalham na elaboração destes programas, bem como, compreender a dinâmica do desenvolvimento de atividades didáticas por parte dos professores, no momento de aula, em laboratório de informática escolar.

Na prática, alguns dos *softwares* educativos de qualidade, que hoje estão no mercado, foram desenvolvidos por grupos de pesquisadores engajados na construção de técnicas de programação avançadas, com base no processo de experimentação e observação das ações de professores e estudantes em aula, seja na sala-de-aula ou no laboratório de informática. Entretanto, nem sempre foi assim, visto que muitos dos *softwares* educativos antigos foram desenvolvidos apenas por programadores que desconsideravam os aspectos educacionais, valorizando os aspectos técnicos e visuais. Devido à falta de formação educacional, tais programadores tendiam a apresentar suas crenças sobre a relação ensino-aprendizagem com base em noções do senso-comum sobre o comportamento, que se reproduzia em sala-de-aula.

Portanto, se pode considerar que o conjunto de concepções educacionais das pessoas que desenvolvem um *software* educativo, em relação ao ensino-aprendizagem, constitui fatores que determinam o caráter do produto, com respeito à manipulação e interação.

Além disto, em um país como o Brasil, em que a formação dos professores é precária, um *software* educativo pode representar concepções de currículo para o professor de forma semelhante ao que vem ocorrendo com o livro didático nas últimas décadas.

Sendo assim, compreender e experimentar o que são *softwares* educativos, entender sua relação com o saber, ver tipos diferentes de *software* e reconhecer os limites e possibilidades dos mesmos, é a base de uma formação crítica e reflexiva do professor que vai utilizar as tecnologias computacionais como recurso didático mediante seus alunos.

Quanto o uso de *software* educativo no ensino de matemática, é um campo que está em desenvolvimento nos dias atuais, mas que tem suas raízes nas décadas de 1960 e 1970. Um prelúdio de algumas características, dos *softwares* iniciais utilizados de

forma educativa na manipulação simbólica e na construção de algoritmos, foi o desenvolvimento da linguagem da programação procedural *Pascal*. Segundo GODWIN (2001: p. 4), o *Pascal* teve sua origem no Algol, e foi desenvolvido por volta de 1967 e 1968 como uma ferramenta para o ensino de programação elementar por Niklaus Wirth.

Atualmente, o *Pascal* é ainda utilizado em cursos de matemática, computação e engenharia para introduzir estudantes de graduação às noções básicas sobre linguagem de programação, e as aplicações desenvolvidas nestes cursos, envolvem o ensino da modelagem computacional relativo ao cálculo numérico envolvendo: sucessão, somas, limite o cálculo de raízes entre outros itens.

Assim, a metodologia do professor ao usar o Pascal para o ensino de programação se resume na apresentação de problemas de determinação, de modo que, a resolução de tais problemas se dê mediante a implementação de algoritmos modelizados, e o processo de validação ocorre mediante o funcionamento adequado do programa. Atualmente PEREIRA (1999: p. 10), desenvolveu um livro para o estudo do cálculo numérico utilizando o Pascal, e menciona a relevância que vê no uso do Pascal para o ensino do cálculo numérico.

Associo Pascal ao estudo da parte mais elementar de Cálculo Numérico que identifico como a numerização das técnicas do Cálculo: integral, derivada, máximos e mínimos, caso univariando e multivariando. Todos estes problemas podem ser resolvidos com uma técnica básica de programação, varredura, mais o acréscimo de algumas técnicas matemáticas auxiliares. Assim, este livro pode tanto representar material para um curso de introdução à ciência da computação para estudantes da área de exatas ou tecnológicas como um curso mais elementar de Cálculo Numérico, ou ainda, espero, material auxiliar para ser usado pelo professor de Cálculo Diferencial e Integral que deseje motivar seus alunos usando computação como um meio de concretizar os conceitos do Cálculo.

No entanto, mesmo utilizando o Pascal com fins matemáticos, não se deve desconsiderar que o objetivo desta linguagem foi inicialmente, o ensino de programação e estruturação de algoritmos, mas que ainda hoje o Pascal está sendo utilizado para fins científicos e comerciais, e a partir da sua estrutura surgiu várias linguagens de programação de uso comercial, tais como o *Borland Pascal 7.0* e a linguagem *Delphi*.

Além do Pascal, linguagens de programação como o *Basic* apresentavam uma proposta educativa para o ensino de computação. No entanto, foi o *Pascal* que se estabeleceu no ensino superior brasileiro, como um dos meios de introdução à programação de computadores, bem como, uma ferramenta auxiliar no ensino de matemática com respeito ao cálculo. É relevante notar, que apesar de *Pascal* e *Basic* terem sido desenvolvidos como recursos adequados ao ensino de computação, nestas linguagens, e principalmente no Pascal são tomados o algoritmo e a sintaxe como recursos pedagógicos relacionados à linguagem procedimental e a execução de tarefas. No entanto, não se pode dizer que ocorria uma proposta pedagógica consistente relacionando o produto com um determinado tipo de saber. Apesar do Pascal se apresentar viável ao ensino de programação, para estudantes de ciências exatas em vários cursos, a sua sintaxe rígida se apresentava como um grande obstáculo à modelagem matemática para adolescentes e crianças. Foi somente com o desenvolvimento da linguagem LOGO, que declaradamente uma linguagem de programação surgiu como uma ferramenta ao ensino científico em geral, voltado para crianças e adolescentes.

O LOGO foi desenvolvido por Seymour Papert na década de 1960, no Instituto de Tecnologia de Massachussets (MIT) nos Estados Unidos. Trata-se de uma linguagem de programação procedimental, semelhante ao Pascal, mas apresenta uma estrutura de sintaxe mais simples que é representada por comandos como “para direita (PD)”, “para esquerda (PE)”, de modo que, torna compreensível a estrutura de um algoritmo para crianças e adolescentes.

Através do LOGO, é possível por meio de algoritmos estruturados, a construção do desenho de figuras geométricas com algumas limitações. Além disto, o cursor é representado por uma tartaruga que deve “aprender” como efetuar alguma função, a partir dos comandos dados pelo aluno-usuário, de modo, que a criança “ensine” como a tartaruga deve proceder. FERUZZI *apud* VALENTE (2001: p. 4), menciona que no LOGO se exige a explicitação de conceitos quando a criança estabelece seu “diálogo” com a tartaruga-cursor.

... no processo de comandar a tartaruga, a tartaruga ir de um ponto a outro, estes conceitos devem ser explicitados. Isto fornece as condições para o desenvolvimento de conceitos espaciais, numéricos, geométrico, uma vez que a criança pode exercitá-los, depurá-los e utilizá-los em diferentes situações.

Segundo FERRUZI (2001: p.6), as escolas que trabalham com o LOGO, ou suas versões otimizadas, seguem as concepções construtivistas de Jean Piaget, de modo que seja possível uma proposta pedagógica centrada no aluno. Entretanto, o LOGO ainda não representa um esforço específico em se trabalhar o ensino de matemática, visto que sua proposta está mais voltada ao uso do computador como uma ferramenta de ensino de um modo geral. No entanto, no final dos anos 1970 e início dos anos 1980, surgiram programas voltados ao saber matemático e seu ensino, de modo que a ênfase inicial foi o processo experimental pela simulação através da manipulação simbólica. Na segunda metade da década de 1980 surgiram os primeiros programas de “geometria dinâmica”, viabilizando o uso de construções geométricas através do computador. De certo modo, os programas usados atualmente no ensino de matemática com ênfase na manipulação simbólica, ou na geometria dinâmica, tiveram como influências idéias presentes em *softwares* como Pascal, Basic e LOGO, no entanto, foi através do LOGO que alguns dos pressupostos da informática educativa foram estabelecidos com respeito à produção de *software* educativo, bem como, em relação ao desenvolvimento de metodologias de ensino voltadas para áreas específicas do saber humano.

4.2 – Manipulação Simbólica

Os *softwares* que usam a manipulação simbólica para o desenvolvimento de cálculos aritméticos e/ou algébricos foram desenvolvidos para automatização do trabalho repetitivo de matemáticos e cientistas, bem como, para implementação e execução de simulações. Na atualidade, são ferramentas utilizadas na pesquisa acadêmica e no ensino de matemática por parte de professores e estudantes de graduação e pós-graduação, para exploração de conceitos matemáticos. Muitos destes programas se popularizaram ao final dos anos 1980, com a disseminação do Novo PC, e através da *Internet* na década de 1990, houve a construção de uma rede informal de comunicação destes recursos através de listas de discussão e correio eletrônico por parte de estudantes, professores e pesquisadores. Os *softwares* de manipulação simbólica, usam uma estrutura procedimental, de modo que, programas como *Derive*, *Mathematica*, *MatLab* entre outros, permitam o desenvolvimento de trabalhos de forma interativa ou programada.

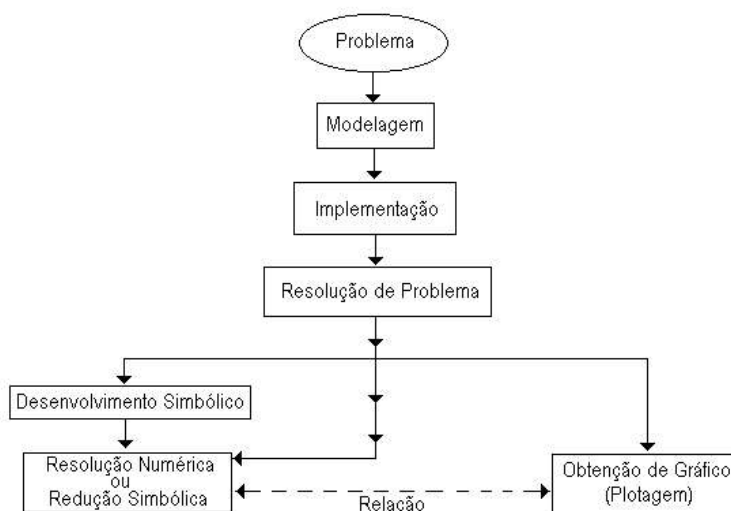


Figura 014 – Resolução de problemas em manipulação simbólica computacional.

Nestes programas é comum o desenvolvimento da simulação por meio da implementação de algoritmos e por meio do processo conhecido como “*plotagem*”. Este se refere à obtenção de gráficos através de fórmulas bem-estruturadas, conforme a sintaxe existente no conjunto de comandos de cada programa. Portanto, programas como o *Mathematica* e o *Matlab*, funcionam como linguagens de programação apropriadas à simulação de modelos matemáticos. Por outro lado, programas como o *Derive*, apresentam seus comandos estruturados em menu-de-opções, de modo que cada comando esteja dividido em termos temáticos, por exemplo, no *Derive for Windows 4.01* a sessão *Calculus*, referente ao Cálculo Diferencial e Integral, envolve os comandos: *Differentiate*, *integrate*, *limit*, *product*, *sum* e *Taylor series*.

Entretanto, em termos estruturais, tanto o *Mathematica* e *Matlab*, como o *Derive*, seguem os mesmos procedimentos para os programas de manipulação simbólica, que podem ser resumidos segundo o organograma apresentado acima pela figura 014.

Outro aspecto deste tipo de programa está relacionado à apresentação dos resultados, estes podem ser exibidos em termos numéricos, ou podem ser expressos através da forma simbólica mais simples, que expressa a redução simbólica. Outra forma de apresentação de resultados ocorre através da obtenção de gráficos resultantes da plotagem. Em termos computacionais, os valores numéricos possuem entrada de dados em funções pré-estabelecidas, de modo que por procedimentos de prova automática de teorema, os mesmos são solucionados.

No ensino de matemática, as vantagens deste tipo de *software* estão relacionados à possibilidade de modelização de estruturas algébricas e aritméticas, para o desenvolvimento da simulação, aspecto difícil de ser desenvolvido no Velho PC (papel-caneta), devido suas restrições. Por outro lado, se o uso do *software* de manipulação simbólica estiver desvinculado de um projeto matemático e científico, a exploração por meio de simulação, pode se resumir aos procedimentos de cálculo usados em sala-de-aula, em que o acerto é mais relevante que o erro e as idéias desenvolvidas ao longo dos estudos são menosprezadas pelo professor. Neste aspecto, é possível confundir problemas matemáticos com o domínio do *software*, de modo que, ao fim de uma jornada de estudos, o aluno acabe por ser um especialista no uso de um *software* de matemática simbólica. No entanto, o objetivo é formar no estudante a capacidade de pensar matematicamente, considerando que o mesmo adquira um espírito crítico e reflexivo sobre o uso de tecnologias na produção do saber matemático. Para compreender melhor este problema, considere o exemplo 016 apresentado a seguir.

Exemplo 016: Um problema modelizado é apresentado ao estudante.

Ao se trabalhar com um programa de manipulação simbólica é comum propor ao estudante a verificação de um enunciado no computador, por exemplo, sabendo utilizar o comando *Limit* do *software Mathematica* verifica-se a expressão:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Sabendo que a sintaxe da expressão apresentada no programa *Mathematica for Windows* deve constituir a expressão `Limit [expressão, x → L]`, se procede como é apresentado na figura 015.

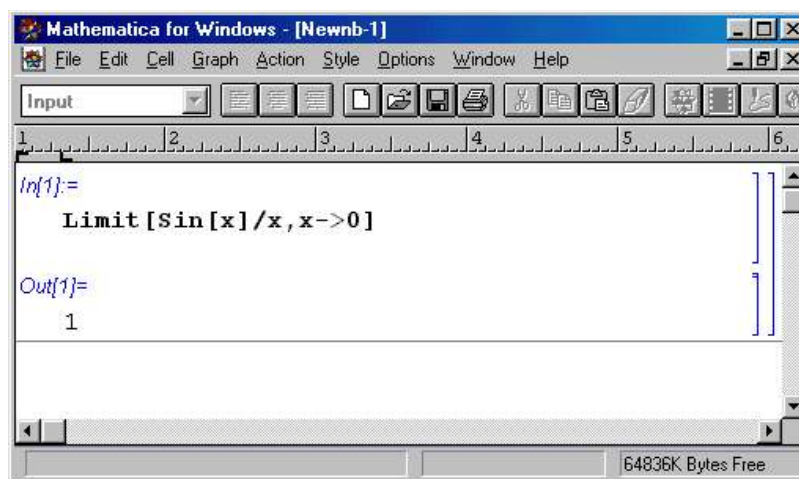


Figura 015 – Resolução do problema proposto no *software Mathematica*.

O que é possível saber sobre o limite do seno de x dividido por x , quando x se aproxima de zero é que este limite é igual a um, ou seja, se confirmou que a expressão é verdadeira conforme a figura 015 mostra acima.

No exemplo 016 com auxílio da figura 015, é possível observar que o enunciado do problema proposto, não está voltado à aprendizagem do limite fundamental, as noções evocadas pela expressão dada são solucionadas no computador, no entanto, o que pode garantir a veracidade da expressão? O problema proposto apenas pede que o estudante faça a verificação de algo já conhecido e devidamente modelizado pelo professor. Portanto, neste contexto, coube ao estudante apenas a implementação de um comando do *software*. Porém, implementar um comando em um computador, não é uma atividade de exploração matemática, trata-se de algo que envolve apenas o domínio de um *software*. Entretanto, como seria possível ao professor abordar o mesmo problema de forma mais instigante ao usuário-aluno?

Um procedimento válido pode ser a exploração de um gráfico obtido por meio de uma expressão que envolva $f(x)=[\text{sen}(x)/x]$, de modo que seja possível ao usuário-aluno, efetuar algumas variações experimentais a partir da expressão dada no *Mathematica*. Por exemplo, o que ocorreria em termos gráficos, se ao invés de escrever $f(x)=[\text{sen}(x)/x]$ fosse escrito $f(x)=[x/\text{sen}(x)]$, ou ainda, o que ocorreria se o gráfico mostrasse a expressão $f(x)=[\text{cos}(x)/x]$? Neste contexto, cabe ao professor não ajudar o estudante resolvendo os seus problemas, mas sim, propor novos questionamentos, que relacionem as noções sobre limite à idéia de função conforme os gráficos que o programa permite exibir. Por outro lado, é papel do professor evitar que outras variáveis situacionais dificultem a aprendizagem do estudante.

Neste aspecto, o contexto da pesquisa matemática e científica permitem ao usuário-aluno desenvolver novas hipóteses, comparando dados através dos resultados experimentais de simulação. Portanto, ao apresentar o gráfico da função $f(x)=[\text{sen}(x)/x]$ no *Mathematica*, conforme é exibido na figura 016, e ao propor para um grupo de estudantes a interpretação dos dados que o gráfico apresenta, considerando concepções sobre funções, e o limite fundamental, é possível com a mediação adequada e o material didático auxiliar, que corresponde ao Velho PC, permitir que os estudantes construam suas hipóteses e

modelos, de modo que ao usuário-aluno deve caber a exploração do *software* para testar novas idéias.

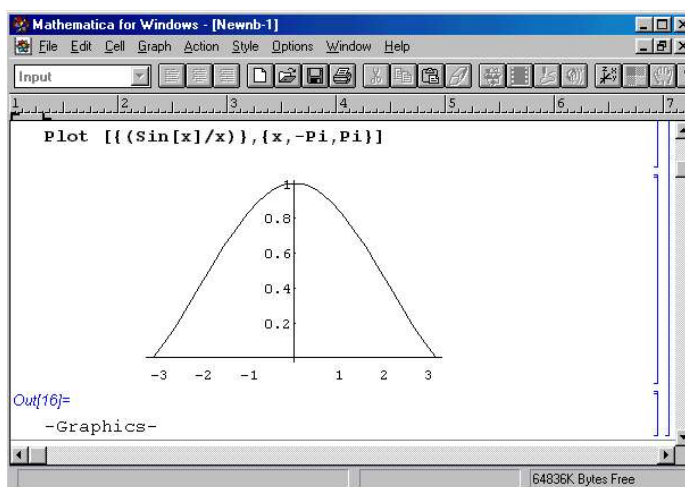


Figura 016 – Gráfico de $[\text{Sen}(x)/x]$ no intervalo entre $-\pi$ e π .

Provavelmente, serão apresentadas hipóteses absurdas, no entanto, todas as concepções devem ser compartilhadas e testadas até que se compreenda o significado

da expressão: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, bem como, sua relação com o gráfico da figura 016

que expressa a função $f(x)=[(\text{Sen}(x)/x)]$ no intervalo que vai de $-\pi$ até π , de modo que, ao estudante seja perceptível que à medida em que os valores de x se aproximam de zero, os valores de $y=f(x)$ se aproximam de 1, entretanto, cabe ao professor contextualizar o papel do teorema do confronto na explicação do limite fundamental.

No entanto, os *softwares* de manipulação algébrica *Derive*, *MatLab* e *Mathematica*, estão voltados mais ao Ensino Superior que à Educação Básica que envolve o Ensino Fundamental de quinta à oitava séries e o Ensino Médio no Brasil. Um *software* de manipulação simbólica que permite o desenvolvimento de atividades com estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio é o programa *Modellus* desenvolvido pelo pesquisador português Vitor Duarte Teodoro.

No programa *Modellus* é possível ao usuário-aluno, construir expressões matemáticas com uma sintaxe simples, e os comandos são apresentados no menu-de-opções. Neste programa, o objetivo consiste em apresentar uma animação resultante de um modelo matemático desenvolvido pelo usuário-aluno.

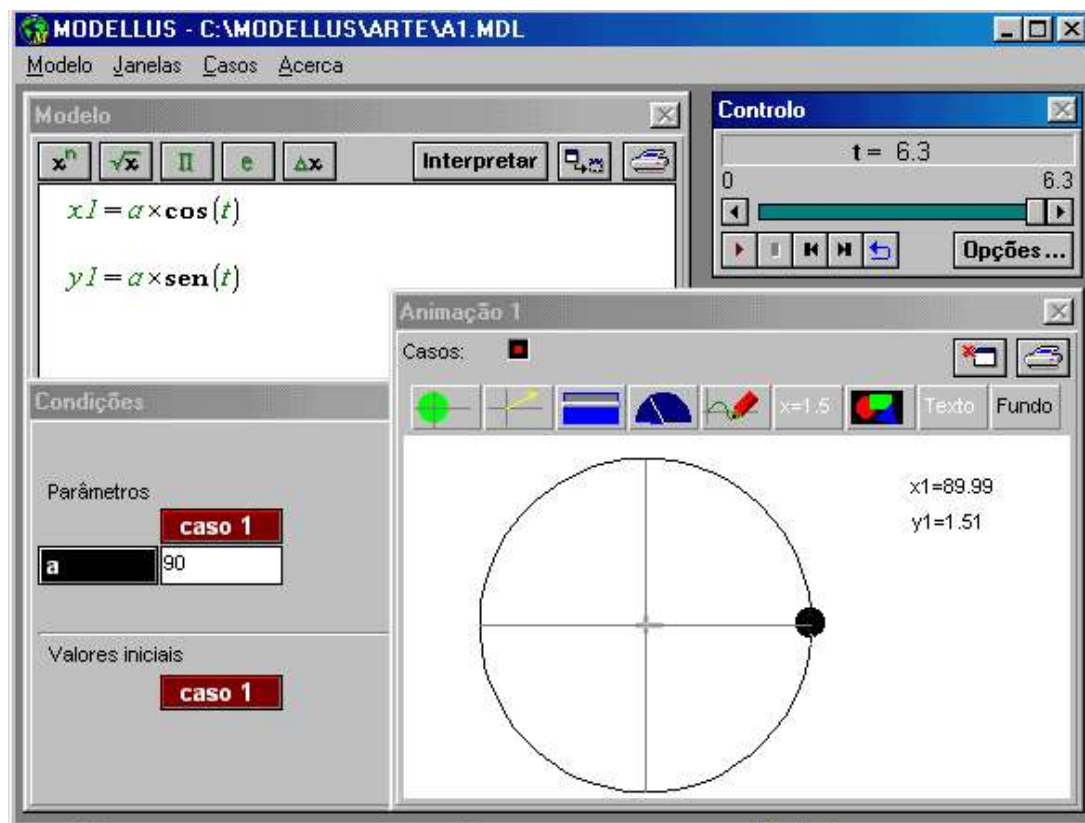


Figura 017 – Interface do Software Modellus no desenvolvimento de uma atividade.

No *Modellus* o desenvolvimento de uma atividade depende de uma seqüência de janelas que são, respectivamente, pré-requisitos umas das outras, de modo que cada janela seja correspondente à uma sessão dada, como é apresentado a seguir:

- a) Sessão Controle: Representa uma variável independente que vai de uma faixa x_1 até x_n , de modo que seja possível efetuar a equação em função da mesma, e é equivalente ao modo de execução do modelo, no exemplo da figura 017, $[t]$ é a variável independente;
- b) Sessão Modelo: É a janela em que são implementadas e interpretadas às equações matemáticas que serão utilizadas no modelo desenvolvido, de modo que os valores variáveis devem adotar a variável independente da sessão controle como base de execução das equações propostas;
- c) Sessão de Condições: Após a interpretação, que ocorre após a implementação das equações, é aberta uma janela com as constantes apresentadas para que estas posteriormente possam ser modificadas, por exemplo, na figura 017, na janela condições aparecem como parâmetro a

constante $[a]$, de modo que, ao modificar o valor de a , que no caso é 90, seja possível efetuar mudanças nos parâmetros do modelo proposto;

- d) Sessão Animação: É uma janela com recursos gráficos, que podem ser relacionados com variáveis e constantes obtidas pela sessão modelo. No caso da figura 017, a circunferência é construída com base nas expressões dadas $x_1=[a \cdot \text{sen}(t)]$ e $y_1=[a \cdot \text{cos}(t)]$, de modo que, $[t]$ é a variável independente de x_1 e y_1 , e $[a]$ é um valor constante que permite modificar o tamanho da circunferência resultante.

No *Modellus* não é possível efetuar simulações complexas como no *Derive*, *Mathematica* e *MatLab*, por outro lado, em termos didáticos é mais adequado aos estudantes que estão nas séries finais do Ensino Fundamental, bem como, para os que estão no Ensino Médio. No entanto, independente da série em que o estudante esteja, é necessário que o ambiente de aprendizagem deste seja estimulado pela pesquisa matemática e científica por parte do professor, em outros termos, é necessário ao professor ter também a índole de pesquisador, caso contrário, ao se usar o computador com base em *software* de manipulação simbólica, o que há de ocorrer é a reprodução das atividades do livro texto com uso do computador, de modo que, se subestime as potencialidades da máquina e a capacidade do estudante.

4.3 – Geometria Dinâmica

O termo “geometria dinâmica” é utilizado para qualificar os *softwares* educativos que utilizam a estrutura de programação da geometria computacional, para representar os elementos de construção da geometria euclidiana e descritiva em calculadoras e computadores. Os programas de geometria dinâmica são mais recentes que os de manipulação simbólica, mas permitem resgatar o estudo da Geometria por meio das técnicas utilizadas em construções geométricas, como é dito por GRAVINA (2001: p 82).

Os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de

representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador.

Os programas de geometria dinâmica apresentam três estruturas básicas: menu-de-opções, barra de ferramentas e zona de desenho. Pelo menu-de-opções é possível trabalhar com funções de leitura e armazenamento de arquivos, bem como, permitem a configuração do ambiente de trabalho destes *softwares*. Já na barra de ferramentas, são apresentados os comandos básicos e avançados, correspondentes aos entes geométricos, bem como, os procedimentos de verificação de medida de comprimento, área e ângulo.

Quanto à zona de desenho, é a área que permite ao usuário-aluno efetuar a construção de figuras geométricas que podem ser arrastadas (*dragging*) ao longo do trabalho. Ao dar um *click*²⁴ com o rato em um dos comandos da barra de ferramentas, é possível escolher uma função de construção como, por exemplo, a função segmento de reta, e a partir desta, ao efetuar dois *clicks* em locais diferentes, usando o rato na zona de desenho, é possível construir um segmento de reta na zona de desenho. Em síntese, os *clicks* dados na zona de desenho permitiram ao usuário-aluno, escolher coordenadas da zona de desenho, de modo que os seus números e funções possam ser gravados em uma primitiva ao se salvar o arquivo desenvolvido.

Para exemplificar o funcionamento de um ambiente de geometria dinâmica, seja considerado o *software Ruler and Compasses for Windows*, desenvolvido por René Grothmann. Considere a construção geométrica do ponto médio M de um segmento de reta AB dado conforme a figura dezoito apresentada a seguir.

²⁴ O *click* diz respeito à ação de escolha de um comando ao apertar o botão do rato preestabelecido para efetuar operações no computador.

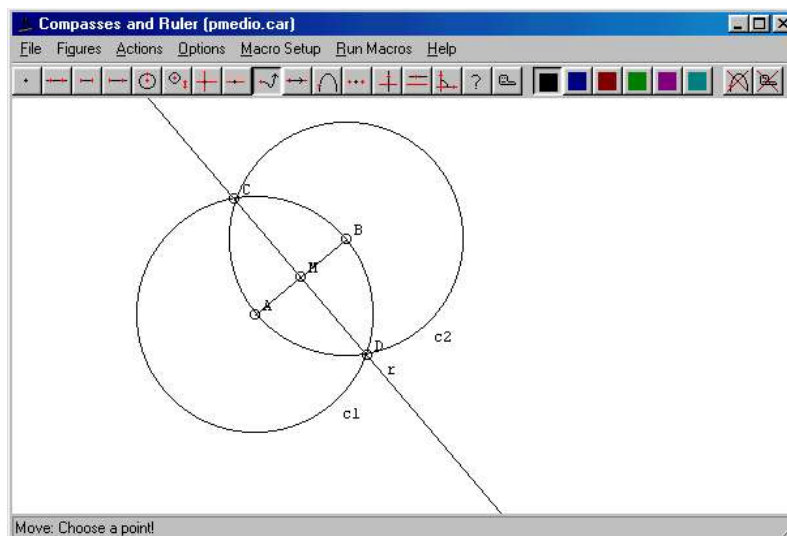


Figura 018 – Construção do ponto médio M do segmento AB

Após o término da atividade, se busca salvar a mesma no arquivo “pmedio.car” do programa *Ruler and Compasses*. Como o arquivo “pmedio.car” é uma primitiva, é possível abrir o mesmo no bloco de notas do *Windows 98*. Ao efetuar este procedimento, se obtém a primitiva da figura 018, expressa como um algoritmo, conforme é apresentado a seguir na figura 019.

```

window(-7,7,-4.22121,4.22121);
/*
*/
"A"(showname,symbol:circle)=point(-2.651515151515152,-0.169696969696970);
"B"(showname,symbol:circle)=point(-0.615151515151515,0.678787878787879);
"Segment_1"()=segment("A","B");
"c1"(showname)=circle("A","B");
"c2"(showname)=circle("B","A");
"D"(showname,symbol:circle),"C"(showname,symbol:circle)=intersection("c1","c2");
"r"(showname)=line("C","D");
"M"(showname,symbol:circle)=intersection("r","Segment_1");

```

Figura 019 – Algoritmo existente na primitiva da construção do ponto médio M do segmento AB

Através da figura 018 e 019, é possível compreender como uma construção geométrica é realizada em um ambiente de geometria dinâmica, no entanto, procurar-se-á descrever passo-a-passo este algoritmo pela apresentação da tabela 012.

Tabela 012 – O algoritmo obtido pela primitiva do arquivo “pmedio.car” e seus comentários.

Passo 01	<pre> window(-7,7,-4.22121,4.22121); /* */ </pre>
Explicação 01	O comando window, corresponde ao tamanho da zona de desenho. No caso é delimitado o limite inferior com xmin=-7 e ymin=-4,22121 e xmax=7 e ymax=4.22121. Nas linhas abaixo os símbolos “/*” e “*/”, indicam que é possível fazer um comentário entre eles.
Passo 02	<pre> "A"(showname,symbol:circle)=point(-2.651515151515152,-0.169696969696970); "B"(showname,symbol:circle)=point(-0.615151515151515,0.678787878787879); </pre>

Explicação 02	Ao dar o primeiro click com o rato, foi feito o ponto nomeado como A, de modo que seus atributos sejam: exibir o nome do ponto, e mostrar o mesmo como um círculo nas coordenadas de ponto $x = -2.651515151515152$ e $y = -0.169696969696970$. Ao dar o segundo click com o rato, foi feito o ponto nomeado como B, de modo que seus atributos sejam: exibir o nome do ponto, e mostrar o mesmo como um círculo nas coordenadas de ponto $x = 0.615151515151515$ e $y = 0.678787878787879$.
Passo 03	"Segment_1"()=segment("A","B");
Explicação 03	Dados os pontos A e B é feito o segmento "Segment_1".
Passo 04	"c1"(showname)=circle("A","B"); "c2"(showname)=circle("B","A");
Explicação 04	Pelos pontos A e B é feita a circunferência nomeada como c1, e pelos pontos B e A é feita a circunferência nomeada como c2.
Passo 05	"D"(showname,symbol:circle),"C"(showname,symbol:circle)=intersection("c1","c2");
Explicação 05	Os pontos nomeados como D e C são intersecções entre c1 e c2.
Passo 06	"r"(showname)=line("C","D");
Explicação 06	Pelos pontos nomeados como C e D é traçada uma reta nomeada como r.
Passo 07	"M"(showname,symbol:circle)=intersection("r","Segment_1");
Explicação 07	O ponto nomeado como M é obtido pela intersecção entre a reta r e o "Segment_1".

Em suma, os procedimentos de construção em um ambiente de geometria dinâmica remontam à prova automática de teorema, no entanto, o processo computacional empregado é quase imperceptível, pois a ênfase deste tipo de programa está na possibilidade em usar a régua e compasso virtual do computador.

Os mais antigos projetos para o desenvolvimento de *software* para o ensino de Geometria datam do final da década de 1970 ao início dos anos 1980. Um dos mais antigos *software* de geometria dinâmica surgiu entre 1981 e 1985, a partir de um trabalho sobre a teoria dos grafos e o uso do computador por parte de Jean Marie Laborne e Frank Bellemain. O *software Cabri Géomètre (Le Cahier de BRouillon Interatif)*, foi distribuído na França por volta de 1989, mas foi desenvolvido durante quase uma década, chegando ao Brasil por volta de 1994. O *Cabri Géomètre* foi construído em Grenoble-França, no Instituto Joseph Fourier, e é um dos programas voltados ao ensino de matemática mais utilizados no mundo. Um histórico mais detalhado sobre este projeto, pode ser obtido na dissertação de mestrado de SOUZA (2001: p.89-91).

Nos Estados Unidos em 1993 foi lançado o *The Geometer's SketchPad* desenvolvido por Nicholas Jackwin pela *Key Curriculum Press*, e atualmente existe uma grande quantidade de ambientes de geometria dinâmica que são utilizados em diversas partes do mundo.

As vantagens dos ambientes de geometria dinâmica estão na possibilidade de manipulação direta dos objetos geométricos construídos pelas funções do programa. Segundo GRAVINA (2001: p.88) é possível dizer que:

Preliminarmente, pode-se afirmar que a base de conhecimento dos ambientes de geometria dinâmica e a interface de trabalho por eles disponibilizada propiciam, com manipulação de objetos concretos-abstratos na tela do computador, a ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para inserido em modelo teórico.

No entanto, em tais programas às vezes é difícil ao aluno-usuário distinguir os elementos de abstração da teoria matemática da Geometria com respeito à estrutura computacional. Por outro lado, em programas de geometria dinâmica, a possibilidade de manipulação dos objetos geométricos torna o estudo da Geometria algo vivo, visto que na escola o ensino de geometria é tratado, geralmente, apenas do ponto de vista axiomático, desconsiderando as dificuldades dos estudantes com respeito à abstração de conceitos geométricos. Na maioria das vezes, até mesmo os aspectos axiomáticos são desprezados em favor do livro didático adotado pelo sistema educacional em voga.

Em termos gerais, os *softwares* de geometria dinâmica, na atualidade, podem permitir no meio escolar brasileiro a redescoberta da Geometria e das construções geométricas, no entanto, os problemas existentes na formação de professores de matemática são um empecilho ao desenvolvimento de quaisquer projetos sejam estes mediante o uso de programas de manipulação simbólica ou geometria dinâmica. Portanto, qualquer proposta que visem ser bem sucedidas, devem considerar sobretudo, a formação dos professores de matemática, seja em escolas públicas ou privadas, principalmente em estados como o Ceará.

4.4 – Projeto Tele-Cabri / Multimeios

No Estado do Ceará, os primeiros estudos com uso do *Cabri Géomètre II* ocorreram no Laboratório Multimeios-FACED/UFC²⁵ coordenado e fundado pelo professor Hermínio Borges Neto em 1997.

Em Julho de 1998 no VI Encontro Nacional de Educação Matemática realizado na UNISINOS/São Leopoldo-RS, SANTANA & BORGES (1998: p.723– 725),

²⁵ Faculdade de Educação – Universidade Federal do Ceará.

apresentaram um trabalho que foi fundamental na construção da passagem do Novo PC ao Velho PC, com base em resultados de um curso de construções geométricas assistido pelo *Cabri Géomètre II*, realizado no primeiro semestre de 1998 na FAGED/UFC com estudantes de graduação do curso de Pedagogia. Nesta mesma época, foram realizadas várias análises sobre diversos programas de geometria dinâmica e sobre alguns programas de manipulação simbólica, que permitiram compreender em parte a dinâmica destes recursos.

Em Outubro de 1998 foi defendida por CAMPOS (1998), a primeira dissertação de mestrado sobre o *Cabri Géomètre II*, em uma situação experimental com estudantes com idade entre 11 e 14 anos, oriundos de escolas públicas em Fortaleza-CE.

No final de 1999 teve início no Laboratório Multimeios FAGED/UFC, o projeto Tele-Ambiente, e neste projeto tem sido desenvolvido um subprojeto financiado pelo CNPq²⁶ para o desenvolvimento de um curso de construções geométricas com uso do *Cabri-Géomètre II* à distância. O projeto é conhecido como Tele-Cabri/Tele-Ambiente, e recebeu este nome para homenagear o projeto TeleCabri desenvolvido em Grenoble, para atender crianças internadas no Hospital Michallon como é citado por CAMPOS (1998: p.134-135).

No caso do Tele-Cabri/Tele-Ambiente, o objetivo é a elaboração de um curso à distância com recursos de assistência que permitam trabalhar a formação de professores do Ensino Fundamental de quinta à oitava séries. Para a implementação de tais recursos existe uma equipe que trabalha o desenvolvimento de atividades matemáticas, uma equipe de implementação das atividades em recursos computacionais e uma equipe que faz experimentos para validação das atividades desenvolvidas.

Para desenvolver os experimentos, têm sido utilizado o *software NetMeeting* da *Microsoft* que permite comunicação à distância, mas, visando atender adequadamente as necessidades do grupo de pesquisa, é proposto o desenvolvimento de um recurso de comunicação à distância que permita o compartilhamento de aplicação, som e imagem que é conhecido como Tele.

A relevância do Tele-Cabri neste trabalho sobre a passagem do Novo PC ao Velho PC, se relaciona ao trabalho de coleta de dados. A maioria das situações encontrada para expressar os limites do Novo PC se relaciona ao processo de construção de atividades matemáticas no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente, bem como ao processo experimental junto aos estudantes em cursos piloto em que estavam sendo testadas novas abordagens

²⁶ Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

metodológicas para o ensino de construções geométricas. Neste projeto, além do presente trabalho, também foi realizada a dissertação de mestrado de Maria José Araújo Souza, entre 1999 e 2001, em que houve um estudo sobre o ensino de Geometria com uso do ambiente *Cabri-Géomètre II for Windows*.

4.5 – GeoMeios: Desenvolvimento de Software em Java

Ao desenvolver atividades para o curso à distância de construções geométricas no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente, surgiu a necessidade do domínio dos recursos de programação na linguagem Java, para construção de *applets*²⁷, os quais permitiriam a elaboração de animações que seriam mescladas aos textos de assistência ao estudante. A princípio, o objetivo foi utilizar recursos *applets* do projeto *Cabri-Java* desenvolvido pelos construtores do *Cabri-Géomètre*. No entanto, um dos problemas deste recurso está associado à constante necessidade de renovação do arquivo “cabrijava.jar”, que funciona como um recurso que torna primitivas do *Cabri-Géomètre* executáveis em *applets* na *Internet*. Portanto, por volta de maio de 2001, se iniciou no Laboratório Multimeios FACED/UFC, o desenvolvimento de um software para sanar este problema. Este software foi denominado GeoMeios.

O projeto GeoMeios está sendo coordenado pelo Dr. Hermínio Borges Neto e por José Rogério Santana, e dele faz parte uma equipe formada por estudantes de graduação em pedagogia e computação da Universidade Federal do Ceará, de modo que se torna imprescindível destacar o trabalho dos bolsistas Eduardo Silva do Amaral e Maria Izabel Alves de Meneses no desenvolvimento da primeira etapa deste trabalho.

O *software* GeoMeios é um *applet* que reproduz um ambiente de geometria dinâmica que permite ao usuário-aluno trabalhar com construções geométricas por meio da *Internet*.

²⁷ São mini-aplicativos desenvolvidos em Java que funcionam em um ambiente de navegação pela *Internet*.

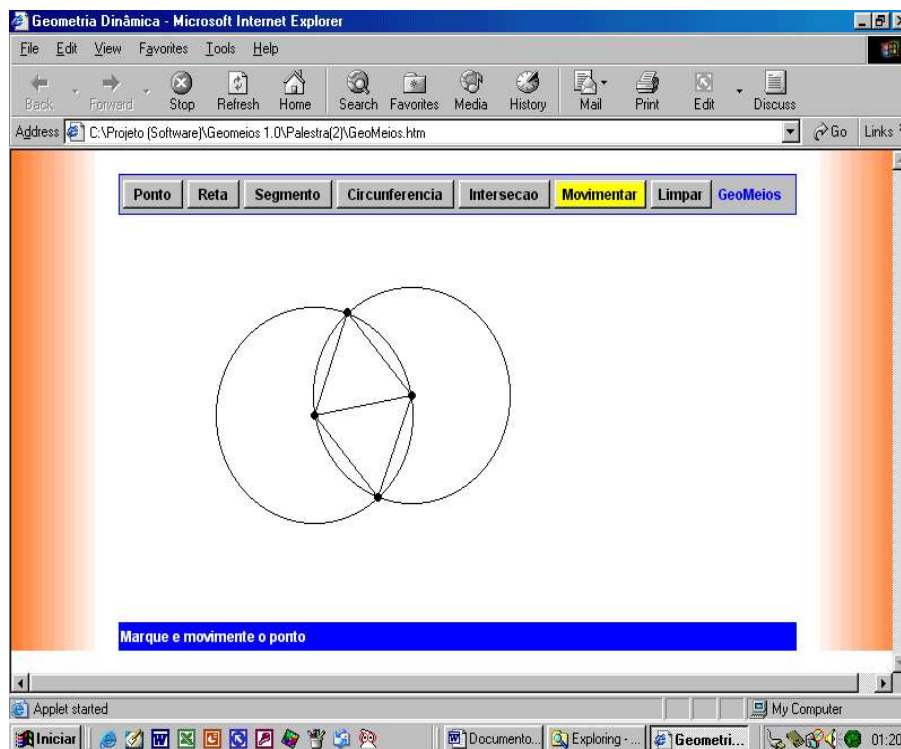


Figura 020 – Protótipo do software Geomeios desenvolvido em 2001.

O fato de estar desenvolvendo um ambiente de geometria dinâmica com uso da linguagem de programação Java, é uma realidade explorada à algum tempo, e um dos programas que foi adotado como exemplo, foi o *Ruler and Compasses for Java*, desenvolvido por René Grothmann entre 1999 e 2000. Entretanto, uma das vantagens do uso de *applets* está na possibilidade em poder utilizar um recurso computacional em várias plataformas, pois na linguagem Java é utilizado o conceito de “máquina virtual” que na realidade é uma camada de programação sobre a estrutura do sistema operacional de um computador. Por outro lado, o problema de uma máquina virtual está na inviabilidade de acesso ao sistema de arquivos de uma plataforma como *Windows*, *Machintosh*, *Linux*, *Unix* entre tantas outras. Tal fato implica, na dificuldade em operacionalizar a leitura e gravação de primitivas de um *software* de geometria dinâmica.

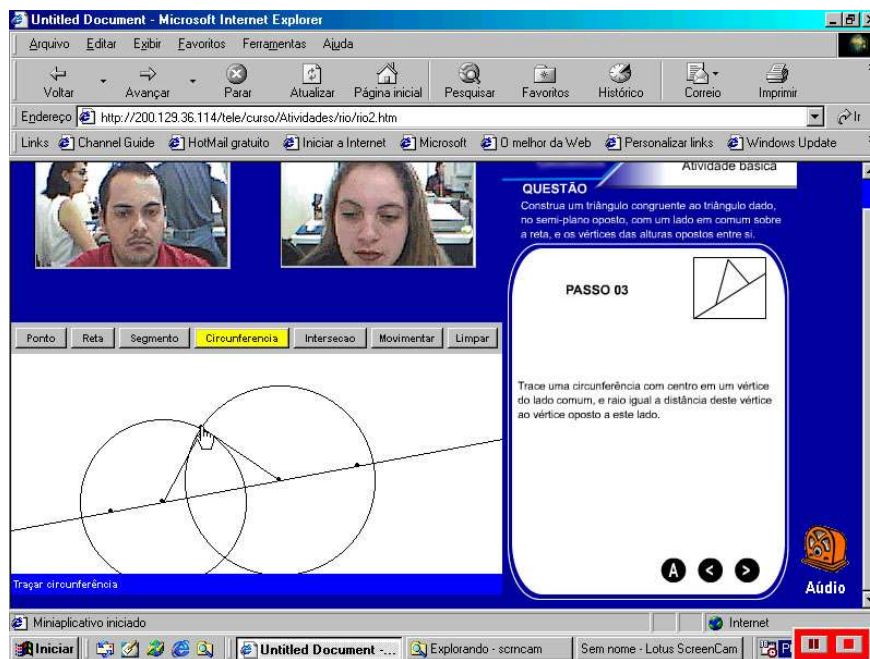
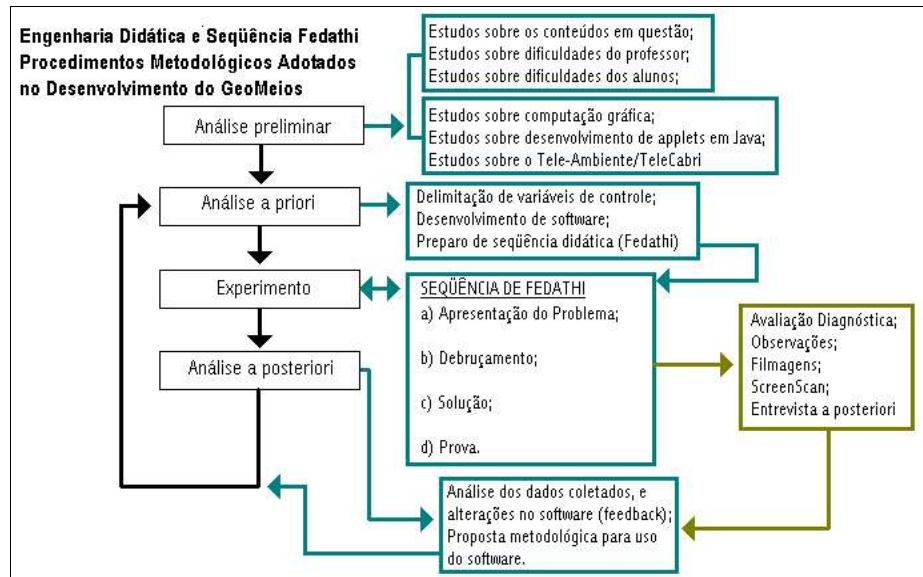


Figura 021 – Modelo do software GeoMeios integrado ao Tele.

Diante das dificuldades apresentadas, uma solução proposta para o problema pode ser a elaboração de um portal em que o usuário-aluno, a semelhança dos portais que oferecem o serviço de correio eletrônico na *Internet*, o qual tenha a sua disposição um *login* e uma senha que lhe permita acessar uma área de trabalho personalizável em um servidor que esteja conectado 24 horas na *Internet*, de modo que as atividades sejam salvas como arquivos com extensão “html” ou “htm”, de modo que os mesmos possam ser lidos e recuperados através do ambiente da área de trabalho. No entanto, tais recursos exigiriam o desenvolvimento de canais de comunicação escrita, sonora e visual entre estudantes e professores para o desenvolvimento de cursos à distância futuramente.

Figura 022 – Esquema da metodologia utilizada no desenvolvimento do software GeoMeios.



Portanto, para o desenvolvimento do *software* GeoMeios com uso de canais que permitam compartilhamento de aplicação, áudio, vídeo e bate-papo, uma das possibilidades é a implementação deste com a disponibilização do programa Tele que está sendo construído para efetuar a comunicação entre os usuários-aluno, e também, entre o usuário-aluno e os professores. No mais, o programa GeoMeios segue os mesmos princípios dos ambientes de geometria dinâmica, e o desenvolvimento de sua estrutura de programação está permitindo compreender as relações entre as estruturas existentes em um *software* de geometria dinâmica com respeito aos fundamentos da geometria computacional e a construção de algoritmos em *Java*. Para o desenvolvimento do GeoMeios, foi adotado como esquema metodológico a engenharia didática desenvolvido por Michele Artigue para o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática.

[...] este termo foi “cunhado” para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

MACHADO *et al* apud ARTIGUE (1999: p. 198)

Em termos mais específicos, a engenharia didática constitui um esquema de trabalho, em que é possível submeter hipóteses formadas por um professor pesquisador ou por um grupo de pesquisa em situações experimentais de modo que os resultados coletados

permitam concluir aspectos relativos às deficiências e dificuldades encontradas na realização das idéias pedagógicas na prática da relação-ensino aprendizagem. Segundo MACHADO *et al apud* ARTIGUE (1999: p. 199), a engenharia didática pode ser caracterizado como:

[...] como um esquema experimental baseado sobre “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino.

Na engenharia didática há quatro fases que permitem a concepção de uma seqüência de ensino são elas a análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Detalhadamente, pode-se dizer que:

- Análise preliminar: Consiste na análise epistemológica dos conteúdos que se pretende trabalhar no desenvolvimento dos materiais junto ao aluno. Neste contexto é necessário o estudo sobre os processos educacionais desenvolvidos em classe (o meio, os instrumentos, a mediação do professor). Em suma pretende-se dar subsídios ao desenvolvimento da análise *a priori*;
- Análise *a priori*: Consiste na preparação de seqüências didáticas e do esquema experimental para o processo experimental em classe, em que serão delimitadas variáveis de controle que possibilitem conhecer o que se pretende averiguar, no caso do GeoMeios, a verificação está relacionada aos limites e possibilidades que o software pode apresentar;
- Experimentação: É a execução dos processos desenvolvidos na análise *a priori* e preliminar, ou seja, a realização de cursos pilotos em que se recorre a pesquisa-ação experimental em educação. Neste caso deve-se observar o envolvimento dos professores e alunos, e também se recorre a transcrição das filmagens desenvolvidas no decorrer do curso. Neste caso, são testadas atividades desenvolvidas na análise *a priori* através do GeoMeios, mediante uma seqüência didática. Após o término do curso é feita a análise *a posteriori*;
- Análise *a posteriori*: É a análise dos resultados obtidos durante a experimentação. O objetivo consiste em oferecer informações novas para o desenvolvimento de uma outra análise *a priori* para a próxima

experimentação, concebendo o desenvolvimento das atividades como a atualização dos processos em questão. No caso do GeoMeios, este processo está relacionado ao desenvolvimento de novas modificações no próprio *software*.

Como seqüência didática foi proposto a Seqüência Fedathi, em que é priorizada a postura do professor no processo de ensino-aprendizagem. Nesta concepção, o trabalho do professor consiste em possibilitar ao estudante a vivência de uma experiência significativa mediante as posturas e concepções epistemológicas sobre o saber matemático. No entanto, uma discussão mais aprofundada sobre este tema é apresentada no próximo capítulo, pois tal proposta está diretamente relacionada à passagem do Novo PC ao Velho PC em termos didáticos.

Em suma, o desenvolvimento do programa GeoMeios está proporcionando o conhecimento das dificuldades na elaboração de um *software* educativo, do ponto de vista de quem está construindo um produto, e ao mesmo tempo, tem exibido algumas situações em são expostos os limites conceituais das novas tecnologias frente o saber matemático reconhecido social e culturalmente. No entanto, mesmo ao superar todas as dificuldades para que seja obtida uma ferramenta significativa do ponto com respeito ao saber matemático, nada disto é válido, caso a formação dos professores não seja adequada ao uso de novas tecnologias.

O problema da informática educativa, na atualidade, não está somente em levar os recursos computacionais aos alunos, mas sim, em utilizar estes como meio para que os estudantes possam ter acesso a uma educação de qualidade. Entretanto, frente às dificuldades apresentadas, é preciso encarar os novos paradigmas educacionais, propondo inicialmente uma formação de professores de qualidade, para que os mesmos possam utilizar às novas tecnologias educacionais de forma adequada. No próximo capítulo será discutido o papel do professor frente o uso de tecnologias educacionais no ensino de matemática.

CAPÍTULO 5 – DO NOVO AO VELHO PC: A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA POR MEIO DE DEMONSTRAÇÕES COMO DIDÁTICA REFLEXIVA

5.1 – Propondo o uso do computador para gerar uma experiência matemática significativa ao aluno por meio de demonstrações

Como foi visto nos dois capítulos anteriores, o uso de computadores no ensino de matemática é uma proposta que está em andamento, no entanto, as abordagens que estão sendo adotadas junto aos estudantes, na maioria das vezes, visam ao desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas semelhantes aos que se desenvolvem em sala-de-aula. Nada contra tal abordagem, afinal a resolução de problemas é algo que faz parte do contexto matemático. Porém, a prática na resolução de problemas com o uso do computador está se resumindo a passagem do Velho ao Novo PC, ou seja, são tomados problemas que poderiam ser resolvidos em sala-de-aula, para que os mesmos sejam implementados no computador, e após a execução e o funcionamento correto do algoritmo no computador tudo termina. O professor acredita que houve a aprendizagem do estudante, e este supõe que houve ensino, afinal o algoritmo funcionou no computador. No entanto, surge aqui uma questão: Como o computador pode ser utilizado de forma adequada no ensino de matemática?

Na passagem do Novo ao Velho PC, se propõe a exploração das possibilidades de simulação e manipulação das ferramentas computacionais, para o estabelecimento de novos problemas matemáticos que exigirão o processo de validação matemática, seja por verificação ou demonstração. A idéia é fazer uso do computador para obtenção de conjecturas genuínas, ou ainda, para obter um ponto de vista novo sobre problemas antigos. Neste aspecto um dos objetivos do uso do computador no ensino de matemática, consiste em proporcionar ao estudante uma experiência matemática prática e significativa que lhe permita compreender o processo de produção do saber matemático, a

partir de enunciados novos que surgem da manipulação e simulação das ferramentas computacionais. GRAVINA (2001: p. 40), ao falar sobre a pesquisa matemática atual, menciona que o computador permite a construção de abordagens que outrora estavam restritos aos processos mentais.

Na pesquisa matemática atual, objetos e processos abstratos até então restritos aos “olhos da mente” são externalizados através de precisas, objetivas e dinâmicas visualizações na tela de um computador, implicando novos insights na abordagem da complexidade e do precário entendimento de muitos destes objetos e processos.

Neste sentido, Gravina menciona que a pesquisa matemática através de ambientes informatizados, em certos momentos, viabiliza a elaboração de novas idéias matemáticas.

O suporte dos ambientes informatizados a pesquisa em matemática favorece a exploração, a elaboração de conjecturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática. Por exemplo: a teoria do caos nasceu do estudo de equações diferenciais por Lorentz; ao implementar sistemas que diferenciavam minimamente das condições iniciais, Lorentz constatou que a evolução do sistema tornava-se imprevisível, surgindo daí resultados teóricos sobre a instabilidade dos sistemas dinâmicos. Um segundo exemplo: a representação gráfica de maciças computações tornou possível a teoria dos fractais, em que figuras surpreendentes provocaram conjecturas que desencadearam a busca de demonstrações.

GRAVINA (2001: p. 36)

Portanto, ao propor o uso do computador na escola, para que o estudante possa viver uma experiência matemática significativa, por meio da pesquisa científica matemática, não se pode desconsiderar que deve ocorrer uma ruptura violenta com respeito à conotação da palavra problema para professores e alunos de matemática. Pois um problema deixa de ser uma tarefa, no sentido escolar usual, para se tornar uma ação de pesquisa e investigação que envolve os procedimentos de validação matemática, de modo que os professores e os alunos possam discernir e compreender a lógica do descobrimento matemático.

5.2 – Reflexão-na-ação e a experiência matemática com uso do computador

Em termos educacionais, a proposta da passagem do Novo ao Velho PC corresponde ao desenvolvimento de uma prática de pesquisa em que deve ocorrer a uma ação reflexiva sobre a própria ação por parte do aluno mediante intervenções feitas pelo professor enquanto orientador. Nestes termos, ao propor uma experiência matemática significativa ao estudante, o que está sendo desenvolvido é uma compreensão do trabalho que o matemático executa quando produz matemática, e neste aspecto o que se obtém é uma noção do trabalho profissional que o pesquisador em matemática realiza no seu cotidiano. Porém, não se deve interpretar de modo algum que tal proposta seja uma promoção do saber matemático para que todos os alunos sigam este caminho, afinal cada indivíduo possui uma determinada vocação. Neste caso, o que está sendo proposto, é que o aluno possa conhecer o trabalho do matemático enquanto realiza uma ação de pesquisa coordenada pelo professor que pretende atingir alguns objetivos educacionais, e a reflexão-na-ação deve ser um destes fins.

Segundo SCHÖN (2000), muitas das ações inteligentes que são realizadas pelo ser humano, são aprendidas de forma tácita e espontânea por meio de construções práticas que em muitos casos não se sabe expressar como foram adquiridas. Este fenômeno é apresentado como o conhecer-na-ação.

Usarei a expressão conhecer-na-ação para referir-me aos tipos de conhecimento que revelamos em nossas ações inteligentes – performances físicas, publicamente observáveis, como andar de bicicleta, ou operações privadas, como a análise instantânea de uma folha de balanço. Nos dois casos o ato de conhecer está na ação. Nós o revelamos pela nossa execução capacitada e espontânea da performance, e é uma característica nossa sermos incapazes de torná-la verbalmente explícita.

SCHÖN (2000: p. 31)

Na produção do saber matemático, o fenômeno do conhecer-na-ação também ocorre, visto que na elaboração de problemas, concepções e idéias já se está produzindo matemática, ainda que seja de modo informal.

Ao se trabalhar com o processo de validação matemática, o fenômeno de conhecer-na-ação se revela por abordagens dedutivas ou heurísticas para certos problemas matemáticos. Entretanto, tais abordagens devem ser consideradas como parte das características individuais dos estudantes, pois cada um deve encontrar a abordagem que melhor lhe permita produzir, no entanto, cabe ao professor mostrar que para o caminho que um estudante escolheu existe outro que pode ser complementar.

Um dos indícios da influência das abordagens dedutivas e heurística, na produção do saber matemático, é apresentada no livro *O valor da ciência* de Henri Poincaré.

Segundo POINCARÉ (1995, p. 13), existem dois tipos de matemáticos, aqueles que são mais dedicados ao conhecimento lógico, e há aqueles que são voltados à intuição. Os primeiros vão trabalhando e produzindo cuidadosamente, mas os últimos na primeira investida conseguem ótimos resultados, mas são menos cautelosos que os primeiros. Para POINCARÉ, não foi a educação que lhes imprimiu tais habilidades, assim como, o fato de alguém ser ou não um matemático dependeria do fato de uma pessoa nascer com este talento. Poincaré chega a dizer que “o indivíduo nasce matemático, não se torna matemático”.

Controvérsias à parte, o que POINCARÉ expõe é algo que merece ser investigado, mas é provável que na Matemática o conhecer-na-ação se revele pelas habilidades dedutivas e/ou heurísticas que os indivíduos expõem ao tentar compreender o significado de enunciados matemáticos no processo de validação. Entretanto, independente de tal hipótese, cabe ao professor propor aos seus alunos sempre uma nova forma de observar um determinado assunto mediante contra-exemplos locais ou globais variando o seu modo de olhar uma determinada situação problema. Neste aspecto, surgem os primeiros indícios da reflexão-na-ação como um dos objetivos do professor na sua prática de ensino.

SCHÖN (2000: p. 32-33) considera que quando alguém está aprendendo algo, e está apto na realização de seqüências fáceis de uma atividade, que envolve habilidades como reconhecimento, ajuste e decisão sem se ter que pensar no que está sendo desenvolvido, o ato de conhecer-na-ação permite que uma pessoa dê conta de uma tarefa que lhe foi designado. No entanto, em certos momentos, ocorrem resultados inesperados em rotinas que eram tidas como simples, e nestas situações um indivíduo está diante de um elemento surpresa, algo que não estava em suas expectativas. Diante de tal situação há duas possibilidades: a) O sujeito pode refletir sobre a ação desenvolvida de

forma retrospectiva, tentando descobrir como o ato de conhecer-na-ação contribuiu para apresentação de um resultado inesperado após terminar a ação; b) Ou se pode “parar e pensar” antes do término desta ação.

Segundo SCHÖN, tanto na situação (a) como em (b), a reflexão feita não possui relação com o presente, mas sim, com o passado. No entanto, ao refletir no meio da ação, é possível interferir no processo que está sendo desenvolvido, de modo que o pensar do sujeito serve para dar nova forma ao que está sendo feito enquanto se está fazendo. Um caso como este para SCHÖN é o que ele chama por reflexão-na-ação que pode ser descrito por uma seqüência de passos que pode ser relacionado à passagem do Novo ao Velho PC.

Tabela 013 – A passagem do Novo ao Velho PC como reflexão-na-ação uso do computador em aula.

Passo	Descrição com base em Schön	Passagem do Novo ao Velho PC
01	Existe uma situação de ação para a qual são trazidas respostas espontâneas e de rotina, de modo que seja revelado o processo de conhecer-na-ação por meio de estratégias e compreensão de fenômenos.	Ocorre uma situação de exploração e manipulação com uso do computador contextualizado pelo professor através de uma atividade programada. São realizadas atividades rotineiras que visam permitir aos estudantes formular proposições com respeito ao saber matemático em questão.
02	As respostas de rotina apresentam uma situação surpresa que é um resultado não esperado, independente de ser ou não agradável, mas que não se encaixa na categorização do conhecer-na-ação.	Surge uma situação inesperada na manipulação e/ou simulação computacional que não se encaixa nas respostas esperadas pelos alunos e pelo professor. O problema presente é apresentado para todo o grupo.
03	A surpresa leva à reflexão dentro do problema presente, e é algo consciente mesmo que não tenha sido expresso em palavras. Leva-se em consideração a situação surpresa e o conhecer-na-ação. O pensamento se volta ao fenômeno e a si próprio.	O professor, na qualidade de orientador, apresenta aos seus alunos o problema e propõe a discussão entre os estudantes para que os mesmos pensem sobre a questão. É proposto pelo professor a sistematização deste problema por meio de uma conjectura, e o primeiro passo é uma descrição de cada procedimento adotado para que fosse obtido o resultado inesperado.
04	Como a reflexão-na-ação possui uma função crítica, questionando os princípios do ato de conhecer-na-ação. Pensa-se criticamente sobre o pensamento (meta-pensamento) que levou a essa situação inesperada, e se procura reestruturar as estratégias de ação, a compreensão dos fenômenos e as formas de conceber o problema.	Mediante a descrição dos procedimentos, é possível desenvolver uma análise sobre as propriedades matemáticas envolvidas em cada ação, e neste contexto são desenvolvidas abordagens matemáticas dedutivas e heurísticas através do processo de validação por demonstração. O ato de demonstrar apresenta novos problemas. Neste processo é desenvolvido o trabalho dos alunos sem intervenção do professor. É importante ter material de investigação, papel e caneta.

05	A reflexão-na-ação gera o experimento imediato. São experimentadas novas ações para explorar a situação surpresa. O problema pode ser solucionado ou uma surpresa maior pode ocorrer.	O teste dos argumentos dos alunos e do professor ocorre mediante apresentação dos mesmos diante do grupo. Ao professor cabe incentivar a apresentação de contra-exemplos, a conjectura pode ser solucionada mediante prova ou se pode reformular a prova apresentada.
----	---	---

Em termos gerais, a passagem do Novo ao Velho PC é uma proposta que corresponde à concepção educacional de formação profissional reflexiva de SCHÖN, pois ao propor uma formação matemática que contempla os aspectos científicos, o que se está propondo, é ao menos mostrar o que é o trabalho matemático em termos práticos. Por outro lado, ocorre uma mudança significativa na postura do professor e dos alunos frente à concepção de ensino prático-reflexivo com respeito à passagem do Novo ao Velho PC, visto que tal proposta, enquanto uma didática para uma turma de alunos toma como base o problema proposto para uma coletividade e não somente uma situação que ocorre com um indivíduo. No entanto, não é possível desconsiderar que a passagem do Novo ao Velho PC pode ocorrer com um professor, um computador e um aluno.

5.3 – O papel do professor reflexivo na passagem do Novo ao Velho PC

A passagem do Novo ao Velho PC, no contexto de aula, representa uma série de mudanças na postura do professor, quando este usa as tecnologias computacionais com seus alunos. Inicialmente um dos problemas existentes está relacionado com o ambiente laboratório de informática escolar (LIE). No ensino tradicional, a sala-de-aula da escola, favorece que o professor seja considerado o centro de todas as atenções no processo ensino-aprendizagem. No LIE as coisas mudam um pouco, pois o computador concorre com o professor em termos de atenção com respeito ao estudante, e este é o primeiro impacto nas concepções usuais. Por outro lado, segundo SCHÖN (2000: p. 37), se deve levar em conta que a sala-de-aula da escola não é o ambiente de trabalho do matemático profissional.

O processo de conhecer-na-ação de um profissional tem suas raízes no contexto social e institucionalmente estruturado do qual compartilha uma comunidade de profissionais. Conhecer-na-prática é exercitado nos ambientes institucionais particulares da

profissão, organizados em termos de suas unidades de atividade características e seus tipos familiares de situações práticas e limitado ou facilitado por seu corpo comum de conhecimento profissional e seu sistema apreciativo.

Na realidade a passagem do Novo ao Velho PC, consiste em permitir que o estudante tenha uma experiência matemática significativa na escola, e tal experiência está relacionada à prática reflexiva. No entanto, o contexto de formação do matemático profissional no Brasil é o meio universitário, nos departamentos de matemática pura ou aplicada, e nestes locais existem pessoas com quem é possível compartilhar e trocar opiniões, bem como, ouvir as novidades sobre a comunidade matemática. Portanto, para compensar as dificuldades existentes em relação à distinção entre os ambientes escolar e o profissional matemático, é necessário ao professor estabelecer vínculos de comunicação com a comunidade matemática, e o computador e a *Internet*, atualmente, podem contribuir neste sentido. No entanto, cabe a comunidade acadêmica matemática e aos sistemas educacionais o desenvolvimento de programas para formação continuada de professores de matemática, de modo que os docentes da universidade possam formar uma rede que relacione universidade e escola no ensino de matemática da Educação Básica no Brasil. Afinal, sem tais contatos a formação do professor de matemática não se renova, e por outro lado, ao formar o professor da escola é possível contribuir com a melhoria na qualidade da formação dos futuros estudantes universitários.

Outra dificuldade diz respeito ao conhecimento que o professor pode possuir mediante as ferramentas computacionais. É necessário ao professor que pretende trabalhar a passagem do Novo ao Velho PC ter convívio com as tecnologias computacionais, de modo que o mesmo saiba como solucionar e resolver os problemas simples que ocorrem no LIE. Neste aspecto, também cabe ao professor explorar novos programas apropriados ao ensino de matemática, procurando compreender os limites e possibilidades que a tecnologia apresenta no cotidiano do trabalho escolar com respeito ao saber matemático. Para tal compreensão, torna-se necessário entender aspectos relativos a teoria computacional e sua relação com o conhecimento matemático, bem como, cabe ao professor manipular *softwares* educativos matemáticos, implementando conteúdos e explorando por meio de manipulações e simulações o que pode ocorrer com o que está sendo desenvolvido. As explorações dos recursos computacionais devem estar associadas às necessidades de

convívio com a comunidade matemática, relacionando a nova formação do professor e à compreensão do ambiente escolar novo que é conhecido como LIE. No entanto, há outros aspectos da mudança de postura do professor que devem ser considerados em termos da sua individualidade.

Enquanto na realidade da sala-de-aula o professor exerce como função à transmissão do saber associado à gestão do ambiente em questão, no LIE ao se propor a passagem do Novo ao Velho PC, cabe ao professor propor questionamentos assumindo como postura a orientação ao invés da transmissão de saber, ao estudante cabe compreender e entender os fenômenos matemáticos mediante o diálogo com seus colegas, e ao professor cabe assumir a posição de um pesquisador mais experiente mediante seus alunos.

Neste sentido, o professor não deve em momento algum resolver um questionamento matemático para o estudante, mas pode propor formas e procedimentos novos para que o estudante possa atacar de maneiras diferentes o problema existente. Ao professor também cabe motivar e ouvir seus alunos, lhes permitindo errar, mostrando para todos os alunos que na produção do saber matemático é comum a ocorrência de erros e dificuldades quando se tenta desenvolver uma investigação científica que permite compreender os enunciados matemáticos.

No entanto, há problemas no convívio entre o professor e o aluno que vão além da compreensão destes atores sociais, de modo que tais relações merecem uma discussão mais aprofundada.

5.3.1 – Dificuldades na passagem do Novo ao Velho PC com respeito à prática-reflexiva e a relação ensino-aprendizagem

No exercício da relação que envolve o ensino e aprendizagem em uma situação prática, em alguns momentos podem surgir impasses na aprendizagem do aluno na incompreensão do diálogo entre o professor enquanto orientador, e os estudantes que exercem o papel de pesquisadores. A primeira dificuldade que SCHÖN (2000: p. 99-100) apresenta nos relatos de suas observações, diz respeito à atitude de alguns instrutores em proteger seu talento com receio que os estudantes possam fazer mal uso destes

conhecimentos, ao se apropriar dos mesmos. Em muitos casos de forma inconsciente, sob a armadura do “ensino”, tais professores retêm o que sabem. Por outro lado, para alguns alunos a especialização de um professor pode representar uma ameaça de modo que o estudante assuma uma postura defensiva, o que impede que o aluno possa aprender quaisquer conhecimentos novos. Segundo SCHÖN (2000: p. 100), do ponto de vista do estudante é possível considerar que:

Tais restrições parecem estar ligadas à nossa idéia de virarmos adultos, a qual concebemos em termos de independência, liberdade de escolha e completo exercício da iniciativa individual. Elas também estão ligadas a uma ideologia de educação que defende o pensar por conta própria (considera-se o epíteto pejorativo “imitador!”). Porém, restrições contra a idéia de imitação vão de encontro à prática quase universal da imitação. Estudantes pertencentes à cultura americana, especialmente aqueles que vêm de uma experiência recente de rebelião adolescente, provavelmente serão profundamente ambivalentes em relação à imitação, desprezando-a na teoria mas assumindo na prática.

SCHÖN (2001: p. 101 – 110) ao relatar suas observações em um ateliê de *designer* em arquitetura, expõe um diálogo que mostra a relação entre um instrutor que defende uma postura específica do *designer* e uma aluna que se considera perseguida por ser incompreendida pelos seus professores. Neste diálogo se revela o que é chamado por SCHÖN como um impasse na aprendizagem. Pelo diálogo entre o professor e a aluna, se percebe que a aluna pensa que o professor está repudiando o seu projeto por motivos ideológicos relativos ao seu estilo arquitetônico, no entanto, o professor está mostrando falhas técnicas existentes no projeto. De forma insistente, o professor pede à aluna que faça uma representação por meio do desenho do projeto, para que seja possível para o estudante efetuar seus experimentos mentais. No entanto, a aluna vê o desenho do seu projeto apenas como uma forma de apresentação de idéias não imaginando que pelo desenho seja possível efetuar o experimento mental que o professor deseja. Por outro lado, o professor em nenhum momento convida à aluna para que a mesma entre no universo de suas idéias. Segundo SCHÖN (2001, p. 109), este impasse na aprendizagem está de acordo com o modelo da teoria da ação interpessoal de Chris Argyris, e é conhecido como Modelo I.

É um modelo de controle unilateral, estratégias de mistério e maestria do tipo vitória/derrota, ocultação de sentimentos

negativos e racionalidade superficial. É um modelo no qual indivíduos fazem atribuições negativas a outros, as quais eles testam apenas na privacidade de suas próprias mentes, nunca publicamente, em aberto, com outra pessoa.

Situações como estas é comum ao exercer um trabalho didático que envolve o diálogo entre alunos jovens e adolescentes e seus professores. Na passagem do Novo ao Velho PC, tais situações podem ser um obstáculo que pode impedir que uma experiência seja significativa ao estudante e ao professor. No entanto, para quebra de tal impasse, de forma que seja possível construir no LIE um ambiente favorável à aprendizagem, é preciso que o professor desenvolva formas de trabalhar com o estudante o que é apresentado por SCHÖN (2000: p. 111) como reflexão-na-ação recíproca:

- *Prestar atenção à presente interação como um objeto de reflexão em si.*
- *Entrar em contato e descrever seu próprio processo, bastante tácito, de conhecer na ação.*
- *Refletir sobre as idéias que o outro tem do material substantivo que o instrutor quer transmitir e o estudante quer aprender.*
- *Testar o que se entendeu sobre o processo de conhecer-na-ação do outro e sua concepção de interação. Testar o que o outro fez de nossas tentativas de comunicação.*
- *Refletir sobre as teorias-em-uso interpessoais trazidas ao processo comunicativo.*

Em suma as orientações de SCHÖN, se resumem em uma meta-reflexão, e na passagem do Novo ao Velho PC, tais procedimentos em princípio devem partir do professor, que se supõe conhecer aspectos relativos ao processo de investigação matemática com uso do computador. Por outro lado, o desenvolvimento ou não do impasse na aprendizagem, está associado ao contrato didático que é estabelecido inicialmente entre o professor e o aluno. MACHADO *et al apud* BROSSEAU (1999: p. 43-44), apresenta uma definição do que pode ser entendido como contrato didático:

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma

pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Mesmo quando o professor não propõe um contrato didático de forma explícita, estes acabam por se estabelecer nas regras de convívio entre os indivíduos. No caso da passagem do Novo ao Velho PC, a meta-reflexão deve ser proposta de forma explícita como um meio de desenvolvimento da reflexão-na-ação enquanto ocorre o trabalho prático matemático por meio do processo de validação por demonstração. Pois além do impasse de aprendizagem, existem outros problemas que podem ser solucionados mediante a reflexão-na-ação recíproca.

BALACHEFF (1991: p.175-192), ao escrever um artigo intitulado: *The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof*. Expõe dois casos, em que o ensino mediante os procedimentos de validação por demonstração, apresentam suas maiores dificuldades mediante a dificuldade de compreensão dos estudantes sobre os mecanismos formais da demonstração.

Por outro lado, o processo exige a negociação, visto que o processo de apresentação de provas e refutações, pode ser algo frustrante aos alunos. Afinal é difícil para um indivíduo aceitar a crítica de seus semelhantes.

Assim, a fim de obter sucesso no ensino da prova matemática, o maior problema aparenta ser o como negociar a aceitação pelos estudantes de novas regras, mas não necessariamente para requerer que eles rejeitem argumentação que pode ser bem adaptada em outros contextos. A prova matemática deve ser aprendida "pela contra" argumentação, trazendo estudantes à consciência da especificidade da prova matemática e de sua eficiência para resolver o tipo do problema que temos que resolver em Matemática.

BALACHEFF (1991: p. 189)

Portanto, mediante as concepções de BALACHEFF e SCHÖN, é possível compreender que o papel do professor na passagem do Novo ao Velho PC, deve ser permitir que o estudante tenha uma experiência prática reflexiva significativa por meio do processo de validação em matemática, de modo que a meta-reflexão seja parte do processo de compreensão do conhecer-na-ação, bem como, parte do processo de negociação que

permite que os universos do professor e dos alunos sejam algo convergente aos objetivos do ensino de matemática. No entanto, ao se trabalhar com demonstrações matemáticas com estudantes da Educação Básica no Brasil, é preciso considerar que:

Nem sempre as estruturas cognitivas dos alunos se apresentam prontas para a construção de saberes matemáticos conforme ilustram, especialmente, suas dificuldades frente ao aprendizado de teoremas e demonstrações, quando são solicitadas estruturas de pensamento de caráter operatório-formal. É o próprio processo de aprendizagem, desencadeado com a intenção de ensinar-se um certo saber matemático, que permite potencializar, e mesmo desenvolver os aspectos cognitivos.

GRAVINA (2001: p. 42-43)

Em termos gerais, a relação ensino-aprendizagem na passagem do Novo ao Velho PC, apresenta como desafio o desenvolvimento da meta-reflexão e da negociação, a partir da prática reflexiva do professor, pois é somente com base na prática deste sujeito que os estudantes podem se envolver no trabalho que se dá mediante uma situação inusitada em um processo do que é chamado por conhecer-na-ação. Entretanto, para compreender a especificidade das atividades desenvolvidas se deve compreender o papel investigativo do professor pesquisador com respeito aos procedimentos metodológicos didáticos no decorrer das aulas no LIE.

5.3.2 – A Ensinagem e a Seqüência Fedathi

No contexto educacional, ao se falar da relação ensino-aprendizagem no Brasil, é comum que a aprendizagem seja mais valorizada que o ensino, e tal problema, em certos momentos, tem acarretado na sala-de-aula a valorização de um psicologismo que expõe os problemas de aprendizagem dos estudantes, mas que não propõe novas soluções em termos didáticos para que práticas educacionais possam favorecer a aprendizagem dos estudantes. No caso específico do ensino de matemática, em muitos casos é comum que se confunda as pesquisas em psicologia da matemática com a didática da matemática, e neste aspecto, é preciso que os licenciados em matemática, pedagogos e psicólogos, proponham

uma “ensinagem” que considere a aprendizagem matemática do estudante a partir da prática didática do professor em aula.

Em consideração a uma prática reflexiva do professor, o emprego do neologismo “ensinagem”, na passagem do Novo ao Velho PC, consiste em propor o trabalho do professor como uma preparação antecedente ao momento de aula, ou seja, cabe ao docente desenvolver abordagens e estratégias que permitam aos estudantes elaborar construções por meio do conhecer-na-ação, de modo que em algum momento no trabalho do estudante, possa ocorrer uma situação inusitada que permita desenvolver a passagem do Novo ao Velho PC, mediante uma problematização. Após a construção do problema a partir de conjecturas, ao professor cabe propor uma seqüência didática que possa dar conta da lógica situacional, e no caso desta pesquisa em algumas situações foi a Seqüência Fedathi.

A seqüência Fedathi é uma proposta teórico-metodológica apresentada por um Grupo de Educadores Matemáticos do Estado do Ceará, conhecido como “Grupo Fedathi”. Esse referencial propõe que os conhecimentos matemáticos sejam ensinados pelo professor, baseados no desenvolvimento do trabalho científico de um matemático.

SOUZA (2001: p. 82)

Pela Seqüência Fedathi, o objetivo do professor consiste em criar condições e possibilidades para que o estudante desenvolva uma atividade proposta seguindo os mesmos passos que um pesquisador matemático segue em seu trabalho. Segundo SOUZA *apud* BORGES NETO *et al* (2001: p. 83-86), a seqüência Fedathi apresenta estágios básicos que são: a tomada de posição, maturação, solução e prova.

- (a) A tomada de posição: corresponde à apresentação do problema para o aluno, de modo que este tenha relação com o saber que está sendo ensinado. Para apresentar o problema, o professor deve ter feito um diagnóstico inicial para identificar no grupo o domínio dos pré-requisitos necessários ao saber que se pretende ensinar. Neste sentido o professor assume o papel de pesquisador em educação com intuito de compreender e desenvolver meios de sanar as deficiências dos estudantes. Também é neste momento que se

estabelece o contrato-didático de modo que seja possível estabelecer os fundamentos da negociação e da meta-reflexão. Neste momento o objetivo é compreender, conquistar e construir novas abordagens. A passagem do Novo ao Velho PC pode ocorrer no momento de manipulação em que ocorre uma situação inusitada.

- (b) **Maturação:** É uma etapa destinada à discussão inicial entre o professor e o estudante a respeito do problema em questão. Neste estágio o estudante deve ser incentivado a levantar suas hipóteses sobre o problema proposto, e na passagem do Novo ao Velho PC, este processo corresponde à problematização inicial que permite aos estudantes estabelecer a conjectura que se pretende demonstrar. Neste momento o professor deve observar o comportamento dos seus alunos se preparando para uma mediação futura.
- (c) **Solução:** É o processo em que os alunos devem organizar e apresentar os seus modelos de modo que seja possível que os mesmos sejam sistematizados mediante a linguagem matemática. Neste contexto, ao estudante cabe propor esquemas, desenhos e explicações verbais. No entanto, os estudantes devem exercer sua autonomia. Enquanto o professor assume o papel de mediador orientando os alunos. Neste processo pode ocorrer a refutação por meio de contra-exemplos locais ou globais. Cabe ao professor motivar os estudantes para que possam trabalhar o processo de validação por verificação ou demonstração. A passagem do Novo ao Velho PC é o momento em que o estudante busca respostas no Velho PC (papel e caneta).
- (d) **Prova:** Neste contexto é proposta a apresentação final da produção dos alunos, de modo que seja possível

levar os alunos à resposta do problema proposto. Neste estágio o professor deve procurar estabelecer relações entre o modelo dos alunos e o saber matemático reconhecido. Na passagem do Novo ao Velho PC, pode ocorrer a apresentação de conjecturas legítimas, portanto, o estabelecimento de uma resposta final e conclusiva é questionável, afinal uma conjectura pode exigir mais que se possa esperar de uma sala-de-aula. No entanto, deve ficar claro entre os estudantes, que o processo corresponde ao trabalho do matemático em pesquisa.

É relevante ressaltar que SOUZA (2001: p.87-89), estabeleceu relações entre a teoria das situações didáticas de G. Brousseau e a Seqüência Fedathi desenvolvida por Borges Neto.

Quanto ao aspecto destacado por Brousseau em que o ensino de matemática deve reproduzir o trabalho científico este é também reforçado por Borges Neto na Seqüência Fedathi quando propõe que o ensino de matemática seja realizado levando em consideração os estágios de trabalho vivenciados pelo matemático no processo de suas criações experimentais e teóricas.

SOUZA (2001: p.88)

Em suma, o papel do professor no ensino prático e reflexivo com base na passagem do Novo ao Velho PC exige uma formação do professor de matemática que contemple domínios bem mais amplos que os estabelecidos na atualidade. No entanto, existe a possibilidade de se fundar novas práticas que permitam ao estudante compreender o significado da produção de conhecimentos matemáticos em termos sociais e culturais, de modo que seja possível contribuir para a disseminação e valorização do saber matemático no meio escolar. É um novo investimento que envolve não só o professor mas também a comunidade matemática que pode e deve contribuir para o enriquecimento do processo de formação dos professores. No entanto, mesmo ao assumir um tom otimista, não se deve desconsiderar as dificuldades existentes em termos culturais, sociais e políticos que envolvem o ensino de matemática na atualidade.

CAPÍTULO 6 – SITUAÇÕES-SURPRESA QUE SURGEM NO NOVO PC

6.1 – Procedimentos Metodológicos

Os procedimentos metodológicos para coleta dos dados consideraram vários momentos em que oportunamente poderiam ocorrer as situações-surpresa. Além disto, foi necessário o desenvolvimento de experimentos de exploração de *software* educativo que permitiram obter algumas situações-surpresa. Os dados que exibem as situações-surpresa, foram coletados em quatro contextos diferentes que envolveram:

- (a) Um curso piloto sobre construções geométricas elementares realizado no Laboratório Multimeios – FACED/UFC no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente;
- (b) Um curso de formação de professores de matemática do Ensino Médio realizado no NTE/CREDE 12 em Quixadá;
- (c) Experimentos de implementação de atividades matemáticas que permitiram explorar e manipular *softwares* educativos usados no ensino de matemática no Laboratório Multimeios FACED/UFC;
- (d) A construção do *software* GeoMeios desenvolvido no Laboratório Multimeios FACED/UFC.

A partir destas situações foi possível coletar os dados necessários à apresentação das situações-surpresa, no entanto, cada um destes momentos envolveu procedimentos metodológicos diferentes no preparo dos cursos e dos experimentos.

Procedimentos Metodológicos 1:

O processo metodológico utilizado no desenvolvimento do curso piloto de geometria para formação de professores no Ensino Fundamental de 5ª a 8ª foi a engenharia didática, já mencionada anteriormente. Na análise preliminar desenvolvida no curso piloto do projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente, houve o levantamento dos conteúdos que deveriam ser abordados, bem como, ocorreu a análise epistemológica dos conteúdos de geometria euclidiana plana e construções geométricas. Neste processo foram esquematizadas atividades fundamentais para que o estudante pudesse iniciar seus trabalhos no *software Cabri Géomètre II*.

Após a análise preliminar, que tomou o mês de janeiro de 2000, a análise *a priori* iniciou pela construção das atividades do curso piloto, com base nos conteúdos discutidos na análise preliminar e foram articulados os tópicos estudados no intuito de delimitar variáveis de controle macro-didáticas e micro-didáticas, que permitiram definir as atividades e possíveis intervenções dos professores e monitores no curso. O grupo iniciou o processo de implementação e teste de atividades em que alguns estudaram processos de intervenção durante o curso (monitoramento), e outros se prepararam para coleta de dados (observadores). Também houve aqueles que se prepararam para exposição dos conteúdos (professores), e haviam participantes do grupo responsáveis pela preparação dos computadores (técnicos).

Durante a análise *a priori*, o grupo optou pelo processo de intervenção por parte dos professores e monitores, já os filmadores e observadores optaram pela observação simples, dando ênfase aos processos de interação professor-aluno, monitor-aluno e aluno-aluno. A interação foi considerada uma variável macro-didática no processo. Já as dificuldades dos estudantes em relação aos conteúdos e manuseio do computador foram consideradas variáveis micro-didáticas. As atividades desenvolvidas foram baseadas em *situações didáticas* e *situações caixa-preta*, e se desenvolveu fichas com as construções elementares de geometria para suporte ao aluno.

Os alunos selecionados para a investigação foram estudantes do curso de graduação do curso de pedagogia da FAGED/UFC, que estavam fazendo a disciplina “tópicos especiais em educação matemática”, um dos estudantes fazia a disciplina

“informática educativa”. Ao todo eram sete estudantes, sendo que a frequência dos mesmos no decorrer do curso estava na média de cinco alunos por sessão;

Durante a de execução do curso piloto, a estrutura das aulas com o uso do computador foi presencial e serviu para observar o processo de interação aluno-aluno e aluno-professor. O curso foi dividido em duas etapas: formação e coleta de dados, e evitou-se ao máximo intervir excessivamente junto aos alunos na coleta de dados sobre situações didáticas. Foram 12 sessões ao todo, e usou-se o *software* *ScreenScan* e a filmadora para gravação das ações individuais e coletivas durante o curso. O processo de experimentação durou três meses (Março até Maio) e os tópicos trabalhados foram apresentados pelos professores com suporte dos monitores. Na análise *a posteriori* foram feitas transcrições das fitas de vídeo e as gravações do *ScreenScan* (*software* que permite gravar as conversações entre os alunos no computador e suas ações), mas neste trabalho, foram utilizados somente os dados transcritos de uma das fitas de vídeo.

Procedimentos Metodológicos 2:

Neste momento da pesquisa os dados foram coletados em uma situação real de formação de professores. O processo de coleta de dados ocorreu no período que compreende de 01 até 04 de Agosto de 2000, em um curso de formação continuada intitulado “Trabalhando a Matemática com o Computador no Ensino Médio”. Este curso foi realizado nas dependências do NTE²⁸/CREDE 12²⁹, e a duração do curso foi de 30 horas/aula. Os participantes do curso eram em sua grande maioria professores de matemática do Ensino Médio de Quixadá-CE, mas também alguns professores de cidades da região. O curso foi relacionado ao processo de implementação de Laboratórios de Informática Educativa (LIE), nas escolas públicas estaduais daquela região. Participaram do curso, 20 professores de matemática e todos os professores tinham formação superior, sendo a maioria deles eram formados em alguma licenciatura.

Um dos objetivos do trabalho foi formar estes professores com respeito ao uso do computador no ensino de matemática. A metodologia adotada para o curso foi à pesquisa-ação e a coleta de dados ocorreu através do diário de campo. A preparação das atividades seguiu alguns procedimentos da engenharia didática, entretanto, não houve um processo exaustivo de análise preliminar e análise *a priori*. Logo, a ênfase da investigação era propriamente o experimento que seriam às 30 horas/aula de curso.

²⁸ Núcleo Tecnológico Educacional.

²⁹ 12º Centro Regional de Desenvolvimento da Educação.

Ao chegar no NTE de Quixadá os computadores do laboratório foram preparados com os *softwares*: *Cabri Géomètre II*, *Dr. Geo* e *Wingeo*. Também foram instalados os jogos *Torre de Hanói* e outros, que permitiram trabalhar atividades específicas de matemática, bem como, o manuseio do computador, visto que a maior parte dos professores tinha pouca experiência com o uso do mesmo. A análise preliminar ocorreu em conteúdos de geometria euclidiana e analítica, e o processo de manuseio do computador foi definido como variável de controle em uma breve análise *a priori*.

O curso teve início em 01 de Agosto e neste primeiro dia, a discussão inicial foi um diálogo sobre as dificuldades que os professores apresentavam em trabalhar o ensino de matemática com uso do computador, visto que todos tinham recebido em suas escolas laboratório de informática, após este momento foi trabalhado o manuseio do computador durante duas horas. No turno da tarde se trabalhou o manuseio do *software*, e no período noturno houve a análise das atividades do curso junto aos professores do NTE que estavam monitorando o curso. Ao todo eram três professores do NTE e o professor do curso.

No segundo dia se trabalhou com os *softwares* *Cabri Géomètre* e *Dr. Geo* a partir de demonstrações matemáticas e situações limites com uso do computador. No período da tarde houve um trabalho sobre o uso da *Internet* como recurso para coleta de dados e se combinou com os alunos que os mesmos deveriam no dia 04 de Agosto de 2000, apresentar uma hora de aula a partir de uma situação didática.

Durante o terceiro dia foi apresentada aos professores uma listagem de situações-problema e a partir daí os alunos se organizaram em equipes de estudo para desenvolver atividades que deveriam ser apresentadas no dia seguinte. E ao preparar as atividades os alunos pediam constantemente intervenção do professor para esclarecimento de questões de cunho matemático. As atividades foram desenvolvidas durante a manhã e à tarde.

No quarto e último dia do curso os professores apresentaram pela manhã o trabalho desenvolvido por eles em suas respectivas equipes, e no período da tarde houve a avaliação do curso por parte de todos os professores-aluno, o professor e os funcionários do NTE. O tema da discussão foi sobre a formação dos professores que trabalhariam nos laboratórios de informática, sobre formas de proceder com uso da tecnologia computacional, e a partir deste momento foram apresentadas por parte dos professores-alunos questões sobre os limites e possibilidades do computador no laboratório de informática da escola. Os dados foram coletados por meio de diário de campo, durante os dias do curso.

Não se pode dizer que foi uma pesquisa-ação experimental, pois a situação do curso foi real, ou seja, se tratou de um curso de formação de professores. Porém houve nas atividades apresentadas a influência dos aspectos experimentais da engenharia didática (que pode ser vista como um tipo de pesquisa-ação experimental) e do manuseio do computador na preparação de atividades de estudo que podem ser chamadas por situações-didáticas neste trabalho. No entanto, os dados coletados que apresentaram situações-surpresa, resultam de uma situação real de aprendizagem em que houve a passagem do Novo ao Velho PC. Portanto, se pode dizer que as atividades do curso foram desenvolvidas mediante parâmetros experimentais, mas a situação que se desejava obter se deu mediante a observação participante.

Procedimentos Metodológicos 3:

O estudo experimental exploratório foi desenvolvido por permitir encontrar problemas de implementação e defeitos computacionais (*bugs*), que permitiram obter situações-surpresa que podem constituir, construção de material para atividades utilizadas em cursos de formação para professores e/ou alunos, bem como, permitem conhecer os problemas computacionais que podem influir no ensino à distância por meio de um programa. Neste caso os procedimentos experimentais podem ser divididos em quatro etapas:

- (a) A pesquisa bibliográfica em livros de matemática sobre situações-problema propostos;
- (b) A pesquisa experimental propriamente dita, que consiste em implementar e testar situações no computador;
- (c) A validação matemática que envolve os processos de validação por demonstração no Velho PC e/ou verificação no Novo PC, no intuito de obter uma justificativas plausíveis para os problemas apresentados por meio das situações surpresa;
- (d) Interpretação e análise dos dados obtidos.

Neste contexto, foram analisados mais os aspectos computacionais que os humanos, entretanto, as situações obtidas por intermédio deste tipo de pesquisa, abriram possibilidades para o desenvolvimento de novas atividades em que se utilizam como base a passagem do Novo ao Velho PC.

Procedimentos Metodológicos 4:

Este procedimento foi explicado no capítulo 4, e se trata do desenvolvimento do *software* GeoMeios, é um processo misto entre os procedimentos anteriores, pois implica no desenvolvimento de material didático que pode ser usado em um curso, mas por outro lado, envolve a modelagem matemática do saber matemático no computador. Neste contexto, as situações surpresa constituem elemento de investigação com respeito à engenharia de *software*, de modo que a passagem do Novo ao Velho PC, represente a necessidade em entender a Matemática como um modelo que se deseja implementar no computador. Quanto à lista dos materiais utilizados no Laboratório Multimeios FACED/UFC, os mesmos podem ser obtidos, se consultando o Anexo B (B1, p. 163).

6.2 – Resultados

As situações surpresa apresentadas a seguir permitem compreender em termos práticos a passagem do Novo ao Velho PC, destacando características e peculiaridades deste processo, levantando elementos de compreensão sobre as dificuldades e as possibilidades da proposta em questão neste trabalho.

6.2.1 – Situação 01 – Mal entendidos em geometria dinâmica: Situação relativa às transformações isométricas no *Cabri-Géomètre II*.

A situação apresentada teve sua origem em uma das reuniões de um grupo que desenvolve atividades matemáticas, para um curso à distância de formação de professores no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente Laboratório Multimeios – FACED/UFC. O problema ocorreu na implementação de uma atividade comum de construção de retas paralelas por meio de régua e compasso.

Nos procedimentos de elaboração desta atividade é feita a construção de uma reta paralela s , a partir de uma reta r e um ponto P , dados da atividade, tal que P não pertencente à reta r . No computador com uso do *software Cabri Géomètre II*, o procedimento

de construção faz uso de transferência de medida por meio dos comandos “Reta-Perpendicular” e “Compasso” do *Cabri-Géomètre II*. De modo resumido, o algoritmo da construção corresponde aos seguintes passos:

Tabela 014 – Algoritmo da atividade apresentada pela situação 01.

Passos	Ações realizadas
Dados do Problema	É apresentado ao abrir o arquivo a reta r e o ponto P , não pertencente a reta r .
01	Traçar uma reta a pelo ponto P que seja perpendicular à reta r , usando comando “Reta Perpendicular”.
02	Marcar Q como ponto de intersecção entre as retas a e r .
03	Marcar R como um ponto pertencente à reta r que não seja coincidente com Q .
04	Traçar uma reta b pelo ponto R que seja perpendicular à reta r , usando comando “Reta Perpendicular”.
05	Usando comando “Compasso” transferir a medida do segmento PQ para R .
06	Nomear como c_1 a circunferência com centro em R , e medida PQ obtida pelo comando “Compasso”.
07	Marcar T como um dos pontos de intersecção entre c_1 e b , considerando que T deve estar no mesmo semiplano de P conforme a figura 023.
08	Traçar uma reta s que passe pelos pontos P e T .

Depois de implementado o algoritmo da Tabela 014, ao manipular a construção no *software Cabri Géomètre II*, as retas só são paralelas, se e somente se, o ponto P estiver no mesmo semiplano em que foi construído através do comando “Compasso”. Deste algoritmo surge uma situação surpresa, que apresenta o seguinte impasse:

- Trata-se de um problema computacional relativo ao comando compasso?
- Ou a construção está correta e não se está compreendendo adequadamente às transformações isométricas no plano através do programa *Cabri Géomètre*?

Diante destas questões ocorreu uma discussão sobre estes problemas entre os participantes do grupo de desenvolvimento das atividades, sendo que as tentativas de responder as questões, se centraram no processo de manipulação no computador. No entanto, a cada manipulação irrefletida, as dúvidas tendiam a aumentar enquanto o problema não apresentava nenhuma solução. É a partir deste momento que a passagem do Novo ao Velho PC surgiu como uma necessidade para responder este problema.

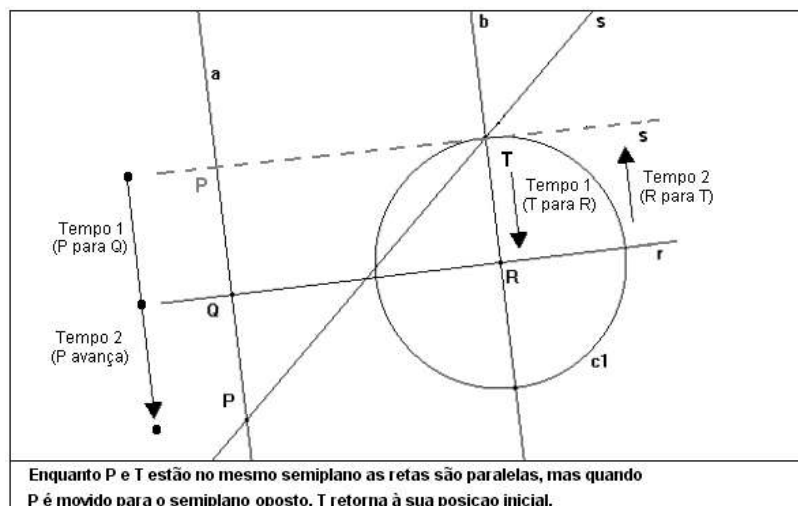


Figura 023 – Quando o ponto P é movimentado T também se move.

Um dos primeiros procedimentos na passagem do Novo ao Velho PC foi a descrição da construção dada com base nos dados de manipulação e nos dados do algoritmo, e em segunda instância, um estudo sobre os campos conceituais que estão envolvidos na questão apresentada. A partir destas ações, se iniciaram os procedimentos de justificação em que se pode fazer uso do processo de validação por demonstração.

Inicialmente, os procedimentos de justificação consideraram que para obter uma reta s paralela a uma reta r nesta construção no plano euclidiano, é necessário que duas condições sejam satisfeitas:

- (I) - Os pontos P e T devem estar no mesmo semiplano sempre;
- (II) - As distâncias $d(PQ)$ e $d(TR)$ devem ser iguais.

Somente mediante a satisfação das condições (I) e (II) é que as retas s e r não são coincidentes em hipótese alguma. Um outro aspecto, é que ao propor o algoritmo apresentado na tabela 014, o que se pretende é obter o segmento TR como uma translação de PQ em relação à reta suporte r . No entanto, ao usar o comando “Compasso” o que se obtém, aparentemente, é uma translação, quando P está em um dos semiplanos em relação a reta r , mas quando P é movimentado para o outro semiplano, se obtém uma reflexão com deslizamento, de modo que as retas r e s sejam coincidentes. Neste aspecto, é de se supor que o comando “Compasso” represente uma função diferente da translação que se pretende obter. Portanto, através da passagem do Novo ao Velho PC pelo processo de validação por demonstração, é identificado se o problema está no comando compasso que é uma macro-construção do sistema, ou se o problema está nas concepções e idéias matemáticas

envolvidas nesta solução apresentada para a atividade sobre paralelas que se pretendeu construir.

Pela descrição do problema, é possível supor que seja este um caso em que ocorrem duas transformações isométricas distintas em cada um dos segmentos de retas, no entanto a transformação que se pretendeu obter, no desenvolvimento da atividade das retas paralelas, foi a translação que é definida por LIMA (1995: p. 20).

Na realidade, podemos definir os vetores do plano a partir de translações. Diremos que dois segmentos orientados AB e CD , no plano Π , são equípolos quando $T_{AB}=T_{CD}$. Isto corresponde à definição tradicional pois $T_{AB}=T_{CD}$ se, e somente se, os segmentos AB e CD são paralelos, têm o mesmo comprimento e o mesmo sentido (ou seja, se, e somente se, os pontos médios de AD e BC coincidem).

Segundo Lima, T é a função translação e é definida como $T: \Pi \rightarrow \Pi$. Tomando como base tais concepções, é possível dizer que a translação é uma função t que transforma P em T , e Q em R , bem como, qualquer ponto X pertencente a PQ em Y que pertença a TR , de modo que, XY seja paralelo a reta r em todo plano Π .

Deste modo, se pode escrever uma função translação $t: X \rightarrow t(X)=Y$ e a sua função inversa $t^{-1}: -X \rightarrow t^{-1}(-X)=-Y$, considerando que $-X$ e $-Y$, implicam na orientação inversa em relação aos semiplanos de Π , o segmento $-X-Y$ é paralelo a reta r em todo plano Π . Tomando como base da translação t e t^{-1} é possível tomar uma função que expressa o comando “Compasso” escrevendo-a como $c: X \rightarrow c(X)=|Y|$, de modo que a função inversa c seja $c^{-1}: -X \rightarrow t^{-1}(-X)=|Y|$, considerando que $|Y|$ expresse o valor absoluto de Y , que preserva a orientação positiva, mesmo que se obtenha $(-X)$ em relação aos semiplanos de Π .

Em suma, a função t exige que os segmentos PQ e TR sejam sempre paralelos, pois na função t se preserva o mesmo comprimento e o mesmo sentido. No entanto, a função “Compasso” quando aplicada na obtenção de TR através de PQ , preserva o paralelismo entre os segmentos e o mesmo comprimento, mas não permite que TR tenha o mesmo sentido de PQ quando ocorre a função inversa c^{-1} . Considerando tais diferenças, se retornou ao Novo PC para tentar modificar a macro-construção do comando compasso. No entanto, isto não foi possível mudar a macro-construção devido critérios internos do programa *Cabri Géomètre*. O que se pôde observar é que, com uso do comando

“Compasso”, é inviável a construção, mas ao se usar o comando “Translação” e ao usar outros processos de construção que efetuavam a translação, foi possível uma resposta satisfatória. Em suma, o *bug*³⁰ ao se usar a macro-construção do comando “Compasso”, transforma a função *t* em *c*, havendo incompatibilidade com o paralelismo dos segmentos PT e QR. Portanto, exigiu-se a passagem do Novo ao Velho PC para que fosse compreendido o caráter da construção em questão. Dados adicionais podem ser observados na ficha de identificação apresentada no anexo A (situação 01, p.144 – 145).

6.2.2 – Situação 02 – A soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180° graus

Em um curso de formação continuada de professores do Ensino Médio, realizado no NTE/CREDE 12 em Quixadá-CE. Foi proposto aos alunos do curso construir um triângulo ABC, de forma que fosse possível medir os ângulos internos. Inicialmente, pela medição de cada um dos três ângulo através do comando de verificação “Ângulos”, e posteriormente, os três ângulos medidos foram somados pelo comando “Calculadora” do *Cabri Géomètre II*. Espontaneamente, houve duas situações-surpresa em 2 dos 12 computadores em uso no LIE, envolvendo três alunos.

Em um dos casos, a soma dos ângulos internos era maior que 180° e no outro caso era menor que 180°. Aproveitando a situação-surpresa, foi proposto em aula discutir o problema sendo apresentadas pelos alunos quatro conjecturas:

- (a) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° graus;
- (b) A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior ou igual a 180° graus;
- (c) A soma dos ângulos internos do triângulo é menor ou igual a 180° graus;
- (d) Todos apresentados são três enunciados são válidos.

Para que a situação-surpresa possa ser compreendida do melhor modo possível, é apresentada parte da transcrição dos dados de observação do diário de campo, que mostram o diálogo construído ao longo da situação surpresa que se apresentou frente o grupo de alunos (que são professores em formação continuada) e o professor que é o

³⁰ Expressão usada na computação para designar defeito.

pesquisador que anotou as concepções dos alunos, com auxílio de um dos professores do NTE que disponibilizou um gravador e duas fitas que foram transcritas posteriormente.

Relato do diário de campo

No surgimento de uma situação-surpresa nova, os alunos iniciaram uma discussão, e alguns diziam que “se fosse considerada uma geometria não-euclidiana era possível tais resultados”. No entanto, o professor disse que se tratava de uma representação do plano euclidiano. O aluno Alfa propôs: “Vamos sistematizar os dados que temos aqui...”.

Alguns relutam, mas a maioria concorda em fazer a organização dos dados. Usando uma televisão acoplada em um computador através de *TV Colder*, uma das professoras do NTE, que estava como assistente do curso, foi até o computador e digita as conjecturas que os alunos propõe. O aluno Beta diz:

Beta: “Temos três resultados, não é?”.

Turma: “É temos três resultados...”.

Beta: “Primeiro, a soma dos ângulos a , b e c é 180° graus, segundo a soma dos ângulos a , b e c é maior que 180° graus...”.

Gama: “Calma lá, quando eu movimento um dos pontos do triângulo, o que eu vejo, é que quando os pontos A , B e C quase formam uma linha, o que tenho é que o valor medido se aproxima de 180° , portanto, porque não dizer que a soma dos ângulos internos a , b e c é maior ou igual a 180° graus?”

Beta: “É, você tem razão, vamos dizer que a o segundo resultado é: A soma dos ângulos a , b e c é maior ou igual a 180° graus, alguém discorda? O professor discorda?”.

Professor: “Fiquem a vontade, quando achar necessário vou intervir”.

Beta: “Continuando, considerando nossa colega Gama, posso dizer também que o terceiro resultado é a soma dos ângulos a , b e c é menor ou igual a 180° graus”.

Teta: Pode dizer isso sim, pois to movendo os vértices e quando se aproximam da colinearidade os pontos A , B e C , eles ficam próximos de 180° graus.

Beta: “Então, temos os três resultados como: $(a+b+c)=180^\circ$ ou $(a+b+c)\geq 180^\circ$ ou $(a+b+c)\leq 180^\circ$, alguma coisa mais?”

Alfa: “Sim, e se todas as três forem verdadeiras simultaneamente? Vamos considerar que os três resultados podem ser verdadeiros.”

Turma: “É sem problemas.”

Beta: “E agora professor, o que vamos fazer?”

Professor: "O que vocês fizeram, foi enunciar quatro conjecturas..."

Iota: "O que é uma conjectura?"

Professor: "É uma afirmação que não é um teorema, ou seja, não é algo provado..."

Iota: "Mas a soma dos ângulos internos de um triângulo é provado!"

Professor: "E como é a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo?"

Iota: "Bem, eu não sei, mas nos livros está escrito..."

Teta: "É, acho que a gente pode tentar provar a soma dos ângulos internos, não é? Vamos nos dividir em dois grupos, um tenta resolver o problema no computador, e a gente senta naquela mesinha ali na frente e vai tentando esboçar no papel, o que acham?"

Turma: "Pode ser, vamos tentar, sem problemas professor?"

Professor: "Ok, mas vamos marcar o tempo são 14:25 min, vamos levar uns 50 minutos nisso, pois infelizmente este é um curso de 30 horas. No entanto, acho que dois grupos com 10 pessoas é muito! Se dividam em grupos de no máximo 05 pessoas, dois grupos usam o computador e os outros usam o lápis e papel".

Os grupos iniciam o trabalho, e levam cerca de 55 minutos de investigação, discutindo de forma bem intensiva e participativa. Após o término do tempo proposto, o professor retoma a discussão dizendo:

Professor: "Bem, vamos lá, vocês discutiram e fizeram barulhada igual menino em sala de aula..."

Turma: risos

Professor: "Vamos reiniciar e recapitular, quando vocês fizeram a medição da soma dos ângulos internos de um triângulo, encontraram três situações distintas com respeito a soma dos ângulos internos de um triângulo, a maioria viu que $(a+b+c)=180^\circ$ em dois computadores ocorreu dois casos diferentes. Em um deles $(a+b+c)\geq 180^\circ$, não é Kapa?"

Kapa: "É sim, professor."

Professor: "E no computador do Teta e Alfa $(a+b+c)\leq 180^\circ$. Por fim, vocês enunciaram quatro conjecturas a partir de três situações, sendo que a quarta corresponde a dizer que: $(a+b+c)=180^\circ$ ou $(a+b+c)\geq 180^\circ$ ou $(a+b+c)\leq 180^\circ$. No mais vocês me disseram que iam apresentar, uma demonstração sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, então vamos lá".

Kapa: “Professor, olha o grupo do Alfa, Teta e Iota, fizeram este esquema aqui... (neste momento os alunos mostram o desenho feito em folha de papel almaço para a turma)”.

Professor: “E qual foi a conclusão que vocês chegaram?”

Teta: “Bem, é preciso mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , não é isso? Portanto, se um ângulo reto mede 90° graus e um ângulo raso mede dois ângulos retos, é possível dizer que um ângulo raso é 180° graus, deste modo, é preciso de um meio que permita saber se de um triângulo qualquer se pode obter um ângulo raso por meio dos seus ângulos, e este esquema mostra tudo”.

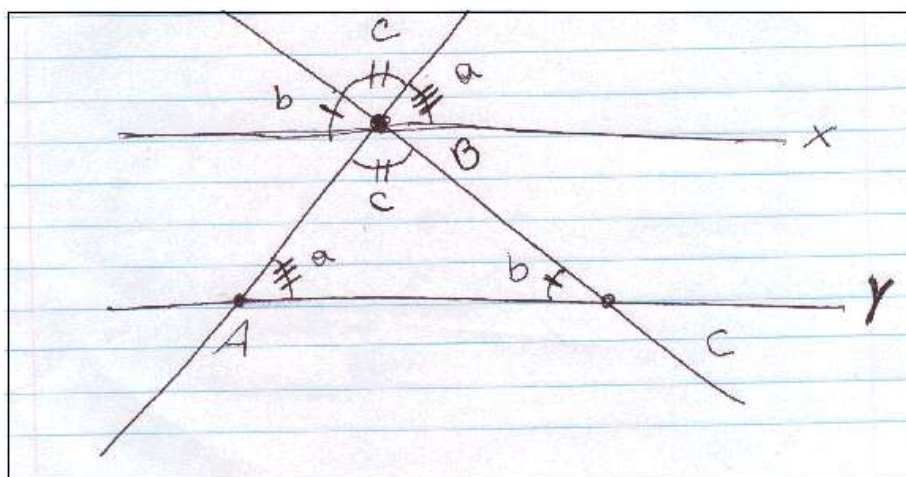


Figura 024 – Esquema de Alfa, Teta e Iota sobre a soma dos ângulos internos.

Professor: “Não necessariamente, o esquema que você me apresentou apenas pode representar as suas idéias, é preciso de mais que isso, é necessário detalhar o que você propõe neste esquema”.

Um breve silêncio toma conta da turma.

Epsilon: “Professor, o esquema que ele propôs significa o seguinte: Primeiro você prolonga os segmentos que formam os lados do triângulo até formar várias retas, que ele esqueceu de nomear no esquema, mas vamos dizer que para AB está a reta k, para BC está a reta l (x e y já estavam nomeados no esquema). Segundo, a reta x que ele colocou é paralela a reta y, então de um lado de x eu tenho o triângulo ABC e do outro eu tenho três ângulos, que formam um ângulo raso. Agora é só mostrar que os ângulos do ângulo raso são iguais aos ângulos internos do triângulo. Bem o ângulo c do triângulo é oposto pelo vértice ao c do ângulo raso, o ângulo a do triângulo é correspondente ao ângulo a do ângulo

raso, e pelo mesmo caso o ângulo b do triângulo é o ângulo b do ângulo raso. Sendo assim, eu digo que $(a+b+c)=180^\circ$ é o resultado verdadeiro, e tá acabado.”

Alfa: “Mas em dois dos computadores, apareceram respostas diferentes desta!”

Gama: “Então o computador tá errado, não é Professor?”

Professor: “É provável”.

A Turma inicia uma discussão sobre o fato. O professor pede silêncio, e o aluno Kapa pede para falar:

Kapa: “Acho que sei o que é!”

Todos se voltam para Kapa esperando sua explicação.

Kapa: “Eu tava mexendo na figura que eu fiz, e vi um ponto perto do vértice A, mexi o ponto e a soma dos ângulos começou a mudar, acho que na hora de fazer a figura eu dei um *click* fora do vértice e deu este resultado, pode dar uma olhada no computador do Teta e do Alfa que eles deram *click* errado quer ver?”

Teta: “É mesmo, e aqui foi dois erros um *click* errado perto do ponto C e outro perto do ponto A.”

Gama: “Mas o computador errou ou eles erraram?”

Professor: “Na realidade quando se utiliza o computador é possível cometer erros, pois ao simular algo se está experimentando, houve um erro de manipulação deles, mas o proveitoso disto tudo foi à discussão que foi possível obter”.

Neste caso, a situação-surpresa não estava em um *bug* do *software*, mas sim em uma dificuldade relativa ao uso e manipulação dos recursos computacionais. Tais situações ocorrem com frequência em aula, mas na maioria dos casos se costuma desprezar tais oportunidades. De um modo geral, houve um repentino espanto por parte dos estudantes, principalmente após a apresentação das quatro conjecturas que o problema colocou, no entanto, houve a organização e negociação entre os alunos, que no caso, são professores de matemática. Entretanto, caso a situação tivesse ocorrido com uma turma de adolescentes, é provável que ocorreriam dificuldades com respeito à negociação, exigindo que as intervenções do professor fossem mais presentes. Informações adicionais sobre esta situação, podem ser obtidas pelo anexo A (situação 02, p.146).

6.2.3– Situação 03– O efeito elástico na divisão de um segmento em partes iguais

No desenvolvimento de uma atividade programada, em um curso piloto de construções geométricas com uso do *Cabri-Géomètre*, na oitava sessão do curso piloto de construções geométricas do projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente, realizado entre Abril e Julho de 2000 no Laboratório Multimeios FACED/UFC, foi proposta uma atividade para a divisão de um segmento de reta AB em três partes iguais.

Nesta atividade era esperado, que todos os alunos (que eram estudantes do curso de Pedagogia da FACED/UFC) fizessem uso de concepções relativas ao teorema de Tales que havia sido trabalhado nas sessões. No entanto, um dos alunos destacou dois pontos intermediários do segmento de reta AB, de modo que foi possível formar três segmentos de reta.

Depois mediu o segmento AB, e mediu os segmentos formados através da colocação de dois pontos intermediários entre A e B que não eram coincidentes, por fim, alterou a medida de AB via manipulação, de modo que obteve um segmento de $AB=15$ cm, e a partir disto foi ajustando os dois pontos pelo rato até que se obtivesse três segmentos cuja medida fosse 5 cm.

Após este procedimento, a medida do segmento AB foi alterada via manipulação, e os três segmentos formados a partir de AB mantiveram a proporcionalidade. No entanto, para os professores e pesquisadores que observaram tal ação, este fato implicava em uma situação-surpresa, que poderia corresponder a um *bug* do programa *Cabri-Géomètre II*.

O processo de divisão de um segmento em partes iguais, não apresenta dificuldades para obter a divisão de um segmento em duas, quatro e $2n$ partes (sabendo que n é um número inteiro positivo), basta utilizar o comando “Ponto médio”, ou trabalhar um procedimento de construção semelhante ao que se usa para obtenção da mediatriz, entretanto, ao dividir um segmento em $(2n + 1)$ partes iguais, é possível usar procedimentos baseados no teorema de Tales, no entanto, são procedimentos mais complexos que exigem mais que a simples concepção intuitiva, pois se torna necessário ao estudante compreender o teorema de Tales. No entanto, o *software* permitiu que fosse feita a construção solicitada, de modo mais simples que com o teorema de Tales, no entanto, o processo de resolução estava mais relacionado aos aspectos do software que com o conhecimento matemático que se pretendia ensinar ao estudante. Para averiguar tal situação, o procedimento inicialmente adotado foi averiguar se a mesma situação-surpresa ocorreria em outros programas.

No *Dr. Geo* também foi possível tal construção, mas nos programas *Ruler and Compasses*, *SketchPad* e *Wingeo* não foi possível à realização do mesmo procedimento. No *Ruler and Compasses*, não há o comando “ponto sobre objeto”, fundamental para realização da situação-surpresa, no entanto, há um comando que permite que o ponto seja manipulado sobre um segmento por alguns momentos, de tal modo que não existe o ponto sobre objeto como uma categoria de objeto, mas sim, existe uma ação em que um ponto está sobre um objeto em um determinado momento, fato este que inviabilizou este tipo de construção com respeito a elasticidade do segmento.

Quanto o *SketchPad*, foi possível colocar um ponto sobre um segmento, que mantém a proporcionalidade, no entanto, mas na manipulação não se conseguiu efetuar tal o ajuste dos pontos, pois as manipulações mínimas na zona-de-desenho do programa, consideram uma margem de erro numa faixa de pontos que vai de $-0,0004$ a $+0,0004$, além disto os dados de medida são aproximados em pelo menos quatro casas decimais. Mesmo assim, se deduz que é possível existir uma sub-rotina que deve permitir ao programa controlar tal situação inviabilizando o ajuste.

Quanto o programa *Wingeo*, não se pode efetuar a medida por meio de um *click* em dois pontos, pois a mesma é determinada por meio uma entrada de dados via caixa de dialogo em que se pede “medir de que ponto até que ponto”. Por outro lado, em termos matemáticos, se sabe que é inviável o procedimento de construção da aluna 3, pois em um computador a continuidade numérica dos pontos é apenas uma representação que faz uso de aproximações, mas no caso do *Cabri* com o uso de todas as casas decimais, é possível efetuar o ajuste de modo que o erro seja desprezado pelo programa. Em suma, é de se supor que este seja um *bug* do sistema, no entanto, poderia ter sido possível ao professor discutir aspectos relativos a situação-surpresa, visto que os alunos não se deram conta do valor de tal situação. Como pode ser visto no trecho da transcrição de fita de vídeo apresentado a seguir, no desenvolvimento da atividade, o professor pergunta se alguém conseguiu fazer a divisão de um segmento em três partes iguais, visto que uma das alunas tinha acabado de expor suas dificuldades nesta atividade, sendo a situação-surpresa notificada para todos os estudantes.

Professor: Conseguiu?

Aluna 1: Como foi que tu fez?

Aluna 2: Eu fiz com que a reta tivesse um número ímpar, o comprimento tinha que ser um número ímpar, aliais, um número que dá prá dividir por 3

Aluna 3: Ai ?

Aluna 2: Eu botei, o comprimento dela 15 e dividi por três e ficou 5 num segmento, 5 no outro e 5 no outro.

Aluna 3: Entretanto, como foi que tu colocou 5, 5 e 5 ?

Aluna 2: Arrastando os pontinhos.

Aluna 3: Ah, ah eu também, só que eu botei o primeiro, depois botei o ponto médio...

Professor: Então vamos continuar trabalhando nesta atividade...

[Vídeo] Professor pergunta aos alunos sobre o andamento da atividade sobre divisão de segmento em partes iguais, a Aluna 1 coloca suas dificuldades, depois a Aluna 3 levanta as mãos falando sobre suas dificuldades também, já a Aluna 2 explica como fez para fazer a divisão de segmento em três partes iguais. A Aluna 3 pede explicações sobre o como a Aluna 2 fez a atividade.

Neste caso, o professor deixa passar a situação-surpresa, desvalorizando a abordagem da aluna 2 sobre a questão em voga, e este é um aspecto comum no contexto escolar. Na maioria das vezes, os problemas de gestão de uma aula, e a incompreensão do que está ocorrendo é comum ao professor, de modo que em muitas circunstâncias se deixa passar oportunidades de discussão com o aluno. Nesta sessão, estava havendo dificuldade dos alunos com respeito a aprendizagem do teorema de Tales, no entanto, o computador permitiu que a aluna 2, elaborasse um raciocínio que se constituiu em um sofisma, mas que poderia ser explorado pelo professor para revelar o papel do teorema de Tales. Seria possível o estabelecimento de valores métricos para a construção, de modo que por meio de Tales seria viável a multiplicar e a divisão de segmentos em partes iguais, fundamentando a métrica euclidiana em argumentos racionais. Os detalhes da observação que mostraram a situação-surpresa em questão e outros dados adicionais desta situação podem ser averiguados no anexo A (situação 03, p.147 – 150).

6.2.4 – Situação 04 – Uma reta é infinita quando há um *looping*

A ocorrência apresentada em uma manipulação exploratória dos comandos do *Cabri Géomètre* no Laboratório Multimeios FACED/UFC, gerou a seguinte situação-surpresa:

Após a construção de um ponto P sobre uma reta, foi usado comando “Animação” para movimentar P sobre a reta em uma direção, de modo que o ponto P foi guiado pela reta até o limite da zona-de-desenho reaparecendo depois na direção oposta, mas preservando o mesmo sentido.

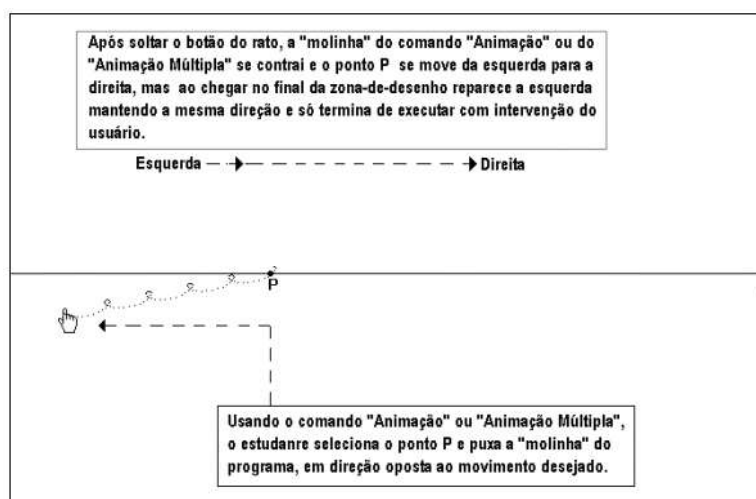


Figura 025 – Um *bug* pelo recurso de animação do *Cabri Géomètre II*.

Esta situação é um *bug* relacionado às limitações numéricas do computador. Cada ponto desenhado na zona-de-desenho corresponde a uma coordenada de um sistema de coordenadas cartesianas no computador que está à zona-de-desenho. No caso da figura 025, o ponto P vai ao limite superior em relação ao eixo das abscissas reaparecendo no limite inferior do mesmo eixo. Este fato ocorre, pois o computador é um recurso que permite a representação através de um *software*, do mesmo modo que os instrumentos como régua, calculadora e lousa. Neste aspecto, quaisquer meios representacionais do Novo ou do Velho PC são limitados, e devido tal fato um computador não pode enumerar um conjunto infinito de números, nem mesmo números irracionais que só é do conhecimento humano por meio de aproximações sucessivas. No entanto, na situação-surpresa presente, a ação de ir até o limite da zona-de-desenho e reaparecer no lado oposto pode ocorrer repetidas vezes. Em termos computacionais o fenômeno em que uma ação se repete ininterruptamente em um computador, exigindo que alguém intervenha sobre o mesmo, é chamado por *looping*, e ocorre quando há um erro em um algoritmo. Por outro lado, um *looping* pode representar o

ato de contar uma ação repetidas vezes, e constitui em termos de ensino-aprendizagem uma situação-surpresa intrigante, pois o *looping* é uma das formas em que se pode conjecturar idéias sobre a infinitude. Esta situação-surpresa chama a atenção por sua simplicidade. Além disto os dados adicionais podem ser encontrados no anexo A (situação 04, p.151).

6.2.5 – Situação 05 – Um problema métrico: $d(AB) \neq \text{abs}(B) - \text{abs}(A)$

A situação apresentada a seguir está baseada em uma ocorrência enviada ao fórum de discussão sobre o *Cabri Géomètre II* na França, apresentado por Genevieve Tulloue, e remetido por Herminio Borges Neto. Nesta situação, se obteve uma conjectura que mostra que o valor numérico da distância de um segmento que pode ser chamado como A1B1 não corresponde a diferença dos valores absolutos de B1 em relação a A1. De forma que se pode escrever a expressão: $d(A1B1) \neq \text{abs}(B1) - \text{abs}(A1)$.

Tabela 015 – algoritmo da situação 05 que apresenta um problema métrico no *Cabri Géomètre II*.

Passos	Ações realizadas
01	Acionar o comando “Mostrar Eixos” para exibição de eixos cartesianos.
02	Marcar um ponto sobre o eixo das abscissas nomeando-o como A1.
03	Marcar outro ponto sobre o eixo das abscissas que não seja coincidente a A1, nomeando-o como B1.
04	Usando comando “Equações e Coordenadas”, exibir as coordenadas de A1 e B1.
05	Traçar um segmento pelos pontos A1 e B1.
06	Usando comando “Calculadora” obter $(B1 - A1)$ através das coordenadas destes pontos, e arraste o resultado sobre a zona-de-desenho.
07	Pelo comando “Transferência de Medidas”, selecione o resultado de $(B1 - A1)$ que está na zona-de-desenho, expresso em termos numéricos, e selecione o ponto A1, de modo que o ponto resultante da transferência não pertença ao eixo cartesiano, e nomeie este ponto como B2.
08	Trace um segmento pelos pontos A1 e B2.
09	Meça os segmentos A1B1 e A1B2 pelo comando “Distância e Comprimento”.
10	Construir uma circunferência c1 com centro em A1 e raio B2.
11	Movimente os pontos A1 e B1 pelo plano e verifique os valores métricos dos segmentos A1B1 e A1B2.
12	Modifique a escala do eixo das abscissas, arrastando a marca de unidade da escala, e observe se A1B1 e A1B2 possuem os mesmos valores métricos, ou se são segmentos congruentes.

A situação-surpresa surgiu a partir das coordenadas de dois pontos que podem ser A1 e B1 que estão sobre o eixo das abscissas, entretanto, ao usar o comando “Calculadora” no *Cabri*, se obtém da diferença entre B1 e A1 que é um valor Z, tal que, é possível dizer que $(B1 - A1) = Z$ é usado para construir um segmento A1B2 a partir de A1 pelo comando “Transferência de Medida”.

Deste modo, se obtém dois segmentos A1B1 e A1B2 cujas medidas são iguais, entretanto, ao mudar a escala do eixo das abscissas ocorre a diferença entre A1B1 e A1B2 uma situação-surpresa.

Nesta atividade se observou que dois segmentos que deveriam ser congruentes não o são, se e somente se, a escala do *software Cabri Géomètre* for modificada.

A princípio considere que a expressão $(B1 - A1)$, expresso no passo 06 da tabela 015, é a equação da distância do segmento A1B1, a partir das coordenadas de abscissas dos pontos A1 e B1. Portanto, é possível reescrever $(B1 - A1)$ como:

$$\begin{aligned}(B1 - A1) &= \{ [B1(x2) - A1(x1)]^2 + [B1(y2) - A1(y1)]^2 \}^{(1/2)} = \\ &= [B1A1(x2 - x1)^2 + B1A1(y2 - y1)^2]^{(1/2)} = \\ &= B1A1 [(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2]^{(1/2)} = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{(1/2)}\end{aligned}$$

Deste modo, se pode garantir que $(B1 - A1) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{(1/2)}$, mas esta expressão corresponde a diferença dos valores absolutos de B1 e A1, que pode ser escrito como $[abs(B1) - abs(A1)]$ que é a equação da distância entre dois pontos, que corresponde à medida de um segmento pertencente a abscissa. Sendo assim, se obtém:

$$\begin{aligned}d(A1B1) &= d(B1A1) = (B1 - A1) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{(1/2)} = [abs(B1) - abs(A1)] = \\ d(A1B1) &= [abs(B1) - abs(A1)]\end{aligned}$$

E enquanto a escala é fixa no *software* a relação é válida, e pode ser observada com base na manipulação dos pontos A1 e B1 pelo eixo das abscissas. Além das considerações acima, o resultado de $(B1 - A1)$ na calculadora é $d(A1B1)$, e pelo comando "Transferência de medida" se obtém o segmento A1B2 cuja distância $d(A1B2)=d(A1B1)$, portanto, A1B1 e A1B2 devem ser sempre congruentes.

Além disto, pela circunferência c1 com raio cuja medida é $d(A1B2)$, se sabe que é possível escrever que:

$$\text{Raio de } c1 = d(A1B2) = d(A1B1) = [abs(B1) - abs(A1)]$$

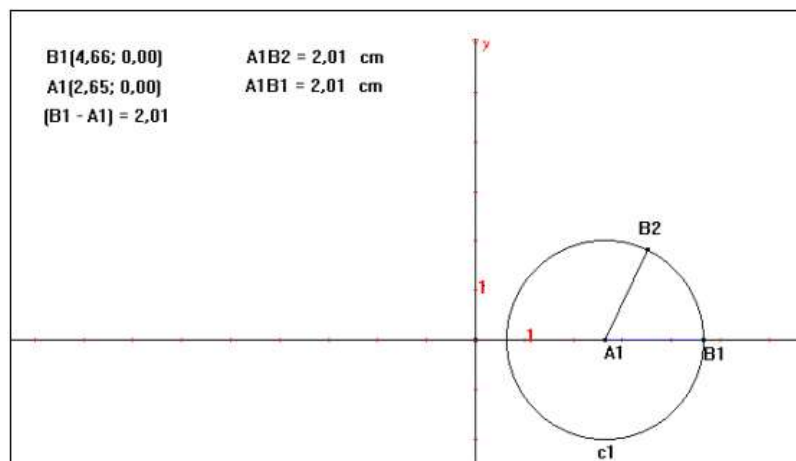


Figura 026 – A distância entre os segmentos $A1B1$ e $A1B2$ são equivalentes.

No entanto, ao ser modificada a escala, o que ocorre na prática é que surge uma contradição matemática, pois o raio de $c1 = d(A1B2) \neq d(A1B1)$, trata-se de um *bug*, que mostra que:

- $d(A1B1) = (B1-A1) = [\text{abs}(B1) - \text{abs}(A1)] \neq d(A1B2)$, mas por definição $d(A1B2) = d(A1B1)$, logo é possível concluir que se trata de uma contradição;
- Os eixos cartesianos no *Cabri Géomètre* e o comando “Distância e Comprimento”, são funções distintas que funcionam somente quando há correspondência de unidades;
- Se o eixo cartesiano é modificado, é necessário ao *software* à correção automática da métrica do comando “Distância e Comprimento”;

Concluindo a análise desta situação, se deve considerar que um *bug* como este deve ser uma oportunidade para o desenvolvimento de atividades que permitam a passagem do Novo para o Velho PC, de modo que ao professor deve caber propor a meta-reflexão por meio do processo de validação, de modo que o estudante possa estabelecer sua reflexão-na-ação sobre a matemática mediante o uso de instrumentos computacionais. Também é possível ver nesta situação-surpresa, que o processo de validação por demonstração invoca no ato de refletir-na-ação, por meio de procedimentos dedutivos e heurísticos de forma concatenada, permitindo compreender a dinâmica da situação por meio de uma prova técnica que faz uso dos métodos de prova contrapositivo e por contradição. Tal fato mostra, que na prática a passagem do Novo ao Velho PC, remete as práticas usuais ao trabalho matemático, visto que na prática os processos que estão separados em teoria

são combinados para que se estabeleça uma cadeia de razões pelo processo de validação matemática por demonstrações. Os dados adicionais relativos ao problema apresentado podem ser consultados no anexo A (situação 05, p.152 – 154).

6.2.6 – Situação 06 – Comparando dois programas por meio de uma atividade

Esta situação foi obtida a partir da comparação de um algoritmo em dois programas distintos cujas propostas de trabalho em geometria dinâmica são similares. O local de aplicação deste experimento foi no Laboratório Multimeios FACED/UFC.

O algoritmo apresenta uma construção geométrica que permitiu obter no *Cabri Géomètre II*, um lugar geométrico que é uma elipse por deformação da circunferência c com base no ponto médio, no entanto, ao aplicar o mesmo algoritmo no *software Dr. Geo*, a figura correspondente ao lugar geométrico obtido, não resultou em uma elipse, mas sim, em uma curva cardióide que ao ser manipulada podia ser deformada de modo que fosse possível obter outras curvas a partir desta.

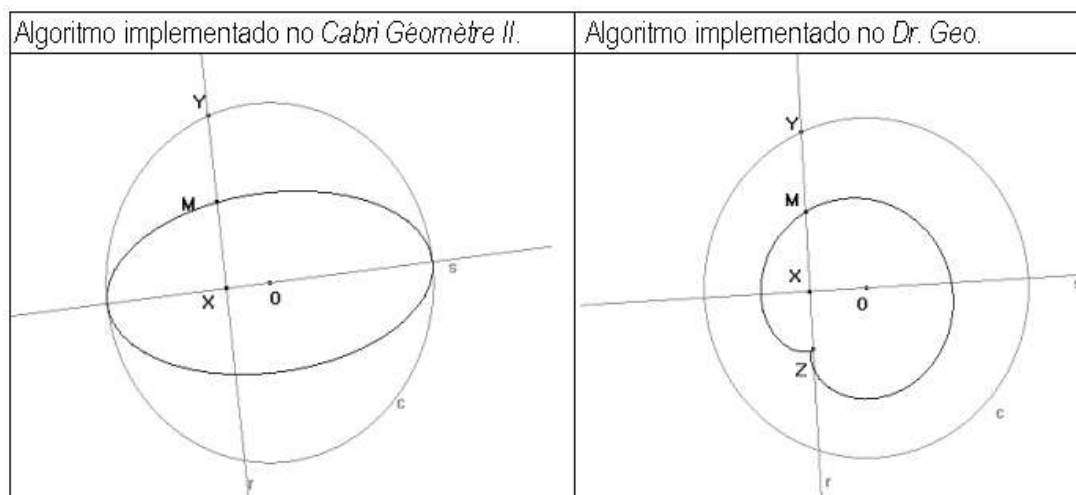


Figura 027 – Um algoritmo que resultou em dois lugares geométricos distintos.

Diante destes resultados o primeiro questionamento sobre o problema foi: Se o algoritmo é o mesmo, a proposta é a mesma e os *softwares* são diferentes, há em um dos programas um resultado equivocado. Ou o algoritmo está, de algum modo, sendo mal implementado. Foi necessário iniciar um processo comparativo entre as atividades

desenvolvidas em ambos os programas, de modo, que cada passo foi discriminado, e assim, se pôde estabelecer através do algoritmo o início do processo de reflexão-na-ação para compreender o fenômeno dado.

Tabela 016 – O algoritmo utilizado na situação 06 nos programas *Cabri Géomètre II* e *Dr. Geo*.

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma circunferência c com centro no ponto O e raio arbitrário.
02	Marcar um ponto Y sobre a circunferência c .
03	Traçar uma reta r pelo ponto Y .
04	Traçar uma reta s perpendicular a reta r pelo ponto O .
05	Marcar X como o ponto de intersecção entre r e s .
06	Encontrar o ponto médio do segmento XY nomeando-o como M .
07	Construir o lugar geométrico de M quando Y é movimentado sobre c .

Após ampla análise, se chegou a conclusão que ambas construções eram corretas do ponto de vista matemático, mas o que ocorre é que a construção no *Dr. Geo* no passo 03 do algoritmo está relacionado ao 1º postulado de Euclides que diz que *por dois pontos quaisquer passam por uma única reta*. No entanto, o comando usado no *Cabri Géomètre* para efetuar a construção da reta, foi o comando “Reta”, que está relacionado ao enunciado que diz: *dado um único ponto e uma direção, é possível a construção de uma reta*. No entanto, é possível no *Cabri Géomètre* elaborar tal construção de forma similar ao *Dr. Geo*, pois este programa permite ao usuário colocar dois pontos e depois aplicar o comando “Reta”, com um *click* em cada ponto, mas este procedimento é menos utilizado que o anterior. Sendo assim, vale ressaltar que se no *Cabri Géomètre* a reta pode ser construída de duas formas distintas, o mesmo não ocorre no *Dr. Geo* em que só é possível uma abordagem por meio do 1º postulado de Euclides. Neste sentido, o *Dr. Geo* se mostrou limitado em relação ao *Cabri Géomètre II*, pois permitiu tratar um problema que apresenta duas abordagens distintas de um modo apenas.

Foi possível observar que mesmo que dois *softwares* educativos possuam a mesma proposta educacional, pode ocorrer que as atividades que se aplicam em um *software*, não sejam aplicáveis em outro com respeito à um tipo de conteúdo. Por outro lado, se um professor de matemática opta por um *software X* e outro professor opta por *Y*, mesmo que as propostas de *X* e *Y* sejam similares em relação a um tipo de saber, os programas *X* e *Y*, serão abordagens distintas sobre o mesmo de saber, de modo que ao ser mal utilizados podem gerar nos estudantes a construção equivocada de um conceito. Portanto, é necessário que uma escola tenha uma quantidade significativa de programas distintos, e

cabe ao professor investigar as similaridades e diferenças destes programas, de modo que se permita ao estudante ver diferentes abordagens.

Em suma, a passagem do Novo ao Velho PC neste tipo de situação, pode ser visto como uma forma de propor aos professores e estudantes, o desenvolvimento de abordagens distintas sobre um tipo de saber, que neste caso, é o saber matemático viabilizando que possibilidades na construção de conhecimentos e saberes novos por meio do processo reflexivo que uma situação-surpresa pode gerar. Outras informações sobre esta situação, estão documentadas no anexo A (situação 06, p.155).

6.2.7 – Situação 07 – Quando retas paralelas se encontram no plano euclidiano

Esta situação teve origem no desenvolvimento do *software* GeoMeios que está sendo desenvolvido no Laboratório Multimeios/FACED/UFC. No processo de testagem do primeiro piloto do GeoMeios, algumas atividades sobre construção de retas paralelas apresentaram um *bug* que exibia no computador em várias ocasiões duas retas coincidentes na apresentação dos resultados. Ocorre que ao testar os algoritmos em outros programas, os resultados eram retas paralelas. Diante deste paradoxo, houve a necessidade em investigar a situação-surpresa que estava sendo apresentada ao grupo de desenvolvimento do GeoMeios.

Tabela 017 – Algoritmo de construção de paralelas utilizado na situação 07.

Passos	Ações realizadas
01	Traçar uma reta r a partir de dois pontos.
02	Colocar um ponto P sobre a reta r .
03	Construa uma circunferência c_1 com centro em P e raio arbitrário.
04	Marcar Q como ponto de intersecção entre r e c_1 .
05	Construir uma circunferência c_2 com centro em Q e raio QP .
06	Marcar R como ponto de intersecção entre r e c_2 .
07	Construir uma circunferência c_3 com centro em R e raio RQ .
08	Marcar S como ponto de intersecção entre c_1 e c_2 .
09	Marcar T como ponto de intersecção entre c_2 e c_3 , no mesmo semiplano de S .
10	Traçar uma reta z pelos pontos S e T .

Segundo a tabela 017, considere que c_1 possui raio PQ , c_2 possui raio QP e c_3 possui raio RQ . Sabendo que $d(PQ)=r$, se pode dizer que $d(QP)=d(PQ)=r$, pois PQ é raio de c_1 e c_2 , e QP é também raio de c_1 e c_2 . Também se sabe que $r=d(QP)=d(QR)$, pois QP

e QR são raio de c_2 , de modo que se deduz $d(QR)=r$. Além disto, $d(QR)=d(RQ)$, pois QR é raio de c_2 e de c_3 , e RQ também é raio de c_2 e c_3 . Portanto c_1 , c_2 e c_3 são congruentes e os raios PQ, QP e RQ também são congruentes. Como $d(PS)=d(PQ)=r$, pois PS e PQ são raios de c_1 , e como $d(SQ)=d(QP)$ e SQ e QP são raios de c_2 , se pode afirmar que o triângulo PSQ é equilátero.

Além disto, se pode dizer que $d(QT)=d(QR)$, tal que QT e QR pertencem a c_3 , e se conhece que $d(TR)=d(RQ)$, pois TR e RQ são raios de c_3 , deste modo, o triângulo QTR é equilátero e é congruente a PSQ. Sendo assim, pela propriedade Lado, Lado, Lado, da congruência de triângulos, se sabe que estes triângulos têm a mesma altura e que o ponto mais alto de PSQ é S, e de QTR é T. Portanto toda reta que passa por S e por T é paralela à reta r . Deste modo, o algoritmo da construção aplicada ao GeoMeios é um procedimento viável em termos racionais para construção de retas paralelas. No entanto, o problema do GeoMeios está relacionado à zona-de-desenho e a circunferência construída.

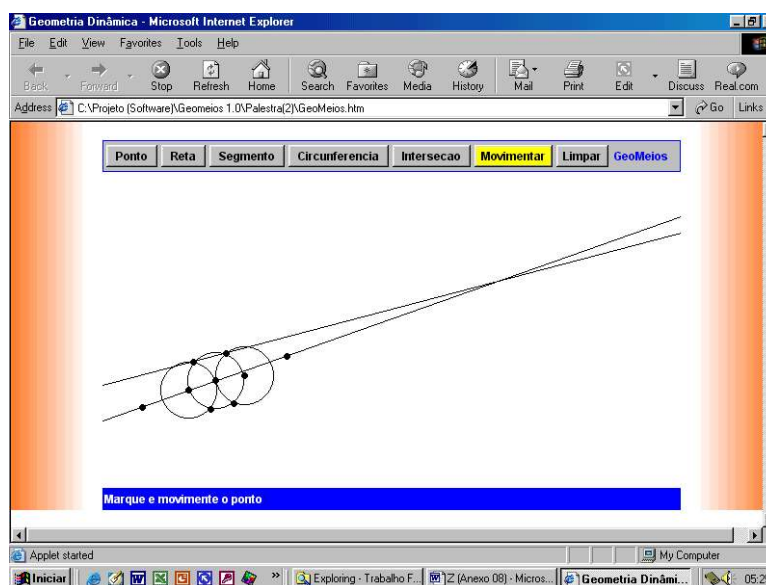


Figura 028 – Retas paralelas e coincidentes?

Em computação gráfica existem duas formas de representar objetos geométricos, uma é a forma vetorial e outra é a matricial. Tanto em uma forma como em outra, a capacidade de resolução gráfica está associada a maior quantidade de pontos na tela (*pixels*) por centímetro quadrado, e no caso da circunferência, o que se tem na realidade, é a construção de um polígono com muitos lados, visto que como o número irracional π está associado à construção de circunferências, a maior resolução das circunferências depende de uma rotina que permita aumentar um número de pontos por centímetro quadrado para

obtenção de maior resolução, fator que depende de uma aproximação racional maior dos números irracionais como π por exemplo. Este fato que dá ao usuário a impressão que as retas dadas são de fato paralelas em *software* de geometria dinâmica. Além disto, se averiguou problemas em rotinas que permitem construir pontos de intersecção e a falta de recurso de nomeação no piloto do GeoMeios, dificultou o processo de construção geométrica régua e compasso.

Portanto, o *bug* do GeoMeios decorre das dificuldades computacionais existentes, no entanto, o que se pode observar é que a função segmento de reta já permite estabelecer a construção de segmentos paralelos por meio de circunferência, o que leva a crer que os problemas não se relacionam somente a função circunferência, mas também a função reta.

É relevante também observar, que este problema tem sido observado com frequência em outros *softwares* de geometria dinâmica em Java, como *GeoAssistent Version 1.0*, no entanto, houve o avanço na resolução de vários problemas relativos a programação.

Neste caso, a situação surpresa assume outro significado, e está relacionada à idéia de engenharia de *software*. Neste aspecto a meta-reflexão é um ato de exploração de algoritmos desenvolvidos por um programador, bem como, o questionamento de modelos que em termos de abstração se acredita que funcione de modo adequado, no entanto, os empecilhos relativos à lógica computacional e a compreensão integral da sintaxe exigem a passagem do Novo ao Velho PC como um exercício de análise do modelo que se deseja implementar, de modo que a ação do construtor e a experiência educacional que se espera que o estudante obtenha, sejam consideradas e questionadas no processo de refinamento de um programa educacional. Outras informações com respeito a esta situação, estão no anexo A (situação 07, p.156).

6.2.8 – Situação 08 – Manipulação da reta restrita a zona de desenho

Na experimentação do comando “Reta” do *software* GeoMeios em sua versão piloto, o movimento da reta fica restrito à zona-de-desenho, à medida que o movimento de arrasto (*drag*) com o rato continua ocorrendo fora da área de desenho.

Neste caso, se percebeu que tal ação representa uma ruptura com a noção intuitiva que se tem sobre a reta enquanto um ente geométrico contínuo e infinito.

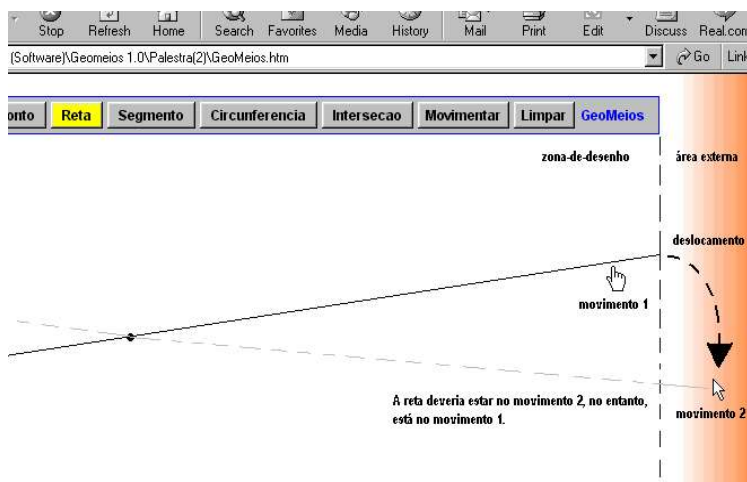


Figura 029 – A reta e o rato, ruptura conceitual na ação.

O que se pode averiguar, é que o problema ocorreu devido movimento da reta que são calculados apenas na zona-de-desenho do GeoMeios em relação ao movimento do cursor, no entanto, é necessário que o cálculo do movimento seja feito em função da resolução de vídeo do computador, para que se dê a impressão que a manipulação da reta é contínua, de modo que o usuário tenha a impressão de que a reta é infinita e contínua.

Em suma, se pode dizer que está situação-surpresa revela que a construção das noções fundamentais da Geometria com o computador estão relacionadas ao movimento nos *software* de geometria dinâmica, de modo que, um *bug* como este pode induzir o pensamento do estudante à concepções equivocadas.

Por outro lado, em termos de problemas de computação, é necessário para quem programa entender o ponto de vista do usuário com respeito aos conceitos computacionais. Informações adicionais estão no anexo A (situação 08, p.157 – 159).

6.2.9 – Situação 09 – A conjectura da elipse a partir do Novo PC

Nesta atividade foi realizada uma construção geométrica que permitiu o desenvolvimento de um lugar geométrico que aparentemente era uma elipse, de modo que

foi possível estabelecer uma conjectura que exigiu a passagem do Novo ao Velho PC. Foi por meio desta situação que os estudos sobre os limites e possibilidades do computador no ensino de matemática foram iniciados tomando-se, como base, o processo de validação por demonstração. Aos poucos, algumas pessoas que freqüentavam o Laboratório Multimeios FACED/UFC cooperaram, sendo que alguns destes eram estudantes de graduação da UFC.

A construção geométrica foi realizada no *software Cabri Géomètre II*, e o algoritmo da construção correspondem à tabela 018 é apresentada a seguir.

Tabela 018 – Algoritmo da situação 09 sobre a suposta elipse.

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma circunferência c com centro no ponto O ;
02	Marcar um ponto A sobre a circunferência c ;
03	Construir uma circunferência c_1 com centro no ponto A , de modo que c_1 seja menor que c ;
04	Marcar um ponto B em uma das intersecções entre c e c_1 ;
05	Construir uma circunferência c_2 com centro em B e raio AB ;
06	Marcar C ponto de intersecção entre c e c_2 ;
07	Construir uma circunferência c_3 com centro em C e raio BC ;
08	Traçar uma reta r pelos pontos A e C ;
09	Marcar P um ponto sobre a reta r ;
10	Usando o comando "Lugar Geométrico" do Cabri Géomètre II, construir o lugar geométrico do ponto P quando o ponto A é deslocado sobre a circunferência c .

Com os procedimentos acima descritos no algoritmo da tabela 018, é possível obter é a construção do lugar geométrico do ponto P apresentado na figura 030 abaixo exibida, no entanto, não se pode dizer que o lugar geométrico construído corresponde a uma elipse com base nas evidências visuais, se exigia um processo investigativo que poderia permitir confirmar ou não o questionamento que se apresentou inicialmente.

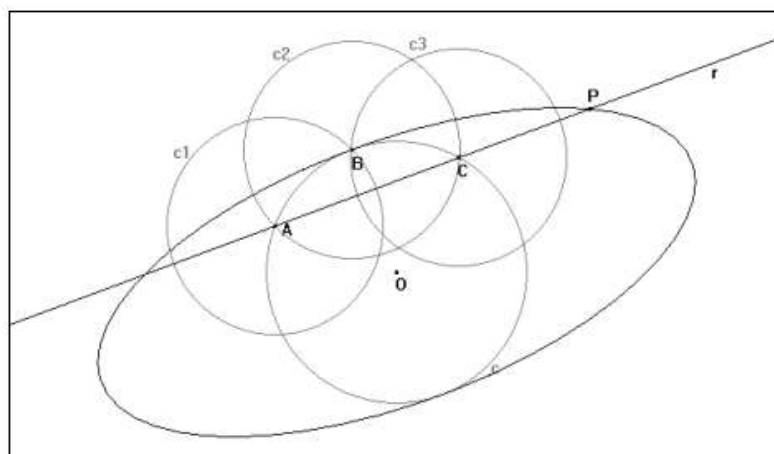


Figura 030 – A construção: O lugar geométrico P pressupõe uma elipse.

Portanto, após realizar a construção, ocorreu o processo de análise e a investigação das características da figura, cuja finalidade foi obter uma descrição das características e propriedades presentes na construção realizada. O que se pode observar em princípio permitiu apresentar os seguintes dados:

- a) As circunferências c_1 , c_2 e c_3 são figuras congruentes;
- b) Os raios AB , BC e CB são iguais;
- c) Os pontos A e B possuem grau de liberdade 2, sendo possível mover A e B sobre c , e o ponto C não têm grau de liberdade sendo movimentado, se e somente se, A ou B são movimentados;
- d) O ponto P deforma o lugar geométrico quando manipulado sobre a reta r ;
- e) Ao mover o ponto A temos o movimento do ponto P (conseqüentemente mover A implica mover P de modo que se possa obter o lugar geométrico);
- f) Ao mover o ponto B ocorre a rotação do lugar geométrico ao redor da circunferência c ;
- g) O lugar geométrico circunscribe a circunferência quando o ponto C está entre A e P , ou quando A está entre C e A ;
- h) O lugar geométrico inscreve a circunferência quando P está entre A e C ;
- i) O lugar geométrico é simétrico vertical e horizontalmente, em relação ao ponto O , independente da posição de P ;
- j) O ponto O é centro de c e do lugar geométrico obtido através de P .

Tais características foram investigadas, no entanto, foi insuficiente tal análise no processo de resolução do problema, mas este foi o ponto de partida para a compreensão do processo.

Ocorre que havia necessidade de subsídios teóricos por parte dos envolvidos para continuar o processo de investigação, e é a partir deste momento que se iniciou a investigação dos conteúdos necessários a resolução do problema, que foi chamado por investigação dos campos conceituais.

Os campos conceituais são os pré-requisitos a resolução de um problema e a confecção uma atividade matemática, sendo assim, as pessoas envolvidas no processo de resolução pesquisaram dados bibliográficos sobre secções cônicas para obter preparo

matemático para o desafio que estava sendo posto. Neste contexto, ao implementar o algoritmo apresentado pela tabela 018 no *software Cabri Géomètre II*, o problema que se colocou diante de todos que estavam envolvidos na resolução do problema, permitiu enunciar uma conjectura que foi escrita como:

Conjectura – Se o ponto A é movido sobre c, então P forma um lugar geométrico que é uma elipse.

Tomando como base tal conjectura, o processo de resolução se iniciou a partir do momento em que os envolvidos apresentaram subsídios teóricos e práticos acerca de secções cônicas, considerando principalmente a elipse. Com base nos pressupostos adquiridos foi proposto por um dos participantes fazer a construção usando o gráfico cartesiano. de tal modo que pelo ponto B fossem feitos os ajustes de posicionamento via rotação da figura geométrica, onde o segmento OB seria coincidente com o eixo das ordenadas. Neste procedimento, os eixos poderiam corresponder ao diâmetro maior e menor da suposta elipse conforme a Figura 031 apresentada abaixo.

Após este ajuste, o problema foi achar os focos da suposta elipse, pois caso houvesse focos seria possível ter indícios de que a figura era uma elipse (pois no grupo havia a crença de que a figura era uma elipse).

O processo para explorar a existência dos focos demorou algum tempo, mas após dois dias foi descoberta uma relação entre os focos e a diagonal maior, que permitiu implementar os focos no computador através de uma equação que permitia conhecer os focos através dos dados já conhecidos.

Sabendo que a distância do segmento OP (cujo comprimento é metade do diâmetro maior), equivale a distância do ponto B até os focos de uma elipse regular. Foi possível dizer pelo Teorema de Pitágoras que: $d(OF) = [d(BF)^2 - d(OB)^2]^{(1/2)}$, sendo d(OF) a distância de um dos focos até a origem da circunferência c, deste modo, após achar a distância do segmento OF, se tornou possível achar os focos F1 e F2, e saber se os pontos do lugar geométrico correspondiam aos mesmos de modo que fosse possível testar a equação da elipse. Portanto após se solucionar o problema sobre o “como fazer” foi preciso implementar no computador, colocando um ponto Z sobre o lugar geométrico, e observando se a soma das distâncias dos segmentos ZF1 e ZF2 permaneciam constantes na equação $d(ZF1) + d(ZF2)$ para todos os pontos do lugar geométrico.

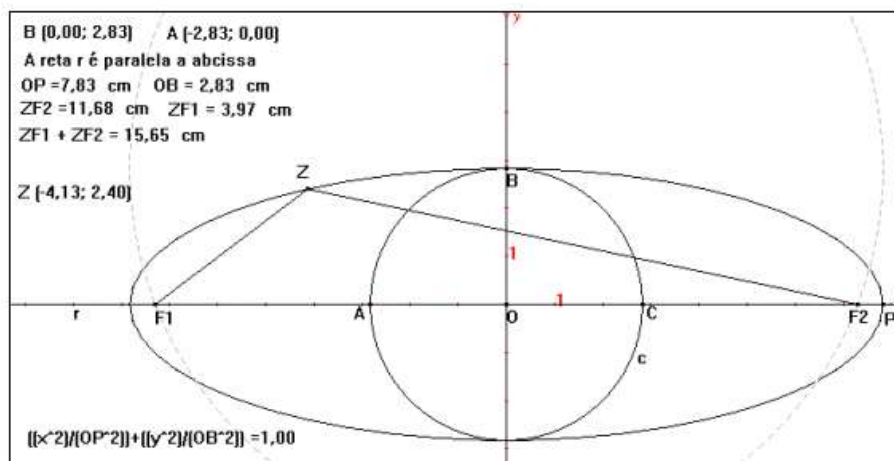


Figura 031 – Os focos F1 e F2 implementados da construção reestruturada.

Através da animação obtida por meio de $d(ZF1) + d(ZF2) = c$, pode ser observado a constância de c , mas ainda era necessário testar a equação da elipse que diz que $[(x^2)/(a^2)] + [(y^2)/(b^2)] = 1$, em que x e y são coordenadas do ponto $Z(x,y)$ tendo que $a = OP$ e $b = OB$.

Ao se testar tal equação que relaciona abscissas e ordenadas aos diâmetros da elipse, se observou que o resultado apresentado correspondia à teoria, e se imaginou que a questão havia sido respondida, mas ao manipular o ponto Z sobre o lugar geométrico, quando Z se aproximava das extremidades dos diâmetros da suposta elipse, foi observado que os segmentos $ZF1$ e $ZF2$ desapareciam rapidamente, e com base nisto se pensou em analisar um outro processo via soma de vetores.

Pela soma de vetores foi possível observar que adição dos vetores $v(AB)$ e $v(BC)$ resulta em:

$$v(AB) + v(BC) = v(AC)$$

De modo que foi possível comparar $v(AC)$ com $d(AC)$, sobrepondo o vetor $v(AC)$ sobre o segmento AC que é um subconjunto da reta r na construção.

Também foi testado no *Cabri Géomètre*, se era possível por meio dos comandos “Vetor” e “Soma de vetores”, construir o lugar geométrico de P , e se pode observar que eram procedimentos correlatos. No entanto, aconteceu que quando o ponto A foi manipulado os vetores se aproximam das diagonais fazendo com que a soma de vetores se anulem, pois a reta r , na construção é traçada a partir de dois pontos dados que são A e C , portanto quando A coincide com C não é possível obtenção da reta r , logo o lugar geométrico de P não deve existir quando a soma de vetores se anula.

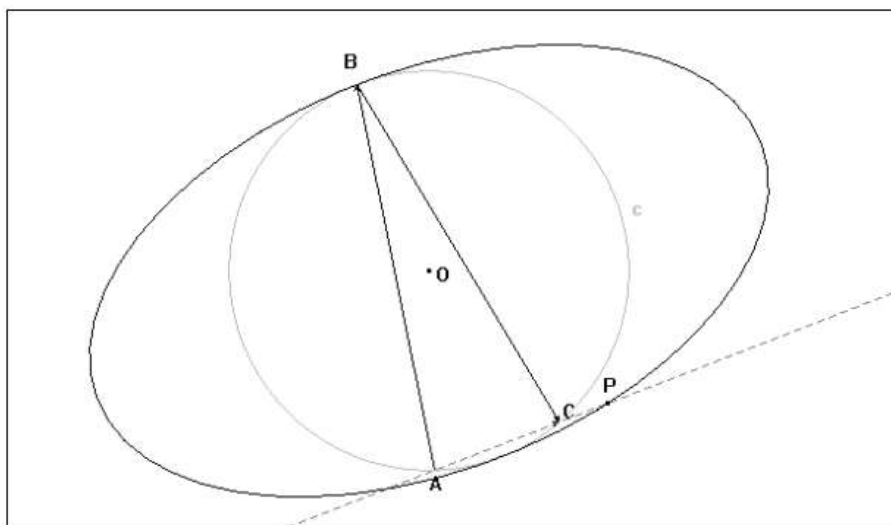


Figura 032 – À medida que o ponto A aproxima-se do ponto C, a soma $v(AB) + v(BC)$ tende a zero.

No entanto, mesmo ao usar os vetores do *Cabri Géomètre II*, o lugar geométrico de P não desapareceu mesmo que A seja coincidente com C. Com base em tais dados, se pode dizer que ocorreu um *bug* nesta construção.

Por outro lado, o lugar geométrico não pode ser uma elipse, pois um dos requisitos para o lugar geométrico ser uma elipse deve ser a continuidade da figura, fato que não ocorre na situação dada, visto que ao ocorrer vetores nulos não poderia existir a reta suporte de P, bem como, não pode ocorrer, em termos matemáticos, a continuidade do lugar geométrico, mesmo que o programa induza o contrário em termos gráficos. Informações adicionais sobre a situação 09, estão no anexo A (situação 09, p.160 – 161).

CAPÍTULO 7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na atividade matemática o uso do computador é cada vez mais freqüente na pesquisa científica e também em termos de ensino-aprendizagem de matemática. A passagem do Velho PC (papel-caneta) ao Novo PC (*Personal Computer*) é predominante na prática de muitos professores e estudantes. De tal modo que, o bom funcionamento de um algoritmo implementado, para muitos professores, seja suficiente na formação do indivíduo. Sendo assim, na passagem do Novo PC ao Velho PC por meio de demonstrações matemáticas, a proposta defendida neste trabalho permitiria considerar os seguintes aspectos:

- ✓ O processo de validação por demonstração, na passagem do Novo ao Velho PC, a partir de situações-surpresa, permitiria confrontação de problemas antigos sob uma nova perspectiva conceitual mediante as limitações matemáticas da ferramenta computacional como foi observado na situação 01;
- ✓ O desenvolvimento de atividades matemáticas com uso do computador pode ser considerado um processo que viabiliza o conhecer-na-ação, mas no contexto das situações-problema é pelo processo de validação por demonstração que se pode estabelecer a reflexão-na-ação, enquanto reconhecimento dos procedimentos adotados que permitiram o conhecimento de uma situação-surpresa. Este fato ocorreu nas situações 02, 05 e 09 principalmente;
- ✓ Pelo processo de validação por demonstração, na passagem do Novo ao Velho PC, seria possível exercer a reflexão-na-ação sobre os *softwares* matemáticos, considerando-se que a execução de um comando é o conhecer-na-ação implementado em forma de algoritmo. Neste sentido, a demonstração matemática permitiria observar as estruturas conceituais envolvidas nos comandos de um programa, bem como, suas falhas e seus limites como foi observado, por exemplo, nas situações 01, 05 e 09;

- ✓ A validação por demonstração está intrinsecamente relacionada à validação por verificação, entretanto, é pela demonstração que se conhece de fato as causas de uma situação surpresa;
- ✓ Pelo estudo teórico foi possível compreender o ato de demonstrar como a busca por evidências fundamentadas no saber matemático, e pela análise das situações surpresas são identificados tais processos, pois estas situações, surgem a partir da ruptura conceitual que tem origem na interação homem-*software*-máquina;
- ✓ Para ocorrer a passagem do Novo ao Velho PC a partir de situações surpresa em aula, deve ocorrer a negociação, enquanto um processo que permite refletir sobre a reflexão-na-ação, é a meta-reflexão que parte do professor enquanto gerador de situações e novos contextos em aula. Portanto, ao se menosprezar o que os estudantes têm a apresentar, se pode perder novas oportunidades didáticas, como ocorreu na situação 03.

A prova matemática no desenvolvimento da passagem do Novo ao Velho PC, corresponderia ao ensino prático-reflexivo que surge por meio de situações inusitadas que apresentam ao professor e/ou estudante um caráter de “surpresa” que instiga a investigação científica.

Além disto, o raciocínio crítico do estudante mediante a demonstração matemática deveria considerar que as abordagens dedutivistas e heurísticas são complementares, de modo que, os problemas dedutivos estruturam a micro-estrutura das demonstrações com respeito à validade dos enunciados de um sistema formal axiomático. Por outro lado, é pela visão heurística que se contempla a macro-estrutura e que se pode sair de um ponto de vista para outro através da intuição.

Portanto, se há heurística sem o dedutivismo, é possível se deixar levar pela elucubração e o diletantismo. Na ocorrência do dedutivismo sem a heurística, é possível que se perca o significado em função das normas de modo que a sintaxe acaba prevalecendo sobre a semântica. Deste modo, cabe o professor reflexivo propor novas concepções e idéias sobre um problema de demonstração, para que seja possível ao estudante ter uma visão complementar de tais perspectivas, de modo que lhe seja possível o estabelecimento de cadeias de razões que lhe permitam compreender o saber matemático integralmente.

Como possibilidade didática a passagem do Novo ao Velho PC, pode permitir o desenvolvimento de procedimentos heurísticos e dedutivos simultaneamente, como se pôde observar na situação 02. No entanto, ao professor cabe o processo de “ensinagem” na preparação de atividades que possam gerar novas posturas. Neste aspecto, o refinamento da capacidade negociadora do professor, e o desenvolvimento de uma nova postura frente os estudantes, é um exercício que requer confiança, mas ao mesmo tempo requer que o professor exercite o ato de não fazer, para que o aluno possa fazer em seu lugar. Neste aspecto o sucesso da situação 02 em relação à situação 03, não é somente uma atitude que envolve a negociação, está implícito neste processo “ensinagem” como o trabalho de planejamento de uma aula por parte do professor.

Quanto os tipos de limitação decorrentes das situações surpresa na passagem do Novo ao Velho PC, foi possível identificar nas investigações, três limitações que apresentam paradoxos conceituais. Tais situações correspondem aos seguintes itens:

Limitação 01 – Divergências conceituais em *software*: Quando dois ou mais programas abordam a mesma temática no ensino de matemática, podem existir funções correlatas que usam pressupostos teóricos matemáticos diferentes, de tal modo que seja possível obter resultados diferenciados em uma mesma seqüência de construção como ocorre na situação 06. Por outro lado, ocorrem divergências conceituais em *software*, quando o usuário ao tentar resolver um problema proposto, pode estruturar um esquema mental que lhe permita usar um ou mais comandos de um programa dado para um determinado fim, com outros objetivos, de modo que em certos casos seja possível solucionar um problema. Entretanto, pode ocorrer o afastamento do usuário, dos objetivos didáticos estabelecidos para o estudo como aconteceu na situação 03;

Limitação 02 – Erros de manipulação do usuário: São situações em que ocorre algum tipo de imperícia no manuseio de um comando que exige mais habilidades que outros comandos, como ocorreu na situação 02. Nos programas de geometria dinâmica, estes erros estão relacionados aos procedimentos de medição, assim como, em procedimentos de digitação;

Limitação 03 – Erros computacionais ou *bugs*: São situações decorrentes das limitações computacionais e/ou dos erros em procedimentos de programação, neste estudo foram identificados quatro categorias de *bugs*, que provavelmente estão mais relacionados aos *softwares* de geometria dinâmica que com os programas de manipulação simbólica, e estes são:

(a1) – Incompatibilidade de funções: São erros computacionais relacionados, as falhas em comandos de um determinado programa, como ocorreu nas situações 01 e 05. Tais situações podem ser analisadas mediante demonstração matemática, e geralmente apresentam uma contradição conceitual que resulta em um paradoxo;

(a2) – Limitação Numérica: São erros decorrentes das limitações computacionais no cálculo numérico, pois no computador e em quaisquer instrumentos computacionais, se trabalha com uma quantidade finita de números, e na matemática, de modo geral sempre se está pressupondo idéias sobre infinitude e continuidade, que em muitos casos não correspondem a representação computacional, como ocorre na situação 04 e 07;

(a3) – Restrição de Manipulação: São erros decorrentes da incompatibilidade de um comando enquanto o mesmo é manipulado, com respeito aos conceitos matemáticos, a restrição de uma reta a uma área de tela do computador, sendo que na sua manipulação está implícita a idéia de infinitude, é uma representação que não corresponde com a intuição matemática sobre reta, e é um caso que ocorre na situação 08.

(a4) – Limitação Gráfica: Ocorre quando a representação gráfica de uma situação, não corresponde de nenhum modo às construções do ponto de vista matemático. Nestas situações ocorre uma contradição entre a estrutura gráfica e as conclusões matemáticas, é o caso da situação 09.

Finalizando, se pode dizer que o uso cada vez mais freqüente de tecnologias computacionais, em diversos campos da atividade humana, pressupõe uma revolução em várias áreas do saber reconhecido e institucionalizado. Porém, um novo desafio consistiria em propor o uso dos recursos computacionais potencializando-os para a construção de novas concepções e reflexões no contexto sócio-cultural. Pois, se o computador for utilizado somente para fazer o que pode ser feito sem ele, seu potencial como recurso de ensino e pesquisa científica está sendo desconsiderado.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA REFERENCIAL

- 001 BALACHEFF, N. The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In: BISHOP, A. J. et al. (org). *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching*. London-England: Kluwer Academic, 1991. Cap.8, p.189; p. 175-192.
- 002 BARBOSA, J.L. *et al.* *Panorama dos recursos humanos em Matemática no Brasil: Premência de Crescer*. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 2001. p.14; p.24.
- 003 BARBOSA, João Lucas M.B. **Geometria euclidiana plana**. 4ª ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA-SBM, 1995. (Coleção do professor de matemática) p.106.
- 004 BORGES NETO, Hermínio. Uma classificação sobre a utilização do computador pela escola. Fortaleza: Educação em Debate, Ano 21, n.37.1999. p.135-138.
- 005 BOYER, Carl. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p.77-78; p.143-164.
- 006 CAMPOS, Márcia O. C. **Cabri Géomètre: Uma aventura epistemológica**. Fortaleza-CE: FACED/UFC, 1998. (Dissertação de mestrado). P.134-135.
- 007 CHANG, C. & LEE, R.C. **Symbolic logic and mechanical theorem proving**. New York: Academic Press, 1973. p.45;p.46-47;p.48;p.55.
- 008 COSTA, Newton C. A.. da. **Sistemas formais inconsistentes**. Curitiba-PR: Editora UFPR, 1993. (Clássicos; n.03), p. ix – x.
- 009 DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole**. São Paulo-SP: Atlas, 1986. p.47; p.56-58; p.62.
- 010 DAVIS. P & HERSH. D. **A experiência matemática**. Tradução: João Bosco Pitombeira. 3ª. ed. Rio de Janeiro-RJ: Francisco Alves, 1985. p. 178-180; p.384; p.423-430.
- 011 FERREIRA, A. B. DE H. **Minidicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 3ª. ed. – Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1993. p. 134.
- 012 FERRUZZI, Elaine C. Considerações sobre a linguagem LOGO. UFSC: Seminário apresentado no GEIAAM – Setembro 2001.
Disponível em: < <http://www.mtm.ufsc.br/~cleide/GEIAAM/consiLogo2.PDF> >
Acesso em: 29.dez.2001. p.4; p.6.
- 013 FOSSA, John A. **Técnicas de demonstração em Matemática**. Natal-RN:Clima, 1990. (Coleção Edições Clima Vol. 77). p.09-13; p.13; p.14-18; p.56.

- 014 GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre-RS: UFRGS/Pós-graduação em Informática na Educação, 2001. (Tese de doutorado), p.36; p.40; p.42-43; p. 82; p.88.
- 015 GUDWIN, Ricardo R. Linguagem de Programação. Disponível em: <http://www.eng.uerj.br/~araujo/Caract/ling_prog.pdf > Acesso em: 30.out.2001. p.4.
- 016 HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra – Volume 1**. Rio de Janeiro-RJ:IMPA, 1993. (Coleção Matemática Universitária). p. 42-43.
- 017 HENRIQUES, Afonso. **Ensino e aprendizagem da geometria métrica: Uma seqüência didática com auxílio do software Cabri Géomètre II**. Rio Claro-SP: IGCE/UNESP, 1999. (Dissertação de Mestrado) p.49.
- 018 HOFSTADTER, Douglas R. **Gödel, Escher, Bach: Um entrelaçamento de gênios brilhantes**. São Paulo-SP: Imprensa Oficial do Estado, 2001. p. 213.
- 019 LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações**. Tradução: Nathanael C. Caixeiro, Rio de Janeiro-RJ: Zahar, 1978. p. 15-16; p.17; p.25; p.188.
- 020 LÉVY, Pierre. **A máquina universo**. Tradução: Bruno Charles Magne. Porto Alegre-RS: ArtMed, 1998. p. 79–82; p. 104.
- 021 LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1995. p.20.
- 022 LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em Geometria: Comprimento, área, volume e semelhança**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991. p.1-4.
- 023 MACHADO, Nilson J. **Matemática e Realidade: Análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática**. 4ª ed. São Paulo-SP: Cortez, 1997. p.26-27; p.29; p. 30; p. 31-32; p.33; p.34; p.36.
- 024 MACHADO, Silvia D. **A. Educação Matemática: Uma introdução**. São Paulo-SP: EDUC, 1999. (Série trilhas). P.43-44; p. 198-199.
- 025 MEC/INEP. Censo Escolar 2001: Ceará – Alunos Matriculados. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/censo/Escolar/Matricula/censoescolar_2001.asp > Acesso em: 01 jan 2001.
- 026 O’CONNOR, John J. & ROBERTSON, E. MacTutor History of Mathematics: Wilhelm Schickard. Turnbull WWW Server/SMCS - University of St Andrews. St. Andrew - Scotland. Disponível em: <<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schickard.html>> Acesso em: 30.out.2001.
- 027 OLIVEIRA, Augusto F. **Lógica e Aritmética: Uma introdução informal aos métodos formais**. 2ª ed. Portugal – Lisboa: Gradiva, 1996. p.15-16; p. 54; p.213–216.
- 028 PASCAL, Blaise. **Pensamentos**. Tradução: Olívia Bauduh. São Paulo-SP: Nova Cultural, 1999. (Coleção Os Pensadores). p.5-9.
- 029 PENTEADO Miriam G. Novos atores, novos cenários: Discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M.A.V. (Org). **Pesquisa em educação matemática: Concepções & perspectivas**. São Paulo-SP:UNESP, 1999. (Seminários e Debates) p. 305.

- 030 PEREIRA, Tarcisio P. **Cálculo numérico computacional**. Sobral-CE: Edições UVA, 1999. p. 10.
- 031 POINCARÉ. Henri. **O valor da ciência**. Tradução: Maria H. F. Martins. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ: Contraponto, 1985. p. 13.
- 032 POLYA, George. **A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático**. Tradução: Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 1978. p. p.52; p.86; p.91; p.104; p.106; p. 124-125; p. 132-133.
- 033 RESENDE, Eliane Q. F. e QUEIROS, Maria L.B. de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas-SP: Editora UNICAMP – Imprensa Oficial, 2000. p. 191.
- 034 SANTANA, José Rogério & BORGES NETO, Hermínio. **A construção de um lugar geométrico que seja uma elipse, com uso do software Cabri-Géomètre. Será que é?** In: VI Encontro Nacional de Educação Matemática. São Leopoldo-RS: UNISINOS/SBEM, Anais , Vol.2, 1998. p. 723 – 725.
- 035 SANTOS, J. Plínio de O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, CNPq, 1998. (Coleção Matemática Universitária). p.1-2.
- 036 SANTOS, Mário F. dos. **Dicionário da filosofia e ciências culturais**. São Paulo-SP: Matese, 1963. p. 422; p.432; p.434.
- 037 SCHÖN, Donald A. **Educando o profissional reflexivo: Um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre-RS: Artes Médicas Sul, 2000. p.31. p.32-.33; p.37; p.99-100; p.109; p.101-110.
- 038 Secretária de Educação Básica/Ceará. **Tempo de aprender: Programa estadual de informatização das escolas públicas**. Fortaleza-CE: Governo do Estado do Ceará, 1997. Tomo I. (Anexo 6).
- 039 SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat: A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos**. Tradução: Jorge Luiz Calife. 7ª ed. Rio de Janeiro-RJ: Record, 2000. p. 64 – 74; p. 153; p.177-181; p. 293–295.
- 040 SOLOW, Daniel. **How to read and do proof: An introduction to mathematical thought process**. USA-New York City: John Wiley and Sons, 1982. p.8–18; p.52-56; p.50-58; p. 51-69; p.72-76.
- 041 SOUZA, Maria José A. **Informática educativa na educação matemática: Um estudo sobre a Geometria no ambiente do software Cabri-Géomètre**. Fortaleza-CE: FAGED/UFC, 2001. (Dissertação de Mestrado), p. 47; p.48; p.54; p.51-69; p.82; p.83-86; p.87-89; p.89-91.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- 042 BARBOSA, João Lucas M.B. **Geometria euclidiana plana**. 4ª ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA-SBM, 1995. (Coleção do professor de matemática).
- 043 EUCLIDES. **Elementos de Euclides**. Tradução: Frederico Commandino, Coimbra-Portugal: Imprensa da Universidade, 1855.
- 044 FILHO, Edgard de A. **Operações Binárias**. São Paulo-SP: Edgard Blücher, 1984.
- 045 GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 1999. (Projeto Euclides). p. 15.
- 046 LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 1992. (Coleção o professor de matemática).
- 047 MACHADO, Nilson J. **Matemática e língua materna: Análise de uma impregnação mútua**. São Paulo-SP: Cortez, 1990. p.36-39.
- 048 NEWTON, Isaac. **Princípios Matemáticos – Óptica – O peso e o equilíbrio dos fluidos**. Tradução: Carlos L. de Matos, Pablo R. Mariconda, Luiz Possas. São Paulo-SP: Nova Cultural, 1996. (Coleção os Pensadores). p. 17-19.
- 049 PLATÃO. **Timeu**. São Paulo-SP: Nova Cultural, 1987. (Coleção os Pensadores).
- 050 WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 2ª ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 1998. (Coleção o professor de matemática).

PROGRAMAS DE COMPUTADOR

- 051 FERNANDES, Hilaire. *Dr. Geo* version 0.60b. 1998.
- 052 GROTHMANN R. *Compasses and Ruler*. Version 1.9, Disquete 3 ½ Windows 95.
- 053 LABORNE, J.M. & BELLEMAIN, F. *Cabri Géomètre II*, version 1.0 MS Windows: Texas Instruments, 1998. Disquete 3 ½ Windows 95.
- 054 MICROSOFT, *NetMeeting* version 3.0: Microsoft Corporation, 1997, Conjunto de programas CD-ROM. Windows 95.
- 055 SANTANA, J.R.; BORGES NETO, H.; AMARAL, E. S. MENESES, I. A. *GeoMeios* versão piloto 1.0. Laboratório Multimeios-FACED/UFC, Applet em Java 2000.
- 056 SHERLOCK, Tomas W. *Mathematica Standard* Version 2.2. Wolfram Research, 1993. CD-ROM, Windows 3.1.
- 057 TEODORO, V. D. et al. *Modellus* versão 1.11. 1996. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova Lisboa, Disquete 3 ½ Windows 95.

ANEXO A

Das situações-surpresa

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA			
SITUAÇÃO 01	Mal entendidos em geometria dinâmica: Situação relativa às transformações isométricas no <i>Cabri-Géomètre II</i> .		
Data	Maio de 2001	Ocorrência averiguada no desenvolvimento de atividades no projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente Laboratório Multimeios – FACED/UFC.	
Contexto	Preparação de atividade sobre retas paralelas a partir do comando “Compasso” do software <i>Cabri-Géomètre II</i> .		
Software (s)	<i>Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</i>	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
Coleta de Dados	Arquivo do software <i>Cabri-Géomètre II for Windows</i> , protocolo de atividades.	Quantidade de Pessoas	05 pessoas
Figura S1-01 – Apresentação da Atividade: Construir uma reta paralela s , à reta r , pelo ponto P .			

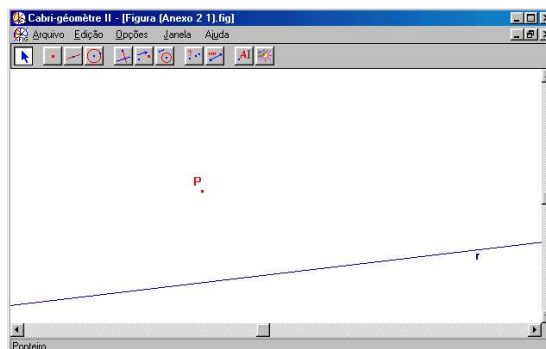


Figura S1- 02 - Construção Geométrica usando comandos compasso e reta perpendicular do Cabri.

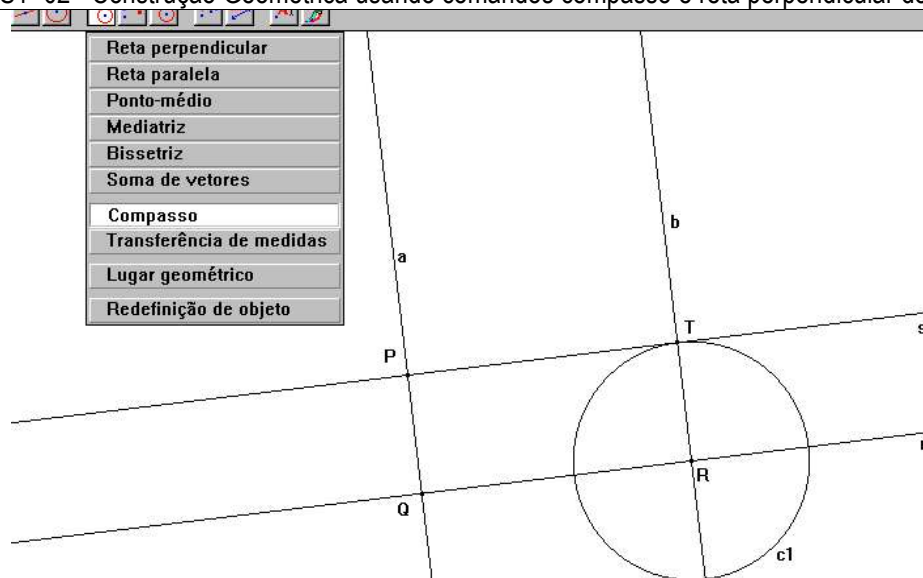
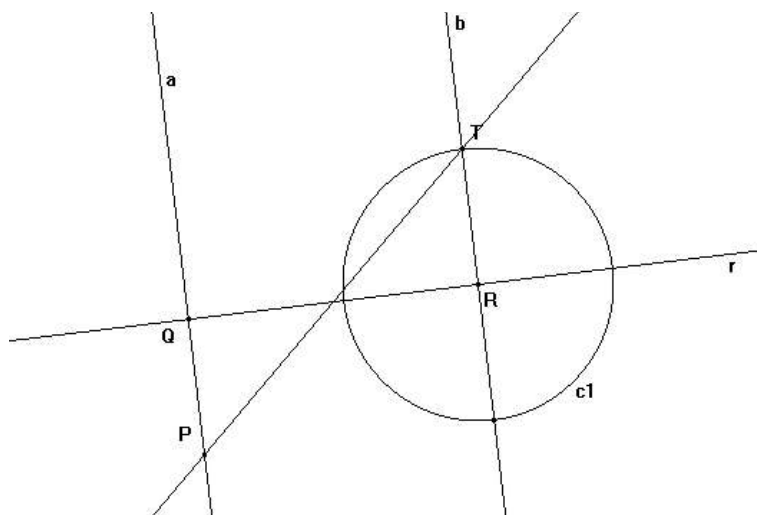


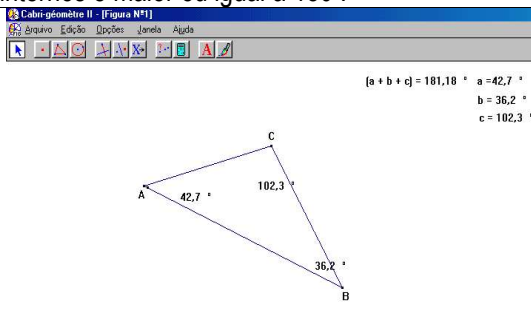
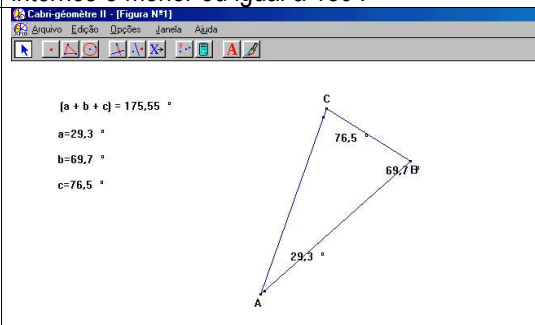
Figura S1-03- Manipulação da construção e a situação apresentada em semiplanos opostos.

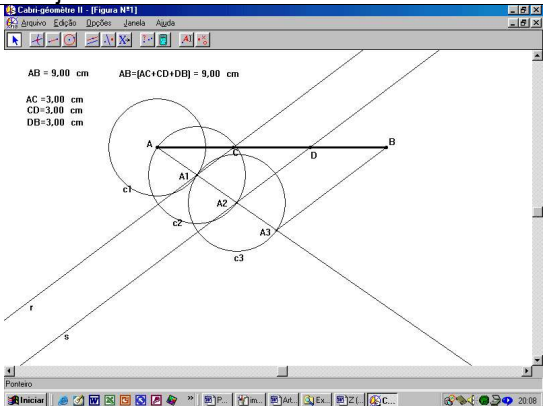
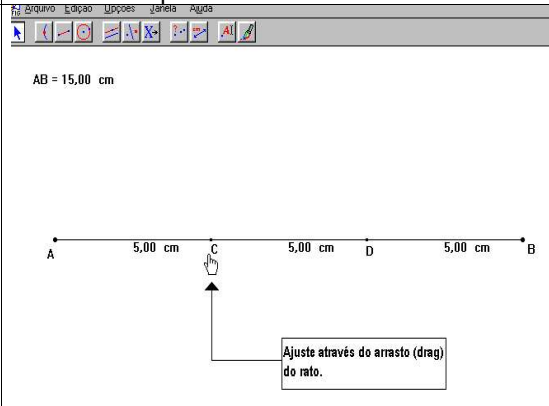


Algoritmo

Passos	Ações realizadas
Dados do Problema	É apresentado ao abrir o arquivo a reta r e o ponto P , não pertencente a reta r .
01	Traçar uma reta a pelo ponto P que seja perpendicular à reta r , usando comando "Reta Perpendicular".
02	Marcar Q como ponto de intersecção entre as retas a e r .
03	Marcar R como um ponto pertencente à reta r que não seja coincidente com Q .
04	Traçar uma reta b pelo ponto R que seja perpendicular à reta r , usando comando "Reta Perpendicular".
05	Usando comando "Compasso" transferir a medida do segmento PQ para R .
06	Nomear como $c1$ a circunferência com centro em R , e medida PQ obtida pelo comando "Compasso".
07	Marcar T como um dos pontos de intersecção entre $c1$ e b , considerando que T deve estar no mesmo semiplano de P conforme a figura 023.
08	Traçar uma reta s que passe pelos pontos P e T .

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA

SITUAÇÃO 02				A soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180° graus.	
Data	01 a 04 de Agosto de 2000	Ocorrência apresentada em um curso de formação de professores de matemática do Ensino Médio, sobre o uso de novas tecnologias na didática da matemática no NTE/CREDE 12 em Quixadá-CE.			
Contexto	Desenvolvimento de uma atividade no software <i>Cabri Géomètre II</i> sobre a medição da soma dos ângulos internos de um triângulo ABC.				
Software (s)	<i>Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</i>	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos		
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain		
Coleta de Dados	Arquivo do <i>software</i> Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados de observação no diário de campo.	Quantidade de Pessoas	23 pessoas		
Figura S2-01 – Situação 01: A soma dos ângulos internos é maior ou igual a 180° .		Figura S2-02 – Situação 02: A soma dos ângulos internos é menor ou igual a 180° .			
					
Algoritmo					
Passos	Ações realizadas				
01	Construir triângulo ABC qualquer, ou por meio do comando de construção “Triângulo” que exige 3 <i>clicks</i> . Ou construir o triângulo ABC com o comando “Segmento de Reta”.				
02	Medir o ângulo do vértice A, através de um dos seguintes processos: Processo 01: (1) Dar o primeiro <i>click</i> em B; (2) Dar o segundo <i>click</i> em A; (3) Dar o terceiro <i>click</i> em C. Processo 02: (1) Dar o primeiro <i>click</i> em C; (2) Dar o segundo <i>click</i> em A; (3) Dar o terceiro <i>click</i> em B. O que importa é que o ângulo que deve ser medido, neste caso o ângulo do vértice A, deve sempre corresponder ao segundo <i>click</i> , ou o <i>click</i> intermediário.				
03	Medir o ângulo do vértice B, através de um dos seguintes processos: Processo 01: (1) Dar o primeiro <i>click</i> em A; (2) Dar o segundo <i>click</i> em B; (3) Dar o terceiro <i>click</i> em C. Processo 02: (1) Dar o primeiro <i>click</i> em C; (2) Dar o segundo <i>click</i> em B; (3) Dar o terceiro <i>click</i> em A.				
04	Medir o ângulo do vértice C, através de um dos seguintes processos: Processo 01: (1) Dar o primeiro <i>click</i> em A; (2) Dar o segundo <i>click</i> em C; (3) Dar o terceiro <i>click</i> em B. Processo 02: (1) Dar o primeiro <i>click</i> em B; (2) Dar o segundo <i>click</i> em C; (3) Dar o terceiro <i>click</i> em A.				
05	Usando comando “Calculadora”, selecione através dos <i>clicks</i> , os três resultados numéricos correspondentes aos ângulos medidos, formando a expressão: $(a + b + c)$, após ter feito isso aperte o botão com símbolo “=” para obter o resultado, e arraste o resultado para a zona-de-desenho do <i>Cabri-Géomètre</i> .				
06	Manipular e mover cada um dos três ângulos pela zona-de-desenho.				
OBS: Os resultados destas medições podem resultar em: $(a+b+c)=180,00^\circ$; $(a+b+c)\geq 180,00^\circ$; $(a+b+c)\leq 180,00^\circ$					

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA			
SITUAÇÃO 03		O caso do segmento elástico na divisão de um segmento em partes iguais.	
Data	24/Maio/2000	Ocorrência apresentada na oitava sessão do curso piloto de construções geométricas do projeto Tele-Cabri/Tele-Ambiente, realizado entre Abril e Julho de 2000 no Laboratório Multimeios FACED/UFC.	
Contexto	Desenvolvimento de uma atividade no software <i>Cabri Géomètre II</i> sobre a divisão de um segmento de reta AB em três partes iguais com base no teorema de Talles.		
Software (s)	<i>Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</i>	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
	<i>The Geometer's SketchPad for Windows Version 1.10</i>	Instituição	Key Curriculum Press
		Autor(es)	Nicholas Jackwin (EUA)
	<i>Compasses and Ruler Version 1.9</i>	Autor(es)	Copyright René Grothmann (EUA)
	<i>Dr GEO version 0.60b</i>	Autor(es)	Copyright Hilaire Fernandes
Coleta de Dados	Arquivo do software Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados de observação gravado em vídeo e transcrito em texto.	Quantidade de Pessoas	11 pessoas
Figura S3-01 – Situação 01: A construção que se desejava obter.		Figura S3-02 – Situação 02: A construção desenvolvida pela aluna.	
			
Algoritmo			
Passos	Ações realizadas		
01	Construir um segmento de reta AB.		
02	Usando comando “ponto sobre objeto”, marcar dois pontos no o segmento AB, não permitindo que os mesmos coincidam entre si, e coincidam com os pontos A e B.		
03	Nomear estes pontos respectivamente como C e D		
04	Usando o comando “Distância e Comprimento”, medir o segmento AB.		
05	Usando o rato, arraste o ponto A ou B, até que se obtenha um segmento que seja múltiplo de três.		
06	Usando comando “Distância e Comprimento”, medir os segmentos AC, CD e DB, formados pela marcação dos pontos C e D.		
07	Ajustar os pontos C e D pelo arrasto do rato até que se obtenha AC=5 cm, CD=5 cm e DB=5 cm.		

PROCEDIMENTOS DE EM FILMAGEM: CURSO PILOTO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS OITAVA SESSÃO REALIZADA EM 24 DE MAIO DE 2000.



Figura S3-03 – Momento da apresentação da situação surpresa por parte da Aluna 2 ao interagir com a Aluna 3.

(a) Como foram organizadas as filmagens transcritas

O processo de coleta de dados no Projeto Piloto consiste em organizar as transcrições de filmagem em unidades de análise de texto que são subdivididas em:

- a) Tempo da fita VCR (00h00min00seg ou 00:00:00): Trata-se da marcação temporal do tempo de filmagem, não é necessariamente o tempo de cada sessão mas permite ter uma noção deste. Com tal marcação se busca fazer corresponder áudio e vídeo com partes do texto transcrito;
- b) [Aud] : Corresponde à acústica na fita de vídeo e sua finalidade é descrever os diálogos, bem como apresentar de modo resumido algumas das explicações apresentadas por professores e monitores;
- c) [Vid] : Corresponde com as imagens observadas na fita de vídeo e seu objetivo é permitir ao telespectador observar ações, e momentos de interação que posteriormente podem ser descritos com o *ScreenCam*;
- d) [Com] : São comentários do observador que expressam hipóteses e conclusões que devem ser discutidas diante da equipe de pesquisadores, e/ou confirmadas com os alunos por meio de entrevistas.

Após a transcrição de tais atividades o texto resultante e suas unidades de análise foram gravadas no formato de texto para computador (TXT), e estes foram incorporados para análise por meio do software Q.S.R. *NUD*IST*, onde é possível desenvolver categorias de análise que podem expressar trechos da transcrição.

(b) Trecho transcrito de filmagem: O caso do segmento elástico na divisão de um segmento em partes iguais (24 / 05 / 2001) – Sessão 08 < 8:00 até 10:00 horas >

1h43m53s (trecho inicial da fita)

[Aud] Professor: Agora sobre a outra atividade que vocês tão desenvolvendo agora, atividade de divisão de segmento. qual a dificuldade que vocês estão percebendo agora ?

Aluna1: Dividir o segmento em três partes iguais.

Professor: A dificuldade tua é dividir em três partes, tem mais alguém fazendo essa atividade ?

Aluna 2 levanta a mão.

Professor: Qual a dificuldade ? A mesma ?

Aluna 3: A mesma..

Aluna 1: Consigo dividir 4 e 8 sempre 2, 4, 8...

Aluna 2: Acabei de fazer dividido por três...

Professor: Conseguiu ?

Aluna 1: Como foi que tu fez ?

Aluna 2: Eu fiz com que a reta tivesse um número ímpar, o comprimento tinha que ser um número ímpar, aliais, um número que dá prá dividir por 3

Aluna 3: Ai ?

Aluna 2: Eu botei, o comprimento dela 15 e dividi por três e ficou 5 num segmento, 5 no outro e 5 no outro.

Aluna 3: Mas como foi que tu colocou 5, 5 e 5 ?

Aluna 2: Arrastando os pontinhos.

Aluna 3: Ah, ah eu também, só que eu botei o primeiro, depois botei o ponto médio...

Professor: Então vamos continuar trabalhando nesta atividade...

[Vid] Professor pergunta aos alunos sobre o andamento da atividade sobre divisão de segmento em partes iguais, a Aluna 1 coloca suas dificuldades, depois a Aluna 3 levanta as mãos falando sobre suas dificuldades também, já a Aluna 2 explica como fez para fazer a divisão de segmento em três partes iguais. E a Aluna 3 pede explicações sobre o como a Aluna 2 fez a atividade.

[Com] Na fala da Aluna 2 percebemos que ela usa de um artifício simples, faz com que o segmento meça um número que dividido por 3 dê como resultado três medidas inteiras, daí ao arrastar o mouse, a Aluna 2 fez três segmentos de medida $n/3$ (se consideramos que o segmento mede n), bem se ao movimentar o segmento as medidas mantiverem sua proporcionalidade, temos que a Aluna 2 encontrou uma solução pelas características do software, afinal foi possível chegar a uma solução sem elaborar uma construção geométrica propriamente, ou seja, o raciocínio usado para solucionar o problema é mais de característica lógica que propriamente matemática. Por outro lado, a interação entre a Aluna 1, Aluna 3 e Aluna 2, ocorreu devido as dificuldades que a situação colocou diante das alunas, ou seja, quando se têm um problema que exige mais dos alunos eles tendem a se unir para solucionar tal problema. Também se pode dizer que o fato do Professor não ter aproveitado o problema proposto pela Aluna 2 é uma falha de argumentação por parte do professor, pois em alguns casos é muito comum ignorar a forma pela qual os alunos resolvem seus problemas, ou seja, era necessária uma mediação para que tal problema transparecesse diante de todos os alunos.

(c) Trecho de atividade apresentada em 24 / 05 / 2001 – Sessão 08
< 8:00 até 10:00 horas >



Considere um segmento AB .




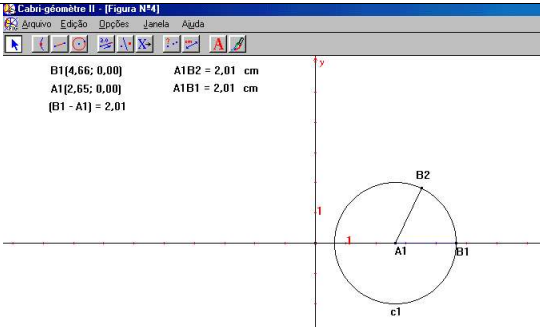
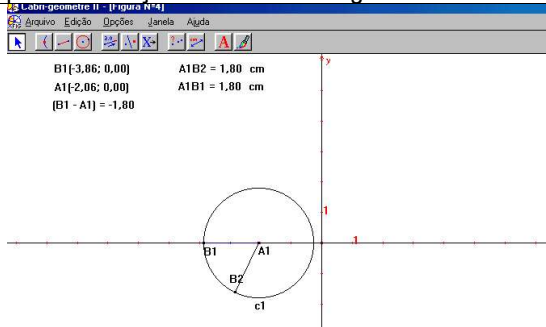
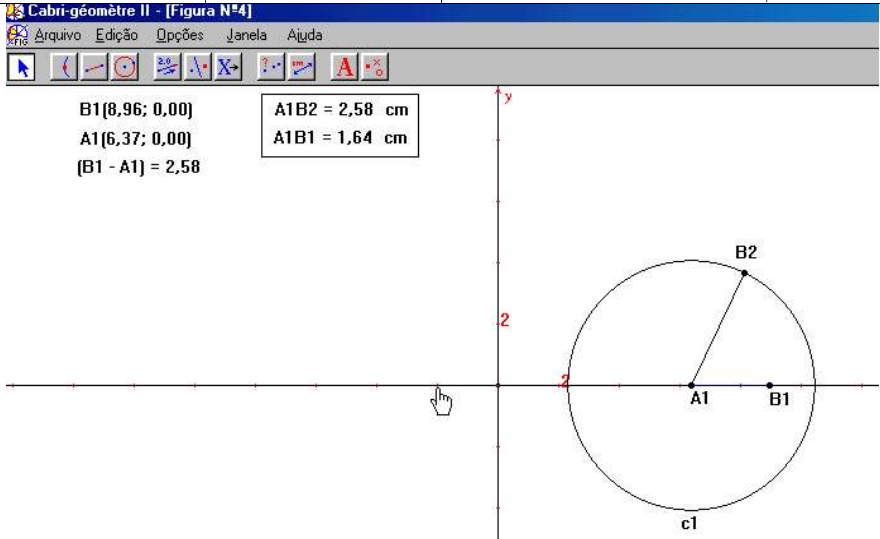
1. Divida o segmento em duas partes iguais.
2. Divida o segmento em três partes iguais.
3. Divida o segmento em cinco partes iguais.
4. Divida o segmento em seis partes iguais.



5. O que garante que os segmentos divididos têm a mesma medida?
Que conhecimentos de geometria você usou para fazer a atividade?

Figura S3-04 – Atividade desenvolvida por Aluna 1, Aluna 2 e Aluna 3.

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA			
SITUAÇÃO 04	Uma reta é infinita quando há um <i>looping</i> .		
Data	Maio de 1999	Contexto	
Ocorrência apresentada em uma manipulação exploratória dos comandos do Cabri Géomètre no Laboratório Multimeios FACED/UFC.			
Software (s)	Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
Coleta de Dados	Arquivo do <i>software</i> Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades.	Quantidade de Pessoas	1 pessoas
<u>Figura S4-01 – Usando recurso de animação no Cabri Géomètre II.</u>			
<p>Após soltar o botão do rato, a "molinha" do comando "Animação" ou do "Animação Múltipla" se contrai e o ponto P se move da esquerda para a direita, mas ao chegar no final da zona-de-desenho reparece a esquerda mantendo a mesma direção e só termina de executar com intervenção do usuário.</p> <p>Esquerda -----> Direita</p>  <p>Usando o comando "Animação" ou "Animação Múltipla", o estudante seleciona o ponto P e puxa a "molinha" do programa, em direção oposta ao movimento desejado.</p>			
Algoritmo			
Passos	Ações realizadas		
01	Construir uma reta r na zona-de-desenho do Cabri-Géomètre II.		
02	Marcar um ponto sobre a reta r, nomeando-o como P.		
03	Usando comando "Animação" ou "Animação Múltipla" sobre o ponto P, de modo que o mesmo se desloque em uma direção observando os acontecimentos.		

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA			
SITUAÇÃO 05		A soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180° graus.	
Data	05 de Dezembro de 2001	Situação baseada em ocorrência enviada ao fórum de discussão sobre o <i>Cabri Géomètre II</i> na França, apresentado por Genevieve Tulloue, e remetido à este trabalho por Hermínio Borges Neto. <cabri-forum@imag.fr>	
Contexto	Estudo sobre situações em software educativo para ensino de matemática, que em termos potenciais pode remeter à uma situação surpresa em atividade didática.		
Software (s)	<i>Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</i>	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
Coleta de Dados	Arquivo do <i>software</i> Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados obtidos através de correio eletrônico.	Quantidade de Pessoas	1 pessoas
Figura S5-01 – Construção inicialmente proposta.		Figura S5-02 – Manipulação dos pontos A1 e B1 para verificação com inteiros negativos.	
			
			
Figura S5-03 – Modificação na escala torna as medidas de A1B1 e A1B2 diferentes.			
Algoritmo			

Passos	Ações realizadas
01	Acionar o comando “Mostrar Eixos” para exibição de eixos cartesianos.
02	Marcar um ponto sobre o eixo das abcissas nomeando-o como A1.
03	Marcar outro ponto sobre o eixo das abcissas que não seja coincidente a A1, nomeando-o como B1.
04	Usando comando “Equações e Coordenadas”, exibir as coordenadas de A1 e B1.
05	Traçar um segmento pelos pontos A1 e B1.
06	Usando comando “Calculadora” obter $(B1 - A1)$ através das coordenadas destes pontos, e arraste o resultado sobre a zona-de-desenho.
07	Pelo comando “Transferência de Medidas”, selecione o resultado de $(B1 - A1)$ que está na zona-de-desenho, expresso em termos numéricos, e selecione o ponto A1, de modo que o ponto resultante da transferência não pertença ao eixo cartesiano, e nomeie este ponto como B2.
08	Trace um segmento pelos pontos A1 e B2.
09	Meça os segmentos A1B1 e A1B2 pelo comando “Distância e Comprimento”.
10	Construir uma circunferência c1 com centro em A1 e raio B2.
11	Movimente os pontos A1 e B1 pelo plano e verifique os valores métricos dos segmentos A1B1 e A1B2.
12	Modifique a escala do eixo das abcissas, arrastando a marca de unidade da escala, e observe se A1B1 e A1B2 possuem os mesmos valores métricos, ou se são segmentos congruentes.

Correio Eletrônico de Tulloue enviado por Hermínio Borges

De: Hermínio Borges Neto
 Data: terça-feira, 4 de dezembro de 2001 07:12
 Para: José Rogério Santana
 Assunto: Fw: d(AB) pás égal à abs(A) – abs(B).

----- Original Message -----

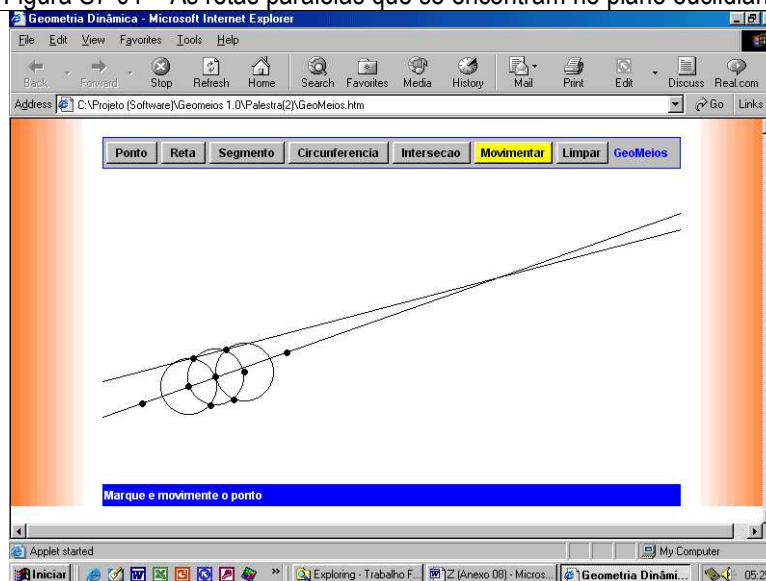
From: "Genevieve Tulloue" <gtulloue@ac-grenoble.fr>
 To: <cabri-forum@imag.fr>
 Sent: Tuesday, December 04, 2001 4:46 AM
 Subject: Re: d(AB) pas égal à abs(A) - abs(B).

>>> Question : comment reporte t - on une abscisse (résultat de la
 >>> calculatrice) et non une mesure de distance ?
 >>> et inversement.
 >>> Quelque soit le repère choisi.
 >
 > Le "report de mesure" sur une demi-droite, un cercle, un vecteur ou un
 point
 > reporte un nombre de cm égal à la mesure, que celle-ci soit en cm, en
 radians ou
 > en rien du tout.
 > Le report de mesure sur un axe reporte une abscisse, quelle que soit
 l'unité de
 > cette mesure (même en cm^2 !).
 > Une autre méthode consiste à faire une homothétie du vecteur de base (ou
 de son
 > extrémité) en prenant comme rapport cette mesure. Elle perd alors son
 unité.
 >
 > Geneviève Tulloue
 >
 > PS Il me semble que d(AB) n'est égal que la moitié du temps à abs(A) - abs
 (B) !
 >
 >

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA			
SITUAÇÃO 06		O caso do segmento elástico na divisão de um segmento em partes iguais.	
Data	Maio de 1999	Situação obtida a partir da comparação de um algoritmo em dois programas diferentes no Laboratório Multimeios FACED/UFC.	
Contexto	Experimento desenvolvido para averiguar se uma mesma atividade era correspondente em dois <i>softwares</i> de geometria dinâmica com propostas semelhantes.		
Software (s)	<i>Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</i>	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
	<i>Dr GEO version 0.60b</i>	Autor(es)	Copyright Hilaire Fernandes
Coleta de Dados	Arquivo dos <i>softwares Cabri-Géomètre II for Windows e Dr. Geo version 0.60b.</i>	Quantidade de Pessoas	1 pessoa
Figura S6-01 – A implementação do mesmo algoritmo dois resultados distintos.			
Algoritmo implementado no <i>Cabri Géomètre II.</i>		Algoritmo implementado no <i>Dr. Geo.</i>	
Algoritmo			
Passos	Ações realizadas		
01	Construir uma circunferência <i>c</i> com centro no ponto <i>O</i> e raio arbitrário.		
02	Marcar um ponto <i>Y</i> sobre a circunferência <i>c</i> .		
03	Traçar uma reta <i>r</i> pelo ponto <i>Y</i> .		
04	Traçar uma reta <i>s</i> perpendicular a reta <i>r</i> pelo ponto <i>O</i> .		
05	Marcar <i>X</i> como o ponto de intersecção entre <i>r</i> e <i>s</i> .		
06	Encontrar o ponto médio do segmento <i>XY</i> nomeando-o como <i>M</i> .		
07	Construir o lugar geométrico de <i>M</i> quando <i>Y</i> é movimentado sobre <i>c</i> .		

SITUAÇÃO 07 Quando retas paralelas se encontram no plano euclidiano.			
Data	Agosto de 2001	Contexto	
Desenvolvimento de software de geometria dinâmica no Laboratório Multimeios/FACED/UFC			
Software (s)	GeoMeios em Java versão piloto 0.1	Instituição	Universidade Federal do Ceará Faculdade de Educação.
		Autor(es)	José Rogério Santana, Hermínio Borges Neto, Eduardo Silva Amaral, Izabel A. Meneses.
Coleta de Dados	Registro de observação e experimento e código fonte.	Quantidade de Pessoas	2 pessoas

Figura S7-01 – As retas paralelas que se encontram no plano euclidiano.



Algoritmo

Passos	Ações realizadas
01	Traçar uma reta r a partir de dois pontos.
02	Colocar um ponto P sobre a reta r .
03	Construa uma circunferência c_1 com centro em P e raio arbitrário.
04	Marcar Q como ponto de intersecção entre r e c_1 .
05	Construir uma circunferência c_2 com centro em Q e raio QP .
06	Marcar R como ponto de intersecção entre r e c_2 .
07	Construir uma circunferência c_3 com centro em R e raio RQ .
08	Marcar S como ponto de intersecção entre c_1 e c_2 .
09	Marcar T como ponto de intersecção entre c_2 e c_3 , no mesmo semiplano de S .
10	Traçar uma reta z pelos pontos S e T .

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA

SITUAÇÃO 08		Manipulação de reta restrita à zona-de-desenho.	
Data	Agosto de 2001	Contexto	
Desenvolvimento de software de geometria dinâmica no Laboratório Multimeios/FACED/UFC			
Software (s)	GeoMeios em Java versão piloto 0.1	Instituição	Universidade Federal do Ceará Faculdade de Educação.
		Autor(es)	José Rogério Santana, Hermínio Borges Neto, Eduardo Silva Amaral, Izabel A. Meneses.
Coleta de Dados	Registro de observação do experimento e código fonte.	Quantidade de Pessoas	1 pessoas
Figura S8-01 – Uma restrição na manipulação da reta e a ruptura intuitiva			
Algoritmo			
Passos	Ações realizadas		
01	Usando comando "Reta" do GeoMeios, trace uma reta.		
02	Selecione e arraste um dos pontos da reta, até sair da zona-de-desenho.		
03	Movimente o rato de modo que o mesmo não esteja na zona-de-desenho.		
04	Retorne a zona-de-desenho em outra posição, observando o que ocorre a reta que estava sendo manipulada.		

Segundo VELHO & GOMES (2001: p. 16–17), as estações gráficas interativas são o tipo mais comum de sistema gráfico. E um sistema gráfico padrão pode ser compreendido como uma estrutura que incorpora ao menos um dispositivo de entrada de dados vetoriais (rato e/ou teclado), um processador de uso geral com memória e um dispositivo de saída matricial (monitor de vídeo e/ou impressora), esquematicamente se obtêm:

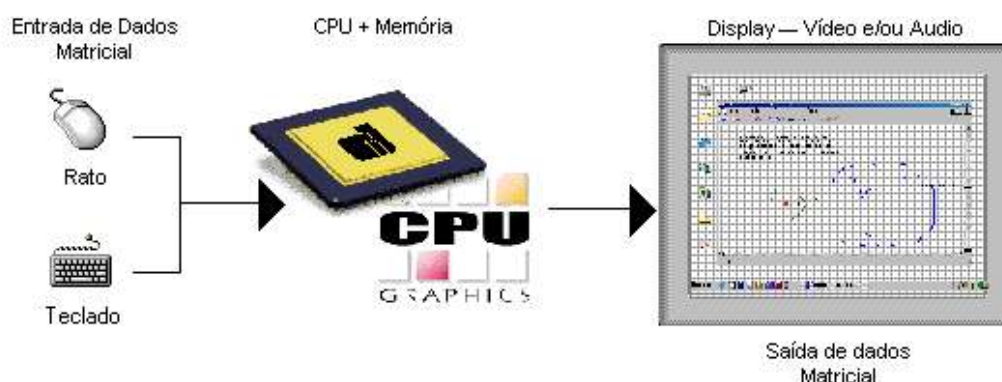


Figura S8-02 – Estação gráfica interativa segundo VELHO & GOMES.

Na atualidade, o com o desenvolvimento de sistemas de janela que é um sub-sistema gráfico que controla uma estação gráfica interativa, é possível ter a visão de uma “mesa de trabalho” com múltiplos aplicativos abertos de modo que em cada janela há um processo computacional em separado. Deste modo, basta usar teclas de atalho ou o arrasto (*drag*) e um *click* em uma determinada área do vídeo para alterar a ação de processamento que se deseja executar em um dado momento (*desktop*). No caso da situação 08, o que se deseja que o GeoMeios faça, é executar uma determinada ação (o arrasto da reta) fora da área de janela do programa.

Além disto, no GeoMeios há um problema a mais, na linguagem de programação *Java*. Um programa feito em *Java* é conhecido como mini-aplicativo ou *applet*, pois o *Java* funciona como uma máquina virtual, em que se executa um programa que está em um servidor em qualquer parte do mundo através de navegadores como *Netscape* ou *Internet Explorer*. Ocorre que a máquina virtual do *Java* é uma camada de programação que funciona sobre o sistema operacional, mas não acessa o sistema de arquivos dos sistemas operacionais, e o sistema gráfico de janelas está incorporado aos sistemas operacionais.

Portanto, uma ação simples como movimentar uma reta com o rato na área correspondente à uma saída de dados matricial de vídeo, é um desafio em termos de programação, pois no *Java* um mini-aplicativo está restrito ao “*display* de uma máquina-virtual”, e não há uma janela de um sistema de janelas há que seja possível recorrer a princípio, afinal a maioria dos programas em *Java* foram projetados para funcionar dentro da área de trabalho de um mini-aplicativo. Por outro lado, uma versão em *Java* do *Ruler and Compasses* solucionou este problema, fato que mostra que há possibilidades em se efetuar o mesmo.

VELHO & GOMES (2001: p. 17- 18) também destacam que transformações na visualização de um objeto gráfico planar em uma janela nos sistemas de coordenadas do objeto (“*world coordinate system*”, WC) devem ser mapeados em uma moldura (“*viewport*”) definida no espaço de exibição de um dispositivo de saída de dados matriciais. E para aumentar a independência do dispositivo se utiliza um sistema de coordenadas normalizadas (“*normalized device coordinates*”, NDC), que é um sistema definido por um retângulo cuja medida é $[0,1] \times [0,1]$. Portanto é necessário definir o *viewport* em coordenadas normalizadas e é nesta moldura que é mapeado uma janela que representa o espaço dos objetos. Este processo de mapeamento é conhecido como transformação de visualização em 2D³¹.

Portanto, se a janela é definida pelas coordenadas (xmin, ymin) que representam os valores mínimos e por (xmax, ymax) que representam os valores máximos, e a *viewport* é definida em coordenadas (rmax, smax) (rmax, smax) a transformação de visualização é dada por:

$$r = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}(x - x_{\min}) + r_{\min}$$

$$s = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}(y - y_{\min}) + s_{\min}$$

Não se deve esquecer que a transformação apresentada está sendo colocada com respeito à uma janela, entretanto, o *Java* é uma plataforma que deve sofrer uma transformação de visualização para janela, depois para o NDC até chegar as estruturas básicas de vídeo.

IDENTIFICAÇÃO DE SITUAÇÃO SURPRESA		
SITUAÇÃO 09	A conjectura da elipse a partir do Novo PC	
Data	Maio de 1998	Esta situação ocorreu em uma situação experimental de manipulação em que o software <i>Cabri Géomètre II</i> estava sendo explorado.

³¹ VELHO, L. & GOMES, J. *Sistemas gráficos 3D*. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2001. (Série de Computação e Matemática). p. 16-18.

Contexto	Desenvolvimento de material didático para construções geométricas com uso do <i>Cabri Géomètre II</i> no Laboratório Multimeios FACED/UFC.		
Software (s)	<i>Cabri Géomètre II for Microsoft Windows Version 1.0</i>	Instituição	Univerdade Joseph Forrier & Texas Instrumentos
		Autor(es)	Jean Marie Laborde & Franck Bellamain
Coleta de Dados	Arquivo do <i>software</i> Cabri-Géomètre II for Windows, protocolo de atividades. E dados obtidos através de correio eletrônico.	Quantidade de Pessoas	5 pessoas

Figura S9-01 – A construção: O lugar geométrico P apresentado é uma elipse?

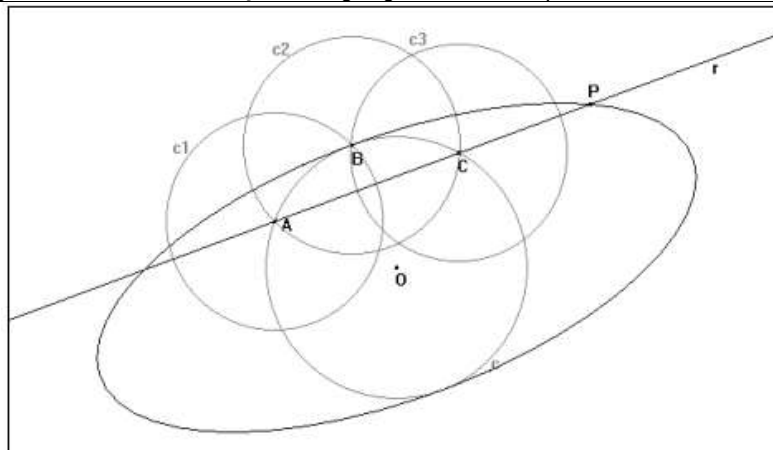
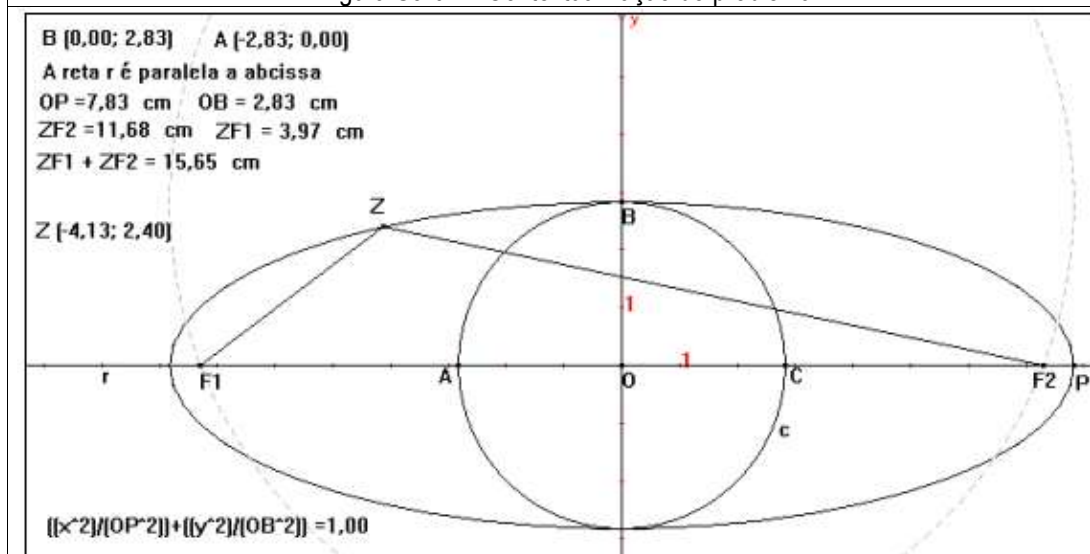


Figura S9-02 – Contextualização do problema



Algoritmo

Passos	Ações realizadas
01	Construir uma circunferência c com centro no ponto O ;
02	Marcar um ponto A sobre a circunferência c ;

03	Construir uma circunferência c_1 com centro no ponto A, de modo que c_1 seja menor que c ;
04	Marcar um ponto B em uma das intersecções entre c e c_1 ;
05	Construir uma circunferência c_2 com centro em B e raio AB;
06	Marcar C ponto de intersecção entre c e c_2 ;
07	Construir uma circunferência c_3 com centro em C e raio BC;
08	Traçar uma reta r pelos pontos A e C;
09	Marcar P um ponto sobre a reta r ;
10	Usando o comando "Lugar Geométrico" do Cabri Géomètre II, construir o lugar geométrico do ponto P quando o ponto A é deslocado sobre a circunferência c .

ANEXO B

ANEXO B1: LISTAGEM DOS MATERIAIS USADOS NA PESQUISA

Quanto os materiais usados na pesquisa o local de trabalho para desenvolvimento da maioria dos procedimentos metodológicos foi o Laboratório Multimeios FAGED/UFC que dispõe de:

- 17 Computadores;
- 02 Impressoras;
- 01 Filmadora;
- 01 Telão com TV Colder.

E os *software* utilizados para a pesquisa são:

- *Cabri Géomètre II for Windows*
- *Dr Geo*
- *Compasses and Ruler*
- *WinGeo*
- *Mathematica 2.2*
- *MatLab 3.0*

Já os materiais usados no procedimento metodológico 2 foi o Laboratório de Informática do CREDE 12/NTE Quixadá-CE que dispõe de:

- 13 computadores
- 02 Impressoras
- 01 Televisão 20" com TV Colder

E os *software* utilizados para o curso foram:

- *Cabri Géomètre II for Windows*
- *Dr Geo*
- *WinGeo*
- *Modellus*
- *NetMeeting 2.0*
- *Microsoft Excel 97*
- Jogos Educativos (sem procedência)

